模 式 搜 索 方 法

Pattern Search Method

社科李达0903班 李旭彪

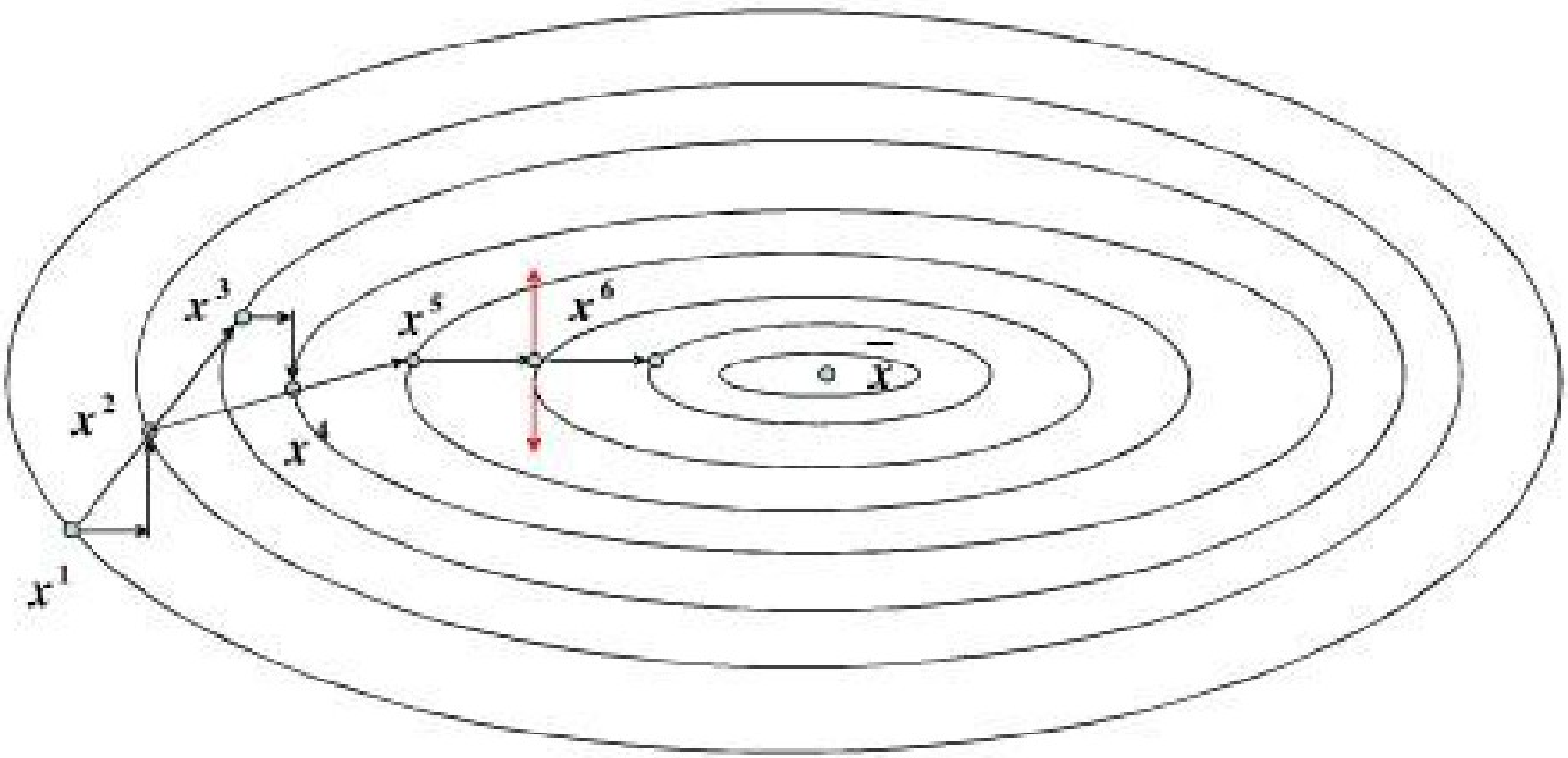
指导老师： 彭豪

直接搜索算法(简称为直接法)在迭代过程中要利用函数值信息，适用于变量较少、目标函数结构比较复杂或梯度不易计算的情形。常见的直接法有坐标轮换法射、模式搜索算法、Nelder-．Mead单纯形调优算法

