常微分方程习题解

袁荣　编
北京师范大学数学科学学院

目　录

第一章　基本概念	**2**
第二章　初等积分法	**6**
第三章　线性微分方程组	**51**
第四章　高阶线性微分方程	**82**
第五章　微分方程的基本理论	**121**
第六章　定性理论	**152**
第七章　一阶偏微分方程	**169**
参考文献	**176**

序言

2012年高等教育出版社出版了我编写的"常微分方程”教材，此教材随后评为“北京高等教育精品教材", 许多高校教学中也选择了此教材。教学过程中，许多学生希望本教材的习题能有解答过程。高等教育出版社希望本教材再版过程中加入部份习题解答，以帮助初学者学习，方便教师使用。为此，本习题解答就是我编写的"常微分方程”教材中的习题解答。因而，本习题解答的次序与教材完全相同。为了培养学生独立做题和思考的习惯，本习题解答并没有给出完整的习题解答，对全书奇数号的习题给出了解答，对偶数号的证明题也给出了解答，而对偶数号的计算题只给出了答案，希望学生学习过程中能够自己独立的做题。

习题解答中, 习题4.2.3表示第四章第二节的第3题。建议学生做题时不要看题解，因为许多习题的解答是不唯一的，我们只给出了一种解答，你看了答案后，很有可能限制了你的创造性思考。因而, 读者使用该书时，建议先自己考虑做题. 然后, 再对照看看.

由于作者的水平限制，这本题解肯定会有许多错误和不妥之处，肯请大家来信批评指正。

袁荣

2019年03月于北京师范大学数学科学学院

Email:ryuan@bnu.edu.cn

第一章　基本概念

§1.1　定义和例子

习题1.1解答

例 1.1.1 指出下列方程的阶数, 并说明这些方程的自变量, 因变量, 是线性的还是非线性的:

(1) $xy' + y = \cos x$;
(2) $\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)^3 + y(\frac{dr}{dy})^8 = 1$;
(3) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 3xy = e^x$;
(4) $\sin(y\frac{dy}{dx}) = y$.

解　(1) 是一阶线性微分方程, x是自变量, y是因变量;
(2) 是二阶非线性微分方程, y是自变量, r是因变量;
(3) 是二阶线性微分方程, x是自变量, y是因变量;
(4) 是一阶非线性微分方程, x是自变量, y是因变量.

例 1.1.2 试指出微分方程

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

的阶, 说明下列函数中那些是特解, 那些是通解, 并用定义来严格证明:

(1) $y = 500e^x\cos\sqrt{2}\,x$;
(2) $y = Ce^x\sin\sqrt{2}\,x$, C为任意常数;
(3) $y = C_1e^x\cos\sqrt{2}\,x + C_2e^x\sin\sqrt{2}\,x$, C_1, C_2是任意常数.

解 是二阶线性微分方程.
(1) 是特解;
(2) 是解, 但不是通解. 当C取一个确定的值时，就得一个特解.
(3) 是通解. 因为

$$y' = C_1e^x(\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x) + C_2e^x(\sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x),$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{D[y,y']}{D[C_1,C_2]} &= \begin{vmatrix} e^x\cos\sqrt{2}x & e^x\sin\sqrt{2}x \\ e^x(\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x) & e^x(\sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x) \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{2}e^{2x} \neq 0.\end{aligned}$$

例 1.1.3 验证下列函数是否是右端相应微分方程的解或通解，并确定解的存在区间:

(1) $y=\frac{\sin x}{x}, \qquad xy'+y=\cos x;$

(2) $y=\ln x, \qquad xy''+y'=0;$

(3) $y=e^{mx}, \qquad y'''-2y''-4y'+8y=0;$

(4) $y=\begin{cases} -\frac{1}{4}(x-C_1)^2, & -\infty<x<C_1, \\ 0, & C_1\le x\le C_2, \\ +\frac{1}{4}(x-C_2)^2, & C_2<x<+\infty. \end{cases}, \qquad y'=\sqrt{|y|}.$

解 (1) 是特解. 其存在区间分别是$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$;

(2) 是特解. 存在区间是$(0,+\infty)$;

(3) 仅当$m=2$或$m=-2$时是解. 存在区间是$(-\infty,+\infty)$.

(4) 是解, 但不是通解. 当C_1,C_2取确定值时, 就是特解.

例 1.1.4 求下列曲线族所满足的微分方程:

(1) $y=Cx+x^2;$

(2) $y=C_1e^x+C_2xe^x.$

解 (1) 易知$y'=C+2x$, 代入得所求的微分方程$xy'-y-x^2=0$.

(2) 所求的方程为$y''-2y'+y=0$.

§1.2 几何解释

习题1.2解答

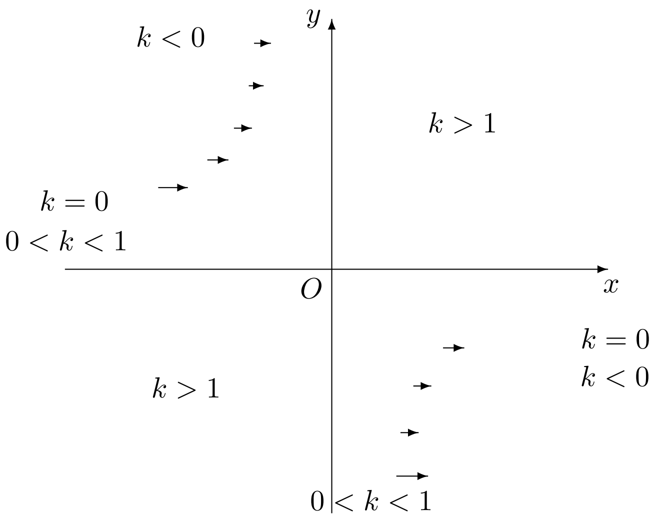
例 1.2.1 利用线素场描绘出下列微分方程的积分曲线族:

(1) $y'=1+xy;$

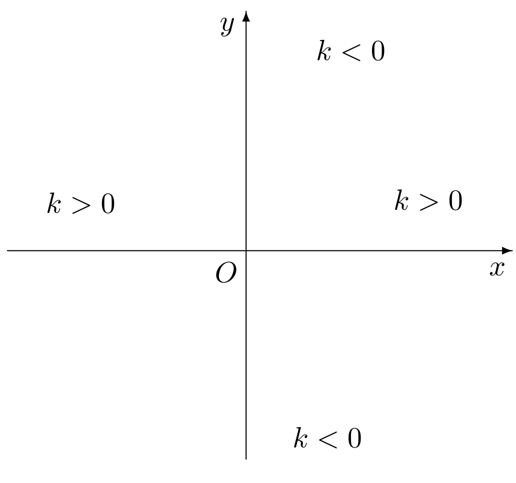
(2) $y'=x^2-y^2;$

(3) $y'=|y|.$

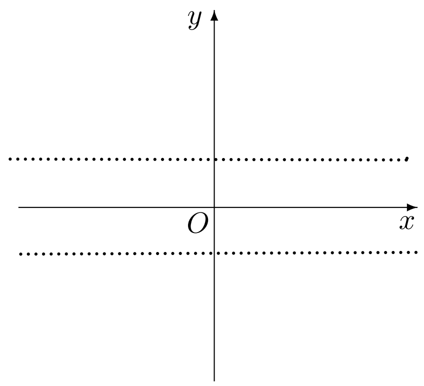
解 (1) 等斜线$L_k:\ 1+xy=k$, 即$xy=k-1$. 所以, 当$k>1$时, L_k在一、三象限；当$k=1$时, L_k退化为x,y轴; 当$k<1$时, L_k在二、四象限.



(2) 等斜线L_k： $x^2 - y^2 = k.$



(3) 等斜线L_k： $|y| = k > 0$, 即$y = \pm k.$



y
O
x

第二章　初等积分法

§2.1　变量分离方程

习题2.1解答

习题 2.1.1 求解下列微分方程:

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^2)}$;

(2) $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$;

(3) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$;

(4) $\frac{dy}{dx} + \frac{e^{y^2+3x}}{y} = 0$.

解 (1) 变量分离, 得

$$ydy = \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)dx.$$

得通解

$$\frac{1}{2}y^2 = x - \arctan x + C,$$

其中C是任意常数.

(2) 通解

$$\arctan y = \frac{1}{2}(1+x)^2 + C,$$

其中C是任意常数.

(3) 将方程变形为

$$e^y dy = e^x dx.$$

得通解

$$e^y = e^x + C,$$

其中C是任意常数.

(4) 通解

$$-\frac{1}{2}e^{-y^2} + \frac{1}{3}e^{3x} = C,$$

其中C是任意常数.

习题 2.1.2 求下列微分方程满足初始条件的解,并确定解的存在区间:

(1) $y^2dx + (x+1)dy = 0, \quad y(0) = 1$;

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y},\ y(2) = 0$;

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+x^2y},\ y(1) = -2$;

(4) $(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$.

解 (1) 当$y \neq 0$, $x \neq -1$时, 将方程变形为

$$\frac{dx}{x+1} + \frac{dy}{y^2} = 0.$$

积分, 得通解

$$\ln|1+x| - \frac{1}{y} = C,$$

其中C是任意常数. 由$y(0) = 1$, 得$C = -1$. 于是, 得初值问题的解

$$y = \frac{1}{1 + \ln|1+x|},$$

其存在区间为$(e^{-1} - 1, \infty)$.

(2) 初值问题的解

$$y^2 + y = x^2 - 4.$$

它可改写成

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{15}{4}$$

由$x^2 - \frac{15}{4} \geq 0$, 得存在区间为$(\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty)$.

(3) 变量分离

$$ydy = \frac{2x}{1+x^2}dx.$$

积分, 得通解

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+x^2) + C.$$

由$y(1) = -2$, 得$C = 2 - \ln 2$. 于是, 所求初值问题的解为

$$y = -\sqrt{2\ln(1+x^2) + 4 - 2\ln 2},$$

其存在区间为$(-\infty, +\infty)$.

(4) 初值问题的解

$$y = \frac{1}{1 + \ln|x^2 - 1|}.$$

存在区间为$(-\sqrt{1 - e^{-1}}, \sqrt{1 - e^{-1}})$.

习题 2.1.3 *求解下列微分方程, 并作出相应积分曲线族的简图:*

(1) $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$*;*

(2) $\frac{dy}{dx} = y^n, \quad (n = \frac{1}{2}, 1, 2)$.

解 (1) 当$y \neq \pm 1$时, 变量分离

$$\frac{dy}{1-y^2} = dx.$$

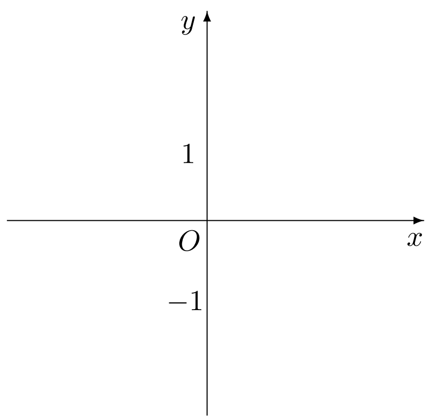
积分得通解为

$$y = \frac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1},$$

其中C为任意常数.

当$C > 0$时, $-1 < y < 1$, 解的存在区间为$(-\infty, +\infty)$. 方程还有特解$y = 1$和$y = -1$, 其存在区间为$(-\infty, +\infty)$.

当$C < 0$时, $y < -1$或$y > 1$, 解的存在区间分别为$(-\infty, -\frac{1}{2}\ln(-C))$或$(-\frac{1}{2}\ln(-C), +\infty)$. 当$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}\ln(-C))$时，$y < -1$; 当$x \in (-\frac{1}{2}\ln(-C), +\infty)$时，$y > 1$.



(2) 当$y \neq 0$时, 变量分离

$$\frac{dy}{y^n} = dx.$$

当$n = \frac{1}{2}$时, 积分得

$$2y^{\frac{1}{2}} = x + C, \quad x \geq -C.$$

得通解

$$y = \frac{1}{4}(x+C)^2, \quad x \geq -C,$$

其中C是任意常数.

当$n=1$时, 积分得

$$\ln|y| = x + C_1.$$

得通解

$$y = Ce^x,$$

其中C是任意常数.

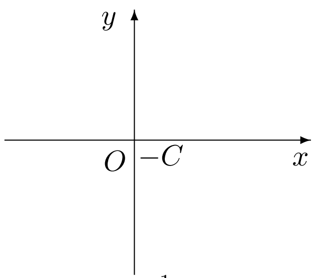
当$n=2$时, 积分得

$$-\frac{1}{y} = x + C.$$

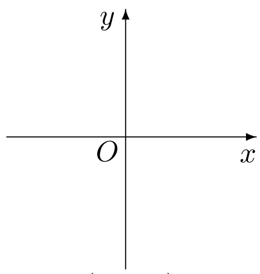
得通解

$$y = \frac{-1}{x+C},$$

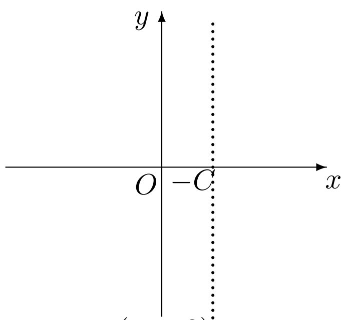
其中C是任意常数. 当$x>-C$时, $y<0$; 当$x<-C$时, $y>0$.



$(n=\frac{1}{2})$



$(n=1)$



$(n=2)$

习题 2.1.4 试说明下列函数能在什么样的区域中满足*Lipschitz*条件:

(1) $f(x,y) = |y|$;

(2) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$;

(3) $f(x,y) = |\ln y| + x^2$.

解 (1) 因

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=||y_1|-|y_2||\le |y_1-y_2|,$$

对任意$(x,y_1),(x,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 故$f$在整个$\mathbb{R}^2$上满足Lipschitz条件。

(2) 因

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\Big||y_1-y_2|,$$

而$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin(x^2+y^2)$, 故$f$在任意带域$|y|\le M$上满足Lipschitz条件.

(3) 因

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le|\ln y_1-\ln y_2|=\frac{1}{|\xi|}|y_1-y_2|,$$

故f在区域$y\ge\sigma>0$上满足Lipschitz条件.

习题 2.1.5 证明:方程$y'=\sqrt[5]{\frac{y^4+2}{x^6+2}}$的每条积分曲线有两条水平渐近线.

证明 设(x_0,y_0)是平面上任一点. 分离变量并积分,得方程过点(x_0,y_0)的积分曲线为$y=y(x)$, 它满足

$$\int_{y_0}^{y(x)}\frac{du}{\sqrt[5]{u^4+2}}=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt[5]{t^6+2}}.$$

于是,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int_{y_0}^{y(x)}\frac{du}{\sqrt[5]{u^4+2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt[5]{t^6+2}}.$$

因为$\int_{x_0}^{\pm\infty}\frac{dt}{\sqrt[5]{t^6+2}}$ 收敛, 记

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt[5]{t^6+2}}:=a,\qquad \int_{x_0}^{-\infty}\frac{dt}{\sqrt[5]{t^6+2}}:=b$$

所以$a>0$, $b<0$且

$$a=\lim_{x\to+\infty}\int_{y_0}^{y(x)}\frac{du}{\sqrt[5]{u^4+2}},$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\int_{y_0}^{y(x)}\frac{du}{\sqrt[5]{u^4+2}}.$$

因为

$$\int_{y_0}^{+\infty}\frac{du}{\sqrt[5]{u^4+2}},\qquad \int_{y_0}^{-\infty}\frac{du}{\sqrt[5]{u^4+2}}\ \text{发散}$$

所以极限$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)$存在且有限, 且$\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)<y_0<\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$. 由此知道方程所描述的积分曲线族中的任一条曲线总有二条水平渐近线.

习题 2.1.6 求方程$3y^2y'+16x=2xy^3$的当$x\to+\infty$时有界的解$y(x)$.

解 当$y\neq 2$时, 变量分离

$$\frac{3y^2}{y^3-8}dy=2xdx.$$

积分得, 所有解为

$$|y^3-8|=C_1e^{x^2},\quad C_1\geq 0.$$

所以, 唯一的积分曲线$y=2$满足本题的条件.

习题 2.1.7 设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(y), \tag{2.1}$$

其中$f(y)$在$y=a$的某邻域(如区间$|y-a|\leq\epsilon$)内连续，而且$f(y)=0$当且仅当$y=a$, 证明: 在直线$y=a$上的每一点，方程(2.1)的解局部唯一当且仅当广义积分

$$\int_a^{a\pm\epsilon}\frac{dy}{f(y)}$$

发散。(从而在特解$y=a$的邻域内的每一点，方程(2.1)的解都局部唯一).

证明 ”$\Longleftarrow$” 显然，$y=a$是方程的一个解。用反证法。设$y=y(x)$是方程的另一个解，它与直线$y=a$相交. 不妨设，(x_0,a)是它们的一个交点，且存在一个区间$I=(x_0,x_0+\delta)$或$I=(x_0-\delta,x_0)$，使当$x\in I$时，$y(x)\neq a$. 从而，我们有

$$\frac{dy(x)}{f(y(x))}=dx,\qquad x\in I.$$

积分，得

$$\int_a^y\frac{dy}{f(y)}=\int_{x_0}^x\frac{dy(x)}{f(y(x))}=\int_{x_0}^x dx=x-x_0<\infty,\qquad x\in I.$$

这是一个矛盾。

”$\Longrightarrow$” 用反证法。设$|\int_a^{a\pm\epsilon}\frac{dy}{f(y)}|<+\infty$, 则由

$$\int_a^y\frac{dy}{f(y)}=x-x_0$$

定义的函数是方程的解，且通过点(x_0,a), 而$y=a$也是过点(x_0,a)的解。矛盾。

§2.2 齐次方程

习题2.2解答

习题 2.2.1 *求解微分方程:*

(1) $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$;

(2) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$;

(3) $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$;

(4) $x\frac{dy}{dx}-y=x\tan\frac{y}{x}$.

解 (1) 令$y=xu$, 代入得

$$x\frac{du}{dx}=\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{1-u^2}.$$

当$u\neq\pm1$时, 变量分离, 积分得通解

$$y=|x|\sin(\ln|x|+C),$$

其中C是任意常数. 还有特解$y=\pm x$.

(2) 通解

$$y=\frac{Cx^2}{Cx-1},$$

其中$C=\pm e^{C_1}$是任意常数. 此外还有解$y=0$和$y=x$。如在通解中允许$C=0$，则$y=0$已包含在通解中，但$y=x$不包含于其中。还有特解$x=0$.

(3) 改写

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}.$$

令$u=\frac{y}{x}$, 代入得

$$\frac{u-1}{u}du=\frac{dx}{x}\quad(u\neq0).$$

积分得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C_1,$$

C_1为常数。代回原变量得通解

$$y=\frac{1}{C}e^{\frac{y}{x}},$$

其中$C=\pm e^{-C_1}$是任意常数. 此外，$y=0$也是方程的解。如允许$C=0$, 则特解$y=0$将在通解的表达式中. 于是，方程的通解可表为

$$y=Ce^{\frac{y}{x}},$$

其中C为任意常数。

(4) 通解

$$\sin\frac{y}{x}=Cx,$$

其中C是任意常数.

习题 2.2.2 利用变量变换求下列微分方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx}=2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$;

(2) $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y^2-6x+2y+4}{2xy+2x-2y-2}$.

