22-23学年秋季学期2021级数学强基班“数学分析III”
期末考试试题参考答案(2023.02.26)

1. (**15分**) 证明或否定：若闭区间$[a,b]$上的单调连续函数序列$\{f_n|n\in\mathbb{N}\}$收敛到f，则f在该区间上有界、单调、连续。

◀ 肯定有界、单调(需说明理由)但未必连续。譬如：$[1,1]$上的函数列$f_n(x)=x^n$收敛到$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$ ▶

2. (**15分**) 试说明函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$在$\mathbb{R}$上是否一致收敛。

◀ 因$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2}$一致收敛，而$\{\frac{1}{1+x^2/n^2}\}$单调且一致有界，由Abel-Dirichlet判别法推知原级数在$\mathbb{R}$上一致收敛。

(另一说法不正确：因$\left\{\frac{n}{n^2+x^2}\right\}$单调趋于零，而$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$一致有界，由Abel-Dirichlet判别法推知原级数在$\mathbb{R}$上一致收敛) ▶

3. (**15分**) 证明：含参变量反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}e^{-ux}dx$在$u\in[0,+\infty[$一致收敛。

◀ $\int_0^{+\infty}\sin 3x dx$在$u\in[0,+\infty[$上一致收敛，函数$\frac{1}{x+u}$单调，且在$u\in[0,+\infty[$上一致趋于零。由Abel-Dirichlet判别法推知积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}dx$在$u\in[0,+\infty[$上一致收敛。又函数$e^{-ux}$关于$x$在$[0,+\infty[$单调，且关于$u\in[0,+\infty[$一致有界。再次由由Abel-Dirichlet判别法推知原积分一致收敛。 ▶

4. (**15分**) 设$0<m<n$，求$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$的值。

◀

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx \xlongequal{t=1/(1+x^n)} \frac{1}{n}\int_0^1 t^{-\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{m-n}{n}}dt$$
$$=\frac{1}{n}B\left(1-\frac{m}{n},\frac{m}{n}\right) \xlongequal{\text{余元公式}} \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

▶

5. (**15分**) 设$f\in C^2([0,\pi],\mathbb{R})$且$f(0)=f(\pi)=0$. 令$f(x)$的Fourier展式的部分和为$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx$. 证明：(i) $a_k=-\frac{2}{\pi k^2}\int_0^\pi f''(x)\sin kxdx$, $k=1,2,\cdots$; (ii) $\int_0^\pi[f(x)-S_n(x)]^2dx\le\frac{1}{3n^3}\int_0^\pi[f''(x)]^2dx$, $n=1,2,\cdots$.

◀ (i)

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kxdx=\frac{2}{\pi}\left[-f(x)\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^\pi+\frac{1}{k}\int_0^\pi f'(x)\cos kxdx\right]$$
$$=\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi f'(x)\cos kxdx$$
$$=\frac{2}{k\pi}\left[f'(x)\frac{\sin kx}{k}\bigg|_0^\pi-\frac{1}{k}\int_0^\pi f''(x)\sin kxdx\right]$$
$$=-\frac{2}{\pi k^2}\int_0^\pi f''(x)\sin kxdx.$$

(ii)

$$\int_0^\pi [f(x)-S_n(x)]^2dx = \int_0^\pi \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right]^2 dx$$

$$= \int_0^\pi \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2 \sin^2 kx + \sum_{n+1\le k\neq l} a_k a_l \sin kx \sin lx\right] dx$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2 \int_0^\pi \sin^2 kx dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2$$

$$\xlongequal{\text{由}(i)} \frac{\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2 k^4}\left[\int_0^\pi f''(x)\sin kx dx\right]^2$$

$$\overset{Buniakovsky\text{不等式}}{\le} \frac{2}{\pi}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\int_0^\pi [f''(x)]^2dx \cdot \int_0^\pi \sin^2 kx dx$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\int_0^\pi [f''(x)]^2dx \le \int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^4}\int_0^\pi [f''(x)]^2dx$$

$$= \frac{1}{3n^3}\int_0^\pi [f''(x)]^2dx.$$

▶

6. (**15分**) 根据Laplace积分的局部化原理和渐近式的典型主项定理，由Γ函数的渐近式导出Stirling公式。

◀ 见课本P538-539.

