TOPOLOGY REVIEW QUESTIONS

Harvey Peng

一. 判断

判断正误, 并简要说明理由.

1. 设 $A \subset X$, 若 A 在 X 中闭, 则 A 在 X 上任何更精细的拓扑中也是闭的. ( )

2. 若拓扑空间 X 中收敛点列的极限都唯一, 则 X 是 Hausdorff 空间. ( )

3. 赋予离散拓扑的两个集合 X 和 Y 同胚当且仅当二者有相同的基数. ( )

4. 设 $f : X \to Y$ 是连续单射. 若 f 是开 (闭) 映射, 则 f 是嵌入映射. ( )

5. 设 A 是拓扑空间 X 的子空间. 若 A 连通, 则 $\bar{A}$ 也连通. ( )

6. 设 A 是拓扑空间 X 的子空间. 若 $\bar{A}$ 连通, 则 $\mathring{A}$ 也连通. ( )

7. 设 A 是拓扑空间 X 的子空间. 若 $\mathring{A}$ 连通, 则 $\bar{A}$ 也连通. ( )

8. 定义 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = \sin(1/x)$, 则可通过补充定义 f 在 0 处的函数值, 从而将其连续延拓为 $[0,1)$ 上的连续函数 $\tilde{f} : [0,1) \to \mathbb{R}$. ( )

9. 若 X 连通, 则 X 在更粗的拓扑下仍然连通. ( )

10. 赋予余有限拓扑的不可数集满足 C_2 公理. ( )

11. 赋予余有限拓扑的任意集合是紧集. ( )

12. 任意多个紧空间的乘积空间 (在乘积拓扑下) 是紧的. ( )

13. 设 f, g 是 X 中的道路, 且 $f \simeq g \text{ rel } \{0,1\}$, 则 $f^{-1} \simeq g^{-1} \text{ rel } \{0,1\}$. ( )

14. 设 f 是 X 中的闭道路, 则 $ff^{-1} = f^{-1}f$. ( )

15. 任何可缩空间的基本群平凡. ( )

16. S^1 是 D^2 的收缩核. ( )

17. $D^2 \backslash \{0\}$ 与 $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 同胚. ( )

18. $D^2 \backslash \{0\}$ 与 S^1 同胚. ( )

二. 反例

下面命题都是错误的, 每个命题举一个反例.

19. 设 S 是 X 的子空间, A 是 X 的子集, 则 $\overline{A \cap S}^{|S} = \overline{A}^{|X} \cap S$, 左侧是 $A \cap S$ 在 S 中的闭包, 右侧是 A 在 X 中的闭包与 S 的交集.

20. 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 则 $\overline{X \backslash A} = X \backslash \bar{A}$.

21. 设 (X, τ_X) 和 (Y, τ_Y) 是拓扑空间, $f : X \to Y$ 连续. 若 τ_X 是离散拓扑, 则 $f(X)$ 在 Y 中的子空间拓扑也是离散拓扑.

22. 若存在 $X \to Y$ 和 $Y \to X$ 的嵌入映射, 则 X 与 Y 同胚.

23. 可缩空间都是凸集, 凸集都是可缩的.

三. 证明

24. 证明任何空间 X 的锥空间 CX 都是可缩的.

25*. 证明 $[0,1]$ 不能写成有限个 $(\geqslant 2)$ 或可数个非空不交闭子集的并.

26. 证明 $(\mathbb{N}, \tau_f)$ 是局部连通的, 但不是局部道路连通的.

27. 设 X 和 Y 是同伦等价的道路连通空间. 证明: 对任意 $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 都有 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

28. 设 X 是"拓扑学家的正弦曲线", 即 $X = A \cup B$, 其中 $A = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1)\}, B = \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. 证明 $\pi_1(X, x_0) = \{1\}, \forall x_0 \in X$.