解 (1) 由

$$y+2=0,\quad x+y=1,$$

解得$x=3$, $y=-2$. 令

$$x=\xi+3,\quad y=\eta-2,$$

则有

$$\frac{d\eta}{d\xi}=2\Big(\frac{\eta}{\xi+\eta}\Big)^2.$$

令$u=\frac{\eta}{\xi}$, 得

$$\xi\frac{du}{d\xi}=-\frac{u(1+u^2)}{(1+u)^2}.$$

若$u\neq 0$, 变量分离, 得

$$\Big(\frac{1}{u}+\frac{2}{1+u^2}\Big)du=-\frac{d\xi}{\xi}.$$

积分, 得

$$\ln|u|+2\arctan u=-\ln|\xi|+C.$$

代回原变量,得通积分

$$\ln|y+2| + 2\arctan\frac{y+2}{x-3} = C,$$

其中C是任意常数. 还有特解$y=-2$.

(2) 通积分

$$(y-x-1)^2 = C(y-2x)^3,$$

其中C是任意常数. 还有特解$y=2x$.

(3) 令$u=2x+3y$, 则

$$\frac{du}{dx} = 2+3\frac{dy}{dx} = 2+3\frac{u+4}{2u+5} = \frac{7u+22}{2u+5}.$$

如$u\neq -\frac{22}{7}$, 则分离变量得

$$\frac{2u+5}{7u+22}du = dx.$$

积分得

$$\frac{2}{7}u - \frac{9}{49}\ln|7u+22| = x - C_1.$$

于是,

$$(7u+22)^3 = Ce^{-7x+14y}, \quad C = \pm e^{\frac{49}{3}C_1}.$$

若允许$C=0$, 则$u=-\frac{22}{7}$就包含在上式中。故得通解为

$$(14x+21y+22)^3 = Ce^{-7x+14y},$$

其中C为任意常数。

(4) 通解

$$3(x-1)^2 - (y+1)^2 = C(x-1),$$

其中C是任意常数.

习题 2.2.3 求下列微分方程满足初始条件的解:

(1) $xydx + (y^2-x^2)dy = 0, \quad y(1)=1;$

(2) $(x+2y)\frac{dy}{dx} = 1, \quad y(0) = -1.$

解 (1) 令$y=ux$, 则

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}.$$

当$u\neq 0$时, 变量分离
$$\frac{(1-u^2)du}{u^3}=\frac{dx}{x}.$$
积分,得
$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+C.$$
代回原变量, 得
$$-\frac{x^2}{2y^2}-\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\ln|x|+C.$$
由$y(1)=1$, 得$C=-\frac{1}{2}$. 于是,所求的解为
$$-\frac{x^2}{2y^2}-\ln|y|=-\frac{1}{2}.$$

(2) 令$u=x+2y$, 则
$$\frac{du}{dx}=\frac{2+u}{u}.$$
当$u\neq -2$时, 变量分离
$$\frac{u}{2+u}du=dx.$$
积分,得
$$u-2\ln|2+u|=x+C.$$
代回原变量, 得
$$x+2y-2\ln|x+2y+2|=x+C.$$
再由$u=-2$, 得$x+2y=-2$. 通过验算知, $x+2y=-2$为所求的特解.

§2.3 线性方程

习题2.3解答

习题 2.3.1 *求解下列微分方程:*

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sin 2x-y\cos x$;

(2) $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1-x^2}y=1+x$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x}{2xy}$;

(5) $4x^2y^2dx+2(x^3y-1)dy=0$;

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$;

(7) $\frac{dy}{dx}+\sin y+x\cos y+x=0$*;*

(8) $x\frac{dy}{dx}=3y\ln y+x^2y$*;*

(9) $3dy+(1+e^{x+3y})dx=0$*;*

(10) $x^2ydx=(x^3+y^4)dy$*.*

解 (1) 由求解公式,得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \cos x dx}\Big(C+\int \tfrac{1}{2}\sin 2x e^{\int \cos x dx}dx\Big) \\ &= Ce^{-\sin x}+\sin x-1, \end{aligned}$$

其中C为任意常数.

(2) 由求解公式, 当$|x|<1$时，得通解

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{1-x^2}dx}\Big(C+\int(1+x)e^{-\int \frac{1}{1-x^2}dx}dx\Big) \\ &= \sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}(C+\tfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\tfrac{1}{2}\arcsin x), \end{aligned}$$

其中C是任意常数.

当$|x|>1$时, 得通解

$$y=\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}(C+\operatorname{sgn} x\cdot\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|),$$

其中C是任意常数.

(3) 方程变为

$$\frac{dy^3}{dx}=\frac{3}{x}y^3+3x^3.$$

如令$z=y^3$, 则可写成

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3}{x}z+3x^3,$$

它是一阶线性方程。由求解公式，得

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{3}{x}dx}\Big(C+\int 3x^3e^{\int -\frac{3}{x}dx}dx\Big) \\ &= x^3(C+3x). \end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$y^3=Cx^3+3x^4,$$

其中C为任意常数。

(4) 通解

$$y^2 = Cx - x\ln|x|,$$

其中C为任意常数.

(5) 变形为

$$\frac{dx^3}{dy} = -\frac{3}{2y}x^3 + \frac{3}{2y^2}.$$

如令$z = x^3$, 则变为

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{3}{2y}z + \frac{3}{2y^2},$$

它是一线性方程。因而，有解

$$z = e^{\int -\frac{3}{2y}dy}\Big(C + \int \frac{3}{2y^2}e^{\int \frac{3}{2y}dy}dy\Big) = \frac{C}{|y|^{3/2}} + \frac{3}{|y|}.$$

因而，原方程的通解是

$$x^3 = \frac{C}{|y|^{3/2}} + \frac{3}{|y|},$$

其中C是任意常数。

(6) 通解

$$e^{-y} == \frac{1}{x^3}\Big(C - \frac{1}{2}x^2\Big),$$

其中C是任意常数。

(7) 方程可写成

$$y' + \sin y + x(\cos y + 1) = 0.$$

它可变成

$$y' + \sin y + x\cdot 2\cos^2\frac{y}{2} = 0.$$

它又可变成

$$y' + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + 2x\cos^2\frac{y}{2} = 0.$$

所以，有

$$\frac{y'}{\cos^2\frac{y}{2}} + 2\tan\frac{y}{2} + 2x = 0.$$

如令$z=\tan\frac{y}{2}$, 则有

$$\frac{dz}{dx}+z+x=0.$$

这是一阶线性方程，可求得通解是

$$z=Ce^{-x}-x+1.$$

代回原变量，得原方程的通解是

$$\tan\frac{y}{2}=Ce^{-x}-x+1,$$

其中C是任意常数. 还有特解$y=(2k+1)\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

(8) 通解是

$$\ln y=Cx^3-x^2,$$

其中C是任意常数。

(9) 方程可变形为

$$3\frac{dy}{dx}+1=-e^xe^{3y}.$$

令$z=e^{-3y}$, 则有

$$z'-z=e^x.$$

它的通解是$z=Ce^x+xe^x$. 所以，原方程的通解是

$$y=-\frac{1}{3}\ln(C+x)-\frac{x}{3},$$

其中C是任意常数。

(10) 通解为

$$x^3=Cy^3+3y^4,$$

其中C为任意常数.

习题 2.3.2 求下列初值问题的解:

(1) $y'=y-5,\quad y(0)=1;$

(2) $xy'+2y=\sin x,\quad y(\pi)=\frac{1}{\pi};$

(3) $xy'+2y=x^2-x+1,\ y(1)=\frac{1}{2},\ x>0;$

(4) $y'+2xy=2xe^{-x^2},\ y(-1)=5.$

解 (1) 由求解公式, 得

$$y = e^{\int_0^x dx}(1 + \int_0^x -5e^{-\int_0^x dx}dx) = 5 - 4e^x.$$

(2)

$$y \quad = \tfrac{-x\cos x + \sin x}{x^2}.$$

(3) 由求解公式,得

$$\begin{aligned} y \quad &= e^{-\int_1^x \frac{2}{x}dx}\left(\tfrac{1}{2} + \int_1^x \tfrac{x^2-x+1}{x}e^{\int_1^x \frac{2}{x}dx}dx\right) \\ &= \tfrac{1}{x^2}(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}). \end{aligned}$$

(4)

$$y \quad = e^{-x^2}(x^2 - 1 + 5e).$$

习题 2.3.3 已知微分方程$y'+y = g(x)$, 其中$g(x) = \begin{cases} x, \ 0 \le x \le 1, \\ 2, \ 1 < x < +\infty. \end{cases}$ 试求一个在$[0, +\infty)$上连续的函数$y = y(x)$, 它满足初值条件$y(0) = 0$, 且在$(0, 1)$及$(1, +\infty)$内满足所给方程。

解 在区间$(0, 1)$上, 问题为

$$\begin{cases} y' + y = x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

它的通解是

$$y = y(x) = e^{-x}\big(C + \int xe^x dx\big) = e^{-x}C + x - 1.$$

由初值条件$y(0) = 0$, 可求得$C = 1$. 从而上述初值问题的解是

$$y(x) = e^{-x} + x - 1.$$

易知$y(1) = e^{-1}$.

在区间$(1, +\infty)$上, 方程为$y' + y = 2$, 其通解为

$$y(x) = e^{-x}(C + \int 2e^x dx) = e^{-x}C + 2.$$

由解的连续性知$y(1) = e^{-1}C + 2 = e^{-1}$. 所以, $C = 1 - 2e$. 合知, 所求的连续解为

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x} + x - 1, \quad 0 \le x \le 1, \\ (1 - 2e)e^{-x} + 2, \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

习题 2.3.4 设$y_1(x)$, $y_2(x)$是一阶线性非齐次方程的两个互不相同的解，证明此方程的任一解$y = y(x)$恒满足

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = C, \qquad (C \text{ 为常数}).$$

证明 这时$y_2(x) - y_1(x)$是对应齐次方程的解，故一阶线性非齐次方程的通解为

$$y = y_1(x) + C(y_2(x) - y_1(x)).$$

所以，此方程的任一解$y = y(x)$恒满足

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = C, \qquad (C \text{ 为常数}).$$

习题 2.3.5 设$y(x)$在$[0, +\infty)$上连续可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty}(y'(x) + y(x)) = 0.$$

试证: $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

证明 若记

$$f(x) = y'(x) + y(x),$$

则有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 且有

$$y(x) = y(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^s f(s)ds.$$

如果$\int_0^x e^s f(s)ds$有界, 则易知$y(x) \to 0$, 当$x \to \infty$时.

如果$\int_0^x e^s f(s)ds$无界, 则由洛必塔法则, 知

$$e^{-x}\int_0^x e^s f(s)ds \to 0, \qquad \text{当 } x \to \infty.$$

合知, 总有$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

习题 2.3.6 证明: 当$x \to +\infty$时, 方程$xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$只有一个解趋于有限极限,求出这个极限,用积分表示这个解.

解 方程的通解可写为

$$y = xe^{x^2}\Big(C + \int_0^x e^{-t^2}dt\Big).$$

因当$x \to +\infty$时, $\int_0^x e^{-t^2}dt \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$及$xe^{x^2} \to +\infty$. 所以, 当且仅当$C + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 0$, 即$C = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$时解趋于一个有限极限. 所以, 方程只有一个趋于有限极限的解. 此解为

$$y = xe^{x^2}\Big(-\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^x e^{-t^2}dt\Big).$$

它的极限为

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_\infty^x e^{-t^2}dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{x^{-1}e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{-(x^{-2}+2)e^{-x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

习题 2.3.7 设在方程

$$xy' + \alpha y = f(x) \quad (x > 0)$$

中，$f(x)$在$(0, +\infty)$连续。

(i) 当$\alpha > 0$且$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = b$,证明方程只有一个解当$x \to 0_+$时有界，并求出这个解当$x \to 0_+$时的极限；

(ii) 当$\alpha < 0$且$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = b$,证明方程的所有解当$x \to 0_+$时趋于同一极限，求出这个极限。

证明 方程可变形为

$$y' + \frac{\alpha}{x}y = \frac{1}{x}f(x), \quad (x > 0),$$

其通解表达式为

$$y = \frac{1}{x^\alpha}C + \frac{1}{x^\alpha}\int \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx,$$

其中C为任意常数，而$\int \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx$是表示$\frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}$的一个原函数。

(i) 若$\alpha > 0$且$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = b$，则易知广义积分$\int_0^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt$收敛. 这时, 通解的表达式可写为

$$y = y_c(x) := \frac{1}{x^\alpha}C + \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt,$$

其中C为任意常数. 从而,

$$当x \to 0_+时,\ y_c(x)有界 \Longleftrightarrow C = 0,$$

即$y_0(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt$是当$x \to 0_+$时有界的唯一解. 这时,

$$\lim_{x\to 0_+} y_0(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)/x^{1-\alpha}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{b}{\alpha}.$$

(ii) 若$\alpha < 0$且$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = b$. 如果广义积分$\int_0^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt$ 发散($x > 0$). 此时，我们可写通解的表达式为

$$y = y_c(x) := \frac{1}{x^\alpha}C + \frac{1}{x^\alpha}\int_{x_0}^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt, \qquad x > 0,$$

其中C为任意常数, 而$x_0 > 0$是某定数。因而，

$$\lim_{x\to 0_+} y_c(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^\alpha}\Big(C + \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)/x^{1-\alpha}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{b}{\alpha}.$$

如果广义积分$\int_0^x \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt$收敛，则必有$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0$. 因而，易知$\lim_{x\to 0_+} y_c(x) = 0 = \frac{b}{\alpha}$.

习题 2.3.8 设连续函数$f(x)$在区间$-\infty < x < +\infty$上有界。证明方程

$$y' + y = f(x)$$

在区间$-\infty < x < +\infty$上有并且只有一个有界解。试求出这个解，并进而证明: 当$f(x)$ 还是以ω为周期的周期函数时，这个解也是一个以ω为周期的周期函数。

证 通解为

$$y(x) = e^{-x}\Big(C + \int_0^x e^s f(s)ds\Big).$$

因$x \to -\infty$, $e^{-x} \to +\infty$. 故由$y(x)$有界知, 应有$C + \int_0^x e^s f(s)ds \to 0$ ($x \to -\infty$). 从而取$C = -\int_0^{-\infty} e^s f(s)ds$. 所以, 可验证$y(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-s)} f(s)ds$是一个有界解.

设$y = \varphi(x)$是另一个有界解,则$u = y(x) - \varphi(x)$满足$y' + y = 0$. 所以, $y(x) - \varphi(x) = Ce^{-x}$, 它有界当且仅当$C = 0$. 于是, $y(x) \equiv \varphi(x)$.

当$f(x)$是ω-周期时, $y(x+\omega)$也是方程的一个解，且它是有界的。由有界解的唯一性知，$y(x+\omega) = y(x)$.

习题 2.3.9 考虑方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{$*$}$$

其中$p(x)$和$q(x)$都是以$\omega > 0$为周期的连续函数. 试证:

(1). 若$q(x) \equiv 0$, 则方程$(*)$的任一非零解以ω为周期, 当且仅当函数$p(x)$的平均值$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)dx = 0$;

(2). 若$q(x) \not\equiv 0$, 则方程$(*)$有唯一的ω周期解, 当且仅当$\bar{p} \neq 0$. 试求出此解.

解 (1). 若$q(x) \equiv 0$, 则方程$(*)$的通解为

$$y(x) = Ce^{-\int_0^x p(x)dx},$$

其中C为任意常数. 此时,

$$y(x+\omega) = y(x) \Longleftrightarrow \int_0^{x+\omega} p(t)dt = \int_0^x p(t)dt \Longleftrightarrow \int_0^\omega p(t)dt = 0.$$

(2). 若$q(x) \not\equiv 0$, 则方程$(*)$的通解为

$$y(x) = e^{-\int_0^x p(x)dx}\Big(C + \int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\Big).$$

现选常数C，使$y(x)$成为ω周期函数，即

$$y(x+\omega) \equiv y(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

我们断言：如$y(x)$是方程$(*)$的解，且满足

$$y(\omega) = y(0), \tag{$**$}$$

则$y(x)$是方程$(*)$的ω周期解。

事实上，因$y(x)$是方程$(*)$的解，则$y(x+\omega)$也是方程$(*)$的解。令

$$u(x) := y(x+\omega) - y(x),$$

则$y = u(x)$是相应齐次线性方程的解。如$(**)$成立，则$u(0) = 0$. 由解的唯一性，得$u(x) \equiv 0$. 所以，$y(x)$是方程$(*)$的ω周期解。

将通解公式代入$(**)$, 得

$$C = e^{-\int_0^\omega p(x)dx}\Big(C + \int_0^\omega q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\Big).$$

于是，当

$$C=\frac{1}{e^{\int_0^\omega p(x)dx}-1}\int_0^\omega q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds$$

时，方程$(*)$有ω周期解$y(x)$. 所以，$(*)$有唯一的$\omega-$周期解当且仅当$\bar{p}\neq 0$. 下面求$y(x)$的表达式。

因$y(x)$是方程$(*)$的解，故

$$\frac{dy(x)}{dx}+p(x)y(x)=q(x).$$

对上式两端同乘$e^{\int_0^x p(t)dt}$, 得

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{\int_0^x p(t)dt}y(x)\Big)=e^{\int_0^x p(t)dt}q(x).$$

两端从x到$x+\omega$积分，注意到$y(x+\omega)=y(x)$，得

$$e^{\int_0^{x+\omega} p(t)dt}y(x+\omega)-e^{\int_0^x p(t)dt}y(x)=\int_x^{x+\omega}e^{\int_0^t p(s)ds}q(t)dt.$$

因

$$e^{\int_0^{x+\omega} p(t)dt}y(x+\omega)=e^{\int_0^x p(t)dt}e^{\int_x^{x+\omega} p(t)dt}y(x)=e^{\int_0^x p(t)dt}e^{\int_0^\omega p(t)dt}y(x),$$

所以

$$y(x)=\frac{1}{e^{\int_0^\omega p(t)dt}-1}\int_x^{x+\omega}e^{\int_x^t p(s)ds}q(t)dt$$

是方程$(*)$的ω周期解的表达式。若记

$$G(x,t)=\frac{e^{\int_x^t p(s)ds}}{e^{\int_0^\omega p(t)dt}-1},\qquad x\le t\le x+\omega,$$

则方程$(*)$的ω周期解可表达为

$$y(x)=\int_x^{x+\omega}G(x,t)q(t)dt.$$

这时，$G(x,t)$称作Green函数。

§2.4 Bernoulli方程和Riccati方程

习题2.4解答

习题 2.4.1 *1. 求解微分方程:*

(1) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$;

(2) $\frac{dy}{dx}+2xy+xy^4=0$;

(3) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;

(4) $x(1-x^3)y'=x^2+y-2xy^2$;

(5) $y'=-y^2-\frac{1}{4x^2}$;

(6) $x^2y'=x^2y^2+xy+1$.

解 (1) Bernoulli方程。令$z=y^{-2}$, 则方程变为

$$\frac{dz}{dx}=2xz-2x^3,$$

是一线性方程。它的通解为

$$\begin{aligned} z= &\ e^{\int 2xdx}(C-\int 2x^3e^{-\int 2xdx}dx) \\ = &\ Ce^{x^2}+x^2+1, \end{aligned}$$

其中C是任意常数。得原方程的通解为

$$y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1,$$

其中C是任意常数。还有特解$y=0$.

(2) Bernoulli方程。通解

$$\frac{1}{y^3}=-\frac{1}{2}+Ce^{3x^2},$$

其中C是任意常数. 此外，还有特解$y=0$.

(3) 令$z=y^{-1}$, 则得

$$\frac{dz}{dx}=z-\cos x+\sin x,$$

是线性方程，通解为

$$z=Ce^x-\sin x.$$

代回原变量，得原方程通解

$$y=\frac{1}{Ce^x-\sin x},$$

其中C为任意常数. 还有特解$y=0$.

