代数学基础 I 期中考试简明参考答案

（2025 年 11 月 16 日）

一、（18 分）设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是一个 n 阶方阵，其中 $a_{ij}=i+j$。计算 A 的行列式的值。

解. 因为

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\\vdots&\vdots\\n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$$

因此当 $n\ge 3$ 时，根据 Cauchy-Binet 公式，有 $|A|=0$（也可通过行列变换制造相同的两行/列）。当 $n=1$ 时，$|A|=2$。当 $n=2$ 时，$|A|=(-1)\times 1=-1$。 □

二、（20 分）求下面方阵的逆阵：

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1&2\\0&0&0&3&4\\1&-1&1&0&0\\0&2&-1&0&0\\2&-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

解. 令

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\2&-1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则原矩阵可以写成

$$\begin{pmatrix}C&A\\B&O_{3\times 2}\end{pmatrix}$$

其逆阵为

$$\begin{pmatrix}O_{3\times 2}&B^{-1}\\A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\end{pmatrix}$$

所以只需要口算出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

和

$$-A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

由此我们知道原矩阵的逆为

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -2 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

（也可以不分块而直接用初等行变换法求逆。） □

三、（20 分）求 λ 的值，使得下列线性方程组有解：

$$\begin{cases}2x_1-(2\lambda-2)x_2+4x_4+x_5=5\lambda-9\\ x_1-(\lambda-1)x_2+2x_3+2\lambda x_4=2\lambda\\ x_3+(\lambda-1)x_4+2x_5=\lambda+2\\ x_1-(\lambda-1)x_2+2x_4+x_5=3\lambda-5\end{cases}$$

并求出此时方程组的所有解。

解. 该线性方程组写成矩阵形式就是：

$$\begin{pmatrix}2 & -(2\lambda-2) & 0 & 4 & 1\\ 1 & -(\lambda-1) & 2 & 2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda-1 & 2\\ 1 & -(\lambda-1) & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}5\lambda-9\\ 2\lambda\\ \lambda+2\\ 3\lambda-5\end{pmatrix}$$

我们用初等行变换法化简:

$$
\begin{pmatrix}
2 & -(2\lambda-2) & 0 & 4 & 1 & 5\lambda-9 \\
1 & -(\lambda-1) & 2 & 2\lambda & 0 & 2\lambda \\
0 & 0 & 1 & \lambda-1 & 2 & \lambda+2 \\
1 & -(\lambda-1) & 0 & 2 & 1 & 3\lambda-5
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_4}
\begin{pmatrix}
1 & -(\lambda-1) & 0 & 2 & 1 & 3\lambda-5 \\
0 & 0 & 1 & \lambda-1 & 2 & \lambda+2 \\
1 & -(\lambda-1) & 2 & 2\lambda & 0 & 2\lambda \\
2 & -(2\lambda-2) & 0 & 4 & 1 & 5\lambda-9
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}
\begin{pmatrix}
1 & -(\lambda-1) & 0 & 2 & 1 & 3\lambda-5 \\
0 & 0 & 1 & \lambda-1 & 2 & \lambda+2 \\
0 & 0 & 2 & 2\lambda-2 & -1 & -\lambda+5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\lambda+1
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3-2r_2}
\begin{pmatrix}
1 & -(\lambda-1) & 0 & 2 & 1 & 3\lambda-5 \\
0 & 0 & 1 & \lambda-1 & 2 & \lambda+2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -3\lambda+1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\lambda+1
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3-5r_4}
\begin{pmatrix}
1 & -(\lambda-1) & 0 & 2 & 1 & 3\lambda-5 \\
0 & 0 & 1 & \lambda-1 & 2 & \lambda+2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda-4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\lambda+1
\end{pmatrix}
$$

