北京师范大学2017~2018学年第1学期期末考试试卷

课程名称：近世代数　　任课教师姓名：______

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷

院（系）：______　　专业：______　　年级：______

姓　名：______　　学号：______　　阅卷教师：______

一、(12分) 设 R 是一个交换环，$x \in R$ 称为幂零元，如果存在一个正整数 n 使得 $x^n = 0$. 证明 R 中所有幂零元组成的集合 N 构成 R 的一个理想.

二、(18分) 设 $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1}\}$ 为高斯整环. 设有整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得 $a^2 + b^2 = p$ 为素数. 令 $\alpha = a + bi$, $I = \langle \alpha \rangle$ 为 α 生成的主理想.

(1) 证明 α 是 R 中的不可约元;

(2) 证明 $p \in I$, 且 R/I 是特征为 p 的有限域;

(3) 对于 $\alpha = 2 + i$, 证明 $R/I \simeq (\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$.

三、(18分) 设 p, q 为两个不同的素数. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的代数扩张.

(1) 计算扩张次数 $[E : \mathbb{Q}]$, 并且给出 E 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组基;

(2) 对于 $r, s \in \mathbb{Q}$, 令 $\beta = r\sqrt{p} + s\sqrt{q}$, 证明 $E = \mathbb{Q}(\beta)$ 的充要条件是 $rs \neq 0$.

四、(18分) 设 q 为素数方幂. E 是 F_q 上的一个 n 次扩张, 即 $[E : F_q] = n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(1) 对于 $\alpha \in E$, 证明 $F(\alpha) = E$ 的充要条件是 α 在 F_q 上的极小多项式 $p(x)$ 的次数为 n;

(2) 当 $n = p$ 为素数时, 求出 E 中满足 $F(\alpha) = E$ 的 α 的个数;

(3) 对于 $n = 5$, 求出 F_q 上首项系数为 1 的 5 次不可约多项式的个数.

五、(18分) 设 $G = A_5$, X 是 S_5 中全体对换 (ij) 的集合. 对于 G 在 X 上的共轭作用.

(1) 对于 $x = (12) \in X$, 证明其轨道 $O_x = X$;

(2) 对于 $x = (12)$, 计算其点稳定子群 G_x 的阶.

六、(16分) 设有限群 G 的阶为 $4p^2$, 其中 p 为素数, 证明 G 不是单群.