北京师范大学 2024–2025 学年第一学期高等代数 I 期中考试题 (A 卷)

课程名称：高等代数 I　　任课老师姓名：____

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷

院 (系)：____　　专　业：____　　年　级：____

姓　名：____　　学　号：____

一. (20 分) 计算下列行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

其中 $b_1b_2\cdots b_n \neq 0$.

二. (20 分) 讨论参数 λ 使得矩阵方程 $AX=B$ 有解, 并在有解的情况下求矩阵 X . 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

三. (20 分) 设分块矩阵 $D=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$, 证明

(1) $r(D) \geq r(A)+r(B)$;

(2) 若 A 或 B 是可逆矩阵, 则 $r(D)=r(A)+r(B)$.

四. (20 分) 设 G 是一个群, $Z(G)=\{x\in G \mid xg=gx, \forall g\in G\}$ 称为 G 的中心.

(1) 证明 $Z(G)$ 是 G 的子群.

(2) 对于群 $G=SL_n(\mathbb{C})$, 求 $Z(G)$ 和 $|Z(G)|$, 并说明理由.

五. (20 分) 设 R 是有单位元环, M 和 S 分别表示 R 中幂零元和可逆元集合 (对乘法运算).

(1) 当 R 是交换环时, 证明 M 是 R 的子环, 并对 $R=(\mathbb{Z}_{2^n},+,\cdot)$ 求出子环 M; 当 R 是非交换环时, 是否 M 仍是 R 的子环? 并且证明你的结论.

(2) 证明 $(S,\cdot)$ 是一个群, 并对 $R=(\mathbb{Z}_{2^n},+,\cdot)$, 求出 S 中的全部元.