22 秋- 近世代数期末（回忆版）

何家兴

hejiaxing202411@163.com

December 7, 2024

Exercise 1.

设 $R=\mathbb{Z}_2[x]$，$f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$，$I=\langle f(x)\rangle$ 表示由 $f(x)$ 生成的理想。设 $\bar{R}=R/I$，对于 $g(x)\in R$，记 $\overline{g(x)}=g(x)+I\in\bar{R}$

1. 判断 I 是否为 R 的一个素理想，并证明结论
2. 用 $U(\bar{R})$ 是 $\bar{R}$ 中全体单位关于 R 中乘法构成的群，证明 $\bar{x}\in U(\bar{R})$，并求出 $o(\bar{x})$

Exercise 2.

设 $R=\mathbb{Z}[x]$，p 是一个素数，$I=\langle x^2,p\rangle$ 是 R 中由 x^2 和 p 生成的理想

1. 证明 $I=\{x^2f(x)+apx+bp \mid f(x)\in R,\ a,b\in\mathbb{Z}\}$
2. 判断 R/I 是否是域，并说明理由

Exercise 3.

设 R 是 $M_n(\mathbb{R}),n\geqslant 2$ 中全体上三角矩阵关于矩阵的加法和乘法构成的环，J 是 R 中全体对角矩阵的集合，I 是 R 中全体幂零矩阵的集合，证明：

1. J 是 R 的一个交换子环，I 是 R 的一个理想
2. $R/I\cong J$

Exercise 4.

设 $E=F(\alpha)$ 是对 F 的一个单代数扩张，并且 $[E:F]=3n$，其中 $(3,n)=1$。若 $\alpha\notin F(\alpha^3)$，证明

$$F(\alpha^3)=F(\alpha^{3^k}),\ \forall\, k\in\mathbb{Z}^+$$

Exercise 5.

设 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是 r 个两两不同的素数，$E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$，其中 $\alpha_i = 2^{1/p^i}$, 证明

1. $[E : \mathbb{Q}] = p_1 p_2 \cdots p_r$
2. E 是 $\mathbb{Q}$ 的一个单扩张。

Exercise 6.

设 p, q 是两个不同的素数，$R = \mathbb{Z}_2[x]$，$n \in \mathbb{Z}^+$

1. 求出 R 中 p^n 次首 1 不可约多项式的个数
2. 求出 R 中 pq 次首 1 不可约多项式的个数。