

北京师范大学 2023–2024 学年第一学期期中考试试卷 (A 卷)

课程名称: 代数学基础 I 任课老师姓名: _____
 卷面总分: 100 分 考试时长: 100 分钟 考试类别: 闭卷
 院系: _____ 专业: _____ 年级: _____
 姓名: _____ 学号: _____

1、(20 分) 求矩阵 X 满足 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2、(20 分) 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad (2) D_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & a & b \\ a & a & a & \cdots & a & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & b & \cdots & b & b & b \\ a & b & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}.$$

3、(20 分) 设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 令 $D = \begin{pmatrix} A & O & O \\ B & B & B \\ O & O & C \end{pmatrix}$, 证明 D 可逆的充要条件是 A, B, C 都可逆,

并在 D 可逆时求出 D^{-1} .

4、(20 分) 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $r(A) = r$, 且有矩阵 B 满足 $AB = O$, 证明:

(1) $r(B) \leq n - r$, 并且存在秩为 $n - r$ 的矩阵 B , 使得 $AB = O$.

(2) 对于系数矩阵分别为 A, C 的 n 元齐次线性方程组, 若有 $AX = O$ 与 $CX = O$ 等价, 则 $r(A) = r(C)$.

5、(20 分) 设 R 是数域 \mathbb{F} 上全体 n 阶上三角矩阵关于矩阵的加法和乘法构成的环, 设 X 是 R 中全体幂零矩阵的集合, Y 是 R 的一个子环. 令

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

判断 $X + Y$ 是否为 R 的子环, 并证明你的结论.