北京师范大学 2022～2023 学年第 一 学期期末考试试卷（A 卷）

一（12 分）回答并解释拓扑空间$(\mathbb{R},\tau_f)$是否满足以下性质：
（1）分离公理 T1, T2, T3, T4？（2）紧致？（3）连通？

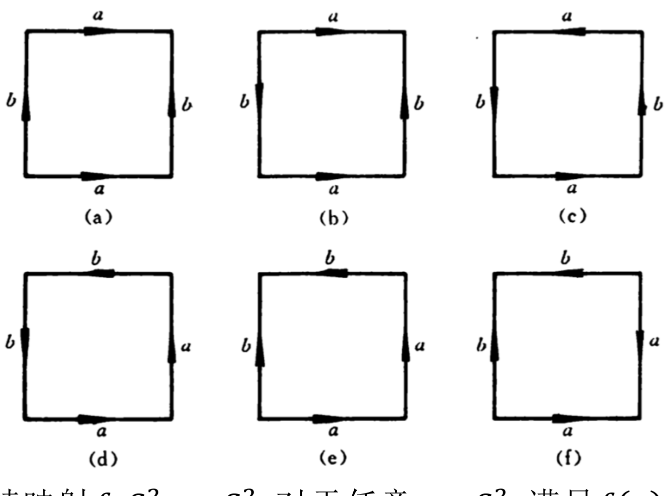
二（10 分）考虑映射$f:(-\pi,\pi)\longrightarrow E^2$，$t\longmapsto(\sin t,\sin 2t)$. 问：$f$是否为嵌入映射？

三（10 分）设$B^n\coloneqq\{x\in E^n \mid |x|<1\}$ 是E^n中的单位实心球。请明确构造下面空间之间的同胚映射：
（1）B^n与E^n；（2）$E^n\setminus\{O\}$与 $E^n\setminus\overline{B^n}$，这里$O$是原点。

四（18 分）对于拓扑空间$(\mathbb{R},\tau_{\text{Sorgenfrey}})$，其中 $\tau_{\text{Sorgenfrey}}$ 是由$\mathbb{R}$上的拓扑基$\mathcal{B}=\{\,[a,b)\mid a<b\}$生成的拓扑。证明：
（1）$(\mathbb{R},\tau_{\text{Sorgenfrey}})$ 是 C1 的；
（2）$(\mathbb{R},\tau_{\text{Sorgenfrey}})$ 是可分的，但不是 C2 的，且不可度量化；
（3）$(\mathbb{R},\tau_{\text{Sorgenfrey}})$ 满足 T2，T4 公理。

五 （12 分）设拓扑空间(X,τ)为紧致，Hausdorff 空间。X上另有两个拓扑τ_1,τ_2满足 $\tau_1\subsetneq\tau\subsetneq\tau_2$。说明：$(X,\tau_1),(X,\tau_2)$ 是否为紧致空间？是否为 Hausdorff 空间？

六（18 分）箭头表示粘接方式，指出并解释以下图形各表示哪个曲面。



七（8 分）设连续映射$f:S^2\longrightarrow S^2$ 对于任意$x\in S^2$ 满足$f(x)\neq f(-x)$。证明：f 是满射。

八（12 分）求下列空间的基本群：
(1) E^2上去掉 3 个点；
(2) S^2上去掉 3 个点；
(3) T^2上去掉 3 个点.