23-24学年秋季学期2023级数学强基班“数学分析I”
期末考试试题参考答案(2024.01.04)

1. **(10分)** 选择题：

(1a) 严格递增可微函数导数为正。 (i) 对；(ii) 错。

◀

错，$f(x)=x^3$严格递增且可微，但在$x=0$处其导数值非正。

▶

(1b) $\int_0^1\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)dx$的值为 (i) 不能确定；(ii) 在0和$\frac{1}{2}$之间；(iii) 在$\frac{1}{2}$和1之间。

◀

在$\frac{1}{2}$和1之间，因

$$\int_0^1\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)dx=x^2\sin\frac{1}{x}\bigg|_0^1=\sin 1.$$

▶

2. **(25分)** 举例题：

(2a) 举一个有界区间上连续但非一致连续函数的例子；举一个无界区域上连续但非一致连续函数的例子。

◀

$f(x)=\frac{1}{x}$ 或$f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $0<x\le 1$; $f(x)=x^2$, $0\le x<+\infty$.

▶

(2b) 举出一个交错级数的例子，其通项趋于零但发散。

◀

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right].$$

▶

(2c) 举出一个在闭区间上2023阶连续可微但2024阶不再处处可微的实值函数的例子。

◀

$$f(x)=x^{\frac{6070}{3}},\ x\in[-1,1] \text{ 或 } f(x)=\begin{cases} x^{4047}\sin\dfrac{1}{x},\ 0\neq x\in[-1,1],\\ 0,\ x=0\end{cases}$$

▶

(2d) 举出一个收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的例子，使得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\ln n$发散。

◀

$a_1=1,\ a_k=\frac{(-1)^k}{\ln k},\ k=2,3\cdots.$

▶

(2e) 设$f\in\mathcal{R}[a,b]$, 举例说明函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$只保证在f的连续点处可微。

◀

令$f(x)=\mathrm{sgn}\ x,\ x\in[-1,1],\ a=-1.$ 则

$$F(x)=\begin{cases} x-1,\ 0\le x\le 1,\\ -x-1,\ -1\le x<0\end{cases}$$

在f的间断点$x=0$处不可微。

▶

3. (**18分**) 计算题：

(3a) 求$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2+x^3+x^5}$的值。

◀

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^3+x^5}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

$$=\int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{u^2}du}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(1+\frac{1}{u^3}\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{u^3du}{(1+u^2)(1+u^3)},$$

于是

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(1+x^3)dx}{(1+x^2)(1+x^3)}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\arctan x|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2},$$

即得

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^3+x^5}=\frac{\pi}{4}.$$

▶

(3b) 计算$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

◀

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\frac{\ln(1+u)}{u^3}du=\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\left[\frac{1-\frac{u}{2}}{u^2}+O(1)\right]du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n}}\left[\left(-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\ln u\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1+O(1)\right]=\frac{2}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{n}-\frac{\ln n}{4}+O(1)\right]\longrightarrow 2.$$

▶

(3c) 比较大小：$\int_0^\pi e^{\sin x}dx$与$\frac{7\pi}{4}$.

◀

由$\sin x$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的凹凸性知：

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，$\sin x\geq\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$;

当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$\sin x\geq\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 于是

$$\int\limits_0^{\pi} e^{\sin x}dx=2\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x}dx$$

$$\geq 2\int\limits_0^{\pi/4} e^{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}dx+2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} e^{\frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1\right)+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\pi}{2-\sqrt{2}}\left(e^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-1\right)$$

$$>\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{24}\right)+\left(\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{24}\right)\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{2}\pi\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{13}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi}{192}\left(30+13\sqrt{2}\right)(2+\sqrt{2})(7-4\sqrt{2})$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{13}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi}{96}\left(77+24\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{43}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$>\frac{\pi}{4}\cdot\frac{59}{8}>\frac{7\pi}{4}.$$

▶

4. (**10分**) 已知$f\in\mathcal{R}[0,1]$, 且$\int_0^1 f(x)dx>0$. 证明: 存在闭区间$[a,b]\subset[0,1]$, 在其上$f(x)>0$.

◀　若不存在这样的区间，则对$[0,1]$的任何分划$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, f在任何$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$上均不恒为正，即总有$\xi_i\in\Delta_i$使得$f(\xi_i)\leq 0$. 这样$\sigma(f;P;\xi)\leq 0$, 对$\lambda(P)\to 0$取极限最终导致$\int\limits_0^1 f(x)dx\leq 0$.

▶

5. (**12分**) 设$]a,b[$上的连续函数$f(x)$满足$\forall x_1,x_2\in]a,b[$, $f\left(\dfrac{x_1+2x_2}{3}\right)\leq\dfrac{1}{3}[f(x_1)+2f(x_2)]$. 求证: f为$]a,b[$上的凸函数。

◀　证: 首先证明: $\forall x_1,x_2\in]a,b[$, $\forall n,k\in\mathbb{N},0<k<3^n$, 成立

$$f\left(\frac{kx_1+(3^n-k)\,x_2}{3^n}\right)\leq\frac{k}{3^n}f(x_1)+\frac{3^n-k}{3^n}f(x_2).\qquad(5-1)$$

