25级hhy 数分I 期中

🔥 **注意，以下所有提示和注均是编者加的，题目中没有。**

Q1

(1) 用$\varepsilon-\delta$语言描述$f(x)$在a点收敛于A

(2) 用$\varepsilon-\delta$语言描述$f(x)$在a点局部有界

(3) 若$f(x)$在a点收敛，求证：$f(x)$在a点局部有界

(4) 若$f(x)$在区间$[a,b]\subset\mathbb{R}$上每一点都收敛，证明f在$[a,b]$上有界

Q2

$f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$，求以下极限
(1) $\lim_{x\to a^-}f(x)$ 和 $\lim_{x\to a+}f(x)$

(2) $\liminf_{x\to a}f(x)$ 和 $\limsup_{x\to a}f(x)$

(3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

Q3

求极限
(1)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3\sin^2 x+\cos^2 x}$$

(2)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)\sin^2 n$$

(3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\sin x}{x}$$

(4)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$

Q4

判断下列数列的敛散性

(1) $a_n=\cos n\pi(n\in\mathbb{N}_+)$

(2)

$$a_1=\sqrt[3]{3},a_n=\sqrt[3]{3}^{a_{n-1}}$$

(3)

$$a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{\cos k}{k(k+\cos k)}$$

Q5

$A \subset \mathbb{R}$，证明可从A中取一数列$\{a_n\}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$$

Q6

证明：任何数列必有单调子列

提示：这是史济怀书中证明*Bolzano-Weierstrass*方法的引理。

Q7

证明：单调函数在区间上所有点的单侧极限存在。即
$\forall c \in (a,b), f(c^-)$存在

提示：参考数分讲义连续性部分《*5·2* 区间上单调函数及其连续性》

以下为附加题：

AQ1

(1) 证明：

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{x\in(a,b):|f(x)|\geq\frac{1}{n}\right\}=\{x\in(a,b):f(x)\neq 0\}$$

(2) 若

$$\forall c \in (a,b), \lim_{x\to c} f(x) = 0$$

证明：集合$\{x \in (a,b) : f(x) \neq 0\}$至多可数

提示：证明*(1)*中每个集合有限

AQ2

对x十进制展开得$x = 0.x_1x_2x_3\ldots$（注：排除*9*循环的可能，保证函数良定义）
定义$f(x) = 0.0x_10x_20x_3\ldots$，讨论$f$在$(0,1)$上每点极限的存在性。

提示：按位截断，控制尾项。