

课程名称: 微分几何 任课教师姓名: 高红铸

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系): 数学科学学院 专业: 励耘班 年级: 2022

姓名: _____ 学号: _____

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	总分
得分							

阅卷教师(签字): _____

本试题中所涉及的坐标系均是右手直角坐标系

一、(15 分) 已知曲线 $C: \begin{cases} x^3 = 3y \\ 2xz = 1 \end{cases}$, 求

- 1、 C 在平面 $y=1/3$ 和 $y=9$ 之间的弧段的长度;
- 2、 C 在点 $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 处的曲率。

二、(12 分) 记正则曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 的单位法向量函数是 $\mathbf{n}(u, v)$, 证明 S 是一个球心在原点的球面当且仅当 $\mathbf{r}(u, v) \times \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{0}$ 。

三、(20 分) 已知圆环面 $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = ((b + a \cos \varphi) \cos \theta, (b + a \cos \varphi) \sin \theta, a \sin \varphi)$, 其中 $0 < a < b$, 以及其上的三条曲线 $C_1: \theta=0, C_2: \varphi=\pi/2, C_3: \theta=\varphi$, 求

- 1、在圆环面上三条曲线所围成的曲边三角形的三个内角;
- 2、在圆环面上三条曲线所围成的曲边三角形的面积。

四、(20 分) 对于正螺旋面 $S: \mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, v)$, 证明

- 1、 S 是极小曲面;
- 2、 u 线和 v 线的角平分线是 S 的曲率线。

五、(15 分) 在旋转抛物面 $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, $u > 0$, 上建立正交切标架场 $\{e_1, e_2\}$, 并求诸微分形式 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ 。

六、(18 分) 已知曲面 S 在测地极坐标系下的第一基本形式是 $ds^2 = d\rho^2 + G(\rho, \psi) d\psi^2$,

- 1、求 ρ -线和 ψ -线的测地曲率;
- 2、假设一条曲线 C 处处与 ρ -线夹固定角 $\theta \in [0, \pi)$, 证明 C 是测地线的必要充分条件是 C 本身是一条 ρ -线