北京师范大学 2020～2021 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：　数学分析 (3)　　任课教师姓名：

卷面总分：　100 分　　考试时长：　120 分钟　　考试类别：　闭 卷

院（系）：＿＿＿＿＿＿＿＿　专业：＿＿＿＿＿＿＿＿　年级：＿＿＿＿＿＿＿＿

姓　名：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
成绩																

一、计算题（共 50 分，每题 5 分）

1. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

2. 求二元数值函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $x_0=(1,1)$ 沿与 x 轴正向成 $\alpha=60^\circ$ 的方向导数.

3. 设方程 $\ln(\sqrt{x^2+y^2})=\arctan\dfrac{y}{x}$ 能确定隐函数 $y=f(x)$, 求它的导数.

4. 在曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上求一点, 使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

5. 求 $\displaystyle\iiint_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由 $z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0$ 所围闭区域.

6. 求曲线 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ 在 $t_0=\dfrac{\pi}{4}$ 点的曲率.

7. 求 $\displaystyle\int_\Gamma(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是由点 $A(a,0)$ 经圆周 $x^2+y^2=ax$ 上半部到原点的一段弧.

8. 求 $\displaystyle\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

9. 求由方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

10. 设函数 $f(x)$ 一阶连续可微, 且 $f(0)=0$, 区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<2tx\}$, 求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t^4}\iint_D yf(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

二、证明题（共 50 分，每题 10 分）

11. 设 n 元数值函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续, g 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微, 且 $g(\boldsymbol{x}_0)=0$, 证明: fg 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

12. 设 $\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 存在, 区域 D 关于 $y\mathrm{O}z$ 平面对称, 被积函数 f 关于 x 是奇函数, 即 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$, 证明:

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

13. 设 Γ 为 $\mathbb{R}^2$ 平面上的分段光滑简单闭曲线, $\boldsymbol{\nu}_0$ 为任意固定的方向 (即 $|\boldsymbol{\nu}_0|=1$), $\boldsymbol{N}$ 为 Γ 的单位外法向量, 证明: $\int_\Gamma \cos(\boldsymbol{\nu}_0,\boldsymbol{N})\,\mathrm{d}s=0$.

14. 设 $u=f(x,y,z)$ 在闭立方体 $\bar{D}[a,b;a,b;a,b]$ 上连续, 证明:

$$g(x,y)=\max_{a\le z\le b}f(x,y,z)$$

在正方形 $[a,b;a,b]\subset\mathbb{R}^2$ 上连续.

15. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$ 上存在二阶偏导数, 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$, 证明:

$$\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$