# 北京师范大学 2024~2025 学年第一学期期中考试试卷（A 卷）

课程名称： 数学分析 (3) 任课教师姓名： 唐仲伟

卷面总分： 100 分 考试时长： 120 分钟 考试类别： 闭 卷

院(系)：________ 专业：________ 年级：________

姓 名：________ 学号：________

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 成绩 | | | | | | | | | | | | | | | | |

一、计算题（共 50 分，每题 5 分）

1. 写出集合 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x>0, y\neq 0\}$ 的边界、内部与闭包.

2. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$ 在原点的二重极限与累次极限.

3. 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x-y+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

在原点的可微性与原点处任意方向导数的存在性.

4. 设 $w=f\left(x^2y,\dfrac{y}{x}\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$.

5. 写出 $f(x,y)=x^y$ 在 $\boldsymbol{x}_0=(1,1)$ 的邻域内带 Peano 余项的三阶 Taylor 公式.

6. 求函数 $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的极值点.

7. 设方程 $z=\sqrt{x^2-y^2}\tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$ 能确定隐函数 $z=f(x,y)$, 求它的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

8. 设 $a$, $b$, $c$ 是已知的三个正常数, 求三元函数 $f(x,y,z)=ax+by+cz$ 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值与最小值.

9. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

10. 设空间光滑曲线 $C$ 的光滑隐表示为 $\Phi(x,y,z)=(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z))=\mathbf{0}$, 求它在点 $\boldsymbol{P}_0$ 的切线与法平面的方程.

二、证明题（共 50 分，每题 10 分）

11. 设二元数值函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 的每点对坐标 $x$ 连续, $y_0\in[c,d]$, 有 $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ $(y\to y_0; x\in[a,b])$, 求证: $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

12. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上, 求证：$f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 连续 $\Leftrightarrow\forall$ 开集 $G\subset\mathbb{R}^m$, 集合 $f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集.

13. 设 $f(x,y)=2x^2-3xy^2+y^4=(2x-y^2)(x-y^2)$, 求证: 原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ 不是 $f$ 的极值点, 但 $f$ 在通过原点的任一直线上在原点有极值.

14. 证明: 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 $a$.

15. 设 $f(x,y)$ 满足: $f'_x$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在, $f'_y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在且连续, 且

$$|f'_x|<M\left|f'_y\right|,\quad f(x_0,y_0)=0,$$

其中 $M$ 是正常数. 证明：$f(x,y)=0$ 惟一确定一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微隐函数 $y=y(x)$, 且满足 $y(x_0)=y_0$.