22-23学年秋季学期2021级数学强基班“数学分析”
期中考试试题参考答案(2022.11.05)

1. (15分) 已知幂级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$从某项开始系数是周期的。证明：在某个非退化的区间上，它与某个有理函数相重合。并请说明逆命题是否成立。

◀　设$a_i = a_{i+r}, \forall i \geq s$, 记

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{s-1} x^{s-1}; \quad q(x) = a_s + a_{s+1} x + \cdots + a_{s+r-1} x^{r-1},$$

那么当$|x| < 1$时，

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = p(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} q(x) x^{js} = p(x) + \frac{x^s q(x)}{1 - x^s}.$$

另一方面，若$q(x) \neq 0$, 当$|x| > 1$时，级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$显然发散。所以说，在某个非退化的区间上，级数的和与某个有理函数相重合。很明显，有理函数$f(x) = \frac{1}{x}$不可能表示成这种形式，所以逆命题不成立。　▶

2. (15分) 证明：函数项级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k x^k (1-x)$在$[0,1]$上一致收敛，也绝对收敛，但不绝对一致收敛。

◀　(i) 当$x \in [0,1]$时，

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} (-1)^k x^k (1-x) \right| = \left| \frac{(-x)^{n+1} - (-x)^{n+m+1}}{1 - (-x)} (1-x) \right|$$

$$\leq \frac{x^{n+1} + x^{n+m+1}}{1+x} (1-x) \leq 2x^{n+1}(1-x) = \frac{2}{n+1} \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n+1} [(n+1)(1-x)]$$

$$\leq \frac{2}{n+1} \left(\frac{x + \cdots + x + (n+1)(1-x)}{n+2} \right)^{n+2} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+2} \leq \frac{2}{n+1},$$

所以级数在$[0,1]$上一致收敛。

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left| (-1)^k x^k (1-x) \right| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x^k (1-x)$的部分和$S_n(x) = x - x^{n+1}$在$[0,1]$上

处处收敛，此即$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k x^k(1-x)$在$[0,1]$上绝对收敛。

(iii) 由上述讨论知，$\forall x\in[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=x$, 而$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(1)=0$, 可见极限函数不连续，肯定不是一致收敛的。 ▶

3. (15分) 研究函数项级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ke^{-kx}$在区间$]0,+\infty[$上的收敛性及其和的连续性。

◀ (i) $\forall\lambda>0$, $\exists N\in\ltimes$, $\forall n>N$, $ne^{-n\lambda}<e^{-n\frac{\lambda}{2}}$, 由此易知级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ke^{-kx}$在区间$]0,+\infty[$上点点收敛。

(ii) $\forall N\in\mathbb{N}$, 取$x=\frac{1}{N}$, 则$Ne^{-Nx}=Ne^{-1}>e^{-1}$, 所以该函数项级数在$]0,+\infty[$区间上不一致收敛。

(iii) 由(i)知级数在$]0,+\infty[$上点点收敛。令$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ke^{-kx}$. $\forall\lambda>0$, 取$\delta<\lambda$, 则对$\forall x\in[\delta,+\infty[$, 有

$$ke^{-kx}\le ke^{-k\delta},$$

因正项级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ke^{-k\delta}$收敛，故函数项级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ke^{-k\delta}$在区间$[\delta,+\infty[$上一致收敛，因此，和函数$f(x)$在$[\delta,+\infty[$上连续。特别地，在点$\lambda$处连续。由$\lambda$的任意性知$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ke^{-kx}$在$]0,+\infty[$上连续。 ▶

4. (20分) 给出下列含参变量积分收敛的条件(其中$p,q,n\in\mathbb{R}$):

(i) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx$; (ii) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+x^2\right)}{x^n}dx$.

◀ (i) 当$q=0$时，积分变成$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$, 无论$p$取何值，它不收敛。当$q\neq0$时，积分化为

$$\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{1-\frac{1-p}{q}}}dx.$$

考虑到0和$+\infty$都是奇点，若要上述积分收敛，必须且只需

$$0<1-\frac{1-p}{q}<2\ \Leftrightarrow\ -1<\frac{1-p}{q}<1\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{1-p}{q}\right|<1.$$

(ii) 把积分写成两部分，且在第二部分($x\in[1,+\infty[$)中令$x+x^2=y$并取$x=\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+x^2\right)}{x^n}dx=\int_0^1\frac{\sin\left(x+x^2\right)}{x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+x^2\right)}{x^n}dx$$

$$=\int_0^1\frac{\sin x\cos x^2+\cos x\sin x^2}{x^n}dx+\int_2^{+\infty}\frac{2^n\sin y}{(\sqrt{1+4y}-1)^n\sqrt{1+4y}}dy.$$

显然，当$n<2$时，上式第一个积分收敛；$n>-1$时，第二个积分收敛。最终结论是当$-1<n<2$时，整个积分收敛。 ▶

5. (15分) 设$a,b\in\mathbb{R}$且$a>0$, 计算积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$.

◀ 令$f(x,b)=e^{-ax^2}\cos bx$, 则

(i) $f(x,b),f_b'(x,b)\in C([0,+\infty[\times[u,v])$, $\forall[u,v]\subset]-\infty,+\infty[$,

(ii) $\Phi(b)=\int_0^{+\infty}f_b'(x,b)dx=-\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx$在任何$[u,v]\subset]-\infty,+\infty[$上一致收敛，因$\left|xe^{-ax^2}\sin bx\right|\le xe^{-ax^2}$,

(iii) 积分$F(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$至少在$b=0$收敛。

于是$F(b)$可微且

$$\begin{aligned}F'(b)&=-\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx\\&=\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx\\&=-\frac{b}{2a}F(b),\end{aligned}$$

由上述方程易得

$$F(b)=\kappa e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

由$F(0)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$，最后获得

$$F(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

▶

6. (20分) (i) 将函数$y=\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{\pi}\right)$展开为Fourier级数; (ii) 求和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}$; (iii) 求和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n}{1+n^2}$.

◀ (i) $y=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin nx.$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n!}=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n!}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{e^{ix}}\right)=e^{\cos x}\mathrm{Im}\left(e^{i\sin x}\right)=e^{\cos x}\sin\sin x.$$

(iii) 函数

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}}$$

在$[-\pi,\pi]$上的Fourier级数是

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1+n^2}+\frac{1}{2}.$$

所以所求的级数和等于

$$f(1-\pi)-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{1-\pi}+e^{-1+\pi}}{e^\pi-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}\ (\pi-1)}{\mathrm{sh}\ \pi}-\frac{1}{2}.$$

▶