21-22学年秋季学期2021级数学强基班“数学分析”

期末考试试题及答案

注：第6,7题选一作答，若两道都答，则记得分较高者。

1. (**18分**) (1) 若实数序列$\{x_n\}$收敛到有限数A, 按“极限定义”证明序列

$$\xi_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\ \ n=1,2,\cdots$$

也收敛到A.

(2) 按“可微定义”证明函数$f(x)=x^p\ (p\in\mathbb{N})$在$\mathbb{R}$上处处可微。

(3) 根据Cauchy准则说明函数$f(x)=e^x$在任何闭区间$[a,b]\subset\mathbb{R}$上Riemann可积。

◀ (1) 因$\{x_n\}$收敛到A, 按极限定义(P67), $\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N(A-\epsilon<x_n<A+\epsilon)$, 同时由数列极限性质(P68定理1)知，$\exists M>0\forall n\in\mathbb{N}(-M<x_n<M)$. 于是当$n\in\mathbb{N}$且$n>\max\left\{N,\dfrac{M}{\epsilon},\dfrac{N|A|}{\epsilon}\right\}$时，

$$\xi_n=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\frac{x_1+\cdots+x_N}{n}+\frac{x_{N+1}+\cdots+x_n}{n}=:\eta_n+\zeta_n,$$

$$-\frac{N}{n}\epsilon<\eta_n<\frac{N}{n}\epsilon,\quad \frac{(n-N)}{n}(A-\epsilon)<\zeta_n<\frac{(n-N)}{n}(A+\epsilon).$$

从而

$$-A-2\epsilon<\xi_n<A+2\epsilon\implies|\xi_n-A|<2\epsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n=A$.

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$(x+h)^p-x^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{p-k}h^k-x^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{p-k}h^k$$

$$=px^{p-1}h+\left[\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}x^{p-k}h^{p-2}\right]h\cdot h=:px^{p-1}h+\alpha(x;h)h.$$

当$h \to 0$时，

$$|\alpha(x;h)| \le \sum_{k=2}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} |x|^{p-k} h \le \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} |x|^{p-k} h = (|x|+1)^p h,$$

所以，对于给定的x, $\alpha(x;h) \to 0$. 由可微定义(P159)知题中结论成立。

(3) 函数f在闭区间$[a,b]$可积的Cauchy准则(P301-302)是指：f在闭区间$[a,b]$可积当且仅当$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, 使得$[a,b]$的任何带标志点的分划$(P', \xi')$和$(P'', \xi'')$, 只要$\lambda(P') < \delta$和$\lambda(P'') < \delta$, 就成立不等式

$$|\sigma(f;P',\xi') - \sigma(f;P'',\xi'')| < \epsilon \qquad (1-3)$$

或

$$\left| \sum_{i=1}^{n'} f(\xi_i') \delta x_i' - \sum_{i=1}^{n''} f(\xi_i'') \delta x_i'' \right| < \epsilon.$$

现在对于$[a,b]$的任何两个满足$\lambda(P') < \delta$和$\lambda(P'') < \delta$的带标志点的分划(P', ξ')和(P'', ξ''), 我们取$(P,\xi) = (P',\xi') \bigcup (P'',\xi'')$, 它由合并$P'$和$P''$的点而成，即为二者的开拓。于是，有以下估计：

$$|\sigma(f;P,\xi) - \sigma(f;P',\xi')| = \left| \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n_i'} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n'} f(\xi_i') \Delta x_i' \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n_i'} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n_i'} f(\xi_i') \Delta x_{ij}' \right| = \left| \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n_i'} \left[f(\xi_{ij}) - f(\xi_i') \right] \Delta x_{ij} \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n_i'} \left| f(\xi_{ij}) - f(\xi_i') \right| \Delta x_{ij} \le \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n_i'} \omega(f;\Delta_i') \Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n'} \omega(f;\Delta_i') \Delta x_i'.$$

同样地，

$$|\sigma(f;P,\xi) - \sigma(f;P'',\xi'')| \le \sum_{i=1}^{n''} \omega(f;\Delta_i'') \Delta x_i''.$$

