

25 春- 代数学基础 2 (回忆版)

July 23, 2025

1. (20pts) 求一个齐次线性方程组的基础解系。(5 个未知数, 3 个方程)
2. (15pts) 求一个实二次型的典范型 (4 阶), 指出其正负惯性指数和符号差。
3. (25pts) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 定义:

$$\sigma : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \quad (1)$$

$$X \rightarrow AXB \quad (2)$$

- (a) 证明: σ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 上关于 \mathbb{R} 的线性变换。
 - (b) 求 σ 在一组基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵。
 - (c) 求 σ 的特征多项式。
 - (d) 求 σ 的特征值, 并计算其每个根子空间的维数。
 - (e) 判断 σ 是否可以对角化, 并说明理由。
4. (10pts) 已知线性变换 σ 的特征多项式是 $f(t) = (t - 2)^4(t - 1)$, 写出其所有互不相似的 Jordan 标准型和对应的极小多项式。
 5. (10pts) 已知 $Ax = 0, Bx = 0$ 同解。

(a) 证明: $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 。

(b) 证明: A 和 B 的行空间相同。

6. (10pts)

- (a) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 。若 $AB = BA$, 证明: A, B 存在一个相同的特征向量。
- (b) A, B 都是实对称矩阵, 且 $AB = BA$, 证明: 存在正交矩阵 U , 满足 $U^T A U, U^T B U$ 都是对角矩阵。

7. (10pts) 如果一个实矩阵满足：

$$a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

那么我们称其为严格主对角占优矩阵。证明：实对称严格主对角占优矩阵一定是正定的。