23 春- 微分几何（回忆版）

February 14, 2025

---

1. 填空题

   (1) 欧氏空间 E^3 中所有正交标架的空间维数是____. E^3 中所有仿射标架的空间维数是____

   (2) 曲面 $S: r = r(u,v)$ 上的参数变换 $\tilde{u} = \tilde{u}(u,v), \tilde{v} = \tilde{v}(u,v)$ 诱导的切向量的变换为 $(r_{\tilde{u}}, r_{\tilde{v}}) = (r_u, r_v)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中 a,b,c,d 是 u,v 的函数，若它诱导的余切向量变换为 $(d\tilde{u}, d\tilde{v}) = (du, dv)A$，则这里 2×2 矩阵 $A =$____.

   (3) 曲面 $z = xy$ 的以 x,y 为参数的 Christoffel 符号 $\Gamma^2_{11} =$____，$\Gamma^2_{12} =$____

   (4) 单参数直线族 l_u 的方程为 $y = ux - u^3, z = u^3y - \alpha u^6$，当常数 α 为 ____ 时，直线组产生的曲面是可展曲面。

   (5) 曲面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 在原点处沿切方向 $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ 的法曲率为____

   (6) 圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的过点 $(a,0,0)$，以 $(0, \cos\theta, \sin\theta)$ 为切向量的测地线的参数方程为____

   (7) 设曲面 $r = r(u,v)$ 的第一基本形式为 $I = (\mathrm{d}u)^2 + e^{ku}(\mathrm{d}v)^2$，则它的高斯曲率为____

   (8) 单位球面上的锐角测地三角形内角和为 200 度，若一非零切向量 X 逆时针（以球面的外法向为准）沿三角形的边界平行移动至起点时为 Y，则 Y 与 X 的夹角为____

   (9) 曲面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 在原点处沿切方向 $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ 的测地挠率为____

   (10) 曲面 $z = xy$ 上的切向量场 $X(x,y) = (x, y, 2xy)$ 的绝对微分 $DX =$____

2. 求曲线 $r(t) = \left(\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ 的 Frenet 标架场，以及曲率和挠率函数

3. 设曲面 S 的第一和第二基本形式为 $I = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta, II = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta$

   (a) 写出曲面上的自然标架场的运动方程

   (b) 写出运动方程的系数用第一类和第二类基本不变量表达的公式

   (c) 利用二次偏导数与求导顺序无关，导出曲面上正则参数系下的 Codazzi 方程给出的两个独立方程

4. 给出曲面 S 上的曲线 C 的典则正交标架场的运动方程，并证明曲线的法曲率和测地曲率满足 $\kappa_n^2 + \kappa_g^2 - 2H\kappa_n + K = 0$，这里 H 为平均曲率，K 为高斯曲率

5. 对于曲面 $z = xy$

   (a) 计算第一基本形式和第二基本形式

   (b) 选取曲面上的正交标架场使得前两个基向量张成切空间，第三个基向量为单位法向量，并计算标架场的运动方程的相对分量 ω^1, ω^2 和 $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$

   (c) 计算曲面的平均曲率和高斯曲率