北京师范大学 2016 ～ 2017 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：近世代数　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒

1.（20分）整数集$\mathbb{Z}$关于普通加法构成有理数集$\mathbb{Q}$的子群. 任取$q \in \mathbb{Q}$, 用$[q] = q + \mathbb{Z}$表示商群$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中对应的元素.

(1) 写出商群$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$的单位元.

(2) 求元素$[\frac{9}{4}]$在群$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中的阶.　　$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

(3) 证明: 群$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中每个元素的阶有限.

(4) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是不是循环群? 为什么?　　$I_1 \cap I_2$

2.（15分）下列三个群互相同构吗？说明理由. 其中, A_4代表4次交错群, $\mathbb{Z}_{12}$代表模12的剩余类加群, 等等.

(1) $\mathbb{Z}_{12}$.　　(1234)　　60.

(2) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$. (群的外直积)　　A_4^4　　$\frac{2}{7}$

(3) A_4.

3.（10分）设G是一个群. 任取$x \in G$, 称$C_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$为元素$x$所在的共轭类. 每个共轭类$C_x$中所含元素的个数一定整除群的阶$|G|$, 为什么？　　55.

4.（20分）令$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$代表高斯整环. 在$\mathbb{Z}[i]$中定义范数如下:

$$N(a + bi) = a^2 + b^2.$$

$a+bi$　　45.　　$[\frac{p}{q+1}]$

(1) 求出$\mathbb{Z}[i]$中的所有单位（即乘法可逆元）.

(2) 求出$\mathbb{Z}[i]$的商域.

(3) 素数2是$\mathbb{Z}[i]$中的素元吗？为什么？

(4) 有人说, $\mathbb{Z}[i]$中的非零素理想也是极大理想. 你认为对吗？为什么？

5.（10分）设$E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$是有理数域$\mathbb{Q}$的扩域.　　55.

(1) 求扩域的次数$[E : \mathbb{Q}]$.

(2) 证明: $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$.　　F_3　　F_q

6.（20分）考虑有限域$\mathbb{Z}_3$上的不可约多项式$p(x) = x^2 + x - 1$.

(1) 设α是$p(x)$在它的分裂域中的一个根. 单扩域$\mathbb{Z}_3(\alpha)$是$\mathbb{Z}_3$上的几次扩域?

(2) 写出$\mathbb{Z}_3(\alpha)$作为$\mathbb{Z}_3$上的向量空间的一组基底.

(3) 用这组基底表达α和$1 + \alpha$在$\mathbb{Z}_3(\alpha)$中的逆元.

(4) 证明: $p(x)$整除$x^9 - x$ (在$\mathbb{Z}_3[x]$中).

7.（5分）考虑81元域F的非零元乘法群$F^\times$. 设α是$F^\times$的生成元. 证明: $\alpha^{40} = -1$.

75