所以

$$|\sigma(f;P',\xi') - \sigma(f;P'',\xi'')| < \sum_{i=1}^{n'} \omega(f;\Delta_i') \Delta x_i' + \sum_{i=1}^{n''} \omega(f;\Delta_i'') \Delta x_i''.$$

由Lagrange中值定理(P193)知，当$x, y \in [a,b]$且$0 \le y - x < \delta$时，

$$|e^x - e^y| = \left| e^\theta (x-y) \right| < e^b \delta, \;\; \theta \in]x,y[.$$

由此推出

$$|\sigma(f;P',\xi')-\sigma(f;P'',\xi'')|<\sum_{i=1}^{n'}e^b\delta\Delta x_i'+\sum_{i=1}^{n''}e^b\delta\Delta x_i''=2e^b[b-a)\delta.$$

综上，对于任意的$\epsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\epsilon}{2e^b[b-a)}$, 则对$[a,b]$的任何带标志点的分划$(P',\xi')$和$(P'',\xi'')$, 只要$\lambda(P')<\delta$和$\lambda(P'')<\delta$, 函数$f(x)=e^x$在闭区间$[a,b]$上成立不等式$(1-3)$, 即它Riemann可积。 ▶

2. (**16分**) (1) 若

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2021}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{2022},$$

求x.

(2) 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^6)}$.

◀ (1)

$$\frac{n^{2021}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{n^{2021-x}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^x}=\frac{n^{2021-x}}{1-\left[1-\dfrac{x}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right]}$$

$$=\frac{n^{2021-x}}{\dfrac{x}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{n^{2022-x}}{x+O\left(\dfrac{1}{n}\right)}.$$

显然，若要题中等式成立，只能是$x=2022$.

(2)

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^6)}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^6)}=2\int_{+\infty}^0\frac{-\dfrac{1}{u^2}du}{\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{u^6}\right)}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{u^6du}{(1+u^2)(1+u^6)}=2\int_0^{+\infty}\frac{x^6dx}{(1+x^2)(1+x^6)}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
2I &= 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^6)}+2\int_0^{+\infty}\frac{x^6dx}{(1+x^2)(1+x^6)}\\
&=2\int_0^{+\infty}\frac{(1+x^6)dx}{(1+x^2)(1+x^6)}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\\
&=2\arctan x\big|_0^{+\infty}=\pi.
\end{aligned}
$$

从而

$$
I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^6)}=\frac{\pi}{2}.
$$

▶

3. (**15分**) 验证：当$0<|x|<\frac{\pi}{2}$时，$\cos x<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$.

◀ 只需考虑$0<x<\frac{\pi}{2}$的情形。 令$g(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3\cos x}$, 则$g(+0)=1$, $g\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=+\infty$. 另

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{3\sin^2 x\cos x\cdot x^3\cos x-\sin^3 x\cdot[3x^2\cos x-x^3\sin x]}{x^6\cos^2 x}\\
&=\frac{\sin^2 x}{x^4\cos^2 x}[3x\cos^2 x-3\sin x\cos x+x\sin^2 x]\\
&=\frac{\sin^2 x}{x^4\cos^2 x}\left[x(1+2\cos^2 x)-3\sin x\cos x\right]\\
&=:\frac{\sin^2 x}{x^4\cos^2 x}h(x).
\end{aligned}
$$

若能说明$g'(x)>0$或$h(x)>0$, 则问题解决。因$h(+0)=0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, 如果我们能说明在$]0,\frac{\pi}{2}[$上$h'(x)>0$, 则问题解决。事实上,

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= 1+2\cos^2 x-4x\cos x\sin x-3\cos^2 x+3\sin^2 x\\
&=4\sin^2 x-4x\cos x\sin x=4\sin x\cos x(\tan x-x)>0.
\end{aligned}
$$

当$0<x<\frac{\pi}{2}$, $\tan x-x>0$是明显的，因为$(\tan x-x)'=\dfrac{1}{\cos^x}-1>0$. ▶

4. (**15分**) 反常积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x}dx$是否收敛？是否绝对收敛？请详细说明。