(4) 这是Riccati方程, 我们设想方程有形如$y=ax^k$的特解, 其中a,k待定. $y=x^2$是一特解. $y=\frac{1}{x}$也是一特解. 原方程的通解为

$$y=\frac{x(1-x^3)}{C+x^2}+x^2,$$

其中C是任意常数。

(5) 这是Riccati方程, 我们先求它的一特解. 因系数是有理函数, 我们设想方程有形如$y=ax^k$的特解, 其中a,k待定. 将$y=ax^k$代入方程两端,得

$$kax^{k-1}=-a^2x^{2k}-\frac{1}{4x^2}.$$

如取$k=-1,a=\frac{1}{2}$, 则上式成立。所以，$y=\frac{1}{2x}$是一特解。

令$y=u+\frac{1}{2x}$, 则有

$$u'=-\frac{u}{x}-u^2.$$

再令$z=\frac{1}{u}$, 则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}z+1.$$

这是一阶线性方程，可求得$z=x(C+\ln|x|)$. 于是，$u=\frac{1}{x(C+\ln|x|)}$. 从而，得原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x(C+\ln|x|)}+\frac{1}{2x},$$

其中C是任意常数。

(6) 这是Riccati方程, 我们设想方程有形如$y=ax^k$的特解, 其中a,k待定. $y=-\frac{1}{x}$是一特解。原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x(C-\ln|x|)}-\frac{1}{x},$$

其中C是任意常数。还有特解$y=-\frac{1}{x}$.

习题 2.4.2 如果$a(t),b(t)$均是正的T周期函数, 证明非自治的$Logistic$方程

$$\frac{dN}{dt}=(a(t)-b(t)N)N$$

有唯一正的T周期解.

证明 令$z=\frac{1}{N}$, 则
$$\frac{dz}{dt}=-a(t)z+b(t). \tag{$*$}$$
由习题2.9第9题知, 方程$(*)$有唯一的正周期解. 因而, 原方程有唯一的正周期解.

习题 2.4.3 证明: *Riccati*方程

$$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$$

的任意四个解$y_1(x),y_2(x),y_3(x),y_4(x)$的交比等于常数，即

$$(y_1,y_2,y_3,y_4):=\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}\cdot\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=C,\qquad C\text{ 为常数}.$$

证明 作变换$y=u+y_1(x)$, 则u满足

$$\frac{du}{dx}=[2p(x)y_1(x)+q(x)]u+p(x)u^2.$$

再作变换$z=\frac{1}{u}$，则z满足

$$\frac{dz}{dx}=-[2p(x)y_1(x)+q(x)]z-p(x). \tag{$*$}$$

方程$(*)$是一阶非齐次线性方程。上述理由说明

$$\frac{1}{y_2-y_1},\quad\frac{1}{y_3-y_1},\quad\frac{1}{y_4-y_1}$$

均是方程$(*)$的解。此时，方程$(*)$的通解可表为

$$z=\frac{1}{y_2-y_1}+C\Big[\frac{1}{y_3-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}\Big],\qquad C\text{ 为任意常数}.$$

所以，存在常数C，使

$$\frac{1}{y_4-y_1}=\frac{1}{y_2-y_1}+C\Big[\frac{1}{y_3-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}\Big].$$

变形后可得
$$\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}\cdot\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=C,\qquad C\text{ 为常数}.$$

§2.5 恰当方程

习题2.5解答

习题 2.5.1 *1. 求解下列微分方程:*

(1) $(e^x\sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$;

(2) $(1+y^2\sin 2x)dx-y\cos 2xdy=0$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$;

(4) $e^ydx-x(2xy+e^y)dy=0$;

(5) $(xy+1)ydx-xdy=0$;

(6) $(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$;

(7) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$;

(8) $(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0$.

解 (1) 是全微分方程。重新组合，得

$$(e^x\sin ydx+e^x\cos ydy)+(2\cos xdy-2y\sin xdx)=0,$$

即

$$d(e^x\sin y)+d(2y\cos x)=0.$$

所以，通解为

$$e^x\sin y+2y\cos x=C,$$

其中C为任意常数.

(2) 是全微分方程。通解为

$$x-\frac{y^2}{2}\cos 2x=C,$$

其中C为任意常数。

(3) 方程改写为

$$(x-y+1)dx-(x+y^2+3)dy=0,$$

它是一全微分方程, 因$\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 其中$P=x-y+1, Q=-x-y^2-3$。下面求原函数$\Phi$. 由

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=P=x-y+1$$

积分得

$$\Phi=\frac{1}{2}x^2-xy+x+\varphi(y).$$

再由$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=Q$得，

$$-x+\varphi'(y)=-x-y^2-3.$$

所以, $\varphi'(y)=-y^2-3$. 积分得$\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3-3y$. 于是所求的通解为

$$\frac{1}{2}x^2-xy+x-\frac{1}{3}y^3-3y=C,$$

其中C为任意常数。

(4) 积分因子

$$\mu(x)=\frac{1}{x^2}.$$

通解为

$$\frac{e^y}{x}+y^2=C,$$

其中C为任意常数。特解$x=0$.

(5) 变形得

$$xdx+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0.$$

故得

$$\frac{1}{2}d(x^2)+d\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

所以，通解为

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}=C,$$

其中C为任意常数。还有特解$x=0, y=0$.

(6) 积分因子$\mu(x)=x^2$. 通解为

$$x^3y^2+x^2e^x-2xe^x+2e^x=C,$$

其中C为任意常数。特解$x=0$.

(7) **解法一** 方程变形为

$$\underbrace{y^3dx - 2xy^2dy}_{\text{第一组}} + \underbrace{2x^2dy}_{\text{第二组}} = 0.$$

第一组有一个积分因子$\mu_1 = \frac{1}{xy^3}$, 相应的原函数是$\Phi_1 = \ln\frac{x}{y^2}$. 第二组有一个积分因子$\mu_2 = \frac{1}{x^2}$, 相应的原函数是$\Phi_2 = 2y$. 由定理可见, 函数$\mu_1 g_1(\Phi_1)$是第一组的积分因子, 函数$\mu_2 g_2(\Phi_2)$是第二组的积分因子, 其中$g_1, g_2$是任意的可微函数. 如选取$g_1(s) = e^{-s}$, $g_2(s) = \frac{2}{s}$, 则有

$$\mu_1 g_1(\Phi_1) = \mu_2 g_2(\Phi_2) = \frac{1}{x^2y} := \mu.$$

所以，$\mu = \frac{1}{x^2y}$就是原方程的一个积分因子. 将此积分因子乘原方程的两端, 得

$$\frac{y^3dx - 2xy^2dy}{x^2y} + \frac{2x^2dy}{x^2y} = 0,$$

即

$$\frac{y^2dx - 2xydy}{x^2} + \frac{2}{y}dy = 0.$$

这是一个恰当方程. 它可以写成

$$d\Big(-\frac{y^2}{x} + \ln y^2\Big) = 0.$$

所以，它的通解是

$$\ln y^2 - \frac{y^2}{x} = C,$$

其中C为任意常数。还有特解$x = 0, y = 0$.

解法二 设想方程有积分因子$\mu = x^\alpha y^\beta$, 则

$$x^\alpha y^{\beta+3}dx + 2(x^{\alpha+2}y^\beta - x^{\alpha+1}y^{\beta+2})dy = 0$$

为恰当方程。于是，有

$$\frac{\partial(x^\alpha y^{\beta+3})}{\partial y} = \frac{\partial(2(x^{\alpha+2}y^\beta - x^{\alpha+1}y^{\beta+2}))}{\partial x}.$$

从而，有

$$(\beta+3)x^\alpha y^{\beta+2} = 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta - 2(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+2}.$$

比较系数，得

$$2(\alpha+2)=0, \quad \beta+3=-2(\alpha+1).$$

由此求得

$$\alpha=-2, \quad \beta=-1.$$

所以，方程有积分因子$\mu=\frac{1}{x^2y}$. 余下同解法一，可求得通解是

$$\ln y^2-\frac{y^2}{x}=C.$$

(8) 积分因子$\mu(x)=e^x$. 通解

$$\int_0^x P_1(x,0)dx+\int_0^y Q_1(x,y)dy=C,$$

即

$$e^x x^2 y+\frac{1}{3}e^x y^3=C,$$

其中C为任意常数.

习题 2.5.2 设$P(x,y)=[x\alpha(x)+\beta(x)]y^2+3x^2y$, $Q(x,y)=y\alpha(x)+\beta(x)$, $dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, 其中$\alpha(x)$, $\beta(x)$为可微函数，且$\alpha(0)=-1$, $\beta(0)=0$. 试确定$\alpha(x)$及$\beta(x)$, 并求函数$U(x,y)$.

解 由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 得

$$2[x\alpha(x)+\beta(x)]y+3x^2=y\alpha'(x)+\beta'(x).$$

从而,有

$$\beta'(x)=3x^2, \qquad \alpha'(x)=2[x\alpha(x)+\beta(x)].$$

由$\beta'(x)=3x^2$和$\beta(0)=0$, 得

$$\beta(x)=x^3.$$

由$\alpha'(x)=2x\alpha(x)+2x^3$和$\alpha(0)=-1$, 它是一阶线性方程, 得

$$\alpha(x)=-(x^2+1).$$

于是,

$$P(x,y)=-xy^2+3x^2y, \qquad Q(x,y)=-(x^2+1)y+x^3.$$

所以

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy + C \\ &= x^3y - (x^2+1)\frac{y^2}{2} + C, \end{aligned}$$

其中C为任意常数.

习题 2.5.3 设$f(x,y)$及$\frac{\partial f}{\partial y}$连续，试证方程$dy - f(x,y)dx = 0$为线性方程的充要条件是它有仅依赖于$x$的积分因子。

解 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 有积分因子$\mu = \mu(x,y)$ 的充要条件是

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\mu.$$

对此题，$P = -f(x,y)$, $Q = 1$. 因而充要条件为

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}\mu. \qquad (*)$$

"$\Rightarrow$"(必要性)

此时，假设$f(x,y) = p(x)y + q(x)$, 则充要条件$(*)$变为

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + (p(x)y + q(x))\frac{\partial \mu}{\partial y} = -p(x)\mu. \qquad (**)$$

显然$\mu = e^{-\int p(x)dx}$是$(**)$的一个解，因而是积分因子，易见它仅依赖于x.

"$\Leftarrow$"(充分性)

此时，设有仅依赖于x的积分因子$\mu = \mu(x)$. 这时，充要条件$(*)$变为

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mu(x).$$

所以，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial \mu(x)}{\partial x}/\mu(x) \equiv p(x).$$

积分，得$f(x,y) = p(x)y + q(x)$. 所以是线性的。

习题 2.5.4 已知微分方程

$$(x^2 + y)dx + f(x)dy = 0$$

有积分因子$\mu = x$, 试求所有可能的函数$f(x)$.

解 据题意, 方程

$$(x^3+xy)dx+xf(x)dy=0$$

是恰当方程. 于是, 有

$$xf'(x)+f(x)=x.$$

所以, 有

$$f(x)=\frac{C}{x}+\frac{1}{2}x,$$

其中C是任意常数.

习题 2.5.5 试求能使微分方程

$$y^2\sin x dx+yf(x)dy=0$$

成为恰当方程的所有的函数$f(x)$, 并根据所得的$f(x)$求该方程的解.

解 据题意, 有

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2\sin x)=\frac{\partial}{\partial x}(yf(x)),$$

即

$$2y\sin x=yf'(x).$$

由此求得

$$f(x)=-2\cos x+k,$$

其中k是任一固定的常数. 此时该方程的解为

$$\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=C,$$

即

$$\frac{1}{2}y^2(-2\cos x+k)=C,$$

其中C为任意常数.

习题 2.5.6 设函数$f(u),g(u)$连续可微，且$f(u)\neq g(u)$, 试证方程

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$$

有积分因子

$$\mu=\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}.$$

证法一令$u=xy$, 则有$y=\frac{u}{x}$, $du=ydx+xdy$. 从而，

$$xdy=du-ydx=du-\frac{u}{x}dx.$$

于是，原方程变成

$$\frac{u}{x}f(u)dx+g(u)\big(du-\frac{u}{x}dx\big)=0,$$

即

$$\frac{u}{x}(f(u)-g(u))dx+g(u)du=0.$$

这是变量分离方程，它有积分因子

$$\mu=\frac{1}{u(f(u)-g(u))}=\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}.$$

证法二 只须证明:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{yf(xy)}{xy[f(xy)-g(xy)]}\Big]=\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{xg(xy)}{xy[f(xy)-g(xy)]}\Big]$$

通过计算，

$$\begin{aligned}\text{右}\ &=\tfrac{1}{x}\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{f(xy)}{f(xy)-g(xy)}=\tfrac{1}{x}\tfrac{xf'(xy)[f(xy)-g(xy)]-f(xy)[xf'(xy)-xg'(xy)]}{[f(xy)-g(xy)]^2}\\&=\tfrac{-f'(xy)g(xy)+f(xy)g'(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2},\\ \text{左}\ &=\tfrac{1}{y}\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{g(xy)}{f(xy)-g(xy)}=\tfrac{1}{y}\tfrac{yg'(xy)[f(xy)-g(xy)]-g(xy)[yf'(xy)-yg'(xy)]}{[f(xy)-g(xy)]^2}\\&=\tfrac{g'(xy)f(xy)-g(xy)f'(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}.\end{aligned}$$

所以，右=左.

习题 2.5.7 *若$P(x,y)$, $Q(x,y)$都是n次齐次函数($n\neq-1$), $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$是全微分方程。证明: $xP(x,y)+yQ(x,y)=C$ 是它的积分(C为常数).*

证明 因$P(x,y)$, $Q(x,y)$都是n次齐次函数, 有

$$x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=nP,\quad x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=nQ.$$

又因方程是全微分方程, 可知$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 由此可计算

$$\begin{aligned}&d[xP(x,y)+yQ(x,y)]\\=\ &[P(x,y)+x\tfrac{\partial P}{\partial x}+y\tfrac{\partial Q}{\partial x}]dx+[x\tfrac{\partial P}{\partial y}+Q(x,y)+y\tfrac{\partial Q}{\partial y}]dy\\=\ &[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]+(x\tfrac{\partial P}{\partial x}+y\tfrac{\partial Q}{\partial x})dx+(x\tfrac{\partial P}{\partial y}+y\tfrac{\partial Q}{\partial y})dy\\=\ &[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]+(x\tfrac{\partial P}{\partial x}+y\tfrac{\partial P}{\partial y})dx+(x\tfrac{\partial Q}{\partial x}+y\tfrac{\partial Q}{\partial y})dy\\=\ &[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]+nP(x,y)dx+nQ(x,y)dy\\=\ &(n+1)[P(x,y)dx+Q(x,y)dy].\end{aligned}$$

所以, $xP+yQ=C$为方程的积分.

习题 2.5.8 证明方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$有形如$\mu=\mu(\phi(x,y))$的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial \phi}{\partial x}-P\frac{\partial \phi}{\partial y}}=f(\phi(x,y)),$$

并写出这个积分因子.然后将结果应用到下述各种情形, 得出存在各类型积分因子的充要条件:

(1) $\mu=\mu(x\pm y)$;

(2) $\mu=\mu(x^2+y^2)$;

(3) $\mu=\mu(xy)$;

(4) $\mu=\mu(\frac{y}{x})$;

(5) $\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)$.

证明 由定理知, 有积分因子$\mu=\mu(\phi(x,y))$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\\
&\Longleftrightarrow \quad (Q\frac{\partial \phi}{\partial x}-P\frac{\partial \phi}{\partial y})\frac{d\mu}{ds}\Big|_{s=\phi(x,y)}=(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\mu\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial \phi}{\partial x}-P\frac{\partial \phi}{\partial y}}=\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds}\Big|_{s=\phi(x,y)}=: f(\phi(x,y)).
\end{aligned}$$

此时有积分因子$\mu=e^{\int f(s)ds}\big|_{s=\phi(x,y)}$. 由此得

(1) 有积分因子$\mu=\mu(x\pm y)\Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\mp P}=: f(x\pm y)$;

(2) 有积分因子$\mu=\mu(x^2+y^2)\Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{2xQ-2yP}=: f(x^2+y^2)$;

(3) 有积分因子$\mu=\mu(xy)\Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=: f(xy)$;

(4) 有积分因子$\mu=\mu(\frac{y}{x})\Longleftrightarrow -x^2\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ+xP}=: f(\frac{y}{x})$;

(5) 有积分因子$\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)\Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\alpha}{x}Q-\frac{\beta}{y}P}=: f(x^\alpha y^\beta)$.

§2.6 隐式微分方程

习题2.6解答

习题 2.6.1 求解下列微分方程:

(1) $y=y'^2\cdot e^{y'}$;

(2) $y=xy'\ln x+(xy')^2$;

(3) $\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$;

(4) $y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$;

(5) $x=y-(\frac{dy}{dx})^2$;

(6) $xy'^2+2xy'-y=0$;

(7) $xy'^3=1+y'$;

(8) $yy'^2+y'(x-y)-x=0$;

(9) $2xyy'=y'^3+4y^2$;

(10) $e^{y'}\cos y'=0$;

(11) $y'=\ln(xy'-y)$;

(12) $(\frac{dy}{dx})^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0$.

解 (1) 令$p=y'$, 则方程变为

$$y=p^2e^p.$$

两边对x求导，得

$$p=\frac{dy}{dx}=2pe^p\frac{dp}{dx}+p^2e^p\frac{dp}{dx}=(2p+p^2)e^p\frac{dp}{dx}.$$

如$p=0$, 得一特解$y=0$。如$p\neq 0$, 则得

$$dx=(2+p)e^pdp.$$

积分得

$$x=\int(2+p)e^pdp+C=(1+p)e^p+C.$$

故得参数形式的通解

$$\begin{cases} x=(1+p)e^p+C, \\ y=p^2e^p. \end{cases} \quad \text{其中}p\text{是参数}, C\text{为任意常数}.$$

(2) 特解

$$y = -\frac{1}{4}(\ln x)^2.$$

通解

$$y = C\ln x + C^2,$$

其中C为任意常数.

(3) 令$p = y'$, 则原方程可写成

$$x = p + e^p.$$

再由$dy = y'dx$，得

$$dy = p(1 + e^p)dp.$$

积分得

$$y = \frac{1}{2}p^2 + pe^p - e^p + C.$$

故得原方程的参数形式的通解

$$\begin{cases} x = p + e^p, \\ y = \frac{1}{2}p^2 + pe^p - e^p + C, \end{cases} \quad (p\text{为参数}),$$

其中C是任意常数。

(4) 特解

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

通解

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2,$$

其中C为任意常数。

(5) 令$p = y'$, 则方程变为

$$y = x + p^2.$$

两边对x求导，得

$$p = 1 + 2p\frac{dp}{dx},$$

当$p\neq 1$时, 可改写成

$$\frac{2p\,dp}{p-1}=dx$$

两边积分，得

$$x=2p+2\ln|p-1|+C.$$

于是，所求的通解为

$$\begin{cases} x=2p+2\ln|p-1|+C, \\ y=2p+p^2+2\ln|p-1|+C, \end{cases} \qquad (p\text{为参数}),$$

其中C是任意常数。由$p=1$, 得特解$y=x+1$.

(6) 通积分

$$y=C\pm 2\sqrt{Cx},$$

其中C是任意常数. 特解$y=-x$.

(7) 令$y'=t$, 则

$$x=\frac{1+t}{t^3}.$$

由$dy=y'dx$, 得

$$dy=(-\frac{3}{t^3}-\frac{2}{t^2})dt.$$

于是, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}+C$. 所以, 原方程的通积分为

$$\begin{cases} x=\frac{1+t}{t^3}, \\ y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}+C, \end{cases} \qquad t\text{为参数},$$

其中C为任意常数.

(8) 通解可以写成

$$(x^2+y^2-C)(y-x-C)=0,$$

其中C为任意常数.

