北京师范大学 2020-2021学年第2学期

(王灯山)

《实变函数》课程期中考试试题

本试题共8道大题，满分100分。

1．证明集合相等：（每小题5分，共15分）

(1) 证明：

$$(a,b)=\bigcup_{k=1}^{\infty}[a+\frac{1}{k},b-\frac{1}{k}]$$

(2) 设$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$且$B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$，证明：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n).$$

(3) 设有两个集合列$\{A_n\}$和$\{B_n\}$，证明：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)=(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)\cup(\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n).$$

2．（15分）设$f(x)$是定义在$\mathbb{R}^1$上的实值函数，若对于任意$x_0\in\mathbb{R}^1$，必存在$\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\geq f(x_0)$，试证明集合$E=\{y:y=f(x)\}$是可数集合。

3．（10分）设$\{A_k\}\subset\mathbb{R}^n$是闭集合列，且$\mathbb{R}^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，则$\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{A}_k$在$\mathbb{R}^n$中稠密。

4．（10分）利用Cantor闭集套定理证明$\mathbb{R}^n$中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖。

5．（10分）设E_1,E_2是$\mathbb{R}^1$中的非空集合，且$E_2'\neq\emptyset$，证明：

$$E_1+E_2'\subset(E_1+E_2)'.$$

6．（10分）设$E\subset\mathbb{R}$，且$0<\alpha<m(E)$，证明存在E中的有界闭集F，使得$m(F)=\alpha$

7．（15分）叙述卡拉西奥多里引理(Carathéodory Lemma)，并证明。如果有1/3的同学不会叙述，我给你们写在黑板上。

8．（15分）设$E\subset[0,1]$是可测集，且有$m(E)\geq\epsilon>0$，$x_i\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,n$，其中，$n>\frac{2}{\epsilon}$，试证明E中存在两个点其距离等于$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$中某两个点之间的距离。