1.(1)
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=0$$

(2) 由Stolz定理：显然 $y_n=n^3$ 是严格单增的正无穷大量

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{n^3-(n-1)^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{3n^2-3n+1}$$

$$=\frac{4}{3}$$

(3)
$$\lim_{x\to 0}x^2\ln\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}x^2\left(\cos\frac{\pi}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}-x^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^2$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}$$

2.(1) 证明：由数学归纳法：$\forall n\in N^+$，$0<x_n<1$

且 $x_{n+1}-x_n=-x_n^2<0$

$\therefore$ $\{x_n\}$ 单调减少有下界

$\therefore$ $\{x_n\}$ 收敛

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ 两边取极限，得：

$a=a(1-a)$ 得：$a=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(2) 由Stolz定理：首先由(1)中知：$\frac{1}{x_n}$ 是严格单增的正无穷大量

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(1-x_n)}{x_n^2}=1$$

5.(1) 设数列 $\{a_n\}$，称 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=a$，若 $\forall\varepsilon>0$，

① $\exists N\in N^+$，s.t. 当 $n>N$ 时，$x_n>a-\varepsilon$

② 存在子列 $\{x_{n_k}\}_k$，s.t. $\forall k\in N^+$，$x_{n_k}<a+\varepsilon$

(2) 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$，使得当 $n>N$ 时，$a_n>a-\varepsilon$

则 $b_n+a_n>b_n+a-\varepsilon$

则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(b_n+a_n)\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(b_n+a-\varepsilon)=\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n+a-\varepsilon=\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n-\varepsilon$

由 ε 的任意性知：$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$