(9) 令$y'=p$, 则

$$x=\frac{p^2}{2y}+\frac{2y}{p}.$$

两边对y求导并化简, 得

$$\frac{p^3-2y^2}{yp}\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}-\frac{1}{2y}\right)=0.$$

由$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}$,得$p^2=Cy$. 由此得原方程的通积分

$$x=\frac{C}{2}\pm 2\sqrt{\frac{y}{C}},$$

其中C是任意常数.

由$p^3-2y^2=0$, 得特解$y=\frac{2}{27}x^3$. 另外, 还有特解$y=0$.

(10) 令$p=y'$, 则$e^p\cos p=0$. 于是, $p=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. 从而,

$$y=\big(k\pi+\frac{\pi}{2}\big)x+C,$$

其中C为任意常数, $k\in\mathbb{Z}$. 所以，通解为

$$e^{\frac{y-C}{x}}\cos\frac{y-C}{x}=0,$$

其中C为任意常数.

(11) 令$y'=p$,则$p=\ln(xp-y)$, 即

$$y=xp-e^p.$$

两边对x求导数, 得

$$(x-e^p)\frac{dp}{dx}=0.$$

由$\frac{dp}{dx}=0$, 得$p=C$. 所以, 通解是

$$y=Cx-e^C,$$

其中C是任意常数.

由$x-e^p=0$, 得特解$y=x\ln x-x$.

(12) 通解为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{p^2}(C-\frac{3}{4}p^4), \\ y=\frac{2C}{p}-\frac{1}{2}p^3, \end{cases}\qquad p\text{为参数},$$

其中C是任意常数.

§2.7 可降阶的高阶方程

习题2.7解答

习题 2.7.1 求解下列微分方程:

(1) $y'' + y = 0$;

(2) $yy'' + y'^2 + x = 0$;

(3) $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$;

(4) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$;

(5) $x(yy'' + (y')^2) + 3yy' = 2x^3$;

(6) $x^2yy'' = (xy' - y)^2$.

解 (1) 令$y' = z$, 则$y'' = z\frac{dz}{dy}$. 代入方程,得

$$z\frac{dz}{dy} + y = 0.$$

由此得到

$$z = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}.$$

再由

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2},$$

得

$$\arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2.$$

所以, 原方程的通解为

$$y = C_1 \sin(x + C_2),$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(2) 通解

$$y^2 + \frac{1}{3}x^3 = 2C_1x + C_2,$$

其中C_1, C_2是任意常数。

(3) 将方程变形

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \ln y.$$

于是，$(\frac{y'}{y})' = \ln y$. 从而，$(\ln y)'' = \ln y$. 令$z = \ln y$, 则

$$z'' = z.$$

令$z' = u$, 则$z'' = u\frac{du}{dz}$. 代入方程, 得

$$u\frac{du}{dz} = z.$$

积分, 得

$$u^2 = z^2 + C_1.$$

于是, 得

$$z' = \pm\sqrt{z^2 + C_1},$$

即

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1}} = \pm dx.$$

积分, 得

$$\ln|z + \sqrt{z^2 + C_1}| = \pm x + C_2.$$

所以, 通解为

$$\ln|\ln y + \sqrt{\ln^2 y + C_1}| = \pm x + C_2,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

通解可以写成

$$\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

的原因为, 如取+号，上面的式子能够写成

$$z + \sqrt{z^2 + C_1} = \tilde{C}_2 e^x.$$

于是，

$$\frac{z - \sqrt{z^2 + C_1}}{-C_1} = \frac{1}{\tilde{C}_2} e^{-x}.$$

所以，

$$z = \tilde{C}_1 e^x - \frac{C_1}{\tilde{C}_2} e^{-x}.$$

(4) 通解

$$-\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2.$$

其中C_1, C_2是任意常数。

(5) 令$z = yy'$, 方程可改写成

$$xz' + 3z = 2x^3.$$

由此得到

$$z=\frac{C_1}{x^3}+\frac{1}{3}x^3,$$

其中C_1是任意常数. 再由

$$yy'=\frac{C_1}{x^3}+\frac{1}{3}x^3,$$

得通解

$$y^2=-\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{6}x^4+C_2,$$

其中C_1,C_2是任意常数.

(6) 方程可变形为

$$x^2\frac{yy''-y'^2}{y^2}=1-2x\frac{y'}{y}.$$

令$z=\frac{y'}{y}$, 则有

$$z'=-\frac{2}{x}z+\frac{1}{x^2}.$$

得通解

$$y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}},$$

其中C_1,C_2是任意常数.

§2.8 应用

习题 2.8.1 *1. 求下列曲线族的正交轨线族:*

(1) $xy=C$;

(2) $x^2+y^2=2Cx$.

解 (1) 在$\Gamma_C: xy=C$上每一点的切线的斜率为$y_1'=-\frac{C}{x^2}$. 所以，正交轨线满足的方程为

$$y'=-\frac{1}{y_1'}=\frac{x^2}{C}=\frac{x}{y}.$$

积分，得正交轨线族

$$y^2-x^2=K,$$

其中K是任意常数。

(2) 正交轨线满足的方程为

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

得正交轨线族

$$y = K(x^2 + y^2),$$

其中K是任意常数.

习题 2.8.2 设$y = \phi(x)$满足微分不等式

$$y' + a(x)y \le 0 \quad (x \ge 0).$$

求证:

$$\phi(x) \le \phi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds} \quad (x \ge 0).$$

证明 由题设知,

$$\phi'(x) + a(x)\phi(x) \le 0 \quad (x \ge 0).$$

用$e^{\int_0^x a(s)ds}$乘以上式两边, 得

$$\frac{d}{dx}\left(\phi(x)e^{\int_0^x a(s)ds}\right) \le 0 \quad (x \ge 0).$$

再从0到x积分, 得

$$\phi(x) \le \phi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds} \quad (x \ge 0).$$

习题 2.8.3 求解方程

$$\int_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt.$$

解 两边对x求导，得

$$\int_0^x y(t)dt = 2 + y(x).$$

取$x = 0$, 得$y(0) = -2$. 对上式两边再对x求导,得

$$y'(x) = y(x).$$

于是,$y(x) = Ce^x$. 再由初值条件, 得$y(x) = -2e^x$.

习题 2.8.4 求解积分方程

$$\int_0^1 \varphi(tx)dt = n\varphi(x),$$

其中$n \neq 0$是常数，φ是未知。

解 积分方程两边同乘x, 得

$$x\int_0^1 \varphi(tx)dt = nx\varphi(x).$$

若记$tx=s$, 则

$$\int_0^x \varphi(s)ds = nx\varphi(x).$$

两边微分，得

$$\varphi(x) = n\varphi(x) + nx\varphi'(x).$$

若$n=1$, 则$\varphi'(x)=0$. 从而，$\varphi(x)=C$（常数).

若$n\neq 1$, 则$nx\varphi'(x)=(1-n)\varphi(x)$. 可求得$\varphi(x)=C|x|^{\frac{1-n}{n}}$, 其中$C$是任意常数。显然，$n=1$的情形也包含在其中. 将此$\varphi(x)$的表达式代入原积分方程, 得

$$C|x|^{\frac{1-n}{n}}\int_0^1 |t|^{\frac{1-n}{n}}dt = nC|x|^{\frac{1-n}{n}}.$$

因为积分$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$当$\alpha\geq 1$时发散, 当$\alpha<1$时收敛. 所以, 当$n>0$时，所求的解为$\varphi(x)=C|x|^{\frac{1-n}{n}}$, 其中$C$是任意常数; 当$n<0$时, $\varphi(x)=0$.

习题 2.8.5 设$f(x)$是可微函数且对任何x,y恒有

$$f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y),$$

又$f'(0)=2$. 求$f'(x)$与$f(x)$的关系式, 并求$f(x)$.

解 令$x=y=0$, 有$f(0)=0$. 对上式两边关于y求导, 有

$$\frac{d}{dy}f(x+y) = e^y f(x) + e^x f'(y).$$

取$y=0$, 得

$$f'(x) = f(x) + e^x f'(0).$$

所以, $f'(x)$与$f(x)$的关系式是

$$f'(x) - f(x) = 2e^x, \quad f(0)=0.$$

这是一阶线性方程. 从而, 有

$$f(x) = e^x\int_0^x 2e^x e^{-x}dx = 2xe^x.$$

习题 2.8.6 求解方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \max(t, x), \quad t \geq 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

解 易知, 初值问题$\frac{dx}{dt} = t$, $x(0) = 0$的解是$x(t) = \frac{t^2}{2}$. 此时,

$$x(t) \leq t \Longleftrightarrow t \leq 2.$$

又方程$\frac{dx}{dt} = x$的通解为$x(t) = Ce^t$. 由它满足初始条件$x(2) = 2$, 知$C = 2e^{-2}$. 所以, $x(t) = 2e^{t-2}$. 容易证明当$t \geq 2$时, $x(t) = 2e^{t-2} \geq t$. 由此可得所求的问题的解为

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \leq 2, \\ 2e^{t-2}, & t > 2. \end{cases}$$

习题 2.8.7 设$f(x)$在$(0, +\infty)$内可导, $f(1) = 3$, 且

$$\int_1^{xy} f(t)dt = x\int_1^y f(t)dt + y\int_1^x f(t)dt, \quad (x > 0, y > 0).$$

求$f(x)$.

解 上式两边对x求导, 得

$$f(xy)y = \int_1^y f(t)dt + yf(x). \tag{$*$}$$

再对$(*)$式两边对y求导, 得

$$f'(xy)xy + f(xy) = f(y) + f(x).$$

取$y = 1$, 得

$$f'(x)x + f(x) = 3 + f(x).$$

所以, $f'(x) = \frac{3}{x}$. 于是, $f(x) = 3\ln x + C$. 再由$f(1) = 3$, 得$C = 3$. 故得到

$$f(x) = 3\ln x + 3.$$

习题 2.8.8 设$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f\Big(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\Big)dxdy.$$

求$f(t)$.

解 因为

$$\begin{aligned}&\textstyle\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\iint_{0\le r\le 2t} f(\frac{r}{2})rdrd\theta\\ =\ &\textstyle\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t} f(\frac{r}{2})rdr=2\pi\int_0^{2t} f(\frac{r}{2})rdr,\end{aligned}$$

从而,

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} f\big(\frac{r}{2}\big)rdr.$$

上式两边对t求导，得

$$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t).$$

这是一阶线性微分方程，它的通解是

$$f(t)=e^{\int 8\pi tdt}\Big(C+\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi tdt}dt\Big)=e^{4\pi t^2}(C+4\pi t^2).$$

由$f(0)=1$, 得$C=1$. 所求的函数为$f(t)=e^{4\pi t^2}(1+4\pi t^2)$.

习题 2.8.9 设当$x>-1$时, 可微函数$f(x)$满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,\quad f(0)=1.$$

证明: 当$x\ge 0$时, $e^{-x}\le f(x)\le 1$.

证明 显然, 有$f'(0)=-1$. 对上式两边求导, 得

$$f''(x)+f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{x+1}f(x)=0.$$

再利用上面两等式, 得

$$f''(x)+\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big)f'(x)=0.$$

如记$y(x)=f'(x)$, 则

$$y'(x)+\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big)y(x)=0.$$

由此解得$y(x)=\frac{C_1}{x+1}e^{-x}$, 其中$C_1$是常数. 由$y(0)=-1$, 得$C_1=-1$. 从而, 得$y(x)=\frac{-e^{-x}}{x+1}$. 所以,

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{x+1}.$$

于是,

$$f(x)=\int_0^x\frac{-e^{-x}}{x+1}dx+C_2,$$

其中C_2是常数. 再由$f(0)=1$, 得$C_2=1$. 所以

$$f(x)=\int_0^x\frac{-e^{-x}}{x+1}dx+1.$$

由此易知, $f(x)\le 1$, 当$x\ge 0$时.

又当$x\ge 0$时, $\frac{-e^{-x}}{x+1}\ge -e^{-x}$. 所以

$$f(x)\ge\int_0^x(-e^{-x})dx+1=e^{-x}.$$

合知, 有

$$e^{-x}\le f(x)\le 1,\qquad \text{当 } x\ge 0.$$

习题 2.8.10 已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导, 且对任意的$x>0$, 曲线$y=f(x)$上点$(x,f(x))$处的切线在y上的截距等于$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, 求函数$f(x)$的一般表达式。

解 曲线$y=f(x)$在点$(x,f(x))$处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

其中(X,Y)是切线上的点。令$X=0$, 得切线在y上的截距$Y=f(x)-xf'(x)$. 据题意，得

$$f(x)-xf'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$$

即

$$x[f(x)-xf'(x)]=\int_0^x f(t)dt.$$

在上式两端关于x求导，并整理得

$$xf''(x)+f'(x)=0.$$

如记$z=f'(x)$, 则有$xz'+z=0$. 解得$z=\frac{C_1}{x}$. 从而，

$$f(x)=C_1\ln x+C_2,$$

其中C_1,C_2为任意常数.

习题 2.8.11 跟踪：设某A从xoy平面上的原点出发，沿x轴正方向前进，同时某B从点$(0,b)$开始跟踪A，即B与A永远保持等距b. 试求B的光滑运动轨迹。

解 设A从起点$A(0,0)$出发，到达$A(\bar{x},0)$. 这时B从起点$B(0,b)$出发，到达$B(x,y)$. 则有关系

$$\begin{cases} (x-\bar{x})^2+y^2=b^2, \\ \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-\bar{x}}. \end{cases}$$

由此得微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}},$$

和初值条件$y(0)=b$. 这时的方程是变量分离方程, 将它变形成

$$\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{y}dy=-dx.$$

两边积分,得方程的通积分

$$\sqrt{b^2-y^2}-b\ln\left|\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{y}\right|=-x+C.$$

再由初值条件$y(0)=b$, 知$C=0$. 所以B的运动轨迹方程是

$$x=b\ln\left|\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{y}\right|-\sqrt{b^2-y^2}.$$

习题 2.8.12 追线：设在xoy平面上，有某物P从原点O出发，以常速$a>0$沿x轴的正方向运动。同时又有某物Q以常速b从点$(0,1)$出发追赶P. 设$b>a$, 且Q的运动方向永远指向P。试求Q运动轨迹，以及追上P的时间。

解 设从时间$t=0$开始计算出发时间. 在出发了t时间后, Q点的位置记为$(x(t),y(t))$, 则P点的位置为$P(at,0)$. 得关系式

$$\begin{cases} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y}{x-at}, \\ x'(t)^2 + y'(t)^2 = b^2. \end{cases} \tag{$*$}$$

由$(*)$的第一式, 推得$x-at=y/y'$. 两边对t求导, 得

$$\frac{dx}{dt} - a = \frac{(y')^2 - yy''}{(y')^2} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

从而,

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{(y')^2}{yy''}$$

由$(*)$的第二式, 推得

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot (1+{y'}^2) = b^2.$$

由此得到追线满足的微分方程

$$y'' = \frac{a}{b}\frac{(y')^2}{y}\sqrt{1+{y'}^2}.$$

这个方程不含自变量。引入新变量：$y'=p$, 则$y''=p\frac{dp}{dy}$. 于是得到

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{a}{b}\frac{p^2}{y}\sqrt{1+p^2}.$$

分离变量

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{b}\frac{dy}{y}.$$

注意p是负的，

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = -\frac{\frac{dp}{p^2}}{\sqrt{1+(\frac{1}{p})^2}}.$$

积分得

$$\ln\left[\frac{1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1}\right] = \frac{a}{b}(\ln y + \ln C).$$

从而，

$$\frac{1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} = (Cy)^{\frac{a}{b}}.$$

在Q与P追逐开始这一瞬间，$\frac{1}{p}=0$, 此时$Q(0,1)$.因此,$C=1$.于是，

$$\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=(y)^{\frac{a}{b}}.$$

易得

$$-\frac{1}{p}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=(y)^{-\frac{a}{b}}.$$

由此得

$$\frac{2}{p}=y^{\frac{a}{b}}-y^{-\frac{a}{b}},\quad \text{或} \quad dx=\frac{1}{2}\{y^{\frac{a}{b}}-y^{-\frac{a}{b}}\}dy.$$

再积分, 得

$$x=\frac{1}{2(1+\frac{a}{b})}y^{1+\frac{a}{b}}-\frac{1}{2(1-\frac{a}{b})}y^{1-\frac{a}{b}}+C_1.$$

由初始位置$(0,1)$可得$C_1=\frac{1}{2(1-\frac{a}{b})}-\frac{1}{2(1+\frac{a}{b})}$. 所以，所求的追线方程为

$$x=\frac{y^{1+\frac{a}{b}}-1}{2(1+\frac{a}{b})}-\frac{y^{1-\frac{a}{b}}-1}{2(1-\frac{a}{b})}.$$

令$y=0$, 便得相遇点的坐标，它的值是

$$x_1=\frac{1}{2(1-\frac{a}{b})}-\frac{1}{2(1+\frac{a}{b})}=\frac{ab}{b^2-a^2}.$$

最后，追逐的时间是$T=\frac{x_1}{a}=\frac{b}{b^2-a^2}$.

第三章　线性微分方程组

§3.1　矩阵分析

习题3.1解答

习题 3.1.1 试证常向量序列$\{y_k\}$, $(k=1,2,\cdots)$收敛的充要条件是: 对于任意给定的$\epsilon>0$, 可以找到正整数N,使当$p,\ q>N$时有$||y_p-y_q||<\epsilon$.

证明 因$\mathbb{R}^n$中范数等价, 不妨取$||\cdot||=|\cdot|_\infty$. 记$y_k=(y_1^{(k)},y_2^{(k)},\cdots,y_n^{(k)})^T$, 则向量$y_k$收敛当且仅当每一个分量$y_j^{(k)}$收敛,其中$j=1,\cdots,n$. 而$y_j^{(k)}$收敛当且仅当对于任给的$\epsilon>0$, 存在$N_j$, 使当$p,q>N_j$时, $|y_j^{(p)}-y_j^{(q)}|<\epsilon$, 其中$j=1,\cdots,n$. 取$N=\max_j N_j$, 则得结论.

习题 3.1.2 证明: $||AB||\le||A||\cdot||B||$.

证明 记$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{jk})$,及$AB:=C=(c_{ik})$, 则

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}.$$

对范数$||\cdot||=|\cdot|_1$, 有

$$||C||=\sum_{i,k=1}^{n}|c_{ik}|=\sum_{i,k=1}^{n}\big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\big|\le\sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|b_{jk}|=||A||\cdot||B||.$$

习题 3.1.3 证明M判别法($Weiestrass$判别法).

证明 记$A_k(x)=(a_{ij}^{(k)}(x))$, 则对每一对i,j, 有$|a_{ij}^{(k)}(x)|\le M_k$, $\forall k$. 因而，对每一对i,j, 级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}(x)$ 在$a\le x\le b$上一致收敛。所以，级数$\sum_{k=1}^{\infty}A_{ij}(x)$ 在$a\le x\le b$上一致收敛.

§3.2　一般理论

习题3.2解答

习题 3.2.1 试用逐次逼近法求方程组

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}=-y_1\end{cases}$$

满足条件$y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$的第n次近似解及精确解.

解 初始序列
$$\begin{cases} y_1^{(0)}(x)=0, \\ y_2^{(0)}(x)=1 \end{cases}$$
及Picard序列
$$\begin{cases} y_1^{(k+1)}(x)=\int_0^x y_2^{(k)}(s)ds, \\ y_2^{(k+1)}(x)=1-\int_0^x y_1^{(k)}(s)ds, \end{cases} \qquad k=0,1,2,\cdots.$$
则有
$$k=1, \qquad \begin{cases} y_1^{(1)}(x)=x, \\ y_2^{(1)}(x)=1, \end{cases}$$
$$k=2, \qquad \begin{cases} y_1^{(2)}(x)=x, \\ y_2^{(2)}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2, \end{cases}$$
$$k=3, \qquad \begin{cases} y_1^{(3)}(x)=x-\frac{1}{3!}x^3, \\ y_2^{(3)}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2, \end{cases}$$
$$k=4, \qquad \begin{cases} y_1^{(4)}(x)=x-\frac{1}{3!}x^3, \\ y_2^{(4)}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4, \end{cases}$$
等等. 一般地，有
$$n=2m, \qquad \begin{cases} y_1^{(n)}(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m-1)!}x^{2m-1}, \\ y_2^{(n)}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}, \end{cases}$$
$$n=2m+1, \qquad \begin{cases} y_1^{(n)}(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}, \\ y_2^{(n)}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}. \end{cases}$$
易知, $y_1^{(n)}(x)\to\sin x; y_2^{(n)}(x)\to\cos x$.

