

25 春- 复变函数 (回忆版)

July 23, 2025

1. $w = (1+i)^4 + (1-i)^4$, 解方程 $z^5 = w$
2. (a) f 是区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上的复值函数, 给出 f 是全纯函数的充要条件 (尽量多写)
(b) 若 $f \in \mathcal{O}(D)$ (全纯函数) 的实部恒为常数, 证明 f 是常值函数
3. $f \in \mathcal{O}(\Delta), f(0) = 0$, 且 $\operatorname{Re}(f(z)) \leq A, A > 0$, 证明

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}$$

(Δ 表示复平面上的单位圆盘)

4. 求 $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ (上半平面的共形变换群)
5. $a > 0$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{a^2+x^2} dx$
6. (a) 求 $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ 在 $1 < |z+1| < +\infty$ 时的 Laurent 展开
(b) 判断 $\frac{1}{1+z^2} \cos \frac{z}{z-1}$ 的孤立奇点类。若为极点, 则求出其阶数
7. 证明 $z^4 - 6z + 3$ 在 $|z| < 1$ 时有 1 个根, 在 $1 < |z| < 2$ 时有 3 个根
8. 给出将 $|z-1|=1$ 和 $|z-3|=3$ 所围成的区域映为 \mathbb{H} 的共形映射
9. $f(z) = \sqrt[3]{z^2(1-z)}$, 证明 $f(z)$ 有 3 个单值解析分支, 分别求出各分支的最大定义域, 并求在 $z=2$ 处取负值的解析分支在 $z=i$ 处的值