北京师范大学 2019~2020 学年第二学期期中考试试卷（A 卷）

课程名称： 数学分析 (2) **任课教师姓名：**

卷面总分： 100 分 **考试时长：** 120 分钟 **考试类别：** 闭 卷

院（系）：__________ 专业：__________ 年级：__________

姓　名：__________ 学号：__________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
成绩																

一、计算题（共 50 分，每题 5 分）

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日余项的泰勒公式.

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的凹凸区间与拐点.

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

4. 求数列 $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ 的上下极限.

5. 判断函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 (0,1) 上是否一致连续, 并说明理由.

6. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}}$ 的敛散性.

7. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

8. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]$ $(p>0)$ 的敛散性, 如果收敛, 说明是绝对收敛还是条件收敛.

9. 判断反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{2020}}{1+x}dx$ 的敛散性.

10. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt$, 求 $f'(0)$.

二、证明题（共 50 分，每题 10 分）

11. 叙述列紧性原理, 并用闭区间套原理证明列紧性原理.

12. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负连续可微, $f(0)=f(1)=0$, 且 $|f'(x)| \leqslant 1$. 求证

$$\int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{1}{4}.$$

又问上面的不等式是否可能成为等式, 为什么?

13. 设 $f(x) \in R[a,b]$, 求证: $e^{f(x)} \in R[a,b]$.

14. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,(a_n>0)$ 收敛, $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ 称为它的余项.

(1) 当 $0<p<1$ 时, 求证: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{r_k^p} < \int_0^S \frac{dx}{x^p}$(其中 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$);

(2) 当 $0<p<1$ 时, 令 $b_n = \frac{a_n}{r_n^p}$, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛慢, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.