- 模式搜索法是一种解决最优化问题的直接方法，在计算时不需要目标函数的导数，所以在解决不可导的函数或者求导异常麻烦的函数的优化问题时非常有效。

寻找某个曲面的最低点，或者形象的说，相当于从一座山岭的某处出发，设法走到附近某一盆地的最低点。

如果能找到一条山谷，沿山谷而行是最好的方法。


x^1
x^2
x^3
x^4
x^5
x^6
$\bar{x}$

模式搜索法是对当前搜索点按固定模式和步长探索移动(exploratory moves)，以寻求可行下降方向(非最速下降方向)的直接搜索法．迭代过程只要找到相对于当前点的改善点，则步长递增，并从该点开始进入下一次迭代；否则步长递减，在当前点继续搜索．

基本思想：算法从初始基点开始，交替实施两种搜索：轴向搜索和模式搜索。轴向 搜索依次沿n个坐标轴的方向进行，用来确定新的基点和有利于函数值下降的方向。模式搜索则沿着相邻两个基点的连线方向进行，试图使函 数值下降更快。

无约束最优化问题的直接方法

无约束最优化问题

$$\min \quad f(x);$$

直接方法：不用计算导数，只需计 算函数值的方法。

Compass Search

令 $e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$，$j=1,2,\cdots,n$ 表示n个坐标轴方向。

