2023-24 学年泛函分析 期末考试 (回忆版)

2023.12.26

一. (10 分)(*p83 1.6.9*)
设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中的两个正交规范集, 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

求证: $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完备蕴含另一个完备.

证明. 不妨设 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是完备的, 若 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不完备, 故 $\exists x \in \mathscr{X}, x \neq \theta$, 使得 $\forall i \in \mathbb{N}, (x, f_i) = 0$.
又由书上定理知 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 完备, 从而对于 x 有 Parseval 等式成立, 即有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n - f_n)|^2.$$

由此以及 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\|x\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2 \|e_n - f_n\|^2 < \|x\|^2,$$

矛盾. 故 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 完备. $\square$

二. (10 分)(*p47 1.4.7*)
设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间. 求证: $\mathscr{X}$ 是 B 空间, 必须且仅须对 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

证明. 必要性. 对于任意 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}$, 考虑对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, 下证 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的基本列.
对 $\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, 由范数的三角不等式, 有

$$\|S_m - S_{m+p}\| = \left\| \sum_{i=m}^{m+p} x_i \right\| \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} \|x_i\|.$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$, 知 $\sum\limits_{i=m}^{\infty} \|x_i\| \to 0, m \to \infty$, 故

$$\|S_m - S_{m+p}\| = \| \sum_{i=m}^{m+p} x_i \| \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} \|x_i\| \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} \|x_i\| \to 0, m \to \infty,$$

即 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的基本列. 又 $\mathscr{X}$ 为 B 空间, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.
充分性. 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的基本列, 则对 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists N_k \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall n, m > N_k$ 有

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

故可取 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得对 $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}\|<\frac{1}{2^k}.$$

因此 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1<\infty$.

由条件知, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_k}-x_{n_{k+1}})$ 收敛, 故 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛.

记 $x_0:=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$, 因 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的基本列, 故对 $\forall\varepsilon\in(0,\infty),\exists N\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n,m>N$ 有

$$\|x_n-x_m\|<\frac{\varepsilon}{2}.\quad(*)$$

又对上述 $\varepsilon,\exists k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $n_{k_0}>N$, 使得

$$\|x_{n_{k_0}}-x_0\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此以及 $(*)$ 式知, 对 $\forall n>N$, 有

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\|x_n-x_{n_{k_0}}\|+\|x_{n_{k_0}}-x_0\|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 因此 $\mathscr{X}$ 完备. □

三. (10 分)(*p11 1.1.6*)

设 M 是 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 中的有界闭集, 映射 $T:M\to M$ 满足: $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)(\forall x,y\in M,x\neq y)$. 求证: T 在 M 中存在唯一的不动点.

证明. 对 $\forall x\in M,f(x):=\rho(x,Tx)$. 由 $\mathbb{R}^n$ 中的三角不等式和题设知 f 在 M 上连续. 因 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 故 M 为紧集. 于是存在 $x_0\in M$ s.t.

$$\rho(x_0,Tx_0)=f(x_0)=\min_{x\in M}f(x)=\min_{x\in M}\rho(x,Tx).$$

若 $f(x_0)=0$, 则 x_0 为不动点. 若 $\rho(x_0,Tx_0)>0$, 则由题设知

$$\rho(Tx_0,T^2x_0)<\rho(x_0,Tx_0)=\min_{x\in M}\rho(x,Tx).$$

这与 $\rho(x_0,Tx_0)$ 是最小值矛盾! 故 x_0 为 T 在 M 上不动点.

如果 $x_1\neq x_0$ 均为 f 在 M 上不动点. 则 $\rho(x_0,x_1)=\rho(Tx_0,Tx_1)<\rho(x_0,x_1)$, 矛盾! 故 x_0 为 T 在 M 上的唯一不动点. □

四. (15 分)(*p121 2.3.11*)

设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间, $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是满射的. 求证: 如果在 $\mathscr{Y}$ 中 $y_n\to y_0$, 则 $\exists C>0$ 与 $x_n\to x_0$, 使得 $Ax_n=y_n$, 且 $\|x_n\|\leqslant C\|y_n\|$.

