

21 秋- 数学分析 1 期末（回忆版）

何家兴

hejiaxing202411@163.com

December 7, 2024

Exercise 1.

计算不定积分

1. $\int \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int x \ln x dx$
3. $\int \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} dx$

Exercise 2.

给出下列函数在 $x = 0$ 处带 Peano 余项的三阶 Taylor 展开式。

1. $f(x) = \tan x$
2. $f(x)$ 是函数 $g(y)$ 的反函数, $g(0) = 0, g'(0) = 1, g''(0) = 0, g'''(0) = -1$

Exercise 3.

计算下列函数极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x)) - \tan(\tan(x))}{\sin x - \tan x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\arcsin^2 x} \right)$

Exercise 4.

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个正整数, 当正实数 x 充分小时, 估计式

$$-x \ln x \sum_{i=1}^n e^{-\frac{a_i}{x}} \approx \min\{a_1, \dots, a_n\}$$

是否成立? 为什么?

Exercise 5.

设

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. 给出 $f(x)$ 的连续区间, 若有间断点, 指出间断点及其类型
2. 求 $f(x)$ 的一阶、二阶导函数, 给出 $f(x)$ 的单调区间和相应的凹凸性; 如果 $f(x)$ 有极值点和拐点, 请指出。
3. 分析 $f(x)$ 在连续区间端点处的渐进行为, 给出 $f(x)$ 的渐近线方程
4. 作出 $f(x)$ 的图像

Exercise 6.

叙述 Lagrange 微分中值定理, 并举一例展现其应用

Exercise 7.

1. 写出 f 在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上 Lipschitz 连续与一致连续的定义
2. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上 Lipschitz 连续, 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续

Exercise 8.

已知 f 是 (a, b) 上的凸函数并且一阶可导, 证明 f' 在 (a, b) 连续。

Exercise 9.

已知定义在 $[0, +\infty)$ 的函数 f 二阶可导, 且 $|f''| \leq |f|$, 如果 $f(0) = f'(0) = 0$, 证明 $f \equiv 0$

附加题

Exercise 1.

证明函数方程 $f(f(x)) = -x^3 + \cos(x^2 + \ln(1+x^2))$ 不存在连续解 $f \in C(\mathbb{R})$

Exercise 2.

设 f 是定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数, 函数的 Legendre 变换是函数 $f^*(t) = \sup_{x \in I} (tx - f(x))$ 。
证明:

1. 集合 $I^* = \{t; f^*(t) \in \mathbb{R}\}$ 或者是空集，或者是单点集，或者是区间，此时 f^* 必为 I^* 上的凸函数。
2. 如果 f 是 I 上的凸函数，则 I^* 不空，且

$$(f^*)^*(x) = \sup_{t \in I^*} (xt - f^*(t)), \quad \forall x \in I$$