因此方程组有解当且仅当 $\lambda=2$，此时上面的矩阵为

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}
$$

因此存在两个自由变量 x_2 和 x_4，故方程组的通解为

$$
x=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}
$$

□

四、（12 分）设 A、B 都是 n 阶可逆方阵，满足 $ABA = B$ 和 $BAB = A$。证明：$A^2 = B^2$ 和 $A^4 = B^4 = I_n$。

证明. 对 $ABA = B$ 两边左乘 A^{-1}，有 $BA = A^{-1}B$；对 $BAB = A$ 两边右乘 B^{-1} 有 $BA = AB^{-1}$。对比两式，得到 $A^{-1}B = AB^{-1}$。对其两边左乘 A，右乘 B，得到 $B^2 = A^2$。

将 $B = ABA$ 带入 $BAB = A$，有 $ABAAB = A$。两边左乘 A^{-1}，得到 $BAAB = I_n$。带入之前得到的 $A^2 = B^2$，就得到了 $B^4 = I_n$。对称地，可得到 $A^4 = I_n$。 □

五、（15 分）设 A 是一个 n 阶方阵。已知存在正整数 k，使得 $A^k = O_n$。

1. 证明：A 不可逆。
2. 证明：$I_n - A$ 可逆。
3. 设 B 是一个 n 阶方阵，满足 $AB = BA$。证明：$I_n + AB$ 可逆。
4. 举例说明若去掉 $AB = BA$ 的条件，上一问结论不成立。

证明. 1. 对 $A^k = O_n$ 的两边取行列式得到 $|A|^k = 0$，因此 $|A| = 0$。

2. 我们计算

$$\begin{aligned} & (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ = \; & I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + A^k) \\ = \; & I_n - A^k = I_n \end{aligned}$$

因此 $I_n - A$ 可逆。

3. 我们计算

$$\begin{aligned} & (I_n + AB)(I_n - AB + (AB)^2 + \cdots + (-1)^{k-1}(AB)^{k-1}) \\ = \; & I_n - AB + (AB)^2 + \cdots + (-1)^{k-1}(AB)^{k-1} \\ & +(AB - (AB)^2 + (AB)^3 + \cdots + (-1)^{k-1}(AB)^k) \\ = \; & I_n + (-1)^{k-1}(AB)^k = I_n \end{aligned}$$

这里最后一个等号成立的原因是 $(AB)^k = A^kB^k = O_n$。

4. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $A^2 = O_2$，且

$$I_2 + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不可逆。

$\square$

六、(15 分) 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，W 是 V 的一个子空间。定义 V 上的一个二元关系 $\sim_W$ 为

$$\alpha \sim_W \beta \text{ 当且仅当 } \beta - \alpha \in W.$$

1. 证明：$\sim_W$ 是一个等价关系。
2. 设 $\alpha \in V$，证明包含 α 的等价类（即和 α 等价的元素全体构成的集合）为
$$\alpha + W := \{\alpha + \beta \mid \beta \in W\}.$$
3. 设 $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma' \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{F}$ 满足 $\alpha \sim_W \gamma$，$\alpha' \sim_W \gamma'$，证明下面两个等式成立：
$$(\alpha + \alpha') + W = (\gamma + \gamma') + W, \quad \lambda\alpha + W = \lambda\gamma + W.$$
4. 记 V/W 为 V 关于等价关系 $\sim_W$ 的商集，即所有等价类构成的集合。我们定义 V/W 上的加法和数乘为
$$(\alpha + W) + (\alpha' + W) = (\alpha + \alpha') + W, \quad \lambda(\alpha + W) = \lambda\alpha + W.$$
证明：V/W 关于上述定义的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

证明. 1. (1) 自反性：对任意 $\alpha \in V$，都有 $\alpha - \alpha = \mathbf{0} \in W$。因此，$\alpha \sim_W \alpha$，$\forall \alpha \in V$。这就说明 $\sim_W$ 具有自反性。

