北京师范大学 2025–2026 学年第一学期高等代数 I 期中考试题 (A 卷)

课程名称：高等代数 I　　　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷

院 (系)：________　　专　业：________　　年　级：________

姓　名：________　　学　号：________

一. (20 分) 计算下列 n 阶行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_1 \end{vmatrix}$;

(2) 设 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a$，求 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$，其中 $n\geq 2$ 且 $j_1\cdots j_n$ 取遍 n 元奇排列.

二. (20 分) 求矩阵 X 使得 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三. (20 分) 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 F 上的一个 $m\times n$ 矩阵，且有 r 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r \end{pmatrix}\neq 0$.

证明：可对 A 经过一系列的初等行、列变换化为矩阵 B，这里

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & O \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} & \\ \hline & O & & A_0 \end{array}\right),$$

其中 A_0 是 $(m-r)\times(n-r)$ 矩阵.

四. (20 分) 设 G 是 $2p$ 阶群，其中 p 为奇素数. 证明 G 中一定存在 2 阶元和 p 阶元；当 G 是交换群时，则有 $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$.

五. (20 分) 设 $R = M_n(F)$ 是数域 F 上 n 阶全矩阵环，对于 $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix} \in R$，

令 $S = \{X \in R \mid AX = XA\}$.

(1) 证明 S 是 R 的一个交换子环；

(2) 判断 S 是否为整环，并说明理由（整环定义：有单位元，无零因子的交换环）.