习题 3.2.2 试证向量函数组
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\x\\x^2\end{pmatrix}$$
在任意区间$a<x<b$上线性无关. 问: 这三个向量函数是否能同时为齐次线性微分方程组$\frac{dy}{dx}=A(x)y$的解, 其中$A(x)$是区间(a,b)上的3×3连续矩阵函数.

证明 Wronski行列式$W(x)=x^3$. 所以, 这三个向量函数线性无关.

当$0 \in (a,b)$时, 不存在区间(a,b)上的3×3连续矩阵函数$A(x)$, 使得它们同时为齐次线性微分方程组$\frac{dy}{dx}=A(x)y$的解.

当$0 \notin (a,b)$时, 存在区间(a,b)上的3×3连续矩阵函数$A(x)$, 使得它们同时为齐次线性微分方程组$\frac{dy}{dx}=A(x)y$的解.

习题 3.2.3 设$y_1(x)=x^3$, $y_2(x)=x^2|x|$. 证明: $y_1(x)$和$y_2(x)$在$-1\le x\le 0$上是线性相关的, 而在$-1\le x\le 1$上是线性无关的.

证明 设

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)=0,$$

即

$$k_1x^3+k_2x^2|x|=0. \tag{$*$}$$

(1) 在区间$-1\le x\le 0$上, $(*)$式为

$$(k_1-k_2)x^3=0.$$

可取$k_1=k_2\neq 0$, 使$(*)$式成立. 由定义知, $y_1(x)$和$y_2(x)$在$-1\le x\le 0$上是线性相关的.

(2) 在区间$-1\le x\le 1$上, $(*)$式为

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)x^3=0,&\quad \text{当 } 0\le x\le 1;\\ (k_1-k_2)x^3=0,&\quad \text{当 } -1\le x\le 0,\end{aligned}$$

即得

$$k_1+k_2=0,\quad k_1-k_2=0.$$

从而,必有$k_1=k_2=0$. 由定义, $y_1(x)$和$y_2(x)$在$-1\le x\le 1$上是线性无关的.

习题 3.2.4 证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{dy_{i1}}{dx} & \frac{dy_{i2}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}\end{vmatrix}.$$

证明 用$\pi(j_1j_2\cdots j_n)$表示排列$j_1j_2\cdots j_n$的反序数, 由行列式的定义, 有

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)} y_{1j_1}y_{2j_2}\cdots y_{nj_n},$$

其中符号$\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$表示要对$1,2,\cdots,n$的所有排列取和。所以,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{(j_1,\cdots,j_n)} (-1)^{\pi(j_1\cdots j_n)} y_{1j_1}\cdots y_{i-1j_{i-1}} \frac{y_{ij_i}}{dt} y_{i+1j_{i+1}}\cdots y_{nj_n} \\ = & \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_{i1}}{dx} & \frac{dy_{i2}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

习题 3.2.5 如果方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \quad 与 \quad \frac{dy}{dx} = B(x)y$$

有一个相同的基解矩阵，则$A(x) \equiv B(x)$.

证明 设相同的基解矩阵为$\Phi(x)$, 则

$$A(x)\Phi(x) = B(x)\Phi(x).$$

因$\Phi(x)$可逆, 两边同乘其逆, 即得$A(x) \equiv B(x)$.

习题 3.2.6 设$A(x)$是T周期的$n\times n$矩阵函数, $\Phi(x)$是齐次线性微分方程组$\frac{dy}{dx} = A(x)y$的基解矩阵, 证明:

(1) $\Phi(x+kT)$也是基解矩阵;

(2) 存在非奇异的$n\times n$矩阵P, 使得

$$\Phi(x+kT) = \Phi(x)P^k.$$

证明(1) 因$\Phi(x)$是齐次线性微分方程组$\frac{dy}{dx}=A(x)y$的基解矩阵, 故$\det\Phi(x)\neq 0$且

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}=A(x)\Phi(x).$$

记$Y(x)=\Phi(x+kT)$, 则$Y(x)$满足$\det Y(x)\neq 0$以及

$$\frac{dY(x)}{dx}=A(x+kT)Y(x).$$

因$A(x+kT)=A(x)$, 故$Y(x)$满足

$$\frac{dY(x)}{dx}=A(x)Y(x),$$

即$Y(x)=\Phi(x+kT)$也是基解矩阵.

(2) 因$\Phi(x+T)$是基解矩阵, 故存在非奇异的$n\times n$矩阵P, 使得$\Phi(x+T)=\Phi(x)T$. 因而, $\Phi(x+kT)=\Phi(x)P^k$.

习题 3.2.7 *设$\Phi(x)$为方程组$\frac{dy}{dx}=Ay$ (A为$n\times n$常数矩阵)的***标准基解矩阵** *(即$\Phi(0)=E$). 证明:*

$$\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)=\Phi(x-x_0),$$

其中x_0为某一值.

证明 对任意的$y_0\in\mathbb{R}^n$, $\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0$和$\Phi(x-x_0)y_0$均是初值问题

$$\frac{dy}{dx}=Ay,\quad y(x_0)=y_0$$

的解。由解的存在唯一性定理, $\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0=\Phi(x-x_0)y_0$. 再由$y_0$的任意性, 知$\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)=\Phi(x-x_0)$.

习题 3.2.8 *求解方程组*

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} &= p(t)x+q(t)y,\\ \frac{dy}{dt} &= q(t)x+p(t)y,\end{cases}$$

其中$p(t)$, $q(t)$在$[a,b]$上连续.

解两式相加和相减, 并令$u=x+y$, $v=x-y$, 得

$$\frac{du}{dt}=(p(t)+q(t))u,\quad \frac{dv}{dt}=(p(t)-q(t))v.$$

由此求得

$$u = C_1 e^{\int (p(t)+q(t))dt}, \quad v = C_2 e^{\int (p(t)-q(t))dt}.$$

所以,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\Big(C_1 e^{\int (p(t)+q(t))dt} + C_2 e^{\int (p(t)-q(t))dt}\Big), \\ y = \frac{1}{2}\Big(C_1 e^{\int (p(t)+q(t))dt} - C_2 e^{\int (p(t)-q(t))dt}\Big), \end{cases}$$

其中C_1, C_2是任意常数.

习题 3.2.9 设$A(x)$为区间$a \le x \le b$上的连续$n \times n$实矩阵, $\Phi(x)$为方程$\frac{dy}{dx} = A(x)y$的基解矩阵,而$y = \phi(x)$为其一个解. 试证:

(1) 对于方程$\frac{dy}{dx} = -A^T(x)y$的任一解$y = \psi(x)$, 必有$\psi^T(x)\phi(x) =$常数;

(2) $\Psi(x)$为方程$\frac{dy}{dx} = -A^T(x)y$的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵C, 使得$\Psi^T(x)\Phi(x) = C$.

证明(1) 因为$\frac{d\psi(x)}{dx} = -A^T(x)\psi(x)$, 所以$\frac{d\psi^T(x)}{dx} = -\psi^T(x)A(x)$. 于是,

$$\frac{d}{dx}(\psi^T(x)\phi(x)) = \frac{d\psi^T(x)}{dx}\phi(x) + \psi^T(x)\frac{d\phi(x)}{dx} \equiv 0.$$

所以, $\psi^T(x)\phi(x) =$常数.

(2) 因$\Psi(x)$为方程$\frac{dy}{dx} = -A^T(x)y$的基解矩阵, 由(1)知, 存在矩阵C, 使得$\Psi^T(x)\Phi(x) = C$. 又$\det\Phi(x) \neq 0$和$\det\Psi(x) \neq 0$, 所以$\det C \neq 0$, 即C非奇异.

假设存在非奇异的常数矩阵C, 使得$\Psi^T(x)\Phi(x) = C$, 则易知$\det\Psi(x) \neq 0$. 又由

$$0 = \frac{d}{dx}\Psi^T(x)\Phi(x) = \frac{d\Psi^T(x)}{dx}\Phi(x) + \Psi^T(x)\frac{d\Phi(x)}{dx},$$

得

$$\frac{d\Psi^T(x)}{dx}\Phi(x) = -\Psi^T(x)A(x)\Phi(x).$$

因$\det\Phi(x) \neq 0$, 得$\frac{d\Psi^T(x)}{dx} = -\Psi^T(x)A(x)$, 即

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = -A^T(x)\Psi(x).$$

所以, $\Psi(x)$是方程$\frac{dy}{dx} = -A^T(x)y$的基解矩阵.

习题 3.2.10 设n阶非齐次线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x) \tag{$*$}$$

中的$f(x) \not\equiv 0$, 当$a < x < b$，证明: 此方程组有且至多有$n+1$个线性无关解。

证 由定理知，($*$)的相应齐次线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \tag{$**$}$$

有n个线性无关的解：

$$\phi_1(x),\ \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x), \quad a < x < b,$$

它们构成了相应齐次线性微分方程的基本解组。由常数变易法，可以求得($*$)的一个特解$\phi^*(x)$. 设

$$y_0(x) = \phi^*(x),\ y_1(x) = \phi_1(x) + \phi^*(x),\ \cdots, y_n(x) = \phi_n(x) + \phi^*(x),$$

则$y_0(x), y_1(x), \cdots, y_n(x)$是($*$)的$n+1$个解。下证它们是线性无关的。由

$$C_0y_0(x) + C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x) = 0,$$

得

$$(C_0 + C_1 + \cdots + C_n)\phi^*(x) = -(C_1\phi_1(x) + \cdots + C_n\phi_n(x)),$$

它的右边是($**$)的解，从而左边亦是，即有

$$(C_0 + C_1 + \cdots + C_n)\frac{d\phi^*(x)}{dx} = A(x)(C_0 + C_1 + \cdots + C_n)\phi^*(x).$$

又$\phi^*(x)$是($*$)的解，且$f(x) \not\equiv 0$. 所以，$C_0 + C_1 + \cdots + C_n = 0$. 由此得

$$C_1\phi_1(x) + \cdots + C_n\phi_n(x) = 0.$$

由线性无关性知$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$. 于是, $C_0 = 0$. 所以, $y_0(x), y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 是($*$)的$n+1$个线性无关解.

设$\tilde{y}(x)$是($*$)的任一解，则由通解结构定理知，存在常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$，使

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x) = &\ \phi^*(x) + C_1\phi_1(x) + \cdots + C_n\phi_n(x)\\ = &\ y_0(x) + C_1(y_1(x) - y_0(x)) + \cdots + C_n(y_n(x) - y_0(x))\\ = &\ (1 - C_1 - \cdots C_n)y_0(x) + C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x),\end{aligned}$$

即, $\tilde{y}(x)$可用$y_0(x), y_1(x), \cdots, y_n(x)$这$n+1$个线性无关的解表示。

习题 3.2.11 设$\Phi(x)$是线性齐次微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y$$

的一个基解矩阵，并且n维向量函数$f(x,y)$在区域$a < x < b,\ |y| < \infty$上连续。试证：求解初值问题

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

等价于求解积分方程

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s,y(s))ds,$$

其中$x_0 \in (a,b)$.

证明 因$\Phi^{-1}(x)\Phi(x) = I$, 两边求导得

$$\frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx}\Phi(x) + \Phi^{-1}(x)\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0.$$

又因$\frac{d\Phi(x)}{dx} = A(x)\Phi(x)$, 由此可得

$$\frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx} + \Phi^{-1}(x)A(x) = 0.$$

设$y = y(x)$是初值问题的解, 则

$$\begin{aligned}
& \tfrac{dy(x)}{dx} = A(x)y(x) + f(x,y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \Phi^{-1}(x)\tfrac{dy(x)}{dx} = \Phi^{-1}(x)A(x)y(x) + \Phi^{-1}(x)f(x,y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \Phi^{-1}(x)\tfrac{dy(x)}{dx} + \tfrac{d\Phi^{-1}(x)}{dx}y(x) = \Phi^{-1}(x)f(x,y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \tfrac{d}{dx}(\Phi^{-1}(x)y(x)) = \Phi^{-1}(x)f(x,y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \Phi^{-1}(x)y(x) = \Phi^{-1}(x_0)y_0 + \textstyle\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)f(s,y(s))ds \\
\Longleftrightarrow\quad & y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \textstyle\int_{x_0}^{x} \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s,y(s))ds,
\end{aligned}$$

即,$y = y(x)$是积分方程的解.

§3.3 常系数线性微分方程组

习题3.3解答

习题 3.3.1 设A是$n \times n$常数矩阵, 证明$\det e^{A} > 0$.

证法一 因e^{xA}是常系数齐次线性微分方程组$\frac{dy}{dx} = Ay$的标准基解矩阵, 由Liouville公式, 有

$$\det e^{xA} = e^{x\,\mathrm{trA}}.$$

所以，$\det e^{A} > 0$.

证法二 因$\frac{A}{2}$和$\frac{A}{2}$可交换, 故$e^{A} = e^{\frac{A}{2}}e^{\frac{A}{2}}$. 因为$e^{x\frac{A}{2}}$是线性微分方程组$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{2}y$的基解矩阵, 所以, $\det e^{A} = (\det e^{\frac{A}{2}})^2 > 0$.

习题 3.3.2 *求解常系数齐次线性微分方程组并写出不变子空间:*

(1) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

(2) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

(3) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

(4) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$;

(5) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$;

(6) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$;

(7) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$;

(8) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$;

(9) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$;

(10) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$

解 (1) 特征方程为

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3 = 0.$$

特征根$\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$为两相异实根. 下面计算特征向量

(i). $\lambda_1 = -\sqrt{3}$时，考虑$(\lambda_1 I - A)r = 0$, 即由

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})u_1 - u_2 = 0, \\ u_1 - (2+\sqrt{3})u_2 = 0, \end{cases} \quad \text{求得特征向量} \quad r_1 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

稳定子空间是

$$GE_{-\sqrt{3}} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

(ii). $\lambda_2 = \sqrt{3}$时，考虑$(\lambda_2 I - A)r = 0$, 即由

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})u_1 - u_2 = 0, \\ u_1 - (2-\sqrt{3})u_2 = 0, \end{cases} \quad \text{求得特征向量} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

不稳定子空间是

$$GE_{\sqrt{3}} = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \beta \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

所以，原方程的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-\sqrt{3}x} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\sqrt{3}x} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2是任意常数。

(2)通解为

$$y = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2为任意常数。广义特征子空间为

$$GE_{\pm i} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

它是中心子空间.

(3) 设系数矩阵为A. 特征方程为

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0.$$

得特征根$\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}\, i,\ \lambda_2 = 3 - \sqrt{2}\, i.$

对应于$\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}\, i$, 由特征方程组

$$(A - \lambda_1 I) r = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2}\, i & -1 \\ 3 & 1-\sqrt{2}\, i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0,$$

求得特征向量

$$r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1-\sqrt{2}\, i \end{pmatrix},$$

所以, 原方程有解

$$e^{(3+\sqrt{2}\, i)x} \begin{pmatrix} -1 \\ -1-\sqrt{2}\, i \end{pmatrix}.$$

它的实部和虚部

$$e^{3x} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}\, x \\ -\cos\sqrt{2}\, x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\, x \end{pmatrix}, \quad e^{3x} \begin{pmatrix} \sin\sqrt{2}\, x \\ -\sin\sqrt{2}\, x - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\, x \end{pmatrix}$$

是方程的两个实的线性无关解。所以, 该方程组的通解为

$$y = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}\, x \\ -\cos\sqrt{2}\, x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\, x \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} \sin\sqrt{2}\, x \\ -\sin\sqrt{2}\, x - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\, x \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2是任意常数。不稳定子空间是

$$GE_{3\pm\sqrt{2}\, i} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1 \right\} = \mathbb{R}^2.$$

(4) 特征子空间是

$$GE_2 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha \in \mathbb{R}^1\right\}.$$

$$GE_{-2} = \left\{\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \beta \in \mathbb{R}^1\right\}.$$

$$GE_{-1} = \left\{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma \in \mathbb{R}^1\right\}.$$

通解为

$$y = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2, C_3是任意常数. 稳定子空间是$GE_{-2} \oplus GE_{-1}$, 不稳定子空间是GE_2.

(5) 特征方程是

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2+1) = 0.$$

得特征根$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda = -i$. 下求特征向量.

(i) 对$\lambda_1 = 1$, 考虑特征方程组$(A - \lambda_1 I)r = 0$, 即

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + 2u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0. \end{cases}$$

求得$u_1=0, u_2=2u_3$. 于是求出特征向量$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. 所以，对应于一重特征根$\lambda_1=1$, 求出了一个解$e^x\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. 对应的特征子空间为

$$GE_1=\left\{\alpha\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix};\quad \alpha\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

它是不稳定子空间.

(ii) 对$\lambda_2=i$, 考虑特征方程组$(A-\lambda_2 I)r=0$, 即

$$\begin{cases}(2-i)u_1-u_2+2u_3=0,\\ u_1-iu_2+2u_3=0,\\ -2u_1+u_2-(1+i)u_3=0.\end{cases}$$

求得$u_1=u_2=-(1+i)u_3$. 于是求出特征向量$\begin{pmatrix}1+i\\1+i\\-1\end{pmatrix}$. 所以，对应于一重特征根$\lambda_2=i$, 求出了一个复值解$e^{ix}\begin{pmatrix}1+i\\1+i\\-1\end{pmatrix}$. 由Euler公式，

$$e^{ix}\begin{pmatrix}1+i\\1+i\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x-\sin x\\ \cos x-\sin x\\ -\cos x\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\cos x+\sin x\\ \cos x+\sin x\\ -\sin x\end{pmatrix},$$

它的实部和虚部

$$\begin{pmatrix}\cos x-\sin x\\ \cos x-\sin x\\ -\cos x\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\cos x+\sin x\\ \cos x+\sin x\\ -\sin x\end{pmatrix}$$

是方程组的二个线性无关的实解. 因 $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$ 的实部和虚部分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
故对应的广义特征子空间为

$$GE_{\pm i} = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \beta, \gamma \in R^1 \right\}.$$

它是中心子空间.

所以，原方程的通解为

$$y = C_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ \cos x - \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x + \sin x \\ -\sin x \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2, C_3是任意常数.

(6) 广义特征子空间为

$$GE_1 = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

它是不稳定子空间. 稳定的子空间是

$$GE_{-1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2, C_3是任意常数.

(7) 特征方程

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+4)(\lambda+1)^2 = 0.$$

得特征根$\lambda_1=-4,\lambda_2=-1$(二重). 下面求特征向量及广义特征向量.