我们用归纳法。当$n=1$时，k只能取1或者2，由题设条件知结论自然成立。假设$n\leq s$时结论成立，现在来看$n=s+1$的情形。不妨设$k=3m+2$，$m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$（当$k=3m$时，$3^n-k$也是3的整数倍，将回到$n=s$的情形；而当$k=3m+1$时，$3^n-k$具有$3m+2$的形式，因$x_1$，$x_2$在$]a,b[$中任取，故也可归到$k=3m+2$的情形）.

$$f\left(\frac{(3m+2)x_1+\left(3^{s+1}-3m-2\right)x_2}{3^{s+1}}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{3}\left\{\frac{mx_1+\left(3^s-m\right)x_2}{3^s}+2\frac{(m+1)x_1+\left(3^s-m-1\right)x_2}{3^s}\right\}\right)$$

看成$\left(\frac{1}{3}\tilde{x}_1+\frac{2}{3}\tilde{x}_2\right)$，由归纳假设$n=1$情形

$$\leq\frac{1}{3}\left\{f\left(\frac{mx_1+\left(3^s-m\right)x_2}{3^s}\right)+2f\left(\frac{(m+1)x_1+\left(3^s-m-1\right)x_2}{3^s}\right)\right\}$$

再由归纳假设$n=s$情形

$$\leq\frac{1}{3}\left\{\frac{mf(x_1)+\left(3^s-m\right)f(x_2)}{3^s}+2\frac{(m+1)f(x_1)+\left(3^s-m-1\right)f(x_2)}{3^s}\right\}$$

$$=\frac{(3m+2)f(x_1)+\left(3^{s+1}-3m-2\right)f(x_2)}{3^{s+1}}.$$

注意到：$0<3k+2<3^{s+1}$，即$0<k+\frac{2}{3}<3^s$，当然有$0\leq k,k+1<3^s$. 即上述操作合理合法

现在$\forall x_1,x_2\in]a,b[\ (x_1<x_2)$及$\forall x\in]x_1,x_2[$且$x=cx_1+(1-c)x_2,c\in]0,1[$，由Archimedes原理，完全可以找到一个有理数序列$\left\{\frac{m_k}{3^{n_k}}\right\}\Big|_{k=1}^{+\infty}$逼近$c$，相应地序列$\left\{\frac{3^{n_k}-m_k}{3^{n_k}}\right\}\Big|_{k=1}^{+\infty}$逼近$1-c$. 由刚刚证明了的$(5-1)$知

$$f\left(\frac{m_kx_1+\left(3^{n_k}-m_k\right)x_2}{3^{n_k}}\right)\leq\frac{m_k}{3^{n_k}}f(x_1)+\frac{3^{n_k}-m_k}{3^{n_k}}f(x_2),\ \ k=1,2,\cdots.$$

令$k\to+\infty$，由f的连续性推得

$$f(cx_1+(1-c)x_2)\leq cf(x_1)+(1-c)f(x_2).\qquad(5-2)$$

对于$c=0$或1的情形，$(5-2)$自然是平凡的。 ▶

6. (**12分**) 研究积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}$$
的收敛性。

◀ 若$\alpha\le 0$, 当x足够大，譬如$x\ge 1$时，$x^\alpha\sin^2 x\le 1$, $\dfrac{1}{1+x^\alpha\sin^2 x}\ge\dfrac{1}{2}$, 此时积分显然发散。积分的收敛性等价于下面级数的收敛性：
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{(1+x^\alpha\sin^2 x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^\alpha\sin^2 t}=:\sum_{n=0}^{+\infty}a_n,$$
而
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+[(n+1)\pi]^\alpha\sin^2 t}\le a_n\le\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2 t},$$
但
$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+b^2\sin^2 t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+b^2\sin^2 t}$$
$$=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(1+b^2)u^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1+b^2}}.$$
于是$a_n\sim\pi n^{-\frac{\alpha}{2}}\ (n\to+\infty)$, 故当$\alpha>2$时积分收敛，否则发散。 ▶

7. (**13分**) $f(x)$在闭区间$[0,1]$上可微，且$f'(0)f'(1)<0$. 证明：存在一点$c\in]0,1[$, 使得$f'(c)=0$. 由此证明Darboux中值定理：设函数f在$]a,b[$上可微，$a<\alpha<\beta<b$.若$f'(\alpha)<f'(\beta)$, 则对任意$\omega\in]f'(\alpha),f'(\beta)[$, 存在$\gamma\in]\alpha,\beta[$使得$f'(\gamma)=\omega$.

◀ 不妨设$f'(0)>0$, 则$f'(1)<0$. 因$f\in C[0,1]$, 必在某点$x_0\in[0,1]$达到最大值。现证：$x_0\in]0,1[$. 因$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$, 这里$f'(0)>0$, 对于足够小的$x>0$, 有$f(x)>f(0)$, 所以$x_0\ne 0$. 类似地，$x_0\ne 1$. 亦即$0<x_0<1$且$f'(x_0)=0$.

现证第二个结论：令$g(x)=\omega x-f(x)$, 则$g(x)$在$[\alpha,\beta]$上可微，且$g'(\alpha)=\omega-f'(\alpha)>0$, $g'(\beta)=\omega-f'(\beta)<0$. 由刚刚所证得的结论知，存在$\gamma\in]\alpha,\beta[$使得$g'(\gamma)=\omega-f'(\gamma)=0$, 即$f'(\gamma)=\omega$. ▶