

2025 ~ 2026 学年第一学期期中考试试卷 (A 卷)

课程名称: 拓扑学

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷

一 (共 30 分) 判断以下五对拓扑空间是否同胚, 并简要说明理由。

- (a) 开区间 $(0, 1)$ 和闭区间 $[0, 1]$;
- (b) 平环和 Möbius 带;
- (c) \mathbb{R}^2 去掉一点和 \mathbb{R}^2 去掉一个闭圆盘;
- (d) 将矩形长条带子扭转 360 度, 再沿两侧粘接所得空间和平环;
- (e) 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 去掉一个开圆盘和 Klein 瓶去掉一个开圆盘;

二 (12 分) 利用定义直接证明, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 在每点都连续, 当且仅当对 X 的任意子集 A , f 都把 A 的闭包映入 $f(A)$ 的闭包。

三 (12 分) 根据定义直接证明: 紧致 Hausdorff 空间是 T_4 空间。

四 (8 分) 证明: \mathbb{R}^2 去掉可数个点是连通的。

五 (16 分) 若 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ 连续, 证明: 存在 t , 使得 $f^{-1}(t)$ 是不可数集, 并且原像集是可数集的点不超过两个。

六 (12 分) 定义球面到四维欧氏空间的映射 $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$, 证明: $f(S^2) \cong \mathbb{R}P^2$ (射影平面 P^2)。

七 (10 分) 确定由符号 $abca^{-1}cdeb^{-1}fedf$ 给出的多边形表示粘合之后得到的是哪种闭曲面? 并简要说明理由。