22-23 学年微分几何期末 彦文娇老师 (回忆版)

使用班级: *2021* 级强基班

1. (24 分, 每小题 6 分) 单位球面 $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$ 的球极投影表示:

$$\mathbb{R}^2 \to S^2(1) \backslash N$$
$$\boldsymbol{r}(u_1, u_2) = \left(\frac{2u_1}{1+|u|^2}, \frac{2u_2}{1+|u|^2}, \frac{|u|^2-1}{1+|u|^2}\right).$$

其中 N 是北极点 $(0,0,1)$, $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$.

(1) 求其第一基本形式;

(2) 求球面面积;

(3) 求 Christoffel 符号;

(4) 求 Gauss 曲率.

2. (1) (12 分) 证明正螺面 $\boldsymbol{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, av)$ 是极小曲面;

(2) (6 分) 证明直纹极小曲面是平面或者正螺面.

3. (14 分) 设曲面 S_1 和 S_2 的交线 C 的曲率为 κ, 曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率为 $\kappa_i (i = 1, 2)$; 若沿 C, S_1 和 S_2 法向的夹角为 θ, $(\theta \neq 0, \pi)$, 求 κ.

4. (14 分) 证明单位圆盘 $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的欧拉数为 1.

5. (30 分) 参数区域是上半平面 $\{(x, y) : y > 0\}$, Lobachevsky 曲面 H 有 Riemann 度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\mathrm{d}y),$$

(1) (10 分) 求 Gauss 曲率;

(2) (10 分) 求曲面 H 上的所有测地线;

(3) (10 分) 设 C 是 H 上的光滑曲线, $\boldsymbol{c}(t) = (t, 1)$, $t \in [0, 1]$, $\boldsymbol{v}_0 = (0, 1)$ 是 $c(0)$ 处的切向量, $\boldsymbol{V}(t)$ 是沿着曲线 C 平行移动的切向量场, 满足 $\boldsymbol{V}(0) = \boldsymbol{v}_0$, 求 $\boldsymbol{V}(t) = (a(t), b(t))$.

(4)(附加题, 10 分) 单位圆盘 D^2 上有 Poincarè 度量 $\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \dfrac{4(\mathrm{d}u\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\mathrm{d}v)}{(1-(u^2+v^2))^2}$, 用 (2) 中结论求其测地线.

不代表原卷, 仅是回忆版