北京师范大学 2024～2025 学年第二学期期中考试试卷（A 卷）

课程名称：数学分析　　　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

考试要求:

1. 写清答题根据, 无支持的结论将被扣除分数;
2. 雷同答题所得分数为应得分数除以雷同卷子数.

一．(20分)计算极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k\pi}{n^2}$　　2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 e^{x^2}x^{n-1}\,dx$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\cos t|\,dt$　　4. $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x^2)^{-1}\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}(x^2+1)^n\ln(1+x^4)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$

二．(30分)计算积分

1. $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5x\,dx$　2. $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$;

3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;　4. $\int_0^6 x^2[x]\,dx$;　5. $\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

6. $\int_1^4 f(x-2)\,dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}, & x\ge 0,\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$

三．(10 分) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^p}$ $(p>1)$ 收敛.

四．（10分）设 f 在 $[-1,1]$ 可导, $M=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f'(x)|$, 且存在 $a\in(0,1)$, 使得 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$. 求证:

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\right|\le M(1-a^2).$$

五．(10分)证明: $f\in C[a,b]$, $b>a>0$. 则存在 $\xi,\eta,\gamma\in(a,b)$ 使得:

$$f(\xi)=\frac{f(\eta)}{2\eta}(a+b)=\frac{f(\gamma)}{3\gamma^2}(a^2+ab+b^2).$$

六．（15分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明:

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx.$$

由此计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

七 (15分) 1. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，且 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，证明：

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x)=0.$$

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{na_n\}$ 单调, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} na_n \ln n = 0.$$

八 (10分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.