Решение задач

Суннатилла Ибрагимов

Май 2025

Задача 1

В данной задаче можем отсортировать отрезки по правому концу. Далее берем правый конец первого отрезка как первую точку. Пропускаем все отрезки, которые содержат эту точку, повторяем процесс для оставшихся отрезков.
Временная сложность O(nlogn).
Ответ для входных данных из файла: 18

Задача 2

Чтобы найти минимальную подпоследовательность, содержащую все 26 символов латинского алфавита, воспользуемя скользящим окном. Ведём массив частот freq[27] и счётчик unique_letters. Расширяем правую границу окна, пока не соберём все 26 букв. Затем сужаем левую границу, чтобы минимизировать длину окна. Обновляем минимум.
Временная сложность: O(n) — каждый указатель двигается максимум n раз.
Ответ для входных данных из файла 55.

Задача 3

Дано рекуррентное соотношение:

$$f(n) = 5 \cdot f(n-1) + f(n-2)$$

Известно: $f(0) = 1$, $f(1) = 3$. В массив A сохраняются только **нечётные** значения последовательности $f(n)$. Требуется найти $A[39]$, то есть 40-й нечётный член $f(n)$.

Рассчитаем первые члены последовательности $f(n)$ и отметим их чётность:

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1 \quad \text{(нечётное)}\\
&f(1) = 3 \quad \text{(нечётное)}\\
&f(2) = 5 \cdot 3 + 1 = 16 \quad \text{(чётное)}\\
&f(3) = 5 \cdot 16 + 3 = 83 \quad \text{(нечётное)}\\
&f(4) = 5 \cdot 83 + 16 = 431 \quad \text{(нечётное)}\\
&f(5) = 5 \cdot 431 + 83 = 2238 \quad \text{(чётное)}\\
&f(6) = 5 \cdot 2238 + 431 = 11621 \quad \text{(нечётное)}\\
&\quad \ldots
\end{aligned}$$

Видим, что нечётные значения стоят на позициях: $0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \ldots$, то есть на позициях j, где j mod 3 = 1 или j mod 3 = 0.

Индексы в массиве A:

$$\begin{aligned} A[0] &= f(0) \\ A[1] &= f(1) \\ A[2] &= f(3) \\ A[3] &= f(4) \\ A[4] &= f(6) \\ A[5] &= f(7) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Формула: $A[k] = f\left(\left\lfloor \frac{3k}{2} \right\rfloor\right)$
Для $k = 39$: $A[39] = f(58)$

Как вычислить $f(58)$?

Матричное представление:

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} f(1) \\ f(0) \end{bmatrix}$$

Для расчёта $f(58)$ нужно возвести матрицу в степень 57. Из-за больших значений пришлось использовать длинную арифметику, иначе произойдёт переполнение типов вроде даже если использовать uint64_t, которые в свою очередь использует арифметику остатков для обработки переполнений .
Временная сложность: O($n^2 logn$)
Ответ: A[39] то есть 40-й элемент массива A = 184153577162052268122747461393215875186211

Задача 4

Рассмотрим, какими могут быть числа n в диапазоне от 1 до 10^{30}. Определим поведение функций $f(n)$ и $g(n) = \frac{f(f(n))}{n}$.

Случай 1: Числа без нулей в конце

Пусть n состоит из цифр $a_1 ... a_n$, т.е выглядит как: n = $a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n$, где n $\in (1, 10^{30})$.
Тогда f(n) = $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1$, f(f(n)) = $a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n$.
Следовательно $g(n) = \frac{f(f(n))}{n} = \frac{a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n}{a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n} = 1$

Случай 2: Числа, оканчивающиеся на k нулей

Пусть:

$$n = m \cdot 10^k, \quad \text{где } m \text{ не оканчивается на 0, где n} \in (1, 10^{30}).$$

Тогда:

$f(n) = f(m)$ (так как обратный порядок перенесёт нули в начало и они будут удалены)

$$f(f(n)) = f(f(m)) = m \quad \text{(так как } f(f(m)) = m \text{ для любого } m \text{без нулей на конце)}$$

Следовательно: $g(n) = \frac{f(f(n))}{n} = \frac{m}{m \cdot 10^k} = \frac{1}{10^k} = 10^{-k}$ Так как n такого что $1 < n < 10^{30}$ то k принимает значения от 1 до 29. Следовательно в этом случае имеет что g(n) принимает 29 различных значений вида 10^{-k}

Следовательно количество различных значений для $g(n)$:

- 1 значение: $g(n) = 1$ (для любых чисел которые не заканчиваются нулем или нулями)
- 29 значений: $g(n) = 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-29}$ (для чисел с 1–29 нулями в конце)

Ответ:

Всего различных значений $g(n)$ при $1 < n < 10^{30}$:

$$1 + 29 = \boxed{30}$$