北京师范大学 2021 ～ 2022 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：偏微分方程　　　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师（签字）：________

一 (25分). 回答下列问题

1. 指出非 Newton 渗流方程 $u_t = (u^p)_{xx} + (u^q)_x$ 的阶数和线性性，其中 p, q 是常数.

2. 具体写出一个调和的多项式.

3. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的已知函数，写出偏微分方程 $u_{xy} = f(x)$ 的通解.

4. 对椭圆方程 $u_{xx} + u_{yy} = u_y$, $-\infty < x < \infty$, $y > 0$ 关于 x 做 Fourier 变换后得到的常微分方程是什么？

5. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域. 下面哪个或哪些陈述是正确的？

(1) 若 $f \in C^0(\Omega)$，则 Poisson 方程 $\Delta u = f(x)$ 的解 $u \in C^2(\Omega)$.

(2) 对于膜振动方程 $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ 来说，(x_0, y_0, t_0) 的依赖区域是圆盘 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le a^2 t_0^2$, $t = 0$.

(3) 对 $x \in \Omega$, $n \ge 3$ 和 $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_\Omega |\xi - x|^{2-n} d\xi = (n-2) \int_\Omega |\xi - x|^{-n} (\xi_i - x_i) d\xi.$$

二 (25分). 求解热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x(1-x), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = -\dfrac{1}{\pi}\sin \pi x, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 1, & t \ge 0. \end{cases}$$

三 (20分). 在 $y < 0$ 中, 化简 Tricomi 方程 $yu_{xx} + u_{yy} = 0$.

四 (10分). 设 a 是正常数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是光滑的有界区域, ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\sigma(x)$ 是 $\partial\Omega$ 上的有界函数. 若 $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, +\infty))$ 满足

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x) u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases}$$

证明

$$E(t) = \int_\Omega \left(u_t^2 + a^2 |Du|^2\right) dx + a^2 \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u^2 dS, \quad t > 0$$

恒为常数.

五 (10分). 设 $Q = (0,l) \times (0,T]$, l, T 是正常数, $u \in C^{2,1}(Q) \cap C^0(\overline{Q})$ 满足 $u_t - a^2(x) u_{xx} - b(x) u_x \ge 0$, 其中 $a(x), b(x)$ 是已知函数, 证明

$$\min_{\overline{Q}} u = \min_{\partial_p Q} u.$$

六 (10分). 设 $B_1(0)$ 是以原点为中心的单位球. 若 $u \in H_-(B_1(0))$, 且 $u(0) \ge u(x), x \in B_1(0)$, 试证在 $B_1(0)$ 中 $u \equiv u(0)$.

2022年1月6日