22-23学年春季学期2021级数学强基班“实变函数”期末考试试题参考答案(2023.06.14)

1. (**15分**) 举例说明：有界闭区间上的Lebesgue可积函数未必Riemann可积；反之，有界闭区间上的Riemann(反常)可积函数未必Lebesgue可积。

◀ (答案不唯一) Dirichlet函数在$[0,1]$上的限制

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}1, & 当x\in\mathbb{Q}\bigcap[0,1],\\ 0, & 当x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

在一个零测度集上恒为1, 而在一个正测度集上恒为零，它在$[0,1]$上是Lebesgue可积的，且积分为零。但它显然不是Riemann可积的。

另一方面，(无界)函数

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}, & 当0<x\le 1,\\ 0, & 当x=0\end{cases}$$

在$[0,1]$Riemann可积：$\int_0^1\mathcal{F}(x)dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{\cos\pi t}{t^2}+\frac{\pi\sin\pi t}{t}\right)dt.$

但不是Lebesgue可积的：

$$\begin{aligned}\int_0^1|\mathcal{F}(x)|dx &\ge \int_0^1\left|\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right|dx-\int_0^1|\cos\frac{\pi}{x}|dx\\ &\ge\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{1/(k+\frac{3}{4})}^{1/(k+\frac{1}{4})}\left|\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right|dx-1\\ &\ge\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{1/(k+\frac{3}{4})}^{1/(k+\frac{1}{4})}\frac{\pi}{x}dx-1\\ &\ge\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\ln\frac{4k+3}{4k+1}-1=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\ln\left(1+\frac{2}{4k+1}\right)-1\\ &\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\frac{2}{4k+1}-1=+\infty.\end{aligned}$$

▶

2. (**15分**) 证明或否定：(i) 连续函数将紧集映到紧集；(ii) 连续函数将可测集映到可测集。

◀ (i) 结论正确。设$f: X \to Y, U \subset X$为紧集，则$V = f(U) \subset Y$必为紧集。事实上，对于V的任一开覆盖$\{V_\alpha\}$，由f的连续性知原像集合$\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ 是U的开覆盖，由U 的紧性知，存在有限子覆盖$\{f^{-1}(V_1), \cdots, f^{-1}(V_k)\}$，即$\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(V_i) \supset U$. 于是，

$$V = f(U) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(V_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f\left(f^{-1}(V_i)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i.$$

也就是说，从$\{V_\alpha\}$中找到了V的有限子覆盖。从而得知$V = f(U)$是紧集。

(ii) 结论不正确。反例：Cantor函数将一个零测集(Cantor集)映到一个正测集$[0,1]$，后者包含一个不可测子集，显然Cantor函数也将Cantor集中一个零测子集映到该不可测集。 ▶

3. (**15分**) 通过直接计算证明Cantor函数不符合“绝对连续”的定义。

◀ 在Cantor集的构造过程中，在移去的每个区间$I_{n,k}$上，Cantor函数为常数。到第n，移去了$I_{1,1}; I_{2,1}, I_{2,2}; I_{3,1}, I_{3,2}, I_{3,3}, I_{3,4}; I_{n,1}, \cdots, I_{n,2^{n-1}}$ 共$2^n - 1$ 个区间，总长度为

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 2^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 2^{n-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

取余下的2^n个开区间$\{(a_k, b_k)\}$，则区间总长度为

$$\sum_{k=1}^{2^n} |b_k - a_k| = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

可任意小，但

$$\sum_{k=1}^{2^n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{2^n} [f(b_k) - f(a_k)] = f(b_{2^n}) - f(a_1) = f(1) - f(0) = 1.$$

▶

4. (**10分**) 举例：可测集$E \subset \mathbb{R}^2$上函数$f(x,y)$的两个累次积分存在且相等，但重积分不存在(在Lebesgue意义下不可积)。

◀ 设$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, \ xy > 0, \\ -\dfrac{1}{x^2+y^2}, \ xy < 0, \\ 0, \ xy = 0, \end{cases}$$

则无论$y < 0, y = 0$或$y > 0$, 都有$\int_1^1 f(x,y)dx = 0$, 从而$\int_{-1}^1 dy \int_1^1 f(x,y)dx = 0$. 类似地，$\int_{-1}^1 dx \int_1^1 f(x,y)dy = 0$.

