北京师范大学 2009～2010 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：复变函数　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　考试时长：120 分钟　考试类别：闭卷☒ 开卷☐ 其他☐

院（系）：数学科学学院　专业：　年级：

姓名：　学号：

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师（签字）：

$\sqrt[3]{-2+2i} = 8^{\frac{1}{6}}\exp\{\frac{i}{3}(\frac{3}{4}\pi+2k\pi)\}$　$k=0,1,2$

一(51)、计算

1、求$(-2)^{[illegible]}$，$\sqrt[3]{-2+2i}$的值.

$= e^{\ln x}$

$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

2、求下列积分的值

(1) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+100}=0$

(2) $\int_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$，　$-\frac{2\pi i}{9}$　$\int_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$

分类讨论

(3) $\int_C\frac{\cos z\,dz}{z^3(z-1)}$，其中$C$是$z$平面上一条不经过$z=0$和$z=1$的正向简单闭曲线。

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$　$z^2+1=0$　$z=-1$　$z=\pm i$.

$\mathrm{Res}(f,i)=\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'\Big|_{z=i}=-\frac{i}{4}$

~~$\mathrm{Res}(f,-i)=\left(\frac{1}{(z-i)^2}\right)'\Big|_{z=-i}=\frac{i}{4}$~~

$2\pi i\cdot(-\frac{i}{4})=\frac{\pi}{4}$

二(18)、下列函数在何处可微，何处解析　令$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$

(1) $f(z)=xy^2+ix^2y$.　(2) $e^{(x^2-y^2)}\cos(2xy)+ie^{(x^2-y^2)}\sin(2xy)$.

三(10)、求$\frac{1}{(z-1)(z-2)}$分别在圆环$1<|z|<2$及$2<|z|<+\infty$内的洛朗级数展式。

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

四(8)、求作一个单叶函数，把z平面上的带形$0<Imz<\pi$保形映射成w平面上的单位圆盘$|w|<1$.　$w=T(z)$　令 $t=e^z$ 则t为上半平面

五(5)、用儒歇定理证明代数学基本定理：任一n次方程$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0\ (a_0\neq0)$有且仅有$n$个根。（几个重根就算做几个根）

令 $|z|=R$　$R>$

令 $f(z)=a_0z^n$　$g(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$.

六(8)、证明$f(z)$是单叶整函数的充要条件是$f(z)=az+b\ (a\neq0)$.

$\lim\limits_{|z|\to\infty}\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{|g(z)|}{|f(z)|}\le\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{|a_1||z|^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}||z|+|a_n|}{|a_0||z|^n}=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{|a_1||z|^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}||z|+|a_n|}{|a_n||z|^n}$

$=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{|a_1|\frac{1}{|z|}+\cdots+|a_{n-1}|\frac{1}{|z|^{n-1}}+|a_n|\frac{1}{|z|^n}}{|a_n|}$

$=\lim\limits_{|z|\to\infty}0\cdot\frac{1}{|a_n|}=0<1$.

所以 $|g(z)|<|f(z)|$ 对$|z|$充分大成立