北京师范大学 2020－2021 学年第 1 学期期末考试试卷（A卷）[redacted]

任课教师姓名：

课程名称：数学分析 III

考试类别：闭卷 √　开卷 □　其他 □

卷面总分：100 分　考试时长：120 分钟

专　业：数学与应用数学 [redacted]　年　级：2019

院（系）：数学科学学院 [redacted]

学　号：[redacted]

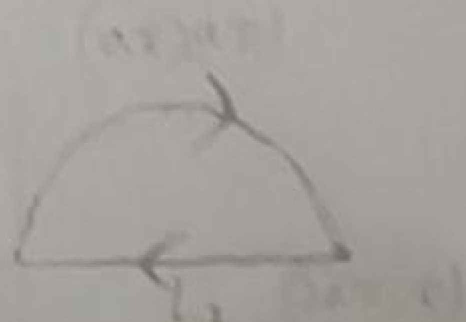
姓　名：

1.（15分）设 $u = f(r)$，$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$，证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

2.（15分）求积分：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$



3.（15分）计算第二型曲线积分：

$$\int_L (2a-y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$$

其中 L 为摆线 $x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 沿 t 增加方向的一段.

4.（15分）计算二重积分：

$$\iint_D (x+y)\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x+y \le \pi, 0 \le x-y \le \pi\}$.

5.（10分）求有界闭区域

$$V = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \le 1\right\} \quad (a>0, b>0, c>0)$$

的体积.

6.（10分）求密度为 ρ 的均匀上半球面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 对于 z 轴的转动惯量.

7.（10分）计算第二型曲面积分：

$$\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

8.（10分）若 $m(x,y)$ 满足 $m(tx,ty) = t^k m(x,y)$ $(t>0)$，则称 $m(x,y)$ 是 k 次齐次函数. 令 $T_{a,b} = \{(x,y) \mid a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$ $(0<a<b)$，$L = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$.

(1) 证明：若 $m(x,y)$ 是 k 次齐次函数，则

$$\iint_{T_{a,b}} m(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

当且仅当

$$\int_L m(x,y)\,\mathrm{d}s=0;$$

(2) 证明：若 0 次齐次函数 $m(x,y)$ 在原点之外有二阶连续偏导数，则

$$\int_L \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}s=0;$$

(3) 举例说明：存在 0 次齐次函数 $m(x,y)$，满足在原点之外有连续偏导数，且

$$\int_L \frac{\partial m}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}s\neq 0.$$