(2) 对称性：对任意 $\alpha, \beta \in V$，若 $\alpha \sim_W \beta$，由定义，就说明 $\beta - \alpha \in W$。所以 $\alpha - \beta = -(\alpha - \beta) \in W$。故 $\beta \sim_W \alpha$。这就说明 $\sim_W$ 有对称性。

(3) 传递性：对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$，若 $\alpha \sim_W \beta$ 且 $\beta \sim_W \gamma$，则由定义，$\beta - \alpha \in W$ 且 $\gamma - \beta \in W$。因此 $\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) - (\beta - \alpha) \in W$。故 $\alpha \sim_W \gamma$。这就说明 $\sim_W$ 有传递性。

综上，$\sim_W$ 具有等价性。

2. 一方面，若 $\alpha' \sim_W \alpha$，则 $\alpha - \alpha' = \beta \in W$。所以 $\alpha' = \alpha - \beta \in \alpha + W$。反之，若 $\alpha' = \alpha + \beta$，其中 $\beta \in W$，则 $\alpha' - \alpha \in W$。故 $\alpha' \sim_W \alpha$。

3. 因为 $\alpha - \gamma, \alpha' - \gamma' \in W$，所以
$$(\alpha + \alpha') - (\gamma + \gamma') = (\alpha - \gamma) + (\alpha' - \gamma') \in W$$
和
$$\lambda\alpha - \lambda\gamma = \lambda(\alpha - \gamma) \in W.$$
因此，由上一问，我们就得到了所要的等式。

4. 逐项验证 8 条公理（此处略去）。

(1) 加法结合律：对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in V$，有

$$\begin{aligned}((\alpha+W)+(\beta+W))+(\gamma+W) &= ((\alpha+\beta)+W)+(\gamma+W)\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)+W\\ &= (\alpha+W)+((\beta+\gamma)+W)\\ &= (\alpha+W)+((\beta+W)+(\gamma+W)).\end{aligned}$$

(4) 加法交换律：对任意 $\alpha,\beta\in V$，

$$(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W=(\beta+\alpha)+W=(\beta+W)+(\alpha+W).$$

(2) 加法单位元：对任意 $\alpha\in V$，

$$(\alpha+W)+(\mathbf{0}+W)=(\alpha+\mathbf{0})+W=\alpha+W$$

所以 $W=\mathbf{0}+W$ 是加法单位元

(3) 加法逆元：对任意 $\alpha\in V$，

$$(\alpha+W)+(-\alpha+W)=(\alpha+(-\alpha))+W=(\mathbf{0})+W$$

所以 $\alpha+W$ 总有加法逆元，它就是 $-\alpha+W$。

(5) 对任意 $\alpha\in V$，$\lambda,\mu\in\mathbb{F}$，

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)(\alpha+W)=(\lambda+\mu)\alpha+W=(\lambda\alpha+\mu\alpha)+W\\ &=(\lambda\alpha+W)+(\mu\alpha+W)=\lambda(\alpha+W)+\mu(\alpha+W)\end{aligned}$$

(6) 对任意 $\alpha,\beta\in V$，$\lambda\in\mathbb{F}$，

$$\begin{aligned}&\lambda\left((\alpha+W)+(\beta+W)\right)=\lambda\left((\alpha+\beta)+W\right)=\lambda(\alpha+\beta)+W\\ &=(\lambda\alpha+\lambda\beta)+W=(\lambda\alpha+W)+(\lambda\beta+W)=\lambda(\alpha+W)+\lambda(\beta+W)\end{aligned}$$

(7) 对任意 $\alpha\in V$，$\lambda,\mu\in\mathbb{F}$，

$$(\lambda\mu)(\alpha+W)=(\lambda\mu)\alpha+W=\lambda(\mu\alpha)+W=\lambda(\mu\alpha+W)=\lambda(\mu(\alpha+W))$$

(8) 对任意 $\alpha\in V$，

$$1(\alpha+W)=(1\alpha)+W=\alpha_W.$$

综上，V/W 是个线性空间。

□