(i) 对$\lambda_1=-4$, 考虑特征方程组$(A-\lambda_1 I)r=0$, 即

$$\begin{cases} 3u_1-u_2=0, \\ 3u_2=0, \\ u_1=0. \end{cases}$$

求得$u_1=u_2=0$, 于是求出特征向量$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 所以，对应于一重特征根$\lambda_1=-4$, 求出了一个解$e^{-4x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 对应的特征子空间是

$$GE_{-4}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\quad \alpha\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

(ii) 对$\lambda_2=-1$(二重), 考虑广义特征方程组$(A-\lambda_2 I)^2r=0$, 即

$$-3u_1+u_2+9u_3=0.$$

求得二个线性无关的广义特征向量

$$r_{10}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\qquad r_{20}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

从而

$$r_{11}=(A-\lambda_2 I)r_{10}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$r_{21}=(A-\lambda_2 I)r_{20}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

于是，对应于二重特征根$\lambda_2=-1$, 可以求出二个线性无关的解

$$(r_{10}+r_{11}x)e^{-x}=e^{-x}\begin{pmatrix}1+3x\\3\\x\end{pmatrix},\quad r_{20}e^{-x}=e^{-x}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

对应的广义特征子空间为

$$GE_{-1}=\left\{\beta\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\quad\beta,\gamma\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

所以，方程的通解为

$$y=C_1e^{-4x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-x}\begin{pmatrix}1+3x\\3\\x\end{pmatrix}+C_3e^{-x}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中C_1,C_2,C_3是任意常数. 稳定子空间是$GE_{-4}\oplus GE_{-1}=\mathbb{R}^3$.

(8) 特征子空间为

$$GE_1=\left\{\alpha\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix};\quad\alpha\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

它是不稳定子空间. 广义特征子空间为

$$GE_{-1}=\left\{\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};\quad\beta,\gamma\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

它是稳定子空间. 通解为

$$y=C_1e^{x}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-x}\begin{pmatrix}1-2x\\4x\\1+2x\end{pmatrix}+C_3e^{-x}\begin{pmatrix}1-x\\-1+2x\\x\end{pmatrix},$$

其中C_1,C_2,C_3是任意常数.

(9) 特征方程

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&1&-1\\-1&2-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3=0.$$

得特征根$\lambda=2$(三重). 因而,广义特征方程组$(A-2I)^3r=0$有三个线性无关的广义特征向量

$$r_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad r_{20}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad r_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因为

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

有

$$r_{11}=(A-2I)r_{10}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$r_{21}=(A-2I)r_{20}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$r_{31}=(A-2I)r_{30}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$r_{12}=(A-2I)^2r_{10}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$r_{22}=(A-2I)^2r_{20}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$r_{32}=(A-2I)^2r_{30}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由此得到三个线性无关的解

$$y_1(x)=e^{2x}(r_{10}+r_{11}x+\frac{r_{12}}{2}x^2)=e^{2x}\begin{pmatrix}1+x-\frac{x^2}{2}\\-x\\x-\frac{x^2}{2}\end{pmatrix},$$

$$y_2(x)=e^{2x}(r_{20}+r_{21}x+\frac{r_{22}}{2}x^2)=e^{2x}\begin{pmatrix}x\\1\\x\end{pmatrix},$$

$$y_3(x)=e^{2x}(r_{30}+r_{31}x+\frac{r_{32}}{2}x^2)=e^{2x}\begin{pmatrix}-x+\frac{x^2}{2}\\ x\\ 1-x+\frac{x^2}{2}\end{pmatrix}.$$

所以,原方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1+x-\frac{x^2}{2}\\ -x\\ x-\frac{x^2}{2}\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}x\\ 1\\ x\end{pmatrix}+C_3e^{2x}\begin{pmatrix}-x+\frac{x^2}{2}\\ x\\ 1-x+\frac{x^2}{2}\end{pmatrix},$$

其中C_1,C_2,C_3是任意常数. 不稳定子空间是$GE_2=\mathbb{R}^3$.

(10) 广义特征子空间是

$$GE_{-1}=\left\{\beta\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix};\quad \beta,\gamma\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

它是稳定子空间. 特征子空间是

$$GE_2=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\quad \alpha\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

它是不稳定子空间. 通解是

$$y=C_1e^{-x}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+C_2e^{-x}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+C_3e^{2x}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

其中C_1,C_2,C_3是任意常数.

习题 3.3.3 *求解常系数齐次线性微分方程组的初值问题:*

(1) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\ 0&-1&-1\\ 0&0&-1\end{pmatrix}y,\quad y(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix};$

(2) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}0&8&0\\ 0&0&-2\\ 2&8&-2\end{pmatrix}y,\quad y(0)=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

解 (1) 写成分量形式

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - y_2, & y_1(0) = 1, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_2 - y_3, & y_2(0) = 0, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_3, & y_3(0) = 1. \end{cases}$$

由第三个方程及初值条件容易求得

$$y_3 = e^{-x}.$$

将y_3的表达式代入第二个方程, 得到

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_2 - e^{-x}, \quad y_2(0) = 0.$$

由此求得

$$y_2 = -xe^{-x}.$$

再将y_2的表达式代入第一个方程, 得到

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_1 + xe^{-x}, \quad y_1(0) = 1$$

由此求得

$$y_1 = e^{-x}\big(1 + \frac{x^2}{2}\big).$$

因而，所求的解是

$$y_1 = e^{-x}\big(1 + \frac{x^2}{2}\big),\ y_2 = -xe^{-x},\ y_3 = e^{-x}.$$

(2) 通解为

$$y = C_1 \begin{pmatrix} -4e^{-2x} \\ e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 4x \\ -\sin 4x \\ 2\cos 4x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin 4x \\ \cos 4x \\ 2\sin 4x \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2, C_3是任意常数. 再由初值条件，所求初值问题的解为

$$y = \begin{pmatrix} -4e^{-2x} - 2\sin 4x \\ e^{-2x} - \cos 4x \\ e^{-2x} - 2\sin 4x \end{pmatrix}.$$

习题 3.3.4 求解常系数非齐次线性微分方程组及初值问题:

(1) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$;

(2) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R}, b > 0$;

(4) $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 2 - x, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2 - y_3 + 1 - x; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - y_3 - 3x - 1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3 - x^2 + 2x - 4, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 + 2y_3 + x^2 - 5x + 3. \end{cases}$

解 (1) 特征方程

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

特征根$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. 下面求特征向量.

(i). $\lambda_1 = 1$时，考虑$(\lambda_1 I - A)r = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 4 & 3 \\ -2 & \lambda_1 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad r = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

故由

$$\begin{cases} -3u_1 + 3u_2 = 0, \\ -2u_1 + 2u_2 = 0, \end{cases} \quad \text{求得特征向量} \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii). $\lambda_2 = 2$时，考虑$(\lambda_2 I - A)r = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 4 & 3 \\ -2 & \lambda_2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad r = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

故由

$$\begin{cases} -2u_1 + 3u_2 = 0, \\ -2u_1 + 3u_2 = 0, \end{cases} \quad \text{求得特征向量} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

于是求得对应齐次线性方程组的基解矩阵

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & 3e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

求得其逆矩阵

$$Y^{-1}(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-x} & 3e^{-x} \\ e^{-2x} & -e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

用常数变易公式，知

$$y = Y(x)\big(C + \int X^{-1}(x)f(x)dx\big).$$

求得所求方程的通解为

$$y = C_1e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{2x} + 3xe^{2x} - \frac{3}{2}e^{3x} \\ -2e^{2x} + 2xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{3x} \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2是任意常数。

(2) 所求的解是

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{2x}(1 + \tfrac{1}{2}x^2 - x), \\ y_2(x) &= e^{2x}(x - 1). \end{aligned}$$

(3) 将方程组进行改写

$$\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = bx + ay, \\ z' = cz + t^2. \end{cases} \tag{1}$$

由(1)的第三式, 可以求得

$$z = \begin{cases} C_3e^{ct} - \frac{1}{c}t^2 - \frac{2}{c^2}t - \frac{2}{c^3}, & \text{如}c \neq 0, \\ \frac{1}{3}t^3 + C_3, & \text{如}c = 0. \end{cases}$$

考虑方程组

$$\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = bx + ay. \end{cases} \tag{2}$$

方程(2)的特征方程是

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 + b^2 = 0.$$

方程(2)的特征根是$\lambda_{1,2} = a \pm ib$.

对$\lambda_1=a+ib$, 考虑特征方程组$(A-\lambda_1 I)r=0$, 即

$$\begin{pmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0.$$

得特征向量$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. 求得一个解$e^{(a+ib)x}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. 由Euler公式, 知

$$e^{(a+ib)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}=e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix}+ie^{at}\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix}.$$

得两个线性无关的解

$$e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix}\qquad e^{at}\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix}$$

所以, 原方程的通解为

$$\begin{cases} x=e^{at}(C_1\cos bt-C_2\sin bt), \\ y=e^{at}(C_1\sin bt+C_2\cos bt), \\ z=\begin{cases} C_3e^{ct}-\frac{1}{c}t^2-\frac{2}{c^2}t-\frac{2}{c^3}, & \text{如}c\neq 0, \\ \frac{1}{3}t^3+C_3, & \text{如}c=0, \end{cases} \end{cases}$$

其中C_1,C_2,C_3是任意常数.

(4) 通解为

$$y=\begin{pmatrix} -e^x & \sin x & -\cos x \\ e^x & \cos x & \sin x \\ 0 & \sin x & -\cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中C_1,C_2,C_3是任意常数.

(5) 特征方程

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2=0.$$

特征根是$\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=1$(二重). 下面求特征向量.

(i) 对$\lambda_1 = 0$, 考虑特征方程组$(A - \lambda_1 I)r = 0$, 即

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 - u_3 = 0, \\ 3u_1 - 2u_2 - 3u_3 = 0, \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 = 0. \end{cases}$$

由此求得$u_2 = 3u_1, u_3 = -u_1$. 于是求得特征向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. 所以求得对应齐次方程组的一个解$\phi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(ii) 对$\lambda_{2,3} = 1$(二重). 容易求得

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

因而广义特征方程组$(A - I)^2 r = 0$可以写成

$$u_1 - u_2 - u_3 = 0.$$

由此求得二个广义特征向量

$$r_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{20} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

容易求得

$$r_{11} = (A - I)r_{10} = 0, \ r_{21} = (A - I)r_{20} = 0.$$

于是,求得对应齐次方程组的另二个线性无关解

$$\phi_2(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \phi_3(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面求方程组的特解. 用常数变易法，考虑

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^x + C_3'(x)e^x &= -3x - 1, \\ 3C_1'(x) + C_2'(x)e^x &= -x^2 + 2x - 4, \\ -C_1'(x) + C_3'(x)e^x &= x^2 - 5x + 3. \end{cases}$$

由此求得

$$C_1'(x)=0, C_2'(x)=e^{-x}(-x^2+2x-4), C_3'(x)=e^{-x}(x^2-5x+3).$$

积分得

$$C_1(x)=0, C_2(x)=-e^{-x}(-x^2-4), C_3(x)=-e^{-x}(x^2-3x).$$

代入$y^*=C_1(x)\phi_1(x)+C_2(x)\phi_2(x)+C_3(x)\phi_3(x)$, 由此求得特解

$$y^*=(x^2+4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-(x^2-3x)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+4\\x^2+4\\-x^2+3x\end{pmatrix}.$$

所以，方程的通解是

$$y=C_1\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+C_2e^x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3e^x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3x+4\\x^2+4\\-x^2+3x\end{pmatrix},$$

其中C_1,C_2,C_3是任意常数.

习题 3.3.5 设

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\2&3&0&0\\4&-2&0&0\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}.$$

找一非零常向量$\eta\in\mathbb{R}^4$使得初值问题

$$\frac{dy}{dt}=Ay,\quad y(0)=\eta$$

的解$y(t)$满足条件$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$.

解 特征方程

$$\det(A-\lambda I)\ =\begin{vmatrix}-\lambda&0&1&0\\0&-\lambda&0&1\\2&3&-\lambda&0\\4&-2&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\3&-\lambda&0\\-2&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}0&-\lambda&1\\2&3&0\\4&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-16=0.$$

特征根是$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_{3,4} = \pm 2i$. 求$\lambda_1 = -2$所对应的特征向量. 由$(A-\lambda_1 I)r = 0$, 得

$$\begin{cases} 2u_1 + u_3 = 0, \\ 2u_2 + u_4 = 0, \\ 2u_1 + 3u_2 + 2u_3 = 0, \\ 4u_1 - 2u_2 + 2u_4 = 0. \end{cases}$$

由此求得

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1, \quad u_3 = -2u_1, \quad u_4 = -\frac{4}{3}u_1.$$

于是求出特征向量$r = (3, 2-6, -4)^T$.

习题 3.3.6 证明: 微分方程组$\frac{dy}{dx} = Ay$有非零解$y = e^{\lambda x}r$, 当且仅当λ是矩阵A的特征根,而r是与λ对应的特征向量.

证明 直接代入易知

$$y = e^{\lambda x}r\text{是方程组的解} \Longleftrightarrow \lambda e^{\lambda x}r = Ae^{\lambda x}r \Longleftrightarrow (A-\lambda I)r = 0.$$

习题 3.3.7 设λ_i是矩阵A的n_i重特征根, 则微分方程组$\frac{dy}{dx} = Ay$有形如

$$y = e^{\lambda_i x}\Big(r_0 + \frac{x}{1!}r_1 + \frac{x^2}{2!}r_2 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\Big) \tag{$*$}$$

的非零解的充要条件是: r_0是齐次线性代数方程组

$$(A-\lambda_i I)^{n_i}r = 0$$

的一个非零解, 且$(*)$式中的$r_1, \cdots, r_{n_i-1}$是由下面的关系式逐次确定的:

$$\begin{cases} r_1 = (A-\lambda I)r_0, \\ r_2 = (A-\lambda I)r_1, \\ \cdots\cdots \\ r_{n_i-1} = (A-\lambda I)r_{n_i-2}. \end{cases}$$

证明 假设方程组有形如$(*)$的非零解, 则把$(*)$代入方程组后得到

$$\begin{aligned} &\lambda_i e^{\lambda_i x}\big(r_0 + \tfrac{x}{1!}r_1 + \tfrac{x^2}{2!}r_2 + \cdots + \tfrac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\big) \\ &+e^{\lambda_i x}\big(r_1 + \tfrac{x}{1!}r_2 + \tfrac{x^2}{2!}r_3 + \cdots + \tfrac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}r_{n_i-1}\big) \\ &= Ae^{\lambda_i x}\big(r_0 + \tfrac{x}{1!}r_1 + \tfrac{x^2}{2!}r_2 + \cdots + \tfrac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\big), \end{aligned}$$

消去$e^{\lambda_i x}$, 即得

$$\begin{aligned}&(A-\lambda_i I)\big(r_0+\tfrac{x}{1!}r_1+\tfrac{x^2}{2!}r_2+\cdots+\tfrac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\big)\\&=r_1+\tfrac{x}{1!}r_2+\tfrac{x^2}{2!}r_3+\cdots+\tfrac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}r_{n_i-1}.\end{aligned}$$

比较x的同次幂的系数可得

$$\begin{cases}(A-\lambda_i I)r_0=r_1,\\(A-\lambda_i I)r_1=r_2,\\\cdots\cdots\\(A-\lambda_i I)r_{n_i-2}=r_{n_i-1},\\(A-\lambda_i I)r_{n_i-1}=0.\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}(A-\lambda_i I)r_0=r_1,\\(A-\lambda_i I)^2r_0=r_2,\\\cdots\cdots\\(A-\lambda_i I)^{n_i-1}r_0=r_{n_i-1},\\(A-\lambda_i I)^{n_i}r_0=0.\end{cases}$$

因此，r_0是齐次线性代数方程组的非零解，而$r_1,\cdots,r_{n_i-1}$满足所说的关系. 注意，在$r_0,r_1,\cdots,r_{n_i-1}$中只有前m个是非零向量，以后的全是零向量，其中m可能是$1,2,$ 等等,但最多是n_i.

以上的推理过程可以全部倒推回去, 证毕.

习题 3.3.8 若$A(t)$是在$0\le t<\infty$上连续的$n\times n$矩阵, 并且$A(t)$与$\int_0^t A(s)ds$可交换; 则方程组

$$x'=A(t)x \tag{$*$}$$

的通解为

$$x=\exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)\cdot C,$$

其中C是任一常数列向量.

证明 由定义知

$$\exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)^k,$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)\Big] &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)^{k-1}A(t) \quad (\text{用交换性})\\ &= \Big[I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)^{k}\Big]A(t)\\ &= A(t)\Big[I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)^{k}\Big] \quad (\text{用交换性})\\ &= A(t)\exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big),\end{aligned}$$

即$X(t)=\exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)$是$(*)$的解矩阵. 又因$X(0)=I$, 知$X(t)$是$(*)$的基本解矩阵. 所以方程$(*)$的通解为

$$x=\exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)\cdot C,$$

其中C是任一常数列向量.

习题 3.3.9 *若A为任意$n\times n$常数矩阵, 而$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征根, 则$e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n}$便是$e^A$的全部特征根.*

证明 因λ_j是特征根, 故存在非零向量v_j, 使得

$$Av_j=\lambda_j v_j.$$

此时

$$e^A v_j=\sum_{k=0}\frac{1}{k!}A^k\cdot v_j=\sum_{k=0}\frac{1}{k!}\lambda_j^k\cdot v_j=e^{\lambda_j}v_j.$$

所以, e^{λ_j}是e^A的特征根.

习题 3.3.10 *试证：变换$t=e^{\tau}$可将方程组*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}(Ax+f(t))$$

化为常系数线性微分方程组(其中A是$n\times n$常数矩阵).

证明 令$t=e^{\tau}$, 则

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=t\frac{dx}{dt}.$$

所以, 原方程变成

$$\frac{dx}{d\tau}=Ax+f(e^{\tau}),$$

它是常系数线性微分方程组.

习题 3.3.11 *11. 求解方程组:*

(1) $\begin{cases} t\frac{dx}{dt} = -2x + 2y + t, \\ t\frac{dy}{dt} = -x - 5y + t^2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} t\frac{dx}{dt} = -x + ty, \\ t^2\frac{dy}{dt} = -2x + ty; \end{cases}$

(3) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

解 (1) 令$t = e^\tau$, 则方程组变成

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -2x + 2y + e^\tau, \\ \frac{dy}{d\tau} = -x - 5y + e^{2\tau}. \end{cases} \qquad (*)$$

特征方程是

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0.$$

特征根是$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3$. 下面求特征向量.

(i) 对$\lambda_1 = -4$, 考虑特征方程$(A - \lambda_1 I)r = 0$, 即

$$u_1 + u_2 = 0.$$

求得特征向量$r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 于是，得到$(*)$所对应的齐次方程的一个解$e^{-4\tau}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) 对$\lambda_2 = -3$, 考虑特征方程$(A - \lambda_2 I)r = 0$, 即

$$u_1 + 2u_2 = 0.$$

求得特征向量$r_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 于是，得到$(*)$所对应的齐次方程的一个解$e^{-3\tau}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

由此求出$(*)$所对应的齐次线性微分方程组的一个基解矩阵

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} -e^{-4\tau} & -2e^{-3\tau} \\ e^{-4\tau} & e^{-3\tau} \end{pmatrix}.$$

容易求得

$$\Phi^{-1}(\tau)=\begin{pmatrix} e^{4\tau} & 2e^{4\tau} \\ -e^{3\tau} & -e^{3\tau} \end{pmatrix},$$

$$\int\begin{pmatrix} e^{4\tau} & 2e^{4\tau} \\ -e^{3\tau} & -e^{3\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\tau} \\ e^{2\tau} \end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{5\tau}+\frac{1}{3}e^{6\tau} \\ -\frac{1}{4}e^{4\tau}-\frac{1}{5}e^{5\tau} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-4\tau} & -2e^{-3\tau} \\ e^{-4\tau} & e^{-3\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{5\tau}+\frac{1}{3}e^{6\tau} \\ -\frac{1}{4}e^{4\tau}-\frac{1}{5}e^{5\tau} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{10}e^{\tau}+\frac{1}{15}e^{2\tau} \\ -\frac{1}{20}e^{\tau}+\frac{2}{15}e^{2\tau} \end{pmatrix}.$$

方程$(*)$的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -e^{-4\tau} & -2e^{-3\tau} \\ e^{-4\tau} & e^{-3\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{10}e^{\tau}+\frac{1}{15}e^{2\tau} \\ -\frac{1}{20}e^{\tau}+\frac{2}{15}e^{2\tau} \end{pmatrix}.$$

于是，原方程组的通解为

$$\begin{aligned} x&=-C_1\tfrac{1}{t^4}-2C_2\tfrac{1}{t^3}+\tfrac{3}{10}t+\tfrac{1}{15}t^2, \\ y&=C_1\tfrac{1}{t^4}+C_2\tfrac{1}{t^3}-\tfrac{1}{20}t+\tfrac{2}{15}t^2, \end{aligned}$$

其中C_1,C_2是任意常数.

