

北京师范大学 2024 ~ 2025 学年第二学期期中考试试卷 (A 卷)

课程名称: 数学分析 任课老师姓名: \_\_\_\_\_  
 卷面总分: 100 分 考试时长: 100 分钟 考试类别: 闭卷  开卷  其他

考试要求:

1. 写清答题根据, 无支持的结论将被扣除分数;
2. 雷同答题所得分数为应得分数除以雷同卷子数.

一. (20分) 计算极限:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k\pi}{n^2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 e^{x^2} x^{n-1} dx$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\cos t| dt$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x^2)^{-1} \int_{\cos x}^1 e^{-w^2} dw$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^\pi (x^2 + 1)^n \ln(1 + x^4) dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

二. (30分) 计算积分

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 5x dx \quad 2. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$$

$$3. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \quad 4. \int_0^6 x^2 [x] dx; \quad 5. \int_1^e x \ln^n x dx.$$

$$6. \int_1^4 f(x-2) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$$

三. (10分) 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  发散,  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^p}$  ( $p > 1$ ) 收敛.

四. (10分) 设  $f$  在  $[-1, 1]$  可导,  $M = \sup_{x \in [-1, 1]} |f'(x)|$ , 且存在  $a \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \text{ 求证:}$$

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq M(1 - a^2).$$

五. (10分) 证明:  $f \in C[a, b]$ ,  $b > a > 0$ . 则存在  $\xi, \eta, \gamma \in (a, b)$  使得:

$$f(\xi) = \frac{f(\eta)}{2\eta}(a+b) = \frac{f(\gamma)}{3\gamma^2}(a^2 + ab + b^2).$$

六. (15分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

由此计算  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

七 (15分) 1. 设  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $xf(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调减少, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)f(x) = 0.$$

2. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 数列  $\{na_n\}$  单调, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \ln n = 0.$$

八 (10分) 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.