北京师范大学 2023～2024 学年第二学期期中试卷

课程名称：微分几何　　任课教师姓名[redacted]

姓 名[redacted]

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	总分
得分							

一（20 分）证明：曲线$\mathbf{r}(s)=\left(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ $(-1<s<1)$ 以 s 为弧长参数，并求它的曲率，挠率和 Frenet 标架。

二（10 分）证明：以下两条曲线只相差一个刚体变换：

$$\boldsymbol{r_1}(t)=\left(t+\sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t-\sin t\right),\quad \boldsymbol{r_2}(t)=\left(2\cos\frac{t}{2}, 2\sin\frac{t}{2}, -t\right)$$

三、（20 分）求出曲面 $\mathbf{r}(u,v)=(u+v, u-v, 4uv)$的高斯曲率，平均曲率，主曲率及对应的主方向。

四、（10 分）曲面 S 的一个方向称为渐近方向，是指此方向的法曲率为 0。S 上一条曲线 C 称为渐近线，是指 C 上每一点处的切向为渐近方向。请问：圆柱螺线 $\mathbf{r}(v)=(\cos v, \sin v, av)$ 是正螺面$\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, av)$上的渐近线吗？请证明你的结论。

H=0

五、（10 分）证明曲面$z=f(x,y)$是极小曲面的充要条件是

$$(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0.$$

$$\det\begin{pmatrix} \dot v^2 & -\dot u\dot v & \dot u^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} (\dot u\ \dot v)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ (\dot u\ \dot v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\dot u\ \dot v)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = k(\dot u\ \dot v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

六（30 分）曲面 S 上有一条弧长参数曲线C：$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$。

（i）（20 分）若 C 是 S 上的一条曲率非零的渐近线，证明：C 的挠率为 $\Updownarrow$

$\Leftrightarrow W(\dot u r_u + \dot v r_v) = k(\dot u r_u + \dot v r_v)$

$\tau = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\begin{pmatrix} v'v' & -u'v' & u'u' \\ E & F & G \\ L & M & N \end{pmatrix}$。进而证明：C是一条平面曲线当且仅当它是曲面上的曲率线（C 上每点的切向量是 S 在该点的一个主方向）。

（ii）（10 分）证明：C是曲率线当且仅当S沿着C的法线构成的曲面$\tilde{\mathbf{r}}(s,t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{n}(s)$是一个可展曲面。（推出曲率线方程）。

$$\frac{10+10+7.5+\_\_}{27.5} = \frac{60}{32.5} \times \frac{5}{5} = 55$$

11