概率论: 期中考试(适用于2022级数学强基班)
1. 满分220分, 60 分及格; 2. 假设你卷面成绩是 ξ, 则你的期中成绩是 $\xi \wedge 100$
Nov. 24, 2023

1. (30') 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一个可测空间, P 是 $\mathcal{F}$ 上的非负函数且 $P(\Omega)=1$, 证明下列命题等价:
   (1) P 可列可加;
   (2) P 有限可加且下连续(下连续指: 如果 $A_n \subset A_{n+1}$, 则 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$);
   (3) P 有限可加且次可列可加.

2. (70') 设 $(X_n, n \geq 1)$ 和 $(Y_n, n \geq 1)$ 都是取值于 $\{0, 1\}$ 的随机变量序列.
   (1) 证明 X_1, Y_1 相互独立当且仅当 $E[X_1 Y_1] = E[X_1]E[Y_1]$.
   (2) 以下均假设 $(X_n, Y_m; n, m \geq 1)$ 相互独立, 且对于$\forall\, n \geq 1$
   $$P(X_n = 1) = p, \quad P(Y_n = 1) = q,$$
   其中 $0 < p, q < 1$. 令 $Z_n = X_n Y_n$, $n \geq 1$. 证明: $\{Z_n : n \geq 1\}$ 独立同分布, 并计算出其分布.
   (3) 定义 $S_n = \sum_{m=1}^n X_m$, $T_n = \sum_{m=1}^n Z_m$. 求 S_n 和 T_n 的分布.
   (4) 定义 $\tau(\omega) = \inf\{n \geq 1 : T_n(\omega) = 1\}$, 并假定 $\inf(\emptyset) = \infty$. 记 S_τ 为 $S_{\tau(\omega)}(\omega)$. 证明 τ, S_τ 都是随机变量, 并求出 τ 的分布.
   (5) 证明对 $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$:
   $$P(X_k = 1 | \tau = n) = P(X_k = 1 | Z_k = 0) = \frac{p(1-q)}{1-pq}.$$
   (6) 证明
   $$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\} | \tau = n\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i | \tau = n),$$
   并由此推出求出 $P(S_\tau = k | \tau = n)$.
   (7) 计算 $E[S_\tau | \tau = n]$ 和$E[S_\tau]$. 并证明
   $$E[S_\tau] \neq E[\tau]E[X_1], \quad E[T_\tau] = E[\tau]E[Z_1].$$

3. (10') 设 ξ, X 相互独立, 且 $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$. 证明 ξX 与 ξ 相互独立当且仅当 X是对称随机变量, 即 X 与 $-X$ 同分布.

4. (30') 设 X, Y 是取非负整数值的独立随机变量, 且
   $$P(X = k | X + Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \geq 0, 0 \leq k \leq n,$$
   其中 $0 < p < 1$ 为参数.
   (1) 设 G_X, G_{X+Y} 分别是 $X, X+Y$ 的母函数, 证明:
   $$G_X(s) = G_{X+Y}(ps + 1 - p), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

(2) 若$p=1/2$, 证明$G_{X+Y}(s)=G_{X+Y}\left(\frac{1+s}{2}\right)^2$.

(3) 若$p=1/2$, 求证 $X, X+Y$ 都服从泊松分布.

5. (20') 设 β 是一个取值于 $[0,1]$ 的随机变量, γ 是一个非负随机变量, 他们的密度分别为

$$p_\beta(s)=bs(1-s)\quad(0\le s\le 1),\quad p_\gamma(s)=cs^3e^{-s}\quad(s\ge 0).$$

(1) 求 b, c?

(2) 假设$\beta\perp\gamma$. 令

$$X=\beta\gamma,\quad Y=(1-\beta)\gamma.$$

求 (X,Y) 的联合分布, 并证明$X\perp Y$.

6. (50') 设 ξ,η 服从区域 D 均匀分布, 其中 $D=\{(x,y)|0<x<1,\, x\le y\le 1\}$.

(1) 计算区域 D 的面积;

(2) 求 ξ 和 η 的边缘密度并判断二者是否独立;

(3) 求条件密度$p_\xi(x|\eta=1/2)$;

(4) 求随机变量$X=\sin^{-1}\xi$ 的密度函数;

(5) 求随机变量$Y=[n\xi]+1$ 的分布.

7. (10') n 个人随机的取自己存放的帽子, 设 ξ 表示正确拿到自己帽子的人数, 求 ξ 的期望与方差.