给定初始步长 δ，加速因子 α。任取初始点 x^1作为第一个基点。

以下用x^j表示第j个基点。

e_j扰动向量

探索移动+模式移动

在每一轮轴向搜索中，用y^i表示沿第i个坐标轴e_i方向搜索时的出发点。

轴向搜索：

令$y^1 = x^1$。

沿e_1方向搜索：

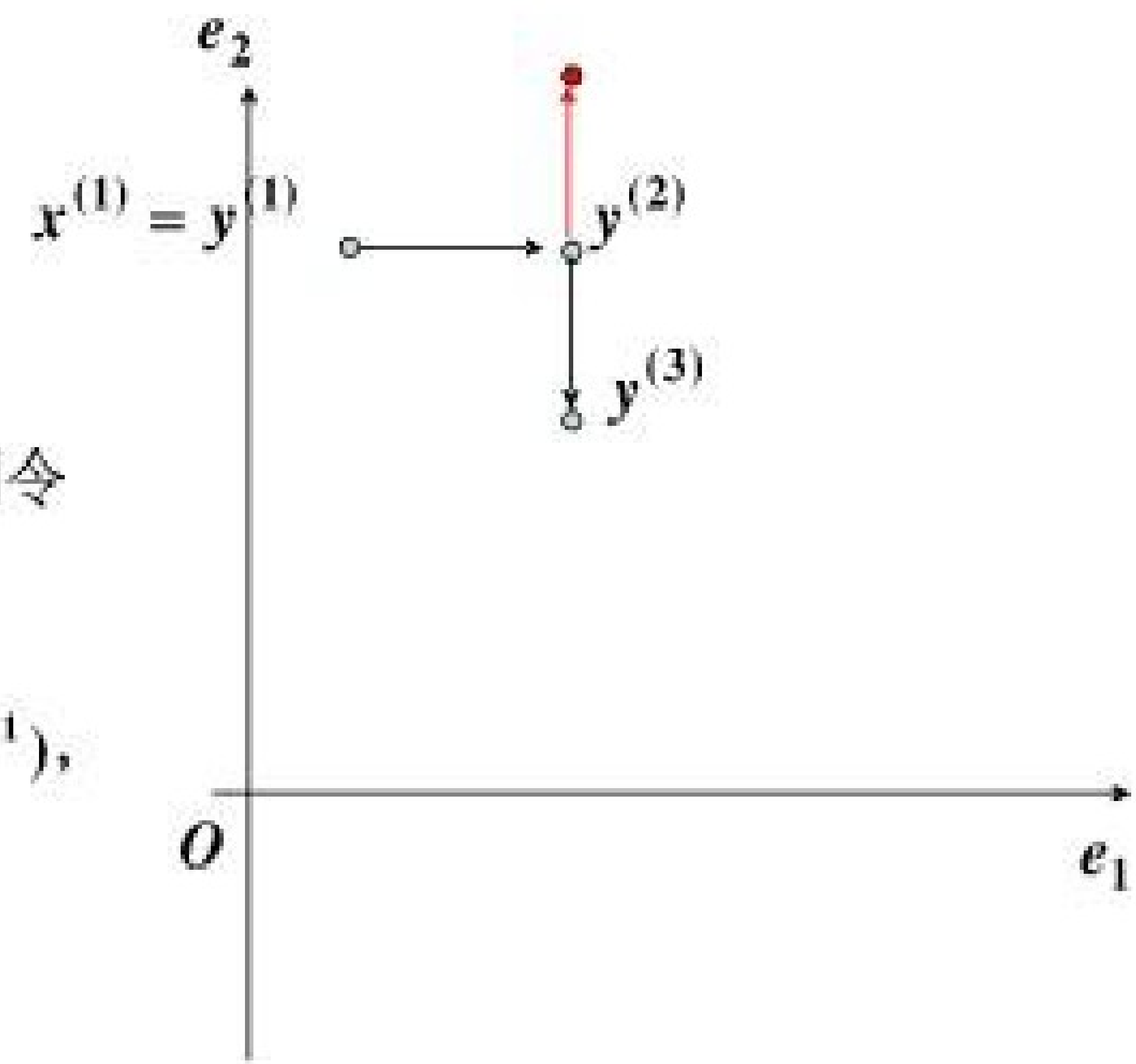
如果$f(y^1+\delta e_1)<f(y^1)$，则令

$y^2 = y^1+\delta e_1$；

否则，如果$f(y^1-\delta e_1)<f(y^1)$，

则令$y^2 = y^1-\delta e_1$；

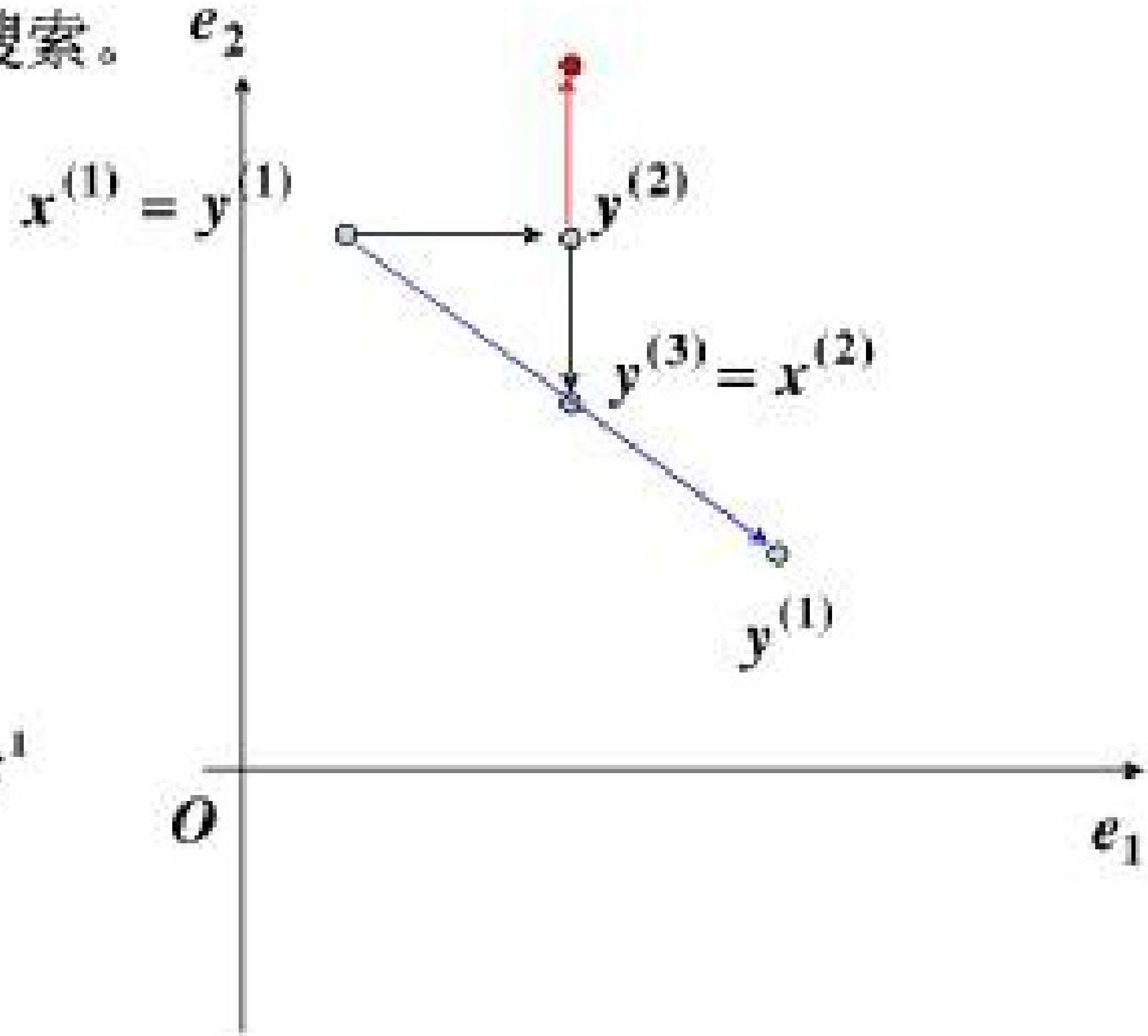
否则，令$y^2 = y^1$。



