## 北京师范大学 2024 - 2025 学年第 1 学期期中考试试卷

课程名称：常微分方程　　任课教师姓名：

卷面总分：100 分　考试时长：100 分钟　考试类别：闭卷 □　开卷 √　其他 □

院（系）：数学科学学院　专　业：数学与应用数学　年　级：2023

姓　名：　　　　学　号：

---

1 (20分, 每小题5分) 判断下列命题是否正确(不用叙述理由).

(1) 已知$y = y_0(x)$是一阶非齐次线性微分方程的解. 若$y_1(x), y_2(x)$是这个方程的不同于$y_0(x)$的两个解, 则

$y_1(x) = e^{-\int p(x)dx}(C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx)$

$$\frac{y_1(x) - y_0(x)}{y_2(x) - y_0(x)} = C(\text{常数}).$$

$y_1(x) - y_0(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$

(2) 设$x = \phi(t), p = \psi(t)$满足$F(x, p) = 0$. 则隐式微分方程$F(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 0$ 有通解

$$x = \phi(t), \quad y = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + C.$$

$dx = \frac{1}{\psi(t)} dy$

$\psi(t) dx$

(3) 设矩阵(方阵)函数$A(x)$可导. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A(x)A(x)) = 2A(x)\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}.$$

(4) 设$n \times n$矩阵函数$A(x)$在$(a, b)$上连续, $a < \tau < b$, $\Phi(x), \Psi(x)$是齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y, \quad a < x < b$$

的两个基解矩阵. 则

$\Phi(x) = \Psi(x) C$

$\Phi^{-1}(\tau) = C^{-1}\Psi^{-1}(\tau)$

$$\Phi(x)\Phi^{-1}(\tau) = \Psi(x)\Psi^{-1}(\tau).$$

2 (20分, 每小题5分) 简答题(只写出结果, 不需给出证明).

(1) 设$u = u(x)$满足微分方程

$$u'' + a(x)u' + b(x)u = 0.$$

令$y(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$. 写出$y = y(x)$满足的微分方程.

$y' = -\frac{u''u - u'^2}{u^2} = -\frac{u''}{u} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = -\frac{u''}{u} + y^2$

$\frac{u''}{u} + a(x)\left(\frac{u'}{u}\right) + b$

$y^2 - y' + a(x)($

(2) 已知$e^{xy}$是微分方程

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

的一个积分因子, 则

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{xP - yQ} = \underline{\qquad\qquad}.$$

$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = (\frac{\partial P}{\partial y}$

$Qye^{xy} - Pxe^{xy} = (\frac{\partial P}{\partial y}$

$\frac{y}{x}+g(x)=xy^2+y$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}(x)&a_{12}(x)\\a_{21}(x)&a_{22}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}$

(3) 设齐次线性微分方程组$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A(x)y$有基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}.$$

则

$\begin{pmatrix}\frac{-x}{1-x^2}&\frac{1}{1-x^2}\\\frac{1}{1-x^2}&\frac{-x}{1-x^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\1&x\end{pmatrix}$

$$A(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$xa_{11}(x)+a_{12}(x)=1$

$a_{11}x+xa_{12}(x)=0$

$xa_{21}(x)+a_{22}(x)=0$

$a_{21}(x)+xa_{22}(x)=1$

$(x^2-1)a_{12}(x)=-1$

$a_{12}(x)=\frac{1}{1-x^2}$

(4) 设$n\times n$矩阵函数$A(x)$和向量函数$f(x)$在$(a,b)$上连续, $\Phi(x)$是齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A(x)y,\quad a<x<b$$

$1-\frac{2}{1-x^2}$

$\frac{-x}{1-x^2}$ $\quad\frac{-x^2}{1-x^2}$

的基解矩阵, $\phi(x)=\Phi(x)C(x)$是非齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A(x)y+f(x),\quad a<x<b$$

的解, 其中$C(x)$是向量函数. 则

$\frac{d\Phi(x)}{dx}C(x)+\Phi(x)\frac{dC(x)}{dx}$

$=A(x)\Phi(x)C(x)$

$=f(x)$

$$C'(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$\frac{1-\frac{c_1}{x}}{x}$

$P(x,y)=xy^2+y$ $\quad\frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1$

$Q(x,y)=-x$ $\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$

3 (15分) 解微分方程

$$(xy+1)y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0.$$

$\frac{2xy+2}{(xy+1)y}$ $\quad u=\frac{x}{y}$ $\quad u'=\frac{y-xy'}{y^2}$

4 (15分) 解微分方程

$$x^2yy''=(xy'-y)^2.$$

$=x^2y'^2-2xyy'+y^2$ $\quad u''=$

$C_2e^{\frac{c_1}{x}}+C_2-\frac{c_1}{x}e^{\frac{c_1}{x}}$

$e^{\frac{c_1}{x}}(C_2+C_2-\frac{c_1}{x})$

$u=yy'$ $\quad\frac{du}{dx}=(y')^2+yy''$

5 (15分) 解常系数齐次线性微分方程组

$x^{-2}(C+x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&0&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

$x^2\frac{y''}{y}$

$y=C_2e^{\int\frac{1}{x}+\frac{c_1}{x^2}dx}$

$=C_2e^{\ln x+\frac{c_1}{x}}$

$x^2(yy''-y'^2)=-2xyy'+y^2$

$x^2\left(\frac{yy''-y'^2}{y^2}\right)$

6 (15分) 设$A$是$n\times n$矩阵, $y=\mathrm{e}^{\lambda x}P(x)$是常系数齐次线性微分方程组$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Ay$的解, 其中$\lambda$是常数, $P(x)$是$n$维向量函数, 其每个分量是$x$的多项式, 这些多项式的最高次数为$k$. 证明:

$$\mathrm{e}^{\lambda x}P(x),\mathrm{e}^{\lambda x}\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda x}\frac{\mathrm{d}^kP(x)}{\mathrm{d}x^k}$$

是该方程组的$k+1$个线性无关的解.

$\frac{d\,e^{\lambda x}P(x)}{dx}$

$P(x)\quad\frac{dP(x)}{dx}\quad\cdots$

$\| \quad e^{\lambda x}\frac{dP(x)}{dx}+P(x)\lambda e^{\lambda x}=Ae^{\lambda x}P(x)$

$\frac{dP(x)}{dx}+\lambda P(x)=AP(x)$