

数学分析 II

2022.4.27

考试要求:

1. 写清答题依据, 无支持的结论将被扣除相应分数;
2. 雷同答题所得分数为应得分数除以雷同卷子数;

1. (24 分) 计算下列积分.

$$(1) \int_{-2}^2 \min \left\{ \frac{1}{|x|}, x^4 \right\} dx, \quad (2) \int_0^1 x e^x dx, \quad (3) \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx, \quad (4) \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4}.$$

2. (16 分) 计算曲边梯形 $\{(x, y); 0 \leq y \leq x^3, x \in [0, 1]\}$ 绕 y 轴旋转一周所产生的旋转体的体积和表面积.

3. (20 分) 确定幂级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ 的收敛域, 并求其和函数.

4. (20 分) 讨论函数项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^{3/2}}$.

- (1) 给出收敛域.
- (2) 确定其和函数的连续区间.
- (3) 确定其和函数的逐项可微区间.

5. (10 分) 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \sin \frac{1}{t} dt, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{1 + \cos^n x} dx$$

6. (5 分) 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 且 $\frac{1}{f}$ 在 $[a, b]$ 上有界, 证明 $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$.

7. (5 分) 设 $f \in C^1(a, b)$, 令

$$F_n(x) := \frac{n}{2} \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f \left(x - \frac{1}{n} \right) \right], x \in (a, b), n \in \mathbb{N}_+.$$

证明函数列 $\{F_n\}$ 在区间 (a, b) 上处处收敛, 且内闭一致收敛.

附加题 1 (5 分) 对 $(0, 1)$ 区间中的小数 $x = 0.x_1x_2x_3 \cdots$, 定义 $f(x) = 0.x_10x_20x_30 \cdots$. 试讨论函数 f 的连续性和可积性.

附加题 2 (5 分) 利用不定积分 $\int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx = -\frac{1}{3} \arctan \frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1} + C$, 计算定积分 $\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$.