证明. 由于 A 是满射知 $\exists x_0\in\mathscr{X}$, 使得 $Ax_0=y_0$.

又由于开映射定理, $\exists\delta_0\in(0,\infty)$ 使得

$$B(y_0,\delta_0)\subset A(B(x_0,1)).$$

对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 若 $y_n=y_0$, 则令 $x_n:=x_0$.

若 $y_n\neq y_0$, 则 $\|y_n-y_0\|>0$, 从而由范数的齐次性和 A 的线性性知,

$$B\left(y_0,2\|y_n-y_0\|\right)\subset A\left(B\left(x_0,\frac{2\|y_n-y_0\|}{\delta_0}\right)\right).$$

由于 $y_n \in B(y_0, 2\|y_n - y_0\|)$, 故 $\exists x_n \in \mathscr{X}$, 使得

$$y_n = Ax_n,\ 且\ \|x_n - x_0\| < \frac{2\|y_n - y_0\|}{\delta_0}.$$

又 $y_n = y_0$ 时,

$$\|x_n - x_0\| = 0 = \frac{2\|y_n - y_0\|}{\delta_0}.$$

从而对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \frac{2}{\delta_0}\|y_n - y_0\|.$$

若 $y_0 = \theta$, 则 $x_0 = \theta$, 则上式即为

$$\|x_n\| \leqslant \frac{2}{\delta_0}\|y_n\|, \forall n \in \mathbb{N},$$

从而 $x_n \to \theta, n \to \infty$, 即 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_0 := \theta$ 满足题目要求.
若 $y_0 \neq \theta$, 则 $x_0 \neq \theta$. 由

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \frac{2}{\delta_0}\|y_n - y_0\|, \forall n \in \mathbb{N}$$

知 $x_n \to x_0, n \to \infty$. 不妨设 $y_n \neq \theta, \forall n \in \mathbb{N}$, 又

$$\frac{\|x_n\|}{\|y_n\|} \to \frac{\|x_0\|}{\|y_0\|}, n \to \infty.$$

从而 $\{\|x_n\|/\|y_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $(0,\infty)$ 中的有界序列, 此即 $\exists C \in (0,\infty)$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{\|x_n\|}{\|y_n\|} \leqslant C \iff \|x_n\| \leqslant C\|y_n\|$. 故此时 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_0$ 即满足题目要求. □

五. (10 分)(*p144 2.4.10*)
设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, $E \subset \mathscr{X}$ 是非空的均衡闭凸集, $\forall x_0 \in \mathscr{X}\backslash E$. 求证: $\exists f \in \mathscr{X}^*$ 及 $\alpha > 0$, 使得

$$|f(x)| < \alpha < |f(x_0)| (\forall x \in E).$$

证明. 首先将 $\mathscr{X}$ 看成实 B^* 空间, 因 E 为非空闭凸集, 故由 Ascoli 定理知 $\forall x_0 \in \mathscr{X}\backslash E$, 存在非零实值连续线性泛函 g 以及 $\beta \in \mathbb{R}$, 使得

$$g(x) < \beta < g(x_0), \forall x \in E.$$

故

$$\sup_{x\in E} g(x) \leqslant \beta < g(x_0).$$

现令 $f(x) := g(x) + \mathrm{i}g(-\mathrm{i}x), \forall x \in \mathscr{X}$. 则 $f \in \mathscr{X}^*$.
事实上, 由于 g 的实线性性易知 f 也为实线性的, 且

$$f(\mathrm{i}x) = g(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}g(x) = \mathrm{i}[g(x) + \mathrm{i}g(-\mathrm{i}x)] = \mathrm{i}f(x), \forall x \in \mathscr{X},$$

