北京师范大学 2025 ～ 2026 学年第一学期期中考试试卷

课程名称：数学分析III　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　考试时长：100 分钟　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：________　专业：________　年级：________

姓名：________　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师（签字）：________

(注: (1) 所有记号均同课本; (2) 不得直接引用书中的习题及课外书; (3) 本试卷共6题(含1附加题)、总计110分、得分上限为100; (4) 本试卷共1页.)

一. (42分) (1) 判断$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$点的连续性.

(2) 求函数$f(x,y,z)=\ln(1+xy^2z^3)$在点$(1,1,1)$沿其梯度方向的方向导数.

(3) 求$\begin{cases}ue^x=yv\\ u\cos y+x^2v=0\end{cases}$ 所确定的隐映射的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$及$\frac{\partial v}{\partial y}$.

二. (15分) 写出椭圆面$x^2+4y^2+9z^2=1$上平行于平面$x-y+z=0$的切平面方程.

三. (15分)求椭圆$y^2+\frac{x^2}{2}=1$的内接矩形的最大周长.

四. (14分) 设$b>a>0$. 计算积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$.

五. (14分) 设$\varphi(t):=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\,dx$, $t\in(0,+\infty)$.

(i) 证明: 对任意$T\in(0,+\infty)$, $\varphi(t)$在$(0,T]$上一致收敛;

(ii) 证明: $\varphi(t)-\varphi(t^{-1})=\frac{\pi}{2}\ln t$, $\forall\, t\in(0,+\infty)$.

六. (附加题, 10分) 设$f(x,y)$有一阶连续偏导数且满足$f(1,0)=f(0,1)$. 证明单位圆周$x^2+y^2=1$上至少有两点满足$y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}$.