例 7 Γ函数的渐近式 当$\lambda > -1$甚至$\lambda > 0$时

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{\lambda \ln t}dt$$

$$= \lambda^{\lambda+1}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-\ln x)}dx.$$

函数$S(x)=\ln x-x$在$]0,+\infty[$上有唯一的极大值点$x=1$, 且$S''(1)=-1$. 由渐近式的典型主项定理之

b) 若$a<x_0<b$, $k=3$且$S''(x_0)\neq 0$ (即$S''(x_0)<0$), 则

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-\frac{1}{2}}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\right],\ \lambda\to+\infty; \qquad (3')$$

可得

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda+1)&=\lambda^{\lambda+1}\sqrt{\frac{2\pi}{-(-1)}}\cdot 1\cdot e^{-\lambda}\lambda^{-\frac{1}{2}}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\\&=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\right],\ \lambda\to+\infty.\end{aligned}$$

特别地，当$n\in\mathbb{N}$时，$\Gamma(n+1)=n!$, 我们就获得了经典的Stirling公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left[1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right],\ \mathbb{N}\ni n\to+\infty.$$

►

7. (**10分**) 光滑映射$\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$被称为一个辛映射或辛变换, 若其Jacobian满足

$$\left[\frac{\partial\Phi(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{z}}\right]^{\top}J\left[\frac{\partial\Phi(\mathbf{z})}{\partial\mathbf{z}}\right]=J,\quad \mathbf{z}\in\mathbb{R}^{2n},\quad J=\begin{pmatrix}O_n & I_n\\ -I_n & O_n\end{pmatrix},$$

这里的O_n, I_n分别为n阶零方阵和n阶单位阵。试证明: 任一Hamilton系统(∇为通常的笛卡尔坐标下的梯度算子)

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}=J^{-1}\nabla H(\mathbf{z}),\quad \mathbf{z}\in\mathbb{R}^{2n},\quad H\in C^2\left(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}\right) \qquad (1)$$

的相流$\{g^t:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}|t\in\mathbb{R}\}$是一个辛变换族。

注: 所谓“相流”, 实际就指“解”。譬如对系统(1), 给定某个初值$\mathbf{z}_0=\mathbf{z}(0)$, 就能得到一个解$\mathbf{z}(t)$, 当然可写成$g^t(\mathbf{z}_0)$, 有时甚至简单记为$g^t(\mathbf{z})$. 考虑到$t\in\mathbb{R}$, 这实际上形成了一条由$\mathbf{z}$出发的轨道。对于不同的初值$\mathbf{z}$, 自然可能产生不同的轨道。所有这些轨道组成“相空间”。“流”的意思自然是指t在$\mathbb{R}$里变动。

◀

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]\right\}\\
&=\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]+\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]\\
&=\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\frac{dg^t(\mathbf{z})}{dt}\right]^\top J\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]+\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\frac{dg^t(\mathbf{z})}{dt}\right]\\
&=\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}J^{-1}\nabla H\left(g^t(\mathbf{z})\right)\right]^\top J\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]+\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}J^{-1}\nabla H\left(g^t(\mathbf{z})\right)\right]\\
&=\left[J^{-1}H_{\mathbf{zz}}\left(g^t(\mathbf{z})\right)\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]+\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[J^{-1}H_{\mathbf{zz}}\left(g^t(\mathbf{z})\right)\tfrac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]\\
&=\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top H_{\mathbf{zz}}\left(g^t(\mathbf{z})\right)JJ\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]+\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top JJ^{-1}H_{\mathbf{zz}}\left(g^t(\mathbf{z})\right)\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\\
&=-\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top H_{\mathbf{zz}}\left(g^t(\mathbf{z})\right)\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]+\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top H_{\mathbf{zz}}\left(g^t(\mathbf{z})\right)\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\\
&=O_{2n}\ (2n\text{阶零方阵}),
\end{aligned}
$$

于是，$\forall t\in\mathbb{R}$,

$$
\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]\equiv\left.\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial g^t(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}\right]\right|_{t=0}=\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{z}}\right]^\top J\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{z}}\right]=J.
$$

▶