23 秋- 泛函期末（回忆版）

何家兴

hejiaxing202411@163.com

December 7, 2024

Exercise 1.

设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{X}$ 中的两个正交规范集，满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\| < 1$$

求证：$\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 其中一组完备能推出另一组完备。

Exercise 2.

设 $\mathcal{X}$ 是 B^* 空间。求证：$\mathcal{X}$ 是 B 空间当且仅当 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛

Exercise 3.

设 M 是 $(\mathbb{R}^n, \rho)$ 中的有界闭集，$T : M \to M$ 满足 $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$，$\forall x \neq y \in M$，求证 T 在 M 中存在唯一不动点。

Exercise 4.

设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 B 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是满射, 求证: 若 $y_n \to y \in \mathcal{Y}$, 则 $\exists\, C > 0$ 与 $x_n \to x_0 \in \mathcal{X}$, 使得 $Ax_n = y_n$，且 $\|x_n\| \leqslant C\|y_n\|$

Exercise 5.

设 $\mathcal{X}$ 是 B^* 空间，$E \subset \mathcal{X}$ 是非空的均衡闭凸集，$\forall x_0 \in \mathcal{X} \backslash E$，求证：$\exists\, f \in \mathcal{X}^*$ 以及 $\alpha > 0$，使得

$$|f(x)| < \alpha < |f(x_0)| \quad \forall\, x \in E$$

Exercise 6.

在 l^2 中定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots)$$

求证：$T \in \mathcal{L}(l^2)$，并求 T^*

Exercise 7.

设 $\mathcal{X}$ 是自反的 B 空间，M 是 $\mathcal{X}$ 中的有界闭凸集，$\forall\, f \in \mathcal{X}^*$, 求证：$f$ 在 M 上达到最大值和最小值。

Exercise 8.

设 $\mathcal{X}$ 是 B 空间，$T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ 是线性算子，满足

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle, \quad \forall\, x, y \in \mathcal{X}$$

证明 T 是有界算子。

Exercise 9.

设 $\mathcal{X}$ 是 Hilbert 空间

1. 设 $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ 满足 $\forall\, x \in \mathcal{X}$，有 $(x, x_n) \to 0,\ n \to \infty$，证明

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|x_n\|\} < \infty$$

2. 设 $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ 弱收敛到 $x \in \mathcal{X}$，证明存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得

$$\left\|\frac{\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}}{k} - x\right\| \to 0, \quad k \to \infty$$