数学分析 II 期中试卷

姓名: 学号:

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、判断题 （每题 3 分， 共 15 分）

1. 开区间族$\{(1/n,1)|n=2,3,\ldots\}$覆盖区间 $(0,1)$, 但是不可能从中挑选出有限个开区间覆盖$(0,1)$.
2. J是一个常数. 区间$[a,b]$上函数f满足：对任何$\varepsilon>0$，存在分割 $T: a=x_0<x_1\cdots<x_n=b$, 以及某些$\xi_i\in[x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n$, 使得 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-J\right|<\varepsilon$, 那么$f$在$[a,b]$黎曼可积
3. 设f在$[a,b]$黎曼可积，则存在常数L，使得对任何$x_1,x_2\in[a,b]$，有
$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right|\le L|x_1-x_2|.$$
4. 对于有界函数，达布上和$S(T)$和达布下和$s(T)$具有以下性质：当$\|T\|\to 0$时，$S(T)-s(T)\to 0$.
5. 若无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，函数f连续，则极限$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在且等于零.

二、填空题 （每题 3 分，共 15 分）

1. 对于任意两个分割T_1,T_2, 达布上和$S(T_1),S(T_2)$和达布下和$s(T_1),s(T_2)$. 写出至少三个关于它们的不等式：____________________
2. 函数f可积第二充要条件中，“$\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon$”的几何意义是：____________________
3. 列出几个不连续的可积函数类：____________________
4. 无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的定义是：____________________
5. 对任何p，反常积分$\int_0^{\infty} x^{-p}dx$__________ (填“收敛”，“发散”，“敛散性不确定”之一)

三、计算题 （题 1,2 各 9 分，题 3,4 各 10 分，共 38 分）

1. 求数列$\{\frac{(-1)^n}{n}+\sin\frac{n\pi}{5}\}$的聚点和上下极限.

2. 计算$\int_0^1 \arcsin x dx$.

3. 设c是常数，定义函数f如下：

$$f(x)=\begin{cases} c\cos x, & x\in(0,\pi/4]; \\ \sin x, & x\in(\pi/4,\pi/2). \end{cases}$$

请确定 c 的值，使得f在$(0,\pi/2)$上有原函数，并具体求出f的一个原函数.

4. 求曲线$y=\ln\cos x, 0\le x\le a$, $(a<\pi/2)$ 的弧长.

四、证明题 （每题 8 分，共 32 分）

1. 设闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$满足$[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n], b_n-a_n\to 0$，连续函数$f$和单调上升的连续函数$g$满足$\forall x\in[a_n,b_n]$有$f(x)\in[g(a_n),g(b_n)]$. 证明存在$\xi\in[a,b]$满足$f(\xi)=g(\xi)$.

2. $[0,1]$上函数f定义为：$f(x)=1/q^2$，当$x=p/q$为既约真分数；$f(x)=0$，当$x=0,1$ 以及$(0,1)$内的无理数. 证明$f(x)$在$[0,1]$上黎曼可积且$\int_0^1 f(x)dx=0$.

3. 设f在$[a,b]$连续，证明

(i) 函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导且$\Phi'(x)=f(x)$;

（ii）对于f的任何原函数F，有$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

4. 已知函数f定义在$(a-\delta,b+\delta)$上，$\delta>0$是常数，且对任何$x_0\in[a,b]$，存在x_0的某个邻域$U(x_0)$，使得f在该邻域上有原函数 证明f在整个区间$[a,b]$上有原函数.