九. (14分) 设$\mathcal{X}$是Banach空间.

(i) 求证: $\mathcal{X}$或者为有限维, 或者其任意极大线性无关组不可数.

(ii) 若$\mathcal{X}$是无限维的且$\mathcal{X}^*$可分, 求证: 对任意$x_0 \in B(\theta, 1)$, 存在$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$满足

$$\|x_n\| = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } x_n \rightharpoonup x_0,\ n \to \infty.$$

证: 先证(i). 只需说明$\mathcal{X}$为无限维时, 其任意极大线性无关组不可数. 用反证法, 设$\mathcal{X}$存在一个可列的极大线性无关组$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$. 对任意$n \in \mathbb{N}$, 令$\mathcal{X}_n := \operatorname{span}_{1\le i\le n}\{e_j\}$. 则$\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n$. 事实上, 由$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$极大知, 对任意$x \in \mathcal{X}$, 存在$N \in \mathbb{N}$, $\{e_{n_k}\}_{k=1}^N \subset \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$及$\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$使得

$$x = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{n_k} e_{n_k} \in \mathcal{X}_{n_N} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n.$$

从而$\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n$得证.

下断言, 对任意$n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X}_n$为疏集. 为此, 由$\mathcal{X}_n$为有限维从而$\mathcal{X}_n$闭知, 只需证明$\mathcal{X}_n$的内点为空集. 事实上, 对任意$x \in \mathcal{X}_n$ 及$\varepsilon \in (0, \infty)$, $x + \varepsilon\frac{e_{n+1}}{2\|e_{n+1}\|} \in B(x, \varepsilon)$. 但由于$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$线性无关, 故$x + \varepsilon\frac{e_{n+1}}{2\|e_{n+1}\|} \notin \mathcal{X}_n$. 从而$x$不是$\mathcal{X}_n$的内点, 故$\mathcal{X}_n$为疏集, 断言成立. 由此进一步知$\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n$ 为第一纲集. 但因$\mathcal{X}$完备及Baire定理, $\mathcal{X}$必为第二纲集, 矛盾! 故$\mathcal{X}$的极大线性无关组一定不可数, 从而(i)证毕.

下证(ii). 由$\mathcal{X}$无限维知$\mathcal{X}^*$必为无限维, 从而$\mathcal{X}^*$的可数稠密子集一定可列, 设其为$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. 下断言, 对任意$n \in \mathbb{N}$, 存在$y_n \in \mathcal{X} \setminus \{\theta\}$ 使得

$$f_k(y_n) = 0,\ \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

为此, 令

$$\phi_n:\ \mathcal{X} \to \mathbb{K}^n,\ x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

则ϕ_n必不为单射, 否则$\dim \mathcal{X} = \dim \phi_n(\mathcal{X}) \le n$, 与$\mathcal{X}$无限维矛盾! 故存在$y_n \in \mathcal{X} \setminus \{\theta\}$ 使得$\phi_n(y_n) = 0$, 此即

$$f_k(y_n) = 0,\ \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

从而断言成立.

现对任意$n \in \mathbb{N}$及$t \in [0, \infty)$, 令$h_n(t) := \|x_0 + t y_n\|$. 则$h_n$是关于$t$的连续函数, $h_n(0) = \|x_0\| < 1$且

$$h_n(t) \ge t\|y_n\| - \|x_0\| \to \infty,\ t \to \infty.$$

从而存在$t_n \in (0, \infty)$使得$h_n(t_n) = 1$. 令$x_n := x_0 + t_n y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 则$\|x_n\| = 1$. 且对任意$k, n \in \mathbb{N}$满足$n \ge k$, 有

$$|f_k(x_n) - f_k(x_0)| = |f_k(x_0) + t_n f_k(y_n) - f_k(x_0)| = 0.$$

故
$$\lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = f_k(x_0).$$
由此, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有界, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的稠密性及Banach–Steinhaus定理知
$$x_n \rightharpoonup x_0,\ n\to\infty,$$
从而(ii)得证. 至此题目证毕.