再从y^2出发，仿上沿e_2进行搜索得到y^3，

依次进行搜索，直到得到点 y^{n+1}。$f(y^{n+1})$ 指标偏离函数值

如果 $f(y^{n+1}) \geq f(x^1)$，则缩小步长 δ，仍以 x^1 为起点进行新的轴向搜索。否则，进行模式搜索。



模式搜索：

如果 $f(y^{n+1}) < f(x^1)$，

则令 $x^2 = y^{n+1}$。

$x^2 - x^1$ 方向可能有利于函数值下降，因此下一步沿 $x^2 - x^1$ 方向进行模式搜索。

即令 $\quad y^1 = x^2 + \alpha(x^2 - x^1)$。

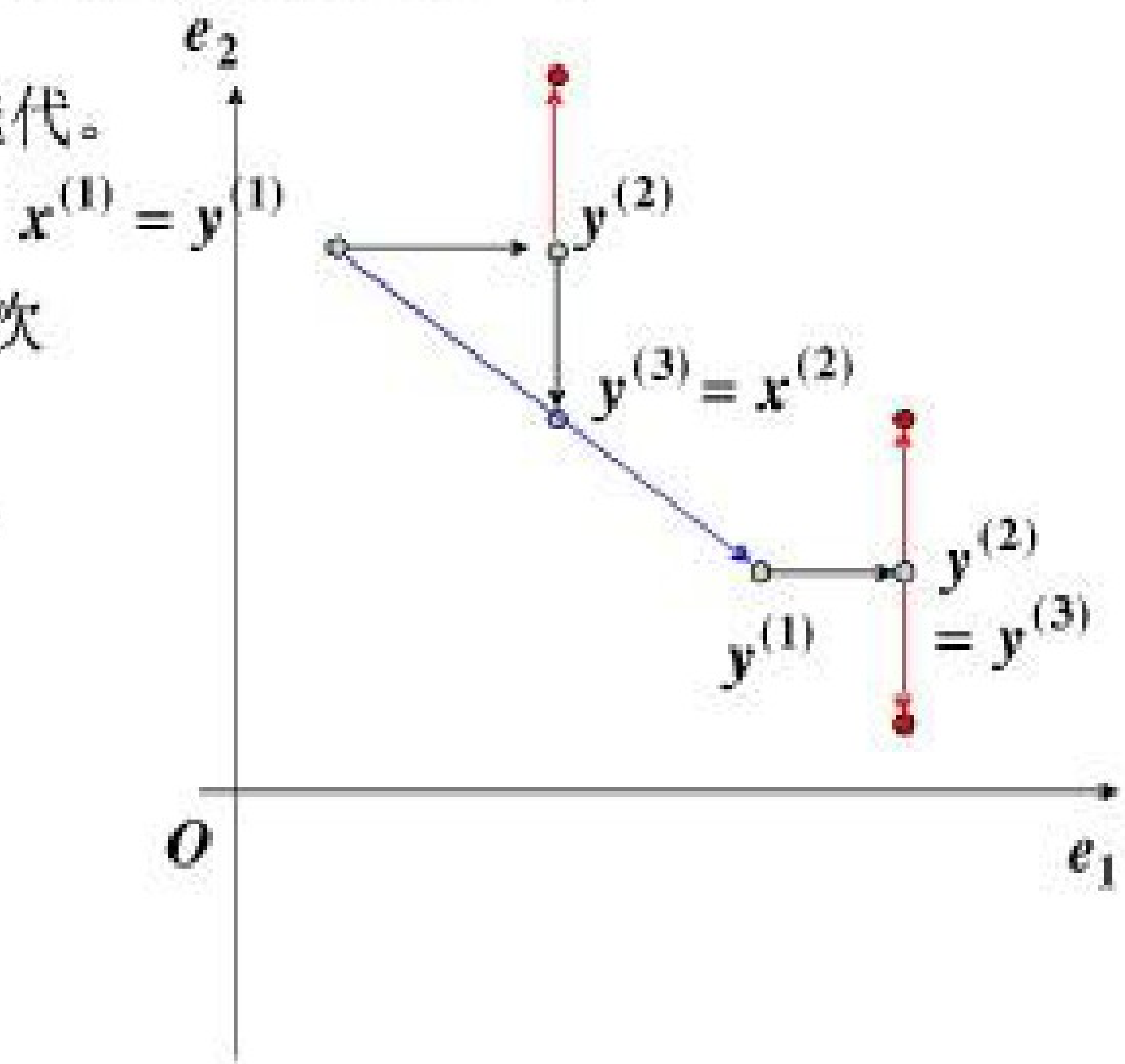
如何判断模式搜索是否有效?

