22-23 学年复变函数期末 高志强老师 (回忆版)

使用班级: *2021* 级强基班

1. (8 分)$f(z)=xy^2-\mathrm{i}yx^2$ 在何处可微? 在何处解析?

2. (9 分) 证明 z^4+6z+3 的所有零点都在 $|z|<2$ 内, 并求出 $|z|<1$ 内和 $1<|z|<2$ 内零点的个数.

3. (20 分)(1) 计算以下函数在圆环内的 Laurent 级数:

   $$(a)\ \frac{1+z^2}{z^2(z^2-4)},\quad 2<|z|<+\infty;\qquad (b)\ \sin\left(\frac{z}{z-1}\right),\quad 0<|z-1|<+\infty.$$

   (2) 通过求 $\mathrm{e}^{1/z}$ 的 Laurent 级数, 计算 $\displaystyle\int_{|z|=1}\mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$.

4. (30 分) 计算积分

   (1)$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z$;

   (2)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\mathrm{d}x}{(1+x^2)(4+x^2)}$;

   (3)$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{10+8\cos\theta}$;

   (4)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{at}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t,\quad 0<a<1$;

   (5)$\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+5)(x-4)^{\frac{1}{2}}}$.

5. (5 分) 整函数 $f(z)$ 满足 $|f(z)|\le|z|^{\frac{1}{2}}|\cos z|,\ \ \forall z\in\mathbb{C}$, 求 $f(z)$.

6. (15 分) 求以下函数的孤立奇点并指出孤立奇点的类型 (极点要标明阶数)

   $$(1)\ \mathrm{e}^{\frac{z}{\sin z}};\qquad (2)\ \frac{\cos z-z}{z^2(\sin z-1)};\qquad (3)\ \frac{1}{z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

7. (8 分) 设 $f\in H\big(B(0,1)\big), f(0)=0$, 并且存在 $A>0$, 使得 $\operatorname{Re}f(z)\le A$, $\forall z\in B(0,1)$. 证明:

   $$|f(z)|\le\frac{2A|z|}{1-|z|},\forall z\in B(0,1).$$

8. (5 分) 已知带型区域

   $$\Omega:\left\{z=x+\mathrm{i}y: x\in\mathbb{R},|y|<\frac{\pi}{2}\right\}$$

   且 $\alpha+\mathrm{i}\beta\in\Omega$. 已知保形映射 f 将 Ω 映到 Ω, 证明

   $$|f'(\alpha+\mathrm{i}\beta)|=\frac{1}{|\cos\beta|}.$$