

BNUZ 2023 秋季学期常微分方程期末考试

命题人： 考试时间：2024.1.2 10:20-12:20 整理人：Aut

一、(10 分) 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{x-y^2}}{2y}.$$

二、(10 分) 求解微分方程

$$x'' + 4x = 3t \sin t.$$

三、(15 分) 求解 Euler 方程

$$(2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = 0.$$

四、(15 分) 求解下列常系数非齐次微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 2. \end{cases}$$

五、(10 分) 考虑二阶微分方程 $y'' + 3y' + 2y = f(x)$, 其中 $f(x) \in C[0, +\infty)$. 证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 则原方程所有解在 $[0, +\infty)$ 上有界.

(2) 若 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, 则原方程所有解当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于 0.

六、(10 分) 用 Picard 定理求初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

在区域 $R: |x+1| \leq 1, |y| \leq 1$ 上解的存在区间, 并求二次近似解.

七、(10 分) 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

零解的稳定性.

八、(10 分) 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)}{1+2x^2+2y^2}$$

过 (x_0, y_0) ($0 < y_0 < 1$) 的解 $y = y(x)$ 的最大存在区间.

九、(10 分) 考虑 n 阶常系数齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx} = Ay,$$

其中 A 为常数矩阵. 证明:

(1) 若 $\Phi(x)$ 为标准基解矩阵, 即 $\Phi(0) = I$, 则 $\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0) = \Phi(x - x_0)$;

(2) 若 A 的特征值实部均小于 0, 那么该方程的任一解当 $x \rightarrow +\infty$ 时都趋于 0.