以 y^1 为起点进行下一轮轴向搜索，所得的点仍记为 y^{n+1}。

如果 $f(y^{n+1})<f(x^2)$,表明此次模式搜索成功，令

$x^3=y^{n+1}$。 仿上继续进行迭代。

如果 $f(y^{n+1})\ge f(x^2)$,表明此次模式搜索失败，返回基 点 x^2，进行下一轮轴向搜索。



模式搜索算法

(1) 给定初始点 $x^1 \in R^n$，初始步长 δ，加速因子 $\alpha \ge 1$，缩减率 $\beta \in (0,1)$，精度 $\varepsilon > 0$。 令 $y^1 = x^1, k = 1, j = 1$。

(2) 轴向搜索：

如果 $f(y^j + \delta e_j) < f(y^j)$，则令 $y^{j+1} = y^j + \delta e_j$，转(3)；

如果 $f(y^j - \delta e_j) < f(y^j)$，则令 $y^{j+1} = y^j - \delta e_j$，转(3)；

否则，令 $y^{j+1} = y^j$。

(3) 若 $j < n$，则令 $j := j + 1$，转(2)。

如果 $f(y^{n+1}) < f(x^k)$，转(4)；否则，转(5)。

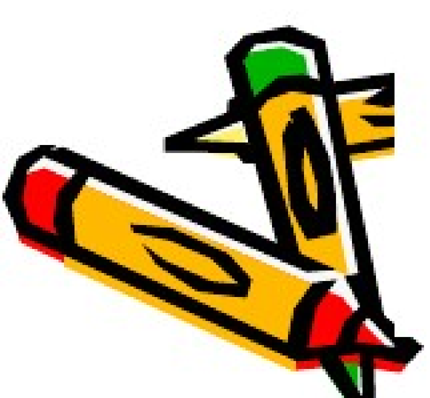
(4) 模式搜索：令 $x^{k+1} = y^{n+1}, y^1 = x^{k+1} + \alpha(x^{k+1} - x^k)$。

