

北京师范大学 2020 ~ 2021 学年第一学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 偏微分方程 任课老师姓名:                     

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系):                      专业:                      年级:                     

姓名:                      学号:                     

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

阅卷老师(签字):                     

一. (10分): 设  $\alpha$  是一个参数. 求出二阶方程

$$(2x + \alpha)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} + u_x = y$$

的椭圆型区域.

二. (10分): 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xy} = x^2y, \\ u(0, y) = e^y, \quad u(x, x) = \cos 2x. \end{cases}$$

三. (10分): 设  $a, b$  是正常数, 对电报方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} + bu_t = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

做 Fourier 变换, 写出得到的常微分方程初值问题.

四. (15分): 已知  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是一个有界区域,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  在  $\Omega$  中满足  $\Delta u \geq 0$ , 试证

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

五. (15分): 设  $a, R$  是正常数,  $b(x, t), c(x, t)$  是  $[-R, R] \times [0, +\infty)$  上的有界函数. 证明初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u_t = f(x, t), & -R < x < R, t > 0, \\ u(-R, t) = u(R, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & -R \leq x \leq R \end{cases}$$

的解在  $C^2([-R, R] \times [0, +\infty))$  中是唯一的.

六. (20分): 求解几何光学方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = 1, \\ u(\cos s, \sin s) = 0, \quad 0 \leq s \leq 2\pi. \end{cases}$$

七. (20分): 求解放射衰变问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + Ae^{-bx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中  $a, b, A, l$  都是正常数.