21 秋- 高代 1 期末（回忆版）

何家兴
hejiaxing202411@163.com

December 7, 2024

Exercise 1.

若 n 是给定的正整数，$U = \{[a] \big| (a, n) = 1\}$，证明 U 关于剩余类的乘法构成群

Exercise 2.

设 H 是 G 的一个子群，$\forall\, a, b \in G$，$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$。

1. 证明 $\sim$ 是 H 上的一个等价关系
2. 若 $G = S_3$，$H = \langle (123) \rangle$，写出该等价关系下的所有等价类。

Exercise 3.

已知 G 是一个群，$a \in G$，令 $f_a : G \to G$，$g \mapsto aga^{-1}$.

1. 证明 f_a 是 G 上的置换
2. 令 $\mathrm{Inn}(G) = \{f_a | a \in G\}$。证明 $\mathrm{Inn}(G)$ 关于映射的合成构成群。

Exercise 4.

设 R 是所有 n 阶上三角矩阵关于矩阵的加法和乘法构成的环。$\forall\, A \in R$, 若 $\exists\, m \in \mathbb{Z}^+$，$A^m = O$，则称 A 是 R 上的幂零元。

1. 求 R 中所有的幂零元
2. 证明 R 中所有幂零元构成 R 的一个子环。

Exercise 5.

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$。

1. 求次数最低的非零多项式 $p(x)$，使得 $p(A) = O$
2. 令 $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_2$，若 $f(A) = O$，证明 $p(x) | f(x)$。

Exercise 6.

若多项式 $f(x) = x^3 + 3x^3 + tx + 1$ 有重根，求 t。

Exercise 7.

讨论 $f(x) = 5x^3 + 6x^2 + 12x - 6$ 与 $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 7x - 2$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上的可约性。

Exercise 8.

已知 $f(x)$ 是整系数多项式，$1 + \sqrt{2}$ 是它的根，证明 $1 - \sqrt{2}$ 也是它的根。