北京师范大学 2025-2026 学年第一学期期中考试试卷

课程名称: 数学分析 I　　任课教师姓名:

数学科学 学院 数学 专业 2025 级

分数:

考试要求:

1. 写清答题根据, 无支持的结论将被扣除分数;
2. 雷同答题所得分数为应得分数除以雷同卷子数.

1. (25 分) 设函数 f 定义在 $\mathbb{R}$ 上.

(1) 叙述 f 在 $a \in \mathbb{R}$ 点收敛的 $\epsilon - \delta$ 定义.

(2) 叙述 f 在 $a \in \mathbb{R}$ 点处局部有界的定义.

(3) 叙述紧集的定义和有限覆盖定理.

(4) 证明: 如果 f 在 $a \in \mathbb{R}$ 点收敛, 则 f 在 $a \in \mathbb{R}$ 点处局部有界.

(5) 证明: 如果 f 在有界闭区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的每点收敛, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界, 也称 f 在 $[a,b]$ 上全局有界.

2. (24 分) 计算极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3\sin^2 x + \cos^2 x}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)\sin^2 n$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + \sin x}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

3. (15 分) 讨论以下数列 $\{a_n\}$ 的敛散性.

(1) $a_n = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2})$.

(2) $a_1 = \sqrt[3]{3},\ a_2 = \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}},\ a_3 = \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}}},\ \cdots,\ a_{n+1} = \sqrt[3]{3}^{a_n}$.

(3) $a_n = \dfrac{\cos 2}{2(2+\cos 2)} + \dfrac{\cos 3}{3(3+\cos 3)} + \cdots + \dfrac{\cos n}{n(n+\cos n)}$.

4. (10 分) 设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空. 证明存在属于 A 的点列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf A$.

5. (5 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{[nx_n]}{n} = a$.

6. (8 分) 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 证明 $f(x) \equiv 0$.

7. (8 分) 设定义在区间 (a,b) 上的函数 f 单调递减, 对于任意 $c \in (a,b)$, 证明存在极限 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.

8. (5 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $a_{m+n} \le a_n + a_m$,

证明数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 有极限且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = \inf\limits_{n\ge1} \left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$.

附加题 1 (5 分) 设映射 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在区间 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ 上不恒为 0.

(1) 证明: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in(a,b);\ |f(x)|\geq\frac{1}{n}\right\}=\{x\in(a,b);f(x)\neq 0\}$.

(2) 若还假定: 对任意 $c\in(a,b)$, $\lim_{x\to c}f(x)=0$. 试证明: 集合 $\{x\in(a,b);f(x)\neq 0\}$ 至多可数.

附加题 2 (5 分) 对区间 $(0,1)$ 中的小数 $x=0.x_1x_2x_3\cdots$,定义 $f(x)=0.x_10x_20x_30\cdots$. 试讨论函数 f 在 $(0,1)$ 上每点的极限是否存在.