3. 闭区间套定理：如果 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$，且 $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

($a_n \uparrow \xi$，且 $b_n \downarrow \xi$)。

eg：闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界存在定理

任取集合 E，设 M 是 E 的上界，任取 $x_1 \in E$。

将 $[x_1, M]$ 二等分，若右半区间含有 E 中的点，则记右半区间为 $[a_1, b_1]$

否则记左半区间为 $[a_1, b_1]$。

再将 $[a_1, b_1]$ 二等分，用同样的方法选记 $[a_2, b_2]$。

如此重复即得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$，且满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(M - x_1) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2M = 0$

即 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套，故存在唯一 $\xi \in [a_n, b_n]$，$\forall n$。

下证 ξ 即为 E 的上确界。

由 $[a_n, b_n]$ 的选取可知 ξ 为 E 的一个上界，否则若 $\exists x_0 \in E$ 且 $x_0 > \xi$

即 $\exists N_0$ s.t. $x_0 \in [a_{N_0}, b_{N_0}]$ 且 $x_0 \notin [a_{N_0+1}, b_{N_0+1}] = [a_{N_0}, \frac{a_{N_0}+b_{N_0}}{2}]$

就与 $[a_{N_0+1}, b_{N_0+1}]$ 的选取矛盾，即 ξ 为 E 的上界。

又 $\forall \varepsilon > 0$　$\exists N$ s.t. $n > N$　$\frac{1}{2^n} \cdot 2M < \varepsilon$，则此时对应的

$[a_n, b_n]$ 中包含的 E 中元素 x_n 满足 $|x_n - \xi| < \varepsilon$　$\therefore$　$\xi - \varepsilon < x_n$

$\therefore$ ξ 为上确界。

4. 证明 反证：若 $\{a_n\}$ 不收敛. 则等价于 $\exists \varepsilon_0>0$. $\forall N$. $\exists m,n>N$.
(不妨 $m>n>N$)

使得 $|a_m-a_n|>\varepsilon_0$ 则 $\sum_{k=n}^{m-1}|a_{k+1}-a_k| \geq |a_m-a_n|>\varepsilon_0$.

对 $\forall N_i$ $\exists m_i>n_i>N_i$ 并要求 $N_{i+1}>m_i$. 取 $i=1,2\cdots \lceil \frac{2023}{\varepsilon_0} \rceil$. $=: I$.

则 $\sum_{k=1}^{m_I}|a_{k+1}-a_k| \geq \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=n_i}^{m_i-1}|a_k-a_k| > \sum_{i=1}^{I}\varepsilon_0 \geq 2023$

均与 $\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k| \leq 2023$. $\forall n$ 矛盾. 则 $\{a_n\}$ 收敛.

4. 法二：令 $b_n=\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|$ 则 $\{b_n\}\uparrow$ 且 $b_n\leq 2023$. $\forall n$

故 b_n 单增有上界 则必收敛. 即 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$. $\forall m>n>N$.

有 $|b_m-b_n|<\varepsilon$. 即 $\sum_{k=n+1}^{m}|a_{k+1}-a_k|<\varepsilon$.

故得 $|a_{m+1}-a_{n+1}| \leq \sum_{k=n+1}^{m}|a_{k+1}-a_k| < \varepsilon$.

即 $\{a_n\}$ 收敛.

6. 证明 $\forall x_1\in(a,b)$. $\lim_{x\to x_1}f(x)$ 存在 则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta$. $\forall x'\in U(x_1,\delta)$.

$|f(x')-\lim_{x\to x_1}f(x)|<\varepsilon$.

$\forall x_2\in U(x_1,\frac{\delta}{2})$. $\lim_{x\to x_2}f(x)$ 存在 则 $\exists\delta'<\frac{\delta}{2}$. $\forall x''\in U(x_2,\delta')$

$|f(x'')-\lim_{x\to x_2}f(x)|<\varepsilon$ 且 $x''\in U(x_1,\delta)$.

故 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta$ $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有.

$$|g(x_1)-g(x_2)| = \left|\lim_{x\to x_1} f(x) - \lim_{x\to x_2} f(x)\right| \leqslant \left|\lim_{x\to x_1} f(x) - f(x')\right| + \left|\lim_{x\to x_2} f(x) - f(x')\right|$$

$$< 2\varepsilon$$

则 $g(x)$ 连续.

7. 证明: 显然 只需证 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为常值函数.

因为 $\forall x \in \mathbb{R}$. $\sin x \in [-1,1]$ $f(x) = f(\sin x) \in f([-1,1])$.

$\forall x \in [0,1]$. $f(x) = f(\sin x) = f(\sin(\sin x)) = \cdots$

且 $x > \sin x > \sin(\sin x) > \cdots$ 令 $a_n = \underbrace{\sin(\cdots(\sin}_{(n-1)个} x)\cdots)$

则 a_n 单调递减 且 $a_n > 0$ 故存在极限设为 a.

则 $a = \sin a$ $\Rightarrow$ $a = 0$ 则 $f(x) = f(0)$ $\forall x \in [0,1]$

$\forall x \in [-1,0]$. $x < \sin x < \sin(\sin x) < \cdots$ 令 $a_n = \underbrace{\sin(\cdots(\sin}_{n-1个} x)\cdots)$

则 a_n 单调递增 且 $a_n < 0$. 故存在极限设为 a.

则 $a = \sin a$ $\Rightarrow$ $a = 0$ 则 $f(x) = f(0)$ $\forall x \in [-1,0]$

综上 $f(x) = f(0)$ $\forall x \in [-1,1]$ 则 $f(x) = f(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

故 f 为常值函数.