◀ 由Abel-Dirichlet准则(P360)推知它收敛；但它不绝对收敛，因为(P359)

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx \ge \int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx + \frac{\cos 2x}{x}dx,$$

上式右端两个积分，前者发散到$+\infty$, 而后者收敛(Abel-Dirichlet准则)。 ▶

5. (**18分**) (1) 举出一个收敛级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$的例子，使得$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k^3$发散。

(2) 举一个闭区间上未必处处连续的下凸函数的例子。

(3) 举一个闭区间上10阶连续可微但11阶不再处处可微的实值函数例子。

◀ (1)

$$1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\cdots-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}-\cdots-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\cdots.$$

(2) $[0,1]$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}0,\ 0<x<1,\\ 1,\ x=0,1\end{cases}$$

即满足要求。

(3) $[-1,1]$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{21}\sin\dfrac{1}{x},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0\end{cases}$$

即满足要求。 ▶

6. (**18分**) 证明：数列

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 1!},\quad a_2=\frac{2}{1\cdot 3!}+\frac{2}{3\cdot 1!},$$
$$a_k=\frac{k}{1\cdot(2k-1)!}+\cdots+\frac{k}{(2r-1)\cdot[2(k-r)+1]!}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)\cdot 1!},\cdots$$

不增，并求其极限。

◀ 解：细写

$$a_k=\frac{k}{1\cdot(2k-1)!}+\frac{k}{3\cdot(2k-3)!}+\frac{k}{5\cdot(2k-5)!}+\cdots$$
$$+\frac{k}{(2r-1)\cdot[2(k-r)+1]!}+\frac{k}{(2r+1)\cdot[2(k-r)-1]!}+\cdots$$
$$+\frac{k}{(2k-3)\cdot 3!}+\frac{k}{(2k-1)\cdot 1!},$$

$$a_{k+1}=\frac{k+1}{1\cdot(2k+1)!}+\frac{k+1}{3\cdot(2k-1)!}+\frac{k+1}{5\cdot(2k-3)!}++\frac{k+1}{7\cdot(2k-5)!}\cdots$$
$$+\frac{k+1}{(2r+1)\cdot[2(k-r)+1]!}+\frac{k+1}{(2r+3)\cdot[2(k-r)-1]!}+\cdots$$
$$+\frac{k+1}{(2k-1)\cdot 3!}+\frac{k+1}{(2k+1)\cdot 1!}.$$

a_k中有k项，a_{k+1}中有$k+1$项，下面让a_k中的第一项减a_{k+1}中的第一和第二项，让a_k中的第r项减a_{k+1}中的第$r+1$项，$r\geq 2$:

$$\frac{k}{(2r-1)\cdot[2(k-r)+1]!}-\frac{k+1}{(2r+1)\cdot[2(k-r)+1]!}$$
$$=\frac{k(2r+1)-(k+1)(2r-1)}{(2r-1)(2r+1)\cdot[2(k-r)+1]!}$$
$$=\frac{2(k-r)+1}{(2r-1)(2r+1)\cdot[2(k-r)+1]!}>0,\quad 2\leq r\leq k.$$

$$\frac{k}{1\cdot(2k-1)!}-\frac{k+1}{1\cdot(2k+1)!}-\frac{k+1}{3\cdot(2k-1)!}$$
$$=\frac{(k-1)(8k^2+8k+3)}{3\cdot(2k+1)!}\geq 0.$$

这就证明了数列不增(实际上从第二项开始就单调递减)。然后把数列写成两

部分：

$$
\begin{aligned}
2a_k &= \frac{2k}{1\cdot(2k-1)!}+\cdots+\frac{2k}{(2r-1)\cdot[2(k-r)+1]!}+\cdots+\frac{2k}{(2k-1)\cdot 1!}\\
&= \left\{\frac{1}{(2k-1)!}+\cdots+\frac{1}{[2(k-r)+1]!}+\cdots+\frac{1}{1!}\right\}\\
&+\left\{\frac{1}{1\cdot(2k-2)!}+\frac{1}{3\cdot(2k-4)!}+\frac{1}{5\cdot(2k-6)!}+\cdots\right.\\
&+\frac{1}{(2r-1)\cdot[2(k-r)]!}+\frac{1}{(2r+1)\cdot[2(k-r)-2]!}+\cdots\\
&\left.+\frac{1}{(2k-5)\cdot 4!}+\frac{1}{(2k-3)\cdot 2!}+\frac{1}{(2k-1)\cdot 0!}\right\}\\
&:= b_k+c_k.
\end{aligned}
$$

