

# 25 春- 数学分析 2 (回忆版)

July 23, 2025

---

1. 计算定积分

(a)  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x (\ln(\ln x))^2} dx$

(b)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{m}{k} \sin \frac{k}{nm}$

2. 判断敛散性

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n}\right)$

(c)  $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

3. 判断敛散性

(a)  $\sum \frac{1}{n(n+1)} \ln \frac{(nx+1)^{n+1}}{((n+1)x+1)^n}, x \in [0, 1]$

(b)  $\sum \frac{x}{(1+x)^n}, x \in (0, \infty)$

4. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 3^{n+1}}$  的收敛域, 与和函数

5.  $f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}, x \in [-\pi, \pi]$ , 求 Fourier 级数, 以及其收敛域。以此求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ , 以及  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n(n^2+1)}$

6.  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ,

(a) 求  $\sum \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$

(b) 判断  $\sum \frac{a_n}{(\ln n)^p}$  的收敛条件

7. 证明,  $f, g$  的 Fourier 级数相等当且仅当  $\int_{-\pi}^{\pi} |f - g| dx = 0$