北京师范大学 2024～2025 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：代数学基础　　任课教师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ✓　开卷 □　其他 □

院（系）：________　专　业：________　年级：________

姓　名：________　学　号：________

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	第八题	总分
得分									

阅卷教师（签字）：________

装

订

线

一．（10 分）证明下述命题：

1）证明所有形如 $\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的实矩阵关于矩阵乘法构成一个群，即 Heisenberg 群。

记 $H=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

$\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d&e\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&d+a&e+af+b\\0&1&f+c\\0&0&1\end{pmatrix}\in H$

故乘法封闭

1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in H$ 是单位元

2) $\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-a&ac-b\\0&1&-c\\0&0&1\end{pmatrix}\in H$

3) 结合律由矩阵乘法保证

2）证明 $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt{3}$ 最小的域。

$1\in\mathbb{Q}[\sqrt3]$，乘法交换，$(a+b\sqrt3)^{-1}=\frac{a-b\sqrt3}{a^2-3b^2}\in\mathbb{Q}[\sqrt3]$，$-a-b\sqrt3\in\mathbb{Q}[\sqrt3]$

$a+b\sqrt3+a'+b'\sqrt3=(a+a')+(b+b')\sqrt3\in\mathbb{Q}[\sqrt3]$，

$(a+b\sqrt3)(a'+b'\sqrt3)=aa'+3bb'+(ab'+a'b)\sqrt3\in\mathbb{Q}[\sqrt3]$　故 $a+b\sqrt3$ 为 $\mathbb{R}$ 子域。

显然，$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt3]$，$\sqrt3\in\mathbb{Q}[\sqrt3]$．任取 $\mathbb{R}$ 中包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt3$ 的子域 A．

则 $\forall a,b\in\mathbb{Q}$，$a+b\sqrt3\in A$，~~故~~ $\mathbb{Q}[\sqrt3]\subseteq A$．即 $\mathbb{Q}[\sqrt3]$ 是 $\mathbb{R}$ 中包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt3$ 最小的域．

二．（10 分）解答下列问题：

(1) 求矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$的逆矩阵 (2)已知$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求$X$

$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^{-1}$

$=I+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^2+\cdots$

$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac13&\frac16&\frac23\\\frac13&\frac16&-\frac13\\-\frac13&\frac13&\frac13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{6}&\frac12&1\\-\frac16&-\frac12&0\\\frac23&1&0\end{pmatrix}$

三．（20 分）计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1+x&2+x&3+x\\1+y&2+y&3+y\\1+z&2+z&3+z\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1+x&1&2\\1+y&1&2\\1+z&1&2\end{vmatrix}$

$=0$

(2) $\begin{vmatrix}x+1&x&x&\cdots&x\\x&x+2&x&\cdots&x\\x&x&x+3&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x&x&x&\cdots&x+n\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}x+1&x&\cdots&x\\-1&2&&\\\vdots&&\ddots&\\-1&&&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+\frac12x+\cdots+\frac1nx+1&x&\cdots&x\\0&2&&\\\vdots&&\ddots&\\0&&&n\end{vmatrix}$

$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac1i\right)n!\,x+n!$

(3) $\begin{vmatrix}5&3&0&\cdots&0&0\\2&5&3&\cdots&0&0\\0&2&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&3\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}_{n\times n}$

令原式$=D_n$，则

$D_n=5D_{n-1}-2\begin{vmatrix}3&0&0&\cdots&0\\2&5&3&0&\cdots0\\0&2&5&3&\cdots0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}$

$=5D_{n-1}-6D_{n-2}$

其中$D_1=5$，$D_2=19$，$D_3=65$

则$D_n-2D_{n-1}=3(D_{n-1}-2D_{n-2})$

又$D_2-2D_1=9\Rightarrow D_n-2D_{n-1}=3^n$ ①

另一方面，$D_n-3D_{n-1}=2(D_{n-1}-3D_{n-2})$

$\Rightarrow D_n-3D_{n-1}=2^n$ ②

由①②$\Rightarrow D_n=3^{n+1}-2^{n+1}$

(4) $\begin{vmatrix}a&&&&&b\\&a&&&b&\\&&\ddots&\iddots&&\\&&\iddots&\ddots&&\\&b&&&a&\\b&&&&&a\end{vmatrix}_{2n\times2n}$

令原式$=D_{2n}$，则

$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}D_{2n-2}(-1)^{2n+1+2n+1}$

$=(a^2-b^2)D_{2n-2}$

$=(a^2-b^2)^2D_{2n-4}$

$=\cdots$

$=(a^2-b^2)^n$

四. (10 分) 设 p 是一个素数，给出 $f(x)=x^p-1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的标准分解式，并证明。

$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)$

$x-1$ 为一次因式，不可约。令 $\bar{f}(x)=x^{p-1}+\cdots+x+1$

令 $x=y+1$，则 $(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)\cdot(x-1)=x^p-1$

$\Rightarrow y\cdot\bar{f}(y+1)=(y+1)^p-1=y^p+\binom{p}{1}y^{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}y$

$\Rightarrow \bar{f}(y+1)=y^{p-1}+\binom{p}{1}y^{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-1}$