易知，对足够大的k,

$$
b_k \to \frac{e^1-e^{-1}}{2};
$$

而对于$1\le r\le k-1$,

$$
\begin{aligned}
&(2r-1)\cdot 2(k-r)-(2k-2)=2\left[(2r-1)(k-r)-k+1\right]\\
&=2(r-1)\left[2(k-r)-1\right]\ge 0,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
c_k &\le \frac{1}{2k-2}\\
&\left\{\frac{1}{(2k-3)!}+\frac{1}{(2k-5)!}+\cdots+\frac{1}{[2(k-r)-1]!}+\cdots+\frac{1}{3!}+\frac{1}{1!}\right\}\\
&+\frac{1}{2k-1}\to 0.
\end{aligned}
$$

综上，$\{a_k\}$最终单调递减，且

$$
\lim_{k\to+\infty} a_k=\frac{e^1-e^{-1}}{4}.
$$

▶

7. (**18分**) 设$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$为偶函数，且是$[0,1]$上的不减函数，而g是$[-1,1]$上的下凸函数，试证：

$$
2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \ge \int_{-1}^{1} f(x)dx\int_{-1}^{1} g(x)dx.
$$

◀ 首先，f在$[0,1]$上单调，故在$[0,1]$上可积。又它是偶函数，故在$[-1,1]$上可积。

其次，g是$[-1,1]$上的下凸函数，故$\forall x\in[-1,1]$,

$$g(x)=g\left(\frac{1-x}{2}\cdot(-1)+\frac{1+x}{2}\cdot 1\right)\le\frac{1-x}{2}g(-1)+\frac{1+x}{2}g(1)\le|g(-1)|+|g(1)|.$$

即g在$[-1,1]$上有界。又由$\frac{1}{2}\left[g(x)+g(-x)\right]\ge g\left(\frac{x+(-x)}{2}\right)=g(0)$得

$$g(x)\ge 2g(0)-g(-x)\ge 2g(0)-|g(-1)|-|g(1)|.$$

即g在$[-1,1]$下有界。从而g在$[-1,1]$有界。

再由开区间上的凸函数连续(于寿洋12月9日在群里发过答案的)知g在$]-1,1[$内连续。于是，有界函数在闭区间$[-1,1]$上最多有两个间断点，因而可积。

再次，令$h(x)=g(x)+g(-x)$，则$h(x)$为$[-1,1]$上的偶函数，对于$0\le x_1<x_2\le 1$，有下凸函数的等价定义知

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}\ge\frac{g(-x_1)-g(-x_2)}{(-x_1)-(-x_2)}\Longleftrightarrow g(x_2)+g(-x_2)\ge g(x_1)+g(-x_1)$$
$$\Longleftrightarrow h(x_2)\ge h(x_1).$$

因此h在$[0,1]$上也是不减函数。

至此，我们可以断定：$\forall x,y\in[0,1]$，均有

$$\left[f(x)-f(y)\right]\left[h(x)-h(y)\right]\ge 0\Longleftrightarrow f(x)h(x)+f(y)h(y)\ge f(x)h(y)+f(y)h(x).$$

将上式两边在$[0,1]$上分别对x, y积分，得

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx + \int_0^1 f(y)h(y)dy \geq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 h(y)dy + \int_0^1 f(y)dy \cdot \int_0^1 h(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow 2\int_0^1 f(x)h(x)dx \geq 2\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 h(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)h(x)dx \geq \int_{-1}^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 h(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)[g(x)+g(-x)]dx \geq \int_{-1}^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 [g(x)+g(-x)]dx$$

$$\Longleftrightarrow 2\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \geq \int_{-1}^1 f(x)dx \cdot \int_{-1}^1 g(x)dx.$$

▶