北京师范大学 2022 - 2023 学年第 2 学期期末考试试卷（A卷）

课程名称：实变函数　　任课教师姓名：

卷面总分：100 分　考试时长：120 分钟　考试类别：闭卷 √　开卷 □　其他 □

院（系）：数学科学学院　专　业：数学与应用数学　年　级：2021

姓　名：　　学　号：

---

1 (30分, 每小题5分) 判断下列命题是否正确(不用叙述理由).

(1) 设$E \subset \mathbf{R}^n, f(x) \in L(E)$. 则存在$\mathbf{R}^n$上的紧支集连续函数列$\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

非负

(2) 设$\{E_k\}$是递增可测集列, $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = E$. 若$f(x) \in L(E_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

则$f(x) \in L(E)$, 且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若$f(x) \in \mathrm{BV}([a,b]) \cap \mathrm{C}([a,b])$, 则$F(x) = \bigvee\limits_a^x (f) \in \mathrm{C}([a,b])$.

(4) 若$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数, 则$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数.

(5) 若$f(x) \in L^1(E) \cap L^\infty(E)$. 则$\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(6) 设$\{\varphi_k(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交系, $f(x) \in L^2(E)$. 则$f(x)$的广义Fourier系数 (Bessel).

$\{c_k\}$满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|_2^2$.　完全 .

2 (15分, 每小题5分) 简答题(只写出结果, 不需给出证明).

(1) 设$f_n(x) = \dfrac{n\mathrm{e}^{-n^2 x}}{1+x}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 写出$\{f_n(x)\}$的一个在$(0, +\infty)$上可积的控制函数$F(x)$.

$\le \frac{1}{ex^2}$

(2) 写出一个非负可测函数列$\{f_n(x)\}$, 满足条件:

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x < \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

$\chi_{(n,n+1)}(x)$

$0 < 1.$

(3) 写出一个绝对连续函数列$\{f_n(x)\}$, 使得$\{f_n(x)\}$一致收敛, 但其极限函数不是绝对连续函数.

$$f_n(x) = \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & \frac{1}{n} < x \le 1 \\ 0, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \end{cases} \rightrightarrows \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3.（15分）设$f(x)$是$E \subset \mathbf{R}^n$上的非负可测函数. 若存在$E_k \subset E\,(k=1,2,\cdots)$, 满足

$$m(E \setminus E_k) < \frac{1}{k}, \quad \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = A < +\infty.$$

证明: $f(x)$在E上可积.

4.（15分）设$u \in (s,t)$, $x^s f(x), x^t f(x)$在$(0,+\infty)$上可积. 证明: $x^u f(x)$在$(0,+\infty)$上可积, 且积分

$$\int_{(0,+\infty)} x^u f(x)\mathrm{d}x$$

是$u \in (s,t)$的连续函数.

5.（15分）设$f(x)$是区间$[0,a]$上的有界变差函数. 证明: 函数

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad F(0)=0$$

是$[0,a]$上的有界变差函数.

6.（10分）设$f(x) \in L^2((0,+\infty))$且$f(x) \geq 0\,(x \in (0,+\infty))$. 令

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明：

$$F(x) = o(\sqrt{x}) \quad (x \to +\infty).$$