

北京师范大学 2023~2024 学年第一学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 数学分析(1)

任课教师姓名:

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷

院(系): 专业: 年级:

姓名: 学号:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
成绩																

一、计算题 (共 50 分, 每题 5 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ .

2. 设  $f$  是可导函数, 求函数  $y = f(e^x)e^{f(x)}$  的导数.

3. 求不定积分  $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$ .

4. 求定积分  $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx$ .

5. 求反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ .

6. 设函数  $f$  可微,  $w = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$ , 求  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .

7. 讨论函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$  在原点  $(0, 0)$  处的连续性, 偏导数的存在性以及可微性.

8. 求二重积分  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = 3a$ ,  $y = a$ ,  $y = x$ ,  $y = a + x$  围成的闭区域,  $a \geq 0$ .

9. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{1}{n} \pi + \sin \frac{2}{n} \pi + \cdots + \sin \frac{n-1}{n} \pi \right)$ .
10. 求由曲线  $y^2 - 2xy + x^3 = 0$  所围图形的面积.

二、证明题 (共 50 分, 每题 10 分)

11. 证明: 若  $f'(x_0)$  存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

12. 证明: 勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

满足方程:

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

13. 设  $h(x), f_n'(x)$  在  $[a, b]$  连续, 且对  $[a, b]$  中任意的  $x_1, x_2$  和正整数  $n$ , 有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \frac{M}{n} |x_1 - x_2|.$$

其中  $M > 0$  是常数, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h(x) f_n'(x) dx = 0.$$

14. 设  $z = f(x, y), x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$ , 求证:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

15. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上非负、连续、严格递增. 设  $x_n \in [a, b]$  满足

$$f^n(x_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx.$$

求数列  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  的极限并用极限的定义给出证明。(这里  $f^n$  是  $f$  的  $n$  次幂).