北京师范大学 2021～2022 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

任课教师姓名:

课程名称: 数学分析 (1)

卷面总分: 100 分　考试时长: 120 分钟　考试类别: 闭 卷

院（系）:________ 专业:________ 年级:________

姓　名:________ 学号:________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
成绩																

一、计算题（共 50 分，每题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

3. 求不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{2+x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

4. 求定积分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$.

5. 求反常积分 $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$.

6. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数的存在性以及可微性.

7. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点 $\boldsymbol{p}_0=(3,1,1)$ 的切平面方程.

8. 设 f 处处连续, 且满足 $\displaystyle\int_0^x f(t-x)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{2x}-1$, 求 $f(x)$.

9. 求 $J=\iint_D (x^3\sin y+x^2y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $y=x^2$, $y=4x^2$, $y=1$ 围成的区域.

10. 设 $f(x)=\int_x^{x^2}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)\sin\frac{1}{n}$.

二、证明题（共 50 分，每题 10 分）

11. 设函数 f 在 $[0,2a]$ 连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 证明: 存在 $x_0\in[0,a]$ 使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=a$. 求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=a$.

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可微. 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x=0$.

14. 设二元函数 $z(x,y)=\mathrm{e}^y\varphi\left(y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$, 其中函数 φ 可微. 证明: $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$.

15. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续正函数. 证明: $\forall n\in\mathbb{N}^+$, $\exists\,\theta(n)\in(0,1)$, 使得

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\theta(n)} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1-\theta(n)}^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

并求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\theta(n)$.