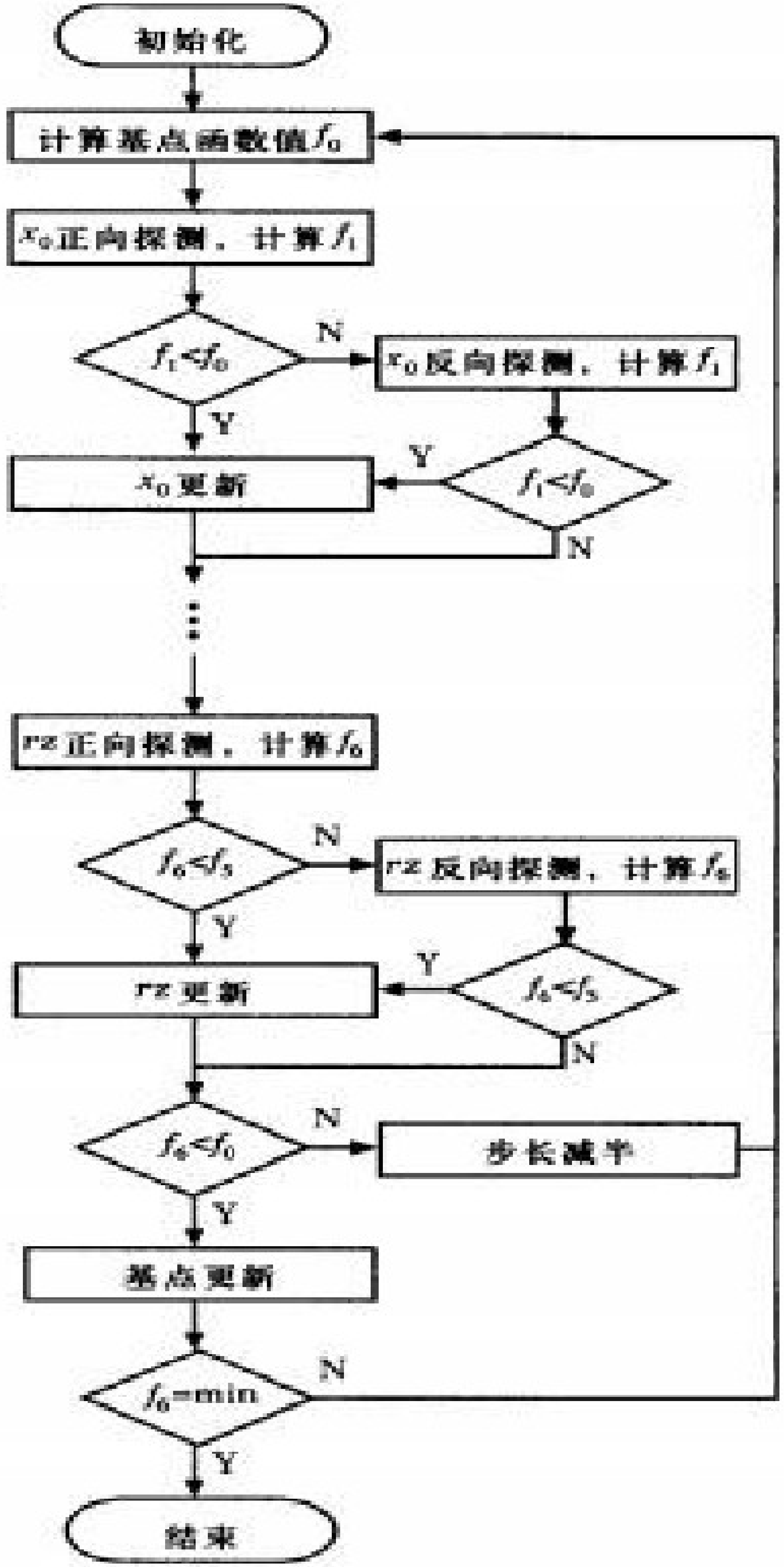
令 $k := k + 1, j = 1$，转（2）。

(5) 如果 $\delta \le \varepsilon$，停止，得到点 $x^{(k)}$；否则，令 $\delta := \beta\delta$，

$y^1 = x^k, x^{k+1} = x^k$。

令 $k := k + 1, j = 1$，转（2）。




初始化
计算基点函数值f_0
x_0正向探测，计算f_1
$f_1<f_0$
N
Y
x_0反向探测，计算f_1
$f_1<f_0$
Y
N
x_0更新
rz正向探测，计算f_6
$f_6<f_5$
N
Y
rz反向探测，计算f_6
$f_6<f_5$
Y
N
rz更新
$f_6<f_0$
N
Y
步长减半
基点更新
f_6=min
N
Y
结束

$$\min_x f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2,\ x = (x_1, x_2).$$

选定初始点为 $x_0 = (0, 0)$，网格尺寸为 $\lambda = 1$，由于决策变量数为2，所以模式为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.

