北京师范大学 2021 ∼ 2022 学年第二学期入班考试试卷（A 卷）

课程名称：数分研讨课I　　任课老师姓名：＿＿＿＿＿＿

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院（系）：＿＿＿＿＿＿　　专业：＿＿＿＿＿＿　　年级：＿＿＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

阅卷老师（签字）：＿＿＿＿＿＿

一. 设数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$, $a_1 > 0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - n)$ 存在.

二. 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界.又问级数通项分母中的 a_n 是否可以换成 a_{n+1}?

三. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 连续有界. 证明任给 $T > 0$, 存在 $x_n \to +\infty (n \to +\infty)$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n+T) - f(x_n)) = 0$.

四. 设 $a > 1$, 函数 $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 可微, 求证: 存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得 $f'(x_n) < f(ax_n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

五. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 均大于零, 假设存在正数 a, b, 使得 $f''(x) \le af(x) + bf'(x)$ 对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

(1) 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$;

(2) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \le cf(x)$;

(3) 求使上面不等式成立的最小常数 c.