

21 测概回忆版

2024 年 11 月 22 日

1. (a) 全体自然数列的势为 \aleph
(b) \mathcal{C} 为 λ 系、 π 系, 则为 σ 域
(c) 连续函数均可测
(d) $\overline{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2} \neq \overline{\mathcal{F}_1} \times \overline{\mathcal{F}_2}$
2. (a) μ 是 σ 有限的 \Rightarrow 扩张唯一
(b) 举例: 非 σ 有限的测度扩张不唯一
3. 叙述并证明非负单调收敛定理
4. 符号测度 $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- = \mu_1 - \mu_2$ 则
(a) $\varphi^+ \leq \mu_1, \varphi^- \leq \mu_2$
(b) 举例上述不等号可严格取等
5. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X_1, \dots, X_n, \dots$ 独立, $\forall I \subset N$, 定义 $\mathcal{F}_I = \sigma(\bigcup_{i \in I} \sigma(X_i))$
(a) $\mathcal{C}_I = \{\bigcap_{i \in I} A_i, A_i \in \sigma(X_i)\}$, 则 $\sigma(\mathcal{C}_I) = \mathcal{F}_I$
(b) $\mathcal{F}_{\leq n}$ 与 $\mathcal{F}_{> n}$ 独立
(c) $\mathcal{T} = \bigcap \mathcal{F}_{> n}$, 则 $\forall A \in \mathcal{T}$, 有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1
(d) 若 $f \in \mathcal{T}$, 则 f 几乎处处为 1 个常值