然而

$$\int_{[-1,1]^2} |f(x,y)|dxdy \geq \int_{[0,1]^2} \frac{1}{x^2+y^2} dxdy = +\infty.$$

▶

5. (**15分**) 设$E \subset [0,1]$可测。证明：对任意$\alpha \in [0, m(E)]$, 存在可测集$F \subset E$使得$m(F) = \alpha$.

◀ 考虑函数$f(x) := m(E \cap [0,x])$, $x \in [0,1]$. 对任意的$0 \leq x \leq y \leq 1$, 成立

$$|f(x) - f(y)| = m(E \cap [x,y]) \leq |y - x|,$$

故f连续。注意到$f(0) = 0$, $f(1) = m(E)$. 由介值定理知，$\forall \alpha \in [0, m(E)]$, $\exists x_\alpha \in [0,1]$使得

$$f(x_\alpha) = m(E \cap [0, x_\alpha]) = \alpha.$$

取$F = E \cap [0, x_\alpha]$即可。 ▶

6. (**15分**) 设$f, g \in \mathrm{BV}([a,b])$. 证明：$fg \in \mathrm{BV}([a,b])$.

◀ 任取分划$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})||g(x_i)| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1})||g(x_i) - g(x_{i-1})| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|.
\end{aligned}
$$

由此得

$$\bigvee_a^b (fg) \le \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \bigvee_a^b (f) + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \bigvee_a^b (g).$$

由$f, g \in \mathrm{BV}([a, b])$知$f, g$有界，因此$\bigvee_a^b (fg) < +\infty$, 即$fg \in \mathrm{BV}([a, b])$. ▶

7. (**15分**) 设几乎处处有限的可测函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$满足$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. 证明：$f$是线性函数。

◀ 由数学归纳法易得$f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$, 且进一步有$f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{Q}$. 现证$f$在$x = 0$处连续。

由Luzin定理，存在闭集$F \subset \mathbb{R}$, 使得$m(\mathbb{R} \setminus F) < 1$且$f$在$F$上连续。令$G = F \bigcap [-3, 3]$, 则$f$在有界闭集$G$上一致连续。$\forall \epsilon > 0$, $\exists 0 < \delta < 1$, 使得$\forall x, y \in G$当$|x - y| < \delta$时有$|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 我们断言：对任意满足$|h| < \delta$的h, 均有$G \bigcap (G + \{h\}) \neq \varnothing$. 如若不然，$G \bigcap (G + \{h\}) = \varnothing \Longrightarrow m(G \bigcup (G + \{h\})) = m(G) + m(G + \{h\}) = 2m(G)$. 但$G \bigcup (G + \{h\}) \subset [-3 - \delta, 3 + \delta]$, 从而$2m(G) \le 6 + 2\delta \Longrightarrow m(G) \le 3 + \delta < 4$. 而实际上$m(G) = m(F \bigcap [-3, 3]) = m([-3, 3]) - m([-3, 3] \setminus F) \ge 6 - m(\mathbb{R} \setminus F) > 6 - 1 = 5$. 出现矛盾。所以无论如何$\exists a \in G \bigcap (G + \{h\})$, 即$(a \in G) \wedge (a - h \in G)$. 自然有$|a - (a - h)| = |h| < \delta$, 故有$|f(h)| = |f(a) - f(a - h)| < \epsilon$. 至此完成了$f$在$x = 0$处连续的证明。

$\forall x \in \mathbb{R}$, 取$\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$使得$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, 即$\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - x) = 0$. 由上推知$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n - x) = f(0) = 0$. 但$f(x_n - x) = f(x_n) - f(x) = x_n f(1) - f(x)$. 取极限即得$f(x) = xf(1)$. ▶