(2) 方程的通解

$$x=C_1+C_2t,\qquad y=\frac{1}{t}C_1+2C_2,$$

其中C_1,C_2是任意常数.

(3) 是欧拉型方程组。令$t=e^{\tau}$, 则方程组可变为

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

它的特征方程是

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda+6=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0.$$

特征根为$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=3$. 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是,方程(*)的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2\tau} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3\tau} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以, 原方程的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 t^3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中C_1, C_2, C_3为任意常数.

习题 3.3.12 设$f_1(t)$, $f_2(t)$是以2π为周期的连续函数, 试导出微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = -x + f_2(t) \end{cases}$$

有2π周期解的充要条件.

解 方程组的相应齐次线性微分方程组是

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

易求出它的标准基本解矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

从而，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi(t-s) \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds,$$

其中c_1, c_2为任意常数。通解的前半部是2π周期函数, 因而只须后半部是2π周期函数。所以，它有2π–周期解的充要条件是

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds = 0.$$

习题 3.3.13 证明: 常系数齐次线性微分方程组$\frac{dy}{dx} = Ay$的任何解当$x \to \infty$时都趋于零, 当且仅当它的系数矩阵A的所有特征根都具有负的实部.

证 设A的特征根分别为$\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \alpha_{k+1} \pm i\beta_{k+1}, \cdots, \alpha_s \pm i\beta_s$, 相应重数为$n_1, \cdots, n_k, n_{k+1}, \cdots, n_s$, ($\sum_{j=1}^{k} n_j + 2\sum_{j=k+1}^{s} n_j = n$). 则线性微分方程组的通解由如下形式的向量函数的线性组合所组成:

$$e^{\lambda_j x} P_j(x),\ e^{\alpha_l x} R_l(x) \cos \beta_l x,\ e^{\alpha_l x} Q_l(x) \sin \beta_l x, \tag{$*$}$$

其中$P_j(x)$, $R_l(x), Q_l(x)$是次数分别小于特征根重数的向量多项式。

如果A的特征根都具有负的实部，即

$$\lambda_j < 0\ (j = 1, \cdots, k), \quad \alpha_l < 0\ (l = k+1, \cdots, s),$$

则由罗比塔法则易知：$(*)$中的每一项均趋于零, 从而线性方程组的任何解当$x \to \infty$ 时都趋于零.

假设特征根有一个$\lambda_{j_0} \geq 0$或$\alpha_{l_0} + i\beta_{l_0}$, $\alpha_{l_0} \geq 0$, 设η是其对应的特征向量,则微分方程有解

$$e^{\lambda_{j_0} x}\eta, \quad 或 \quad e^{(\alpha_{l_0} + i\beta_{l_0})x}\eta,$$

将不会趋于零.

第四章　高阶线性微分方程

§4.1　一般理论

习题4.1解答

习题 4.1.1 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题:

(1) $\begin{cases} y''+2y'+7xy=e^{-x}, \\ y(1)=7,\ y'(1)=-2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y^{(4)}+y=xe^{x}, \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=2,\ y'''(0)=0. \end{cases}$

解 (1) 令$y_1=y, y_2=y'$, 则初值问题变成

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-7xy_1-2y_2+e^{-x}, \\ y_1(1)=7, \\ y_2(1)=-2. \end{cases}$$

(2) 令$y_1=y, y_2=y', y_3=y'', y_4=y'''$, 则值问题变成

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=y_3, \\ y_3'=y_4, \\ y_4'=-y_1+xe^{x}, \\ y_1(0)=1, \\ y_2(0)=-1, \\ y_3(0)=2, \\ y_4(0)=0. \end{cases}$$

习题 4.1.2 试讨论下列的函数组在它们的定义区间上是线性相关的，还是线性无关的？

(1) $x,\ \tan x$;

(2) $x^2-x+3,\ 2x^2+x,\ 2x+4$;

(3) $e^t,\ te^t,\ t^2e^t$.

解 (1) 函数组的定义域是$(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$. 在其定义域上考虑

$$k_1x+k_2\tan x=0,$$

其中k_1,k_2是常数. 上式两边对x求一次导数, 得

$$k_1+k_2\frac{1}{\cos^2 x}=0.$$

再对x求一次导数, 得

$$-2k_2\frac{\sin x}{\cos^3 x}=0.$$

由此推出$k_2=0$及$k_1=0$. 所以, 函数组在定义域$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$上线性无关.

(2) 函数组在定义域$(-\infty,+\infty)$上线性无关.

(3) 函数组的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 在其定义域上考虑

$$k_1e^t+k_2te^t+k_3t^2e^t=0.$$

于是

$$k_1+k_2t+k_3t^2=0.$$

由此推出$k_1=k_2=k_3=0$. 所以, 函数组在定义域$(-\infty,+\infty)$上线性无关.

习题 4.1.3 证明函数组

$$\phi_1(x)=\begin{cases}x^3, & x\ge 0\text{时}\\ 0, & x<0\text{时}\end{cases};\qquad \phi_2(x)=\begin{cases}0, & x\ge 0\text{时}\\ x^3, & x<0\text{时}\end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上线性无关，但它们的朗斯基行列式恒为零。

证 由

$$0=k_1\phi_1(x)+k_2\phi_2(x)=\begin{cases}k_1x^3, & \text{当}x\ge 0;\\ k_2x^3, & \text{当}x\le 0;\end{cases}$$

得$k_1=k_2=0$, 所以$\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$线性无关。

但是，

$$W(x)=\begin{vmatrix}x^3 & 0\\ 3x^2 & 0\end{vmatrix}=0\ (x\ge 0),\quad W(x)=\begin{vmatrix}0 & x^3\\ 0 & 3x^2\end{vmatrix}=0\ (x\le 0),$$

即有$W(x)\equiv 0$.

习题 4.1.4 设y_1, y_2是微分方程$xy''+2y'+xe^xy=0$的解且它的*Wronski*行列式$W(x)=W[y_1,y_2](x)$满足$W(1)=2$, 求$W(5)=?$.

解 由Liouville公式知

$$W(x)=Ce^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{C}{x^2}.$$

利用$W(1)=2$得$C=2$. 于是, $W(5)=\frac{2}{25}$.

习题 4.1.5 设$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$的解, 且$y_1(x_0)=y_2(x_0)=0$, $y_1(x)\not\equiv 0$, 其中$a_1(x)$和$a_2(x)$是连续函数, 试证:存在常数C, 使得$y_2(x)=Cy_1(x)$.

解 解的Wronski行列式在x_0处是$W(x_0)=0$. 因而, $y_1(x)$, $y_2(x)$线性相关. 所以存在不全为零的常数C_1, C_2使得$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0$. 由$y_1(x)\not\equiv 0$推出$C_2\neq 0$. 所以, 存在常数C, 使得$y_2(x)=Cy_1(x)$.

习题 4.1.6 考虑微分方程$y''+q(x)y=0$.

(1) 设$y=\phi(x)$与$y=\psi(x)$是它的任意两个解, 证明$\phi(x)$与$\psi(x)$的*Wronski*行列式恒等于一个常数;

(2) 设已知方程有一个特解$y=e^x$, 试求这个方程的通解并确定$q(x)=?$

解 (1) 由Liouville公式, 得$W(x)=W(x_0)=$常数.

(2) 将e^x代入, 得$q(x)=-1$.

习题 4.1.7 试验证$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=0$有基本解组$t, e^t$, 并求方程$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1-t}x=t-1$的通解。

解 易知t, e^t是齐线性方程的解，且Wronski行列式

$$W(t,e^t)(0)=-1.$$

故t, e^t是齐线性方程的基本解组。下面求一特解。利用常数变易法。由

$$\begin{cases} tC_1'(t)+e^tC_2'(t) &=0,\\ C_1'(t)+e^tC_2'(t) &=t-1.\end{cases}$$

解得

$$C_1'(t) = -1, \quad C_2'(t) = te^{-t}.$$

积分得

$$C_1(t) = -t; \quad C_2(t) = -te^{-t} - e^{-t}.$$

所以，原方程的通解为

$$x = C_1 t + C_2 e^t - t^2 - t - 1.$$

习题 4.1.8 先用观察法看出方程

$$(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$$

的两个特解，然后再求它的通解.

解 能看出两个特解$\phi_1^*(x) = 1$和$\phi_2^*(x) = x$. 因而对应齐次方程

$$(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$$

有解$\phi_1(x) = x - 1$. 所以, 原方程的通解为

$$y = C_1(x-1) + C_2 x^2 + 1,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

习题 4.1.9 是否存在$(-a, a)$, $a > 0$上的连续函数p, q, 使得函数

(1) $y_1(x) = x^2 \sin x$,

(2) $y_2(x) = 1 - \cos x$

在这区间上满足方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. 说明理由。

解 先计算$y_1(x), y_2(x)$的Wronski行列式如下

$$\begin{aligned} W(x) = & \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 \sin x & 1 - \cos x \\ 2x \sin x + x^2 \cos x & \sin x \end{vmatrix} \\ = & (x^2 - 2x \sin x)(1 - \cos x). \end{aligned}$$

则在区间$(-a, a)$上, $W(0) = 0$, 但$W(x) \not\equiv 0$. 我们说不会存在连续函数p, q满足题目的要求. 原因如下: 若不然, 则$W(x)$是二阶线性方程的Wronski行列式, 它必满足二种情形: 或$W(x) \equiv 0$, 或$W(x) \neq 0$. 这与计算结果相矛盾.

习题 4.1.10 考虑微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

其中$p(x)$和$q(x)$是区间I： $a < x < b$上的连续函数.

(1) 设$y = \phi(x)$是方程*(1)*在区间I上的一个非零解*(*即$\phi(x)$在区间I上不恒等于零*)*, 试证$\phi(x)$在区间I上只有简单零点*(*即, 如果存在$x_0 \in I$, 使得$\phi(x_0) = 0$, 那么必有$\phi'(x_0) \neq 0$*)*. 并由此进一步证明, $\phi(x)$在任意有限闭区间上至多有有限个零点, 从而每一个零点都是孤立的.

(2) 证明方程*(1)*的通解可写为

$$y = \phi(x)\Big[C_1 + C_2\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi^2(s)}e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds\Big], \tag{2}$$

其中C_1和C_2为任意常数。

证明 (1) 由存在唯一性定理知，方程(1)满足初值条件

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

的解只是零解$y(x) \equiv 0$, 其中$x_0 \in I$. 由此可知$\phi(x)$在区间I上只有简单零点。

若J是I的一有限闭区间，且$\phi(x)$在J上有无穷多个零点，记为$x_k \in J,\ k = 1, 2, \cdots$, 则$\{x_k\}$有收敛子列，不妨仍记为$\{x_k\}$，即可设

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in J.$$

由$\phi(x_k) = 0,\ \forall k$及连续性知，$\phi(x_0) = 0$. 又可知

$$\phi'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x_k\to x_0}\frac{\phi(x_k) - \phi(x_0)}{x_k - x_0} = 0.$$

由存在唯一性定理知，$\phi(x) \equiv 0$. 矛盾。所以，$\phi(x)$在任意有限闭区间上至多有有限个零点, 从而每一个零点都是孤立的。

(2) 情形1. 先设$y = \phi(x)$在区间$a < x < b$上恒不为零。设$y = y(x)$是方程(1)的任一解，则由刘维尔公式得出

$$\begin{vmatrix} \phi & y \\ \phi' & y' \end{vmatrix} = C_2 e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

(其中常数$C_2 \neq 0$), 亦即

$$\phi y' - \phi' y = C_2 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

以$\frac{1}{\phi^2}$乘上式两端,就可推出

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y}{\phi}\Big) = \frac{C_2}{\phi^2} e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

积分上式,就可得

$$y = \phi(x)\Big[C_1 + C_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds\Big].$$

情形2. 一般情形, 设$\phi(x)$是一个非零解. 由(1)知, $\phi(x)$的每一个零点都是孤立的. 利用$\phi(x)$的零点把区间(a, b)分割成开区间之并. 在每一个开区间内可应用情形1的结论.

我们先设$\phi(x)$只有一个零点$\xi \in (a, b)$, 则有$\phi(\xi) = 0$, $\phi'(\xi) \neq 0$. 在区间(a, ξ)和(ξ, b)上分别利用情形1的结论, 方程(1)在区间(a, ξ)上的通解可表为

$$y = C_1\phi(x) + C_2\phi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds, \quad a < x,\ x_0 < \xi,$$

其中C_1, C_2为任意常数; 方程(1)在区间(ξ, b)上的通解可表为

$$y = \tilde{C}_1\phi(x) + \tilde{C}_2\phi(x) \int_{\tilde{x}_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{\tilde{x}_0}^{s} p(t)dt} ds, \quad \xi < x,\ \tilde{x}_0 < b,$$

其中$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$为任意常数.

利用洛必塔法则, 可知

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\xi} \phi(x) \int_{x_0}^{x} \tfrac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds = & \lim_{x\to\xi} \Big[\tfrac{1}{\phi^2(x)} e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \Big/ \Big(\tfrac{-\phi'(x)}{\phi^2(x)}\Big)\Big] \\ = & \tfrac{e^{-\int_{x_0}^{\xi} p(t)dt}}{-\phi'(\xi)}. \end{aligned}$$

所以，

$$\lim_{x\to\xi} \phi(x) \int_{\tilde{x}_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{\tilde{x}_0}^{s} p(t)dt} ds = \frac{e^{-\int_{\tilde{x}_0}^{\xi} p(t)dt}}{-\phi'(\xi)}.$$

如取

$$\tilde{C}_2 = C_2 e^{\int_{\tilde{x}_0}^{x_0} p(t)dt},$$

则方程(1)的在区间(ξ, b)上的通解可表为

$$y = \tilde{C}_1\phi(x) + C_2\phi(x) \int_{\tilde{x}_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds,$$

它形式上可写成

$$y = C_1\phi(x) + C_2\phi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds, \quad \xi < x < b,$$

其中$a < x_0 < \xi$, 而

$$C_1 = \tilde{C}_1 + C_2\int_{\tilde{x}_0}^{x_0} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds.$$

所以，方程(1)的通解可写成形式(2)的表达式。

对一般情形，由上面的推导仍将可知，方程(1)的通解可写成形式(2)的表达式。

习题 4.1.11 设$x_1(t), x_2(t)$是方程$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$之满足初始条件

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, & x_1'(0) &= 1, \\ x_2(0) &= 1, & x_2'(0) &= 0 \end{aligned}$$

的两个解, 试不具体求出$x_1(t), x_2(t)$而直接证明

(1) $x_1'(t) = x_2(t)$, $x_2'(t) = -x_1(t)$;

(2) $x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1$;

(3) $x_2(t)$有零点;

(4) 若以a表示$x_2(t)$在正半轴第一个零点, 则$x_1(t), x_2(t)$都以$4a$为周期.

证明 (1) 因$x_1''(t) + x_1(t) = 0$, 从而

$$(x_1'(t))'' + (x_1'(t)) = 0.$$

因此, $x = x_1'(t)$是方程$x'' + x = 0$的解, 它满足初值条件:

$$x(0) = x_1'(0) = 1, \quad x'(0) = x_1''(0) = -x_1(0) = 0.$$

由解的唯一性,有$x(t) \equiv x_2(t)$, 即$x_1'(t) = x_2(t)$.

同理可证: $x_2'(t) = -x_1(t)$.

(2) 因为

$$\begin{aligned} (x_1^2(t) + x_2^2(t))' = &\ 2x_1(t)x_1'(t) + 2x_2(t)x_2'(t) \\ = &\ 2x_1(t)x_2(t) + (-2x_1(t)x_2(t)) = 0, \end{aligned}$$

所以$x_1^2(t)+x_2^2(t)\equiv C$($C$为某一常数). 但已知$x_1^2(0)+x_2^2(0)=1$, 于是$x_1^2(t)+x_2^2(t)\equiv 1$.

(3) 用反证法. 假设$x_2(t)\neq 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 因$x_2(0)=1$, 知$x_2(t)>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 于是, $x_1'(t)=x_2(t)>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. 所以, $x_1(t)$在$\mathbb{R}$上严格增大. 又$x_1(0)=0$, 推得$x_1(t)>0$, $\forall t>0$. 从而可设$x_2'(t)=-x_1(t)<-\delta$, 当t充分大时, 其中$\delta>0$是某一正数. 由此推出, $x_2(t)$在$(0,\infty)$上不可能永远大于零. 矛盾.

(4) 设a为$x_2(t)$在正半轴的第一个零点. 令

$$y_1(t)=-x_2(a+t),\quad y_2(t)=x_1(a+t),$$

显然, $y_1(t),y_2(t)$均为原方程的解, 且

$$y_1'(t)=-x_2'(a+t)=-(-x_1(a+t))=x_1(a+t),\quad y_2'(t)=x_1'(a+t)=x_2(a+t).$$

从而满足初值条件

$$\begin{aligned}&y_1(0)=-x_2(a)=0, &&y_1'(0)=x_1(a)=1,\\ &y_2(0)=x_1(a)=1, &&y_2'(0)=x_2(a)=0,\end{aligned}$$

这是因为$x_1^2(t)+x_2^2(t)=1$且$x_2(t)$在$(0,a)$上递减, 而$x_1(t)$递增. 由解的唯一性，有

$$y_1(t)=x_1(t),\quad y_2(t)=x_2(t),$$

即

$$x_1(t)=-x_2(a+t),\quad x_2(t)=x_1(a+t).$$

于是，

$$x_2(t)=x_1(a+t)=-x_2(2a+t)=-x_1(3a+t)=x_2(4a+t),$$

$$x_1(t)=-x_2(a+t)=-x_1(2a+t)=x_2(3a+t)=x_1(4a+t),$$

即，$x_1(t),x_2(t)$均以$4a$为周期。

§4.2 常系数高阶线性微分方程式

习题4.2解答

习题 4.2.1 *求解下列微分方程:*

(1) $y'' - 3y' - 4y = 0$;

(2) $4y'' + y' + y = 0$;

(3) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

(4) $y'' + \alpha y' + y = 0$, (α为实数);

(5) $y'' + \alpha y = 0$ (α为实数);

(6) $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$;

(7) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 3y = 0$;

(8) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$.

解 (1) 特征方程

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

特征根$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$. 故通解为

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(2) 通解为

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{8}x} \cos \frac{\sqrt{15}}{8}x + C_2 e^{-\frac{1}{8}x} \sin \frac{\sqrt{15}}{8}x,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(3) 特征方程

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

特征根$\lambda_{1,2} = 3$. 故通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(4) 特征方程

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0.$$

特征根$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$.

$\alpha = 2$时, 有重特征根-1. 故通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

$\alpha = -2$时, 有重特征根1. 故通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

$|\alpha| > 2$时, 特征根是实根. 故通解为

$$y = C_1 e^{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

$|\alpha| < 2$时, 特征根是复根. 故通解

$$y = C_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \cos \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} x + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \sin \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} x,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(5) 特征方程

$$\lambda^2 + \alpha = 0.$$

$\alpha = 0$时, 特征根是重根$\lambda = 0$, 故通解为

$$y = C_1 + C_2 x,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

$\alpha < 0$时, 特征根是实根$\pm\sqrt{-\alpha}$, 故通解为

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

$\alpha > 0$时, 特征根是复根$\pm i\sqrt{\alpha}$, 故通解为

$$y = C_1 \cos \sqrt{\alpha}\, x + C_2 \sin \sqrt{\alpha}\, x,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(6) 通解是

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} \cos x + C_3 e^{2x} \sin x,$$

其中C_1, C_2, C_3是任意常数。

(7) 特征方程

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0,$$

即

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

特征根是$\lambda_{1,2} = 1$(二重), $\lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}\, i$. 所以，通解是

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 \cos \sqrt{2}\, x + C_4 \sin \sqrt{2}\, x)e^x,$$

其中C_1, C_2, C_3, C_4为任意常数.

