

北京师范大学 2011 ~ 2012 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称:

复变函数

任课老师姓名:

卷面总分: 100 分

考试时长: 120 分钟

考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系): 数学科学学院

专业: 数学与应用数学

年级: 2011 级

姓名:

学号:

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. (20 分) (1) 叙述函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在一点的 (复) 可微和解析的定义以及柯西 - 黎曼 (Cauchy-Riemann) 条件; (2) 叙述儒歇 (Rouché) 定理; (3) 叙述分式线性变换的保圆性定理; (4) 叙述解析函数在孤立奇点的几种类型的定义; (5) 叙述解析函数的唯一性定理; (6) 叙述希瓦尔兹 (Schwarz) 对称原理.

二. (20 分) (1) 设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析, 且 $\overline{f(z)}$ 在区域 Ω 内解析. 证明 $f(z)$ 在 Ω 中为常数. (2) 设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析, 证明 $\overline{f(\overline{z})}$ 在区域 $\Omega_1 = \{z: \overline{z} \in \Omega\}$ 中解析.

三. (18 分) 计算积分

$$(1) \int_{|z|=4} \frac{1}{z^2 + 4} dz; \quad (2) \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz; \quad (3) \int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3 \sin z} dz.$$

四. (17 分) 求下列各函数在复平面 \mathbb{C} (不含 ∞ 点) 中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型 (极点要指明阶数).

$$(a) \frac{z^5 - 1}{z(z+1)^2(z^2+1)^2}; \quad (b) \frac{\sin z - z}{z^4 \cos z}; \quad (c) \frac{e^z - 1}{z \sin \frac{1}{z}}.$$

五. (10 分) 用希瓦尔兹 (Schwarz) 引理证明: 如果 $f(z)$ 在单位圆盘 $D(0, 1) = \{z: |z| < 1\}$ 中解析, 且当 $z \in D(0, 1)$ 时, 有 $|f(z)| \leq 1$, 则对所有 $z_0, z \in D(0, 1)$, 有

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|, \quad |f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}.$$

六. (15 分) (1) 说明多值函数 $\sqrt[3]{(1+z)^2(1-z)^3}$ 在割去线段 $[-1, 1]$ 的 z 平面上可以分出五个解析分支; (2) 求出在 $[-1, 1]$ 的上沿取正值的那个解析分支 $g_0(z)$ 在点 $z = -2$ 处的值 $g_0(-2) = ?$ (3) $g_0(z)$ 在点 $z = -2$ 处的导数值 $g'_0(-2) = ?$ (4) $g_0(z)$ 在点 $z = -2$ 处的二阶导数值 $g''_0(-2) = ?$