

北京师范大学 2020 - 2021 学年第 2 学期期中考试试卷

课程名称: 实变函数

任课教师姓名:                     

卷面总分: 100 分 考试时长: 100 分钟

考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系): 数学科学学院

专业:

数学与应用数学

年 级: 2019

姓 名:                     

1. (15分) 设  $E \subset \mathbb{R}^2$  是不可数集. 证明: 存在  $x_0 \in E$ , 使得对于任一内含  $x_0$  的圆邻域  $B(x_0)$ , 点集  $E \cap B(x_0)$  是不可数集.

2. (15分) 设  $f_n(x)$  是区间  $[a, b]$  上的连续函数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . 证明: 对任意的  $t \in \mathbb{R}$ , 点集  $\{x \in [a, b] : f(x) < t\}$  是  $F_\sigma$  集.

3. (15分) 设  $X = \{E_\alpha\}$  是由  $\mathbb{R}$  中某些互不相交的正测度集形成的集族. 证明:  $X$  是可数的.

4. (15分) 设  $\{B_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的递减可测集合列,  $m^*(A) < +\infty$ . 令  $E_k = A \cap B_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ . 证明:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

5. (15分) 证明: 点集  $E$  可测的充分必要条件是: 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G_1, G_2$ , 满足  $G_1 \supset E, G_2 \supset E^c, m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$ .

6. (15分) 设  $f(x, y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数,  $g_1(x), g_2(x)$  是  $[a, b]$  上的实值可测函数. 证明:  $F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$  是  $[a, b]$  上的可测函数.

7. (10分) 设  $f_k(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的可测函数, 满足:

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{x} \quad \text{与} \quad f_k(x) \rightarrow f(x), \quad \text{a.e. } x \in (0, +\infty).$$

证明:  $f_k(x)$  在  $(0, +\infty)$  上依测度收敛于  $f(x)$ .