21 秋- 数学分析 1 期中（回忆版）

何家兴
hejiaxing202411@163.com

December 7, 2024

Exercise 1.

设函数 f 定义在 $\mathbb{R}$ 上，$a \in \mathbb{R}$

1. 叙述当 $x \to a$ 时，f 是无穷小量的定义；
2. 证明：如果 $x \to a$，f 是无穷小量，则 f 在 a 处局部有界：即存在 a 的一个去心邻域，f 在其上有界
3. 叙述 $x \to a$，f 是无穷大量的定义
4. 证明：如果当 $x \to a$, f 是无穷大量，则 f 在 a 处局部无界，即 f 在 a 的任意去心邻域上无界

Exercise 2.

设 $\{x_n\}$ 是无穷小数列，用 $\varepsilon - N$ 语言证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - x_n}{2 + x_n} = 1$$

Exercise 3.

计算极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 3n + 100}{9n^2 + n}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x + \sin x}{x}$

Exercise 4.

讨论以下数列 $\{a_n\}$ 的敛散性

1. $a_n = n^{(-1)^n}$
2. $a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \cdots, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$
3. $a_n = \dfrac{\sin 1}{1+\sin 1} + \dfrac{\sin 2}{2(2+\sin 2)} + \cdots + \dfrac{\sin n}{n(n+\sin n)}$

Exercise 5.

设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空，证明存在数列 $\{a_n\} \subset A$，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$

Exercise 6.

设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$，证明 $f(x) \equiv 0$

Exercise 7.

设定义在区间 (a,b) 上的函数 f 单调递增，$c \in (a,b)$，证明存在极限 $\lim_{x\to c^-} f(x)$

Exercise 8.

设映射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在区间 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ 上不恒为 0

1. 证明 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in (a,b) \mid |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\} = \{x \in (a,b) | f(x) \neq 0\}$
2. 若还假定:对于任意非常数列 $\{x_n\} \subset (a,b)$,若 $\{x_n\}$ 收敛于 (a,b) 中的点,则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$。试证明：集合 $\{x \in (a,b) | f(x) \neq 0\}$ 至多可数

附加题

Exercise 1.

设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 为实数列，$\{y_n\}$ 严格递增且趋于正无穷，证明

$$\lim_{n\to\infty}\inf \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf \frac{x_n}{y_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup \frac{x_n}{y_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$