

## 23 春- 复变函数 (回忆版)

February 14, 2025

---

### 1. 计算积分

(1)

$$\int_{|z|=3} \frac{2}{(z-i)z^2} dz$$

(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3} dx$$

2. 求函数  $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 \cos z}$  的孤立奇点, 并判断类型. 若为极点, 指出极点的阶数并求  $f(z)$  在该点的留数
3. 求方程  $z^7 + 6z^6 - z^3 + 2 = 0$  在  $|z| < 1$  中根的数量
4. 将  $f(z) = \frac{1}{2(z-1)(z-2)}$  在指定圆环内展成 Laurent 级数
  - (a)  $0 < |z-1| < 1$
  - (b)  $1 < |z-2| < +\infty$
5. 设分式线性映射  $w = L(z) = \frac{2z-i}{iz+3}$  和区域  $\Omega = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ , 求像区域  $L(\Omega)$ . (作出原像区域和像区域的图像)
6. 求包含  $i$  的最大区域  $D$ , 使得  $f(z) = (z^4(2-z))^{\frac{1}{5}}$  在  $D$  上可以分解成 5 个解析分支, 并求一个解析分支在  $i$  处的值
7. 设在  $|z-a| < R$  上不恒为 0 的解析函数  $f(z)$  有零点  $a$ , 则零点  $a$  有什么特性? 请叙述并证明. 实变可微函数的零点是否有此性质? 若有, 请证明, 若没有, 请举例并详细证明.