25 春- 代数学基础 2（回忆版）

July 23, 2025

---

1. 求过渡矩阵
2. 证明对称矩阵构成向量空间，并求其维数
3. $$\begin{aligned} \varphi : M_n(F) &\to F \\ A &\mapsto \mathrm{tr} A \end{aligned}$$
   证明 φ 是线性映射，求 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 和 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 的维数，并给出 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 的一组基
4. $\tau : \xi \mapsto \xi - \frac{(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$，证明 $W = \langle \alpha \rangle$ 和 $W^{\perp}$ 在 τ 下不变
5. 求特征值和特征向量
6. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$ 在 $\mathbb{C}$ 上非退化，求典范型
7. 某个矩阵的特征多项式为 $(x-5)^2(x+3)^4$，极小多项式为 $(x-5)^2(x+3)$，求其 Jordan 标准型
8. 定义全体次数小于 3 的实多项式空间上的内积为 $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$
   (a) 求 1 和 x 的夹角
   (b) 与 1 夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的全体向量
   (c) 求 $\langle 1, x \rangle$ 的正交补空间
   (d) 找出空间的一组规范正交基
9. 证明 $|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2$
10. 证明 A 可逆当且仅当 A 的极小多项式的常数项非 0