

# 北京师范大学 2021~2022 学年第 二 学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微分几何 任课教师姓名: \_\_\_\_\_

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院 (系): \_\_\_\_\_ 专 业: \_\_\_\_\_ 年 级: \_\_\_\_\_

姓 名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	总分
得分								

阅卷教师 (签字): \_\_\_\_\_

一 (16 分) 写出  $E^3$  中正则曲线  $\mathbf{r}(t)$  的曲率和挠率公式, 并求曲线  $\mathbf{r}(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^2)$  的曲率和挠率。

二 (12 分) 证明: 关于直纹面  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$ , 以下 3 条性质是等价的: (注: 其中 (1) 和 (3) 常作为可展曲面的定义。)

- (1) Gauss 曲率  $K = 0$ ;
- (2) 混合积  $(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = 0$ ;
- (3) 沿着直母线, 直纹面的法向量不变, 即:  $\mathbf{n}(u, v_1) = \mathbf{n}(u, v_2) (v_1 \neq v_2)$ .

三 (18 分) 写出单位球面  $S^2(1)$  在球极投影下的参数表示, 并求在球极投影下计算 Christoffel 符号。

四 (17 分) 在旋转曲面  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)) (u > 0)$  上建立正交标架场  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , 并求出相应的诸微分形式  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ .

五 (10 分) 证明: 正螺面  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$  是极小曲面。

六 (12 分) 求球面  $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u)$  上纬圆的测地曲率。

七 (15 分) 分别在以下 3 种曲面上求测地三角形内角和的具体值或取值范围:

- (1) 欧氏平面  $\mathbf{R}^2$ ;
- (2) 单位球面  $S^2(1)$ ;
- (3) 伪球面  $\mathbf{r}(u, v) = (e^{-u} \cos v, e^{-u} \sin v, \pm \sqrt{1 - e^{-2u}})$ 。