

24 秋- 数学分析 1 (回忆版)

February 10, 2025

1. 求极限

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1 + x^2)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right)$

2. 求不定积分

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$

(b) $\int \cos(\ln x) dx$

3. 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$

4. 指出函数的不连续点及其类型

(a) $y = [2x] - 2[x]$

(b) $y = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

5. 证明 $\sin x^2$ ($-\infty, +\infty$) 上不一致连续, 但在 $[0, A]$ 上一致连续, 其中 $A > 0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

7. 求 $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}))$ 的导数

8. 求数列极限

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \sin(\pi\sqrt{1 + 4n^2})]^n$

9. 求函数 $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$ 的极值、最值、驻点、拐点、凸性区间及渐近线