故 f 也是复线性的, 从而 $f \in \mathscr{X}^*$. 现设

$$f(x) = \mathrm{e}^{i\theta}|f(x)|, \theta := \arg f(x),$$

则

$$|f(x)| = e^{-\mathrm{i}\theta}f(x) = f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) = g(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x).$$

又由于 E 均衡, $\forall x \in E, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x \in E$, 由此知

$$|f(x)| = g(e^{-\mathrm{i}\theta}x) \leqslant \sup_{x\in E} g(x).$$

对 $x \in E$ 取上确界有

$$\sup_{x\in E}|f(x)| \leqslant \sup_{x\in E} g(x) < g(x_0) \leqslant |g(x_0)| \leqslant |f(x_0)|.$$

取 $\alpha \in (\sup_{x\in E}|f(x)|, |f(x_0)|)$, 则有

$$|f(x)| \leqslant \sup_{x\in E}|f(x)| < \alpha < |f(x_0)|, \forall x \in E.$$

□

六. (15 分)(*p177 2.5.8*)
在 l^2 中定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots),$$

求证: $T \in \mathscr{L}(l^2)$ 并求 T^*.

证明. 对 $\forall x := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$, 有

$$\|Tx\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{x_k}{k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k^2}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

从而 $T \in \mathscr{L}(l^2)$, 且 $\|T\| \leqslant 1$.
下求 T^*. 事实上, 由 Riesz 表示定理知 $(l^2)^* = l^2$, 从而 $T^* \in \mathscr{L}(l^2)$. 由 T^* 的定义知

$$(x, Ty) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \frac{\overline{y_k}}{k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x_k}{k}\overline{y_k}.$$

又

$$(T^*x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (T^*x)_k \overline{y_k}.$$

由 y 的任意性知,

$$(T^*x)_k = \frac{x_k}{k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

从而 $T : l^2 \to l^2, (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots)$, 此即

$$T^* = T.$$

□

七. (15 分)(*p179 2.5.22*)
设 $\mathscr{X}$ 是自反的 B 空间, M 是 $\mathscr{X}$ 中的有界闭凸集, $\forall f \in \mathscr{X}^*$, 求证: f 在 M 上达到最大值和最小值.

证明. 本题一个自然的假设是 $\mathscr{X}$ 是实的 B 空间, 从而 f 是实线性连续泛函.
令 $b := \sup\limits_{x\in M} f(x)$. 则对 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in M$ 使得

$$b - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant b.$$

由 M 有界以及 Eberlein-Smulian 定理知 M 是弱列紧的 (细节见习题 2.5.20), 故 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 设 $x_{n_k} \rightharpoonup x_0, k \to \infty$.
下证 $x_0 \in M$. 反证法, 设 $x_0 \notin M, M$ 为其上闭凸子集, 由 Ascoli 定理知 $\exists g \in \mathscr{X}^* \backslash \{\theta\}$ 以及 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得 $g(x) < \alpha < g(x_0), \forall x \in M$. 因此 $g(x_{n_k}) < \alpha < g(x_0)$, 故 $g(x_{n_k})$ 不收敛于 $g(x_0)$, 这与 $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ 矛盾! 从而 $x_0 \in M$.
故对 $\forall f \in \mathscr{X}^*$, 有 $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, 从而知,

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup_{x\in M} f(x).$$

同理得 $\exists x_1 \in M$, 使得 $f(x_1) = \inf_{x\in M} f(x)$. □

八. (5 分)
设 X 是 B 空间, $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}^*$ 是线性算子, 满足

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle, \forall x, y \in \mathscr{X}.$$

证明 T 是有界算子.

九. (10 分)
设 H 是 Hilbert 空间.
(i) 设 $\{x_n\} \subset H$ 满足对任意 $x \in H$ 有 $(x, x_n) \to 0, n \to \infty$, 证明

$$\sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

(ii) 设 $\{x_n\} \subset H$ 弱收敛到 $x \in H$, 证明存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\left\| \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}}{k} - x \right\| \to 0, k \to \infty.$$