下面搜索初始点周围的网格，计算：

$$f(x_0) = f(0,0) = 170,$$
$$f(x_0+\lambda v_1) = f(1,0) = 136,$$
$$f(x_0+\lambda v_2) = f(0,1) = 136,$$
$$f(x_0+\lambda v_3) = f(-1,0) = 164,$$
$$f(x_0+\lambda v_4) = f(0,-1) = 180.$$

比较可知，点(1，0)和(0，1)处的目标函数值较初始点小，所以选择其中一点（如点(1，0)）作为当前点，且网格尺寸乘以2（因为找到了使目标函数值得到改善的新点，称为一次成功选举），即有 $x_0 = (1,0)$，$\lambda = 2$，进入下一步迭代. 计算：

$$f(x_0) = f(1,0) = 136,$$

$$f(x_0 + \lambda v_1) = f(3,0) = 20,$$

$$f(x_0 + \lambda v_2) = f(1,2) = 68,$$

$$f(x_0 + \lambda v_3) = f(-1,0) = 164,$$

$$f(x_0 + \lambda v_4) = f(1,-2) = 148.$$

同样，找到了使目标函数值得到改善的新点，当前点为 $x_0 = (3,0)$，网格尺寸为 $\lambda = 4$，进入下一步迭代.

$$f(x_0)=f(3,0)=20,$$

$$f(x_0+\lambda v_1)=f(7,0)=1444,$$

$$f(x_0+\lambda v_2)=f(3,4)=148,$$

$$f(x_0+\lambda v_3)=f(-1,0)=164,$$

$$f(x_0+\lambda v_4)=f(3,-4)=180.$$

比较可知，网格中没有使目标函数值得到改善的新点(称为不成功选举). 当前点保持不变. 网格尺寸减半，即 $x_0=(3,0)$，$\lambda=2$，进人下一步迭代. 如此进行下去，直到满足停止条件.

搜索的停止条件有 4 个，只要满足其中任意一个，则搜索终止：

（1）网格尺寸足够小；

（2）迭代次数达到规定值；

（3）一次成功选举所找到的点与下一次成功选举所找到的点之间的距离小于规定值；

（4）从一次成功选举到下一次成功选举的目标函数的改变小于规定值。

模式搜索的发展

Hooke-Jeeves（霍克和乔维斯）在1961年提出了原始的模式搜索算法，1997年由Torczon将其加以推 广，引入模式矩阵的概念(包括基本矩阵和生成矩阵)，提出了GPS算法，并证明了它关 于无约束最优化问题的收敛性。1999年，Lewis和Torczon结合正基的性质将GPS算法推广到盒式约束的情形，进而于2000年推广到有限个线性约束的情形，证明了由这种算法产生的迭代收敛到问题的稳定点。这种推广主要是要求模式矩阵必须包括可行域边界附近任意可行点处切锥的生成元。2001年，Audet和Dcnnis结合过滤的步长接受标准分析研究GPS算法关于求解广义的混合变量优化问题，并由Mark Aaron Abramson于2002年 将其推广到一般非线性混合变量的优化问题，得到了一系列的收敛性证明。近年来，模 式搜索算法与其他方法相结合，一定程度上克服了其在接近稳定点时不成功的迭代增加 从而使搜索进程变慢的缺陷。例如，在模式搜索中引入单纯形导数，根据它的信息对搜 索方向进行编号；利用拟牛顿法中近似计算的Hessian阵作为模式搜索算法中的一组方向集，以及蚁群算法在模式搜索中的应用等。

模式搜索的应用

- 基于模式搜索的导弹目标分配方法研究
- 重力式抗滑挡墙最优截面的模式搜索法
- 基于模式搜索算法的电力系统机组组合问题