考虑素数 p，由于 $p\nmid 1$，$p\mid\binom{p}{1},\cdots,p\mid\binom{p}{p-1}$ 但 $p^2\nmid\binom{p}{p-1}$，故 $\bar{f}(y+1)$ 不可约

综上，$x-1$ 与 $x^{p-1}+\cdots+x+1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中均不可约。

五. (10 分) 设 A 为 n 阶方阵，其中 $n\geq 2$，记 A^* 为 A 的伴随矩阵，证明

$$r(A^*)=\begin{cases} n, \text{当 } r(A)=n; \\ 1, \text{当 } r(A)=n-1; \\ 0, \text{当 } r(A)\leq n-2. \end{cases}$$

这里 r 表示矩阵的秩。

$r(A)=n \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow r(A^*)=n$

$r(A)=n-1 \Rightarrow A^*\neq 0$，且 $|A|=0$，因为 $AA^*=0$

$\Rightarrow r(A)+r(A^*)\leq n$，又 $r(A)=n-1$

$\Rightarrow r(A^*)\leq 1$

由于 $A^*\neq 0 \Rightarrow r(A^*)\geq 1$ 故 $r(A^*)=1$

$r(A)\leq n-2 \Rightarrow A^*=0 \Rightarrow r(A^*)=0$

六．（10 分）设$f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^3+\cdots+x_n^3$，其中$n\geq 3$，将$f(x_1,\cdots,x_n)$用初等对称多项式表示。

指数序列　对应s_i方幂乘积

$3000\cdots$　$s_1^{3-0}=s_1^3$

$2100\cdots$　$s_1^{2-1}s_2^{1-0}=s_1s_2$

$1110\cdots$　$s_1^{1-1}s_2^{1-1}s_3^{1-0}=s_3$

设 $f(x_1,\cdots,x_n)=a s_1^3+b s_1s_2+cs_3$

由于 $f(1,0,0,\cdots)=1$

$f(1,1,0\cdots)=2$　$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=3\end{cases}$　即 $f(x_1,\cdots,x_n)=s_1^3-3s_1s_2+3s_3$

$f(1,1,-1,0\cdots)=1$

七．（15 分）假设A是一个实n阶方阵，记I_n为n阶单位矩阵，证明：

1）若$A^2=I_n$，则$r(A+I_n)+r(A-I_n)=n$；

2）若$A^2=A$，则$r(A)+r(A-I_n)=n$。

1) $A^2-I=0\Rightarrow(A+I)(A-I)=0\Rightarrow r(A+I)+r(A-I)\leq n$

又 $(\underset{I+A}{\cancel{\quad}})+(\underset{I-A}{\cancel{\quad}})=2I$、由于 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

故 $r(I+A)+r(I-A)\geq n$ 即 $r(A+I)+r(A-I)\geq n$

$\Rightarrow r(A+I)+r(A-I)=n$

2) $A^2-A=0\Rightarrow A(A-I)=0\Rightarrow r(A)+r(A-I)\leq n$

又 ~~■~~ $(I-A)+A=I\Rightarrow r(I-A)+r(A)\geq n$

即 $r(A-I)+r(A)\geq n$

$\Rightarrow r(A)+r(A-I)=n$

八．（15 分）假设R是一个有单位元的交换环，定义R上的**形式幂级数环**(ring of formal power series)为

$$R[[x]] = \{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots | a_i \in R\}$$

类似于$R[x]$中的加法和乘法，可以定义$R[[x]]$中的加法和乘法，使得其是一个有单位元的交换环。

1） 证明$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 在 $R[[x]]$ 中有乘法逆元当且仅当a_0在R中有乘法逆元；

2） 求 $1 - x$ 在$R[[x]]$中的乘法逆元；

3） 证明$R[[x]]$是一个整环当且仅当R是一个整环。

1> 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$，$g(x)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$，则 $f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)x^k$

若 $f(x)g(x)=1 \Rightarrow a_0 b_0 = 1$，$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = 0 \quad (k\geq 1)$ 即 $b_k = -b_0 \sum_{i=0}^{k-1} a_i b_{k-i}$

即 a_0可逆、$b_0 = a_0^{-1}$、$b_k = -b_0 \sum_{i=0}^{k-1} a_i b_{k-i} \quad (k\geq 1)$

反之、若a_0可逆，则可定义 $g(x)$如上使得 $f(x)g(x)=1$.

2) $(1-x)(1+x+x^2+\cdots)$

$=(1+x+x^2+\cdots)-(x+x^2+x^3+\cdots)$

$=1$

故 $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

3> 由于 $R[[x]]$ 是一个有单位元的交换环，只需证明无零因子即可.

$\Rightarrow$：若$R[[x]]$是一个整环，则 $\forall$ $a, b \in R$ 且 $a\neq 0, b\neq 0$，由于$a, b\in R[[x]]$

故 $ab \neq 0$

$\Leftarrow$： $\forall$ $f(x), g(x) \in R[[x]]$，且 $f(x)\neq 0$、$g(x)\neq 0$，不妨设 $f(x)$和$g(x)$次数

最低非零项分别为 ax^n 和 bx^m，其中 $a\neq 0$、$b\neq 0$，故

$f(x)g(x) = abx^{m+n}$ + 高阶项

由于R是整环，故$ab\neq 0$，即 $f(x)g(x)\neq 0$.