北京师范大学 2024–2025 学年第二学期高等代数 II 期末考试题 (A 卷)

课程名称：高等代数 II　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷

院 (系)：________　　专 业：________　　年 级：________

姓 名：________　　学 号：________

一. (18 分) 设实二次型 $q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 用正交线性替换 $X = PY$ 化 $q(x)$ 为标准形. 要求给出正交矩阵 P 的计算过程和 $q(x)$ 的标准形.

二. (16 分) 设 $q(x) = X^TAX$ 是 n 元实二次型. 令 $W_0 = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^TA\alpha = 0\right\}$. 证明 W_0 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间的充要条件为 A 是半正定或半负定矩阵.

三. (18 分) 设 n 阶正定矩阵 A 的最小特征值为 λ_0, n 阶实对称矩阵 B 的特征多项式为 $f_B(\lambda) = \prod_{k=1}^n(\lambda - \lambda_k)$. 令 $D = tA + B, t \in \mathbb{R}$. 证明 D 是正定的, 如果

$$t > \max\left\{\frac{|\lambda_1|}{\lambda_0}, ..., \frac{|\lambda_n|}{\lambda_0}\right\}.$$

四. (16 分) 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维向量空间, $\sigma \in \mathcal{L}(V)$ 在 V 的一组基下的矩阵为 A. 设 A 的特征多项式为 $f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda)$, $g(\lambda_0) \neq 0$. 用 V_{λ_0} 表示属于特征值 λ_0 的特征子空间. 若有 V 的 σ-不变子空间 W 满足 $V = V_{\lambda_0} \oplus W$, 求 $\dim(V_{\lambda_0})$ 并说明理由.

五. (16 分) 设向量空间 $V = M_n(\mathbb{R})$, 对于 $A, B \in V$, 定义内积 $(A, B) = tr(AB^T)$, 则 V 构成一个 n^2 维欧式空间.

(1) 对于 $B \in V$, 若有 $(X, B) = (X, I)$, $\forall X \in V$, 证明 $B = I$;

(2) 对于 $P \in V$, 定义线性变换 $\sigma : X \mapsto PX$, $\forall X \in V$. 证明 σ 是正交变换的充要条件是 P 为正交矩阵.

六. (16 分) 设 A 是 n 阶实规范矩阵, A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^3(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2^2)...(\lambda^2 + m^2),$$

(1) 求出规范矩阵 A 的正交相似标准形;

(2) 令 $W = \{f(A) | f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]\}$, 证明 W 是向量空间 $V = M_n(\mathbb{R})$ 的子空间, 并且 W 中向量都是规范矩阵;

(3) 求 $\dim(W)$ 和 W 的一组基, 并说明理由.