24 秋- 泛函分析期末（回忆版）

何家兴
hejiaxing202411@163.com

December 31, 2024

---

1. (a) 在度量空间中求证：紧集上的连续函数必有界，且达到上、下确界

   (b) 在度量空间中求证：完全有界的集合是有界的，并通过考虑 l^2 的子集 $E=\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 来说明一个集合可以是有界但不完全有界的

   (c) 在 $C[a,b]$ 中，令

$$\|f\|_1=\left(\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\quad \|f\|_2=\left(\int_0^1(1+x)|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

   证明 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是两个等价范数

2. (a) 证明赋范线性空间上的凸函数的局部极小值是全局最小值。

   (b) 设 C 是 B 空间 $\mathscr{X}$ 的一个有界闭凸集，映射 $T_i: C\to\mathscr{X}(i=1,2)$ 满足 $(1)\forall x,y\in C\Rightarrow T_1x+T_2y\in C$ (2) T_1 是一个压缩映射，T_2 是一个紧映射
   求证 T_1+T_2 在 C 上至少有一个不动点

   (c) M 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 的子集，求证

$$(M^{\perp})^{\perp}=\overline{\mathrm{span}M}$$

   (d) 设 $\mathscr{X}$ 是内积空间，$\forall x_0\in\mathscr{X},\forall r>0$，令 $C=\{x\in\mathscr{X}\,\big|\,\|x-x_0\|\leqslant r\}$，

      i. C 是 $\mathscr{X}$ 中的凸闭集

      ii. $\forall x\in\mathscr{X}$,

$$y=\begin{cases}x_0+r(x-x_0)/\|x-x_0\|, & x\notin C\\ x, & x\in C\end{cases}$$

      求证 y 是 x 在 C 中的最佳逼近元

   (e) 设 l 是 Hilbert 空间 H 上实值有界线性泛函，C 是 H 中的一个闭凸子集，设 $f(v)=\frac{1}{2}\|v\|^2-l(v),\quad\forall v\in C$,

      i. 求证 $\exists u^*\in H$ 使得 $f(v)=\frac{1}{2}\|u^*-v\|^2-\frac{1}{2}\|u^*\|^2$

      ii. 求证存在唯一 $u_0\in C$ 使得 $f(u_0)=\inf_{v\in C}f(v)$

(f) 设 $1<p<\infty$，且 $1/p+1/q=1$。若 $\{\alpha_k\}$ 使得 $\forall x=\{\xi_k\}\in l^p$ 保证 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$ 收敛，求证 $\{\alpha_k\}\in l^q$，又若 $f:x\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$，求证 f 作为 l^p 上的线性泛函，有

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. (a) i. 若 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，求证 $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间

   ii. 若 f 是线性泛函，求证

$$f\in\mathscr{X}^*\Longleftrightarrow N(f)\text{是闭线性子空间}$$

   (b) 设 $\mathscr{X}_0$ 是 B^* 空间的闭子空间，求证 $\rho(x,\mathscr{X}_0)=\sup\{|f(x)|\big|f\in\mathscr{X}^*,\|f\|=1,f(\mathscr{X}_0)=0\}$

   (c) 给定 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中 n 个线性无关的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求证 $\exists f_1,f_2,\cdots,f_n\in\mathscr{X}^*$，使得 $\langle f_i,x_j\rangle=\delta_{i,j}$

   (d) i. 设 C_0 是以 0 为极限的数列全体，赋范数

$$\|\cdot\|:\{\xi_k\}\in C\mapsto\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k|$$

   求证 $C_0^*=l^1$

   ii. 已知在 B^* 空间中 $x_n\rightharpoonup x_0$，求证

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|\to\|x_0\|$$

   iii. 设 H 是 Hilbert 空间，在 H 中 $x_n\to x$ 的充要条件是 (1)$\|x_n\|\to\|x\|$ (2) $x_n\rightharpoonup x$

4. (a) 设 $\mathscr{X}$ 是自反的 B 空间，M 是 $\mathscr{X}$ 中的非空闭凸集，求证：$\exists x_0\in M$，使得 $\|x_0\|=\inf\{\|x\|\big|x\in M\}$

   (b) 证明 A 是 $m\times n$ 的实矩阵，$Ax=b$ 要么有至少 1 个解，要么 $\exists y$ 满足 $A^Ty=0$ 且 $b^Ty=0$
   （来自 3.2 节 Fredholm 理论）