北京师范大学 2023 - 2024 学年第 1 学期期末考试试卷（A卷）

课程名称：常微分方程　　任课教师姓名：[redacted]

卷面总分：100 分　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 √　开卷 □　其他 □

院（系）：[redacted]　年 级：2022

姓 名：[redacted]

---

1 (25分, 每小题5分) 判断下列命题是否正确(不用叙述理由).

(1) 若$\alpha + \mathrm{i}\beta$不是特征方程

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

的根, 则方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$

有如下形式的特解:

$$\phi^*(x) = C\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,$$

其中C是常数.

(2) 存在方程$y''' = x + y^2$的两个解, 它们的图形在(x, y)平面上的某一点(x_0, y_0)相切.

(3) 存在有限区间(a, b)与平面上的点(x_0, y_0), 使得(a, b)是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y^2 - 2y - 3)\mathrm{e}^{(x+y)^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的解的最大存在区间.

(4) 设系统$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$有一个解$\phi(t)$当$t \to +\infty$时满足$\phi(t) \to c$, 其中$f$连续可微, 则$c$是此系统的平衡点.

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi(t))$$

(5) 设$y(x)$是方程

$$y'' - x^2 y = 0$$

的非零解. 若$y(x)$是奇函数, 则$y'(0) \neq 0$.

2 (20分, 每小题5分) 简答题(只写出结果, 不需给出证明).

(1) 设y_1, y_2是微分方程

$$xy'' + 2y' + x\mathrm{e}^x y = 0$$

的解, 且它们的Wronski行列式$W(x) = W[y_1, y_2](x)$满足$W(1) = 2$, 则$W(5) =$ ________.

(2) 写出微分方程

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$$

的通解.

(3) 写出方程

$$y = 2xy' + \frac{1}{2}x^2 + y'^2$$

的奇解.

(4) 写出方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - x^2 - x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x - x^2 - y$$

的具有渐近稳定性的平衡点.

3.（15分）解微分方程

$$x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x.$$

4.（15分）设$y = \phi(x, y_0)$是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + y^2 + xy^3, \quad y(2) = y_0$$

的解, 求$\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

5.（15分）求方程

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} + x = \cos t$$

的周期解, 并研究它的稳定性.

6.（10分）考虑Lorenz方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y - x), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx - xz - y, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz,$$

其中a, b, c是正常数. 证明：当$c < 1$时, 零解是渐近稳定的.