北京师范大学 2025 - 2026 学年第 1 学期期中考试试卷

课程名称：常微分方程　　　　任课教师姓名：

卷面总分：100 分　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷 □　开卷 √　其他 □

院（系）：数学科学学院　　专　业：数学与应用数学　　年　级：2024

姓　名：　　　　　　　　学　号：

---

1 (20分, 每小题5分) 判断下列命题是否正确(不用叙述理由).

(1) 函数 $f(x,y)=y^{\frac{1}{3}}$ 在点 $(x_0,0)$ 的某个邻域内满足Lipschitz条件:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\quad L>0.$$

(2) 隐式微分方程

$$y=xp+\frac{1}{p}\qquad \left(p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

的奇解是 $x=\frac{1}{4}y^2(x\neq 0)$.

(3) 设矩阵函数 $A(x)$ 与向量函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, $x_0\in(a,b)$, $y_0\in\mathbb{R}^n$. 构造Picard序列:

$$\begin{cases} y_k(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}[A(s)y_{k-1}(s)+f(s)]\mathrm{d}s, & k=1,2,\cdots, \\ y_0(x)=y_0. \end{cases}$$

则向量函数序列 $\{y_k(x)\}$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(4) 设矩阵函数 $A(x)$ 在 (a,b) 上连续, $\Phi(x)$ 是齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A(x)y,\quad a<x<b$$

的基解矩阵. 则

$$A(x)=\Phi'(x)\Phi^{-1}(x).$$

2 (20分, 每小题5分) 简答题(只写出结果, 不需给出证明)

(1) 写出曲线族 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$ 满足的微分方程.

(2) 已知微分方程

$$(x^2+y)\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=0$$

有积分因子 $\mu=x$, 则 $f(x)=$ ________.

(3) 写出方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2x+y}{t},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{x+2y}{t}$$

的通解.

(4) 写出常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Ay$$

满足初值条件$y(x_0) = y_0$的公式解、

3 (15分) 解微分方程

$$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1.$$

4 (15分) 解微分方程

$$x(yy'' + y'^2) + 3yy' = 2x^3.$$

5 (15分) 解常系数非齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad b > 0.$$

6 (15分) 设

$$A = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \\ 2 & 3 & & 0 \\ 4 & -2 & 0 & \end{matrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

求一个非零常向量$\eta \in \mathbb{R}^4$, 使得初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay, \quad y(0) = \eta$$

的解$y(t)$满足条件$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.