北京师范大学 2024~2025 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：　数学分析 (3)　　任课教师姓名：

卷面总分：　100 分　考试时长：　120 分钟　考试类别：　闭 卷

院(系)：__________ 专业：__________ 年级：__________

姓　名：__________ 学号：__________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
成绩																

一、计算题（共 50 分，每题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

2. 求函数 $f(x,y,z)=(xy,x^2+yz,yz^2)\in\mathbb{R}^3$ 在 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 处的 Frechet 导数.

3. 设 $x=u\cos\dfrac{v}{u}$, $y=u\sin\dfrac{v}{u}$ 存在反函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

4. 求由方程 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$ 所确定的隐函数的极值.

5. 求三重积分 $\displaystyle\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是由 $x^2+y^2+z^2=2$ 与 $x^2+y^2=z$ 所围闭区域.

6. 求第一型曲线积分 $J=\displaystyle\int_\Gamma\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

7. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=4az$, $x^2+y^2=3z^2$ (此立体含 z 轴) 所围立体的体积.

8. 求第二型曲面积分 $\displaystyle\iint_S(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其

中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx\ (0<r<R)$ 所截之部分的上侧.

9. 计算曲线积分 $\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线, 方向是: 从 Ox 轴正向看去, Γ 依逆时针方向进行.

10. 求 $I=\oint_L \dfrac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y]$. 其中 L 为不经过原点的简单封闭光滑曲线, 取逆时针方向.

二、证明题（共 50 分，每题 10 分）

11. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 $\mathbb{R}^n$ 一致连续, 如果 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列, 求证: $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 Cauchy 列.

12. 设二元数值函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$ 内处处存在，且在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，求证：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{x}_0).$$

13. 设二元数值函数 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 连续, 且 $f(x,y)=f(y,x)$, 求证:

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\,\mathrm{d}y.$$

14. 设 $y=y(x)$ 是方程 $x=ky+\varphi(y)$ 所确定的隐函数, 其中常数 $k\neq 0$, $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的周期函数, 且 $|\varphi'(y)|<|k|$. 求证:

$$y=\frac{x}{k}+\psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

15. 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在平面上有连续偏导数, 而且对以 $\forall(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 为中心, 以 $\forall r>0$ 为半径的上半圆 $C: x=x_0+r\cos\theta,\ y=y_0+r\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 恒有

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

求证: $P(x,y)\equiv 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$.