北京师范大学 2022～2023 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：高等代数　　任课教师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ✓　开卷 □　其他 □

院（系）：________　专 业：________　年级：________

姓 名：________　学 号：________

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	第八题	总分
得分									

阅卷教师（签字）：________

装　订　线

一．（10 分）根据陈述，给出一个相应的例子，无需证明；若无法给出，说明理由。

1） 有限交换群

$\mathbb{Z}_n$ 模 n 的剩余类加群

2） 无限非交换群

$GL_n(\mathbb{R})$ $n\geq 2$ 一般线性群

3） 不含有乘法单位元 1 的环

$(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ 所有偶数在通常加法和乘法意义下

4） 不是域的有限整环

不存在，设 R 为有限整环，$\forall 0\neq a\in R$，$b\neq c\in R$，有 $ab\neq ac \Rightarrow aR=R$

$\Rightarrow \exists a^{-1}\in R$ s.t. $aa^{-1}=1$. 故 R 中非零元均可逆，即 R 是域.

5） 特征为零的有限域

不存在，特征为零意味着 1 在加法群中阶为 ∞，故非有限域.

二．（10 分）解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = -2k \\ x_3 = k \end{cases} \quad k \in R$$

(2) $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 2 & \frac{4}{3} & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

三．（20 分）计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 8-3-4-24-2-2$

$= -27$

(2) $D_n = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n\times n}$

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & 0 \\ a-b & a & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -b & 0 & \cdots & 0 & a+b \\ -2b & -b & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ -2b & \cdots & -2b & -b & a+b \\ 0 & \cdots & & 0 & a-b \end{vmatrix} + bD_{n-1} = (a-b)(-b)^{n-1} + bD_{n-1}$$

同时，$D_n = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & a+b \\ \cdots & \cdots & a+b \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & -b \end{vmatrix} = (a+b)(+b)^{n-1} - bD_{n-1}$

$\Downarrow$

$$D_n = \frac{(a-b)(-b)^{n-1} + (a+b)b^{n-1}}{2}$$

$$= \begin{cases} ab^{n-1} & n\text{奇} \\ b^n & n\text{偶} \end{cases}$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

令 $f(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & y^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & & y^n \end{vmatrix}$

则原式等于 $f(y)$ 中 y 的系数乘 $(-1)^{n+1}$

$f(y) = \prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)(y-x_1)\cdots(y-x_n)$

故原式 $= \prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (-x_1)\cdots\widehat{(-x_i)}\cdots(-x_n)\right)(-1)^{n+1}$

$= \prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{x_i}\right)$

(4) $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

$= \prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i) \prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$

$= \prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)^2$

(2.20)

四．（10分）用初等对称多项式表示对称多项式$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$。

构造 $\varphi(x_1,x_2,x_3)=S_1^{2-2}S_2^{2-0}S_3^{0}=S_2^2=(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)^2$

$f-\varphi=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2-(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)^2$

$=-2(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2x_3)=-2S_1S_3$

故 $f(x_1,x_2,x_3)=S_2^2-2S_1S_3$

五．（10分）计算下列行列式

(1) 设n阶方阵A满足$A^2=I$(此时我们称A是**对合的** involutive)且$|A|=-1$，求$|A+I|$。

$|A+I|=|A+A^2|=|A||A+I|=-|A+I| \Rightarrow |A+I|=0$

(2) 设三阶方阵A的伴随矩阵为A^*，且$|A|=2$，计算$|(3A)^{-1}-2A^*|$。

$(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}=\frac{1}{3}\frac{A^*}{2}=\frac{A^*}{6}$

原式$=\left|\frac{A^*}{6}-2A^*\right|=\left|-\frac{11}{6}A^*\right|=-\frac{1331}{216}|A^*|=-\frac{1331}{216}\cdot|A|^2=-\frac{1331}{54}$

六. (10 分) 设A为$m \times n$阶实矩阵，证明 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^T)$。

只要证明 $AA^TX=0$ 与 $A^TX=0$ 同解. 则 $r(AA^T)=r(A^T)=r(A)$.

若 $A^T\alpha=0$，则 $AA^T\alpha=0$

反之. 若 $AA^T\beta=0$. 则 $\beta^TAA^T\beta=0 \Rightarrow (\beta^TA)(\beta^TA)^T=0$

$\Rightarrow \beta^TA=0$

$\Rightarrow A^T\beta=0$

故 $AA^TX=0$ 与 $A^TX=0$ 同解.

七. (15 分) 设A为n阶方阵，其中$n \geq 2$，记A^*为A的伴随矩阵，证明

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } r(A) = n, \\ 1, & \text{当 } r(A) = n-1, \\ 0, & \text{当 } r(A) \leq n-2. \end{cases}$$

这里r表示矩阵的秩。

① 若 $r(A)=n$. 则 $|A|\neq 0$，$\Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow r(A^*)=n$

② 若 $r(A)\leq n-1$, 则 $|A|=0 \Rightarrow AA^*=|A|I_n=0 \Rightarrow r(A)+r(A^*)\leq n$

(2.1) 若 $r(A)=n-1$， 则 $A^*\neq 0 \Rightarrow r(A^*)\geq 1 \Rightarrow r(A^*)=1$

(2.2) 若 $r(A)<n-1$， 则 $A^*=0 \Rightarrow r(A^*)=0$

八.（15 分）设$a_1, a_2, \cdots, a_{2k+1}$为互不相同的整数，证明整系数多项式

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{2k+1}) + 1$$

不能分解成两个次数都大于零的整系数多项式乘积。

假设 $f(x) = g_1(x) g_2(x)$，其中 $\deg g_i(x) \leq 2k$ 且 $g_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$. $i=1,2$

则 $1 = f(a_i) = g_1(a_i) g_2(a_i) \Rightarrow g_1(a_i)$ 与 $g_2(a_i)$ 同为 1 或 -1.

$\Rightarrow \quad g_1(a_i) - g_2(a_i) = 0 \qquad 1 \leq i \leq 2k+1$

$\Rightarrow \quad g_1(x) - g_2(x)$ 有 $2k+1$ 个不同的根

$\Rightarrow \quad g_1(x) = g_2(x)$

$\Rightarrow \quad f(x) = g_1^2(x)$ 　但 $\deg f(x) = 2k+1$ 矛盾!