20 概率论 (回忆版)

2024 年 11 月 22 日

1. (a) 已知 $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\bar{A}\bar{B})$，证明 $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$
   (b) 若 $\mathbb{P}(A) = 0$，则 $\mathbb{P}(AB) = 0$
   (c) 若 $\mathbb{P}(A) = 1$，则 $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B)$

2. 扔硬币排队，正面选中餐，反面选西餐，中餐现有 9 人排队，每人时间为 $N(1, \frac{1}{9})$，西餐不需要排队，但需现做，参数为 0.1 的指数分布已知 $\Phi(1)$ 和 e^{-1} 的值。

   (a) 求等待时间 >10min 的概率
   (b) 若等待时长 >10min，求选西餐的概率
   (c) 求 E(等待时间)

3. ξ 分布函数为 $F(x)$，$\eta = \min\{1, |\xi|\}$

   (a) 求 η 的分布函数 F_η
   (b) 若 $\xi \sim U(-2, 2)$，问 η 是否为连续型？若否，是否能分成连续型与离散型的线性组合？

4. 在 $\left\{(x, y)\middle| |x| \leqslant |y| \leqslant 1\right\}$ 上投点，坐标为 (ξ, η)

   (a) 求联合密度，边缘密度
   (b) 求 $|\xi - \eta|$ 密度
   (c) 求 $\mathbb{E}(\xi|\eta)$，$\mathbb{E}(\xi^2 + \eta^2|\eta)$

5. N 个球，a 红，b 黑，一些其它；从中取 n 个，红黑分别 ξ，η 个，证明：放回与不放回，ξ 和 η 的相关系数相同；

   证明顺序：

(a) 放回，求 $D(\xi), D(\eta)$，$\mathrm{cov}(\xi,\eta)$

(b) 不放回，求 $D(\xi), D(\eta)$，$\mathrm{cov}(\xi,\eta)$

(c) 求 r_1, r_2，并证明 $r_1 = r_2$

6. (a) 若 $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$，求证 $\xi_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi^2$

   (b) 若 ξ_n 同分布，且 $\mathbb{E}|\xi_n| < \infty$，求证 $\dfrac{\xi_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

7. (a) 叙述强/弱大数定律

   (b) 下列是否满足强/弱大数定律

      i. $\mathbb{P}(\xi_n = \pm\sqrt{n}) = \frac{1}{n}$，$\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}$

      ii. $\mathbb{P}(\xi_n = \pm n) = \frac{1}{2n\ln n}$，$\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln n}$