北京师范大学 2023–2024 学年第一学期代数学基础 I 期末考试题

课程名称： 代数学基础 I　　**任课老师姓名：** ______

卷面总分： 100 分　　考试时长： 120 分钟　　考试类别： 闭卷

院 (系)： ______　　专　业： ______　　年　级： ______

姓　名： ______　　学　号： ______

一. (18 分) 对于下列线性方程组, 通过求出特解 γ_0 和导出组的解空间得到线性方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 - 24x_3 + 7x_4 - 26x_5 = 25 \end{cases}$$

二. (18 分) 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)) = D(x)$. 对于 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 令 $B = \begin{pmatrix} f_1(A) \\ \vdots \\ f_s(A) \end{pmatrix}, C = D(A)$, 证明齐次线性方程组 $BX = O$ 和 $CX = O$ 等价.

三. (16 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的三次首一多项式, 且满足 $(x-1)^2 \big| f(x) + 1$, $(x+1)^2 \big| f(x) - 3$, 求出 $f(x)$ 并判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否可约 (要求说明理由).

四. (16 分) 设向量空间 $V = \mathbb{Q}[x]$, 对于 V 中的向量

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \qquad g(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

令 $V_1 = f(x)\mathbb{Q}[x], V_2 = g(x)\mathbb{Q}[x]$.

(1) 证明 V_1, V_2 是 V 的子空间, 并求出 $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

(2) 判断是否有 $V_1 \cong V_2$, 并证明你的结论.

五. (16 分) 设 $V = M_n(\mathbb{R})$, V_1 是 V 中全体对称阵的集合, V_2 是 V 中全体幂零上三角阵的集合, 则 V_1, V_2 是 V 的子空间.

(1) 证明： $V = V_1 \oplus V_2$.

(2) 若 W 是 V 的一个幂零子空间 (即 W 是 V 的子空间且 W 中的向量均是幂零矩阵), 证明: $\dim(W) \le \frac{n(n-1)}{2}$.

六. (16 分) 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $I = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 的一个极大线性无关部分组. 对于向量组 $II = I \backslash \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$, 若 II 中每个向量都只出现在 I 的一个极大线性无关部分组中, 证明: $\mathrm{r}(II) = 1$, 且存在 $\alpha_j \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$, 使得 $\alpha_i = k_i \alpha_j$, $i = r+1, \cdots, m$.