(8) 通解为

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 x \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \sin x,$$

其中$C_1, \cdots, C_5$是任意常数.

习题 4.2.2 *求解初值问题*$4y'' - y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = \beta$，*并求出*$\beta$，*使得当*$x \to +\infty$*时解趋于零。*

解 通解是

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}.$$

利用初始条件得初值问题的解是

$$y(x) = (\beta + 1)e^{\frac{1}{2}x} + (1 - \beta)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

再利用当$x \to +\infty$时$y(x) \to 0$, 我们得$\beta = -1$.

习题 4.2.3 *求解下列微分方程:*

(1) $y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = e^x$ (α*为实数*);

(2) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;

(3) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$;

(4) $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$;

(5) $2y'' + 3y' + y = 4 - e^x$;

(6) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$;

(7) $y'' + y = \sin 3x - \cos 2x$;

(8) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$;

(9) $y'' + y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

(10) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

解 (1) 特征方程

$$\lambda^2+2\alpha\lambda+\alpha^2=0.$$

特征根$\lambda_{1,2}=-\alpha$. 对应齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-\alpha x}+C_2xe^{-\alpha x}.$$

$\alpha\neq-1$时, 原方程有形如

$$y=Ae^x$$

的特解. 代入, 得

$$A=\frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

于是，原方程的通解为

$$y=C_1e^{-\alpha x}+C_2xe^{-\alpha x}+\frac{1}{(\alpha+1)^2}e^x,$$

其中C_1,C_2为任意常数.

$\alpha=-1$时, 1是二重特征根, 方程有形如

$$y=Ax^2e^x$$

的特解. 代入，得$A=\frac{1}{2}$. 于是，原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x,$$

其中C_1,C_2为任意常数.

(2) 通解为

$$y=C_1e^{2x}\cos 2x+C_2e^{2x}\sin 2x+\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{20}\sin 2x,$$

其中C_1,C_2是任意常数.

(3) 特征方程

$$\lambda^2+4=0.$$

特征根是$\lambda_{1,2}=\pm 2i$. 原方程有如下形式的特解

$$y=a+bx+cx^2+de^x.$$

代入，得

$$a=-\frac{1}{8},\quad b=0,\quad c=\frac{1}{4},\quad d=\frac{3}{5}.$$

于是，原方程的通解为

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{5}e^x,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(4) 通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}\cos 2x - \frac{6}{5}\sin 2x,$$

其中C_1，C_2是任意常数。

(5) 特征方程为

$$2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

得特征根$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$。于是齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}.$$

由于0, 1都不是特征根，故原方程有如下形式的特解

$$y = A + Be^x.$$

代入，得$A = 4, \quad B = -\frac{1}{6}$. 因而，所求方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + 4 - \frac{1}{6}e^x,$$

其中C_1，C_2是任意常数。

(6) 通解为

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + \frac{1}{4}xe^x \cos x + \frac{1}{4}x^2 e^x \sin x,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(7) 特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

特征根$\lambda_{1,2} = \pm i$. 于是对应齐次线性方程有基本解组

$$\cos x, \quad \sin x.$$

下面求原方程的一个特解，为此考虑如下两个方程

$$y'' + y = \sin 3x, \tag{1}$$

$$y'' + y = -\cos 2x. \tag{2}$$

(i). 对方程(1), 因$3i$不是特征根，它有如下形式的解

$$y = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

代入(1), 得$A = 0$, $B = -\frac{1}{8}$. 因而，方程(1)有特解

$$y = -\frac{1}{8}\sin 3x.$$

(ii). 对方程(2), 因$2i$不是特征根，它有如下形式的解

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

代入(2)，得$A = \frac{1}{3}$, $B = 0$. 因而，方程(2)有特解

$$y = \frac{1}{3}\cos 2x.$$

从而，知原方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{8}\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 2x,$$

其中C_1, C_2为任意常数.

(8) 通解为

$$y = C_1\cos x + c_2\sin x + \cot x\cos x - \frac{1}{2\sin x},$$

其中C_1, C_2为任意常数.

(9) 特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

特征根为$\lambda_{1,2} = \pm i$. 于是，对应齐次方程

$$y'' + y = 0$$

有通解

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

下面用常数变易法求解。由

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = & 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = & \tan x, \end{cases}$$

可解得

$$C_1'(x) = -\tan x \cdot \sin x, \quad C_2'(x) = \tan x \cdot \cos x.$$

所以，

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \tan x \cdot \sin x \, dx = \sin x - \ln(\sec x + \tan x), \\ C_2(x) &= \int \tan x \cdot \cos x \, dx = -\cos x. \end{aligned}$$

从而，原方程的通解为

$$\begin{aligned} y = & \; C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x[\sin x - \ln(\sec x + \tan x)] + \sin x[-\cos x] \\ = & \; C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln(\sec x + \tan x), \end{aligned}$$

其中C_1, C_2为任意常数。

(10) 通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1),$$

其中C_1, C_2为任意常数。

习题 4.2.4 对常系数二阶齐线性方程$y'' + ay' + by = 0$, 问:

(1) 对于怎样的a和b, 方程的所有的解当$x \to +\infty$时都趋于零?

(2) 对于怎样的a和b, 方程至少有一个解$y(x) \neq 0$当$x \to +\infty$时趋于零?

(3) 对于怎样的a和b, 方程的一切解都是x的周期函数?

解 特征方程为

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

特征根是$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. 因而，知

(1). 如$a > 0$, $b > 0$时，方程的所有的解当$x \to +\infty$时都趋于零。

(2). 如$b < 0$或$b \geq 0$, $a > 0$时，方程至少有一个解$y(x) \neq 0$当$x \to +\infty$时趋于零。

(3). 如$a = 0$, $b > 0$时，方程的一切解都是x的周期函数。

习题 4.2.5 给定方程

$$y'' + 8y' + 7y = f(x),$$

其中$f(x)$在$0 \le x < +\infty$上连续，试用常数变易公式，证明:

a). 如果$f(x)$在$0 \le x < \infty$上有界，则上面方程的每一个解在$0 \le x < \infty$上有界;

b). 如果当$x \to \infty$时，$f(x) \to 0$，则上面方程的每一个解$\phi(x)$, 满足$\phi(x) \to 0$ (当$x \to \infty$时).

解 特征方程为

$$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0,$$

有特征根$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -7$. 对应齐次方程有通解

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-7x},$$

其中C_1, C_2是任意常数。利用常数变易法，由

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-7x} & = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} - 7C_2'(x)e^{-7x} & = f(x), \end{cases}$$

求得

$$C_1(x) = \frac{1}{6}\int_0^x e^s f(s), \quad C_2(x) = -\frac{1}{6}\int_0^x e^{7s} f(s) ds.$$

于是知原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-7x} + \frac{1}{6}e^{-x}\int_0^x e^s f(s) ds - \frac{1}{6}e^{-7x}\int_0^x e^{7s} f(s) ds,$$

其中C_1, C_2为任意常数。

(1). 若$f(x)$在$[0, \infty)$有界，设$|f(x)| \le M$, 则显然

$$\left|e^{-x}\int_0^x e^s f(s) ds\right| \le Me^{-x}\int_0^x e^s ds \le M.$$

对其它项类似，所以每一解有界。

(2). 若$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \textstyle\int_0^x e^s f(s) ds = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^s f(s) ds}{e^x} \\ &\begin{cases} = 0, & \text{若}\int_0^\infty e^s f(s) ds\text{收敛}; \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = 0, & \text{若}\int_0^\infty e^s f(s) ds\text{发散}. \end{cases} \end{aligned}$$

同理，$\lim_{x\to+\infty} e^{-7x}\int_0^x e^{7s}f(s)ds=0$. 所以，每一个解当$x\to+\infty$时都趋于零。

习题 4.2.6 试证方程$x''+\omega^2x=\cos\omega t$没有周期解.

解 特征方程
$$\lambda^2+\omega^2=0.$$
特征根$\lambda_{1,2}=\pm\omega i$. 设方程有特解
$$x=at\cos\omega t+bt\sin\omega t.$$
代入,得
$$a=0,\quad b=\frac{1}{2\omega}.$$
于是,原方程的通解是
$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{t}{2\omega}\sin\omega t,$$
其中C_1,C_2是任意常数. 由通解的形式可见, 方程没有周期解.

习题 4.2.7 求解下列微分方程:

(1) $x^2y''+xy'-y=0$;

(2) $x^2y''+5xy'+13y=0$;

(3) $x^2y''-2xy'+2y=0$;

(4) $x^2y''-4xy'+6y=x$;

(5) $y''+\frac{1}{4x^2}y=f\cos x,\quad x>0$;

(6) $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$;

(7) $(2x+1)^2y''-4(2x+1)y'+8y=0$;

(8) $(x+1)^3y''+3(x+1)^2y'+(x+1)y=6\ln(1+x)$.

解 (1) 令$x=e^t$, 则
$$y'=e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad y''=e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\Big).$$
于是, 方程变成
$$\frac{d^2y}{dt^2}-y=0.$$

得到

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

所以,原方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(2) 通解为

$$y = C_1 x^{-2} \cos(3\ln|x|) + C_2 x^{-2} \sin(3\ln|x|),$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(3) 令$x = e^t$, 则

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big).$$

于是, 方程变成

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

特征方程

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

特征根$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. 于是,

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

所以,原方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2,$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(4) 通解为

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x}{2},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(5) 对应齐次方程为

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0,$$

它是Euler方程. 设有特解$y = x^\kappa$, 得特征方程$\kappa(\kappa - 1) + \frac{1}{4} = 0$. 它有特征根$\kappa = \frac{1}{2}$(二重). 于是可求对应齐次方程的基本解组

$$y_1(x) = \sqrt{x}, \quad y_2(x) = \sqrt{x}\ln x.$$

下用常数变易法求原方程的一特解. 由

$$\begin{cases} C_1'(x)\sqrt{x}+C_2'(x)\sqrt{x}\ln x=0, \\ C_1'(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}+C_2'(x)(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x})=f\cos x. \end{cases}$$

解得

$$C_1'(x)=-f\cos x\cdot\sqrt{x}\ln x,\quad C_2'(x)=f\sqrt{x}\cos x.$$

于是求得原方程的通解

$$y=\sqrt{x}[C_1+C_2\ln x+\int_0^x f\sqrt{s}\cos s\cdot(\ln t-\ln s)ds],$$

其中C_1,C_2为任意常数.

(6) 通解为

$$y=C_1x\cos(\ln|x|)+C_2x\sin(\ln|x|)+x\ln|x|,$$

其中C_1,C_2是任意常数.

(7) 令$2x+1=e^t$, 则

$$y'=2e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad y''=4e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\Big).$$

代入,得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=0.$$

特征方程

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

特征根$\lambda_1=1,\lambda_2=2$. 于是,

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}.$$

所以,原方程的通解为

$$y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)^2,$$

其中C_1,C_2是任意常数.

(8) 通解为

$$y(x)=\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x+1}\ln|x+1|+\frac{\ln^3|x+1|}{x+1},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

习题 4.2.8 求解$y''+y=3|\sin 2x|$, $y(\frac{\pi}{4})=0$, $y'(\frac{\pi}{4})=1$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}$.

解 对应齐次方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

当$0\le x\le \frac{\pi}{2}$时, 方程为$y''+y=3\sin 2x$, 可求其特解$y_1(x)=-\sin 2x$, 从而它的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sin 2x$. 由$y(\frac{\pi}{4})=0$, $y'(\frac{\pi}{4})=1$, 得$C_1=0$, $C_2=\sqrt{2}$. 于是当$0\le x\le\frac{\pi}{2}$时, 所求的解为$y=\sqrt{2}\sin x-\sin 2x$.

由该特解可得$y(0)=0$, $y'(0)=\sqrt{2}-2$, 可将它们作为$-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$时$y''+y=-3\sin 2x$的初始条件. 该方程的通解可求出是$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin 2x$. 由$y(0)=0$, $y'(0)=\sqrt{2}-2$, 得$C_1=0$, $C_2=\sqrt{2}-4$. 从而, 当$-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$时, 所求特解为$y=(\sqrt{2}-4)\sin x+\sin 2x$.

习题 4.2.9 求解有阻尼的弹簧振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

其中m,r和k都是正的常数.并就$\Delta=r^2-4mk$大于,等于和小于零的不同情况,说明相应解的物理意义.

解 特征方程

$$m\lambda^2+r\lambda+k=0.$$

特征根为

$$\lambda_1=\frac{-r+\sqrt{r^2-4mk}}{2m},\quad \lambda_2=\frac{-r-\sqrt{r^2-4mk}}{2m}$$

(i) 如$\Delta>0$, 即大阻尼情形, 则λ_1,λ_2是两个不等的负根. 因此, 弹簧振动方程的通解为

$$x=x(t):=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t},$$

其中C_1,C_2为任意常数. 此时有$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$, 而且有

(a) 当常数C_1和C_2全等于零时, 则$x(t)\equiv 0$(弹簧是静止的);

(b) 当常数C_1和C_2中有且只有一个等于零时, 则$x(t)$定号. 因此, 弹簧不能振动;

(c) 当常数C_1和C_2都不等于零时, 此时弹簧最多只能经过一次静止点, 亦即

$$x(t_1)=C_1e^{\lambda_1 t_1}+C_2e^{\lambda_2 t_1}=0$$

当且仅当C_1和C_2是异号的, 而且

$$t_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln\big(-\frac{C_1}{C_2}\big)$$

是唯一确定的. 所以弹簧也不能振动.

(ii) 如$\Delta < 0$, 即小阻尼情形, 则特征根是复根

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

其中

$$\alpha = -\frac{r}{2m} < 0, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2m} > 0.$$

此时, 弹簧振动方程的通解为

$$x = x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t - \theta_0),$$

其中

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \theta_0 = \arctan\frac{C_1}{C_2}.$$

由此可见, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, 且

(a) 当$A = 0$时, 弹簧是静止的;

(b) 当$A \neq 0$时, 弹簧是振动的.

(iii) 如$\Delta = 0$, 即临界阻尼情形, 则有两相等的特征根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{r}{2m} < 0.$$

弹簧振动方程的通解为

$$x = x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t}(C_1 + C_2 t).$$

此时$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$且$x(t)$最多只有一个零点. 因此, 弹簧不振动.

习题 4.2.10 求解弹簧振子在无阻尼下的强迫振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = p\cos\omega t,$$

其中m, k, p和ω都是正的常数.并对外加频率$\omega \neq \omega_0$和$\omega = \omega_0$两种不同的情况, 说明解的物理意义,这里$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$是弹簧振子的固有频率.

解 将方程写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\frac{p}{m}\cos\omega t.$$

特征方程的特征根是复根$\pm i\omega_0$.

(i) 如$\omega\neq\omega_0$, 则非齐次线性微分方程有下面形式的特解

$$x=E\cos\omega t+F\sin\omega t.$$

代入得

$$E=\frac{p}{m(\omega_0^2-\omega^2)},\quad F=0.$$

方程的通解为

$$x=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t+\frac{p}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t.$$

此时通解是有界的. 当$C_1=C_2=0$时, 相应的特解是周期的, 它的振动频率与强迫频率ω是一致的. 此时称是非共振的. 然而, 当两个频率非常接近时, 即$\omega\approx\omega_0$时, 一种被称为拍振的现象则凸显出来. 这时的频率可看作固定而振幅时大时小.

(ii) 当$\omega=\omega_0$时, 可以求出一个特解

$$x=\frac{p}{2m\omega_0}t\sin\omega_0t.$$

方程的通解为

$$x=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t+\frac{p}{2m\omega_0}t\sin\omega_0t.$$

此时通解是无界的, 称发生了共振.

习题 4.2.11 求解方程

$$\begin{cases}y_1''-y_2=x,\\ y_2''+16y_1=x^2,\ 0<x<+\infty,\\ \lim_{x\to+\infty}(y_{1,2}(x)e^{-\frac{x}{2}})=0, y_1(0)=1,\ y_2(0)=0.\end{cases}$$

解 由第一方程有

$$y_2=y_1''-x.$$

再代入第二方程得

$$(y_1''-x)''+16y_1=x^2,\quad \text{即}\quad y_1^{(4)}+16y_1=x^2. \tag{1}$$

方程(1)的特征方程是

$$\lambda^4 + 16 = 0.$$

其特征根是

$$\lambda_k = (-16)^{\frac{1}{4}} = 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

即

$$\lambda_1 = \sqrt{2}(1+i), \lambda_2 = \sqrt{2}(-1+i), \lambda_3 = \sqrt{2}(-1-i), \lambda_4 = \sqrt{2}(1-i).$$

易见,方程(1)有一特解

$$\phi_1(x) = \frac{x^2}{16}.$$

于是，方程(1)的通解为

$$\begin{aligned} y_1 = & \ C_1 e^{\sqrt{2}\,x} \cos\sqrt{2}\,x + C_2 e^{\sqrt{2}\,x} \sin\sqrt{2}\,x \\ + & \ C_3 e^{-\sqrt{2}\,x} \cos\sqrt{2}\,x + C_4 e^{-\sqrt{2}\,x} \sin\sqrt{2}\,x + \tfrac{1}{16}x^2. \end{aligned}$$

由条件$\lim_{x\to+\infty}(y_1(x)e^{-\frac{x}{2}}) = 0$, 可知$C_1 = C_2 = 0$. 再由$y_1(0) = 1$，知$C_3 = 1$. 从而，

$$y_1(x) = e^{-\sqrt{2}\,x} \cos\sqrt{2}\,x + C_4 e^{-\sqrt{2}\,x} \sin\sqrt{2}\,x + \frac{1}{16}x^2.$$

于是，

$$y_2(x) = y_1''(x) - x = -4C_4 e^{-\sqrt{2}\,x} \cos\sqrt{2}\,x + 4e^{-\sqrt{2}\,x} \sin\sqrt{2}\,x + \frac{1}{8} - x.$$

它满足$\lim_{x\to+\infty}(y_2(x)e^{-\frac{x}{2}}) = 0$. 再由条件$y_2(0) = 0$, 得$C_4 = \frac{1}{32}$. 合知，所求的解为

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{-\sqrt{2}\,x} \cos\sqrt{2}\,x + \frac{1}{32} e^{-\sqrt{2}\,x} \sin\sqrt{2}\,x + \frac{1}{16}x^2, \\ y_2(x) = -\frac{1}{8} e^{-\sqrt{2}\,x} \cos\sqrt{2}\,x + 4e^{-\sqrt{2}\,x} \sin\sqrt{2}\,x + \frac{1}{8} - x. \end{cases}$$

习题 4.2.12 用拉氏变换法求解下列初值问题*:*

(1) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1;$

(2) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1;$

(3) $y'' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

解 (1) 在方程两侧取拉氏变换，令$Y(s)=\mathcal{L}\{y\}$, 得

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-[sY(s)-y(0)]-6Y(s)=0.$$

利用初值条件，得

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2-s-6}=\frac{\frac{1}{5}}{s-3}+\frac{\frac{4}{5}}{s+2}.$$

再反查拉氏变换表，得所求初值问题的解为

$$y=\frac{1}{5}e^{3x}+\frac{4}{5}e^{-2x}.$$

(2) 所求初值问题的解为

$$y=e^x(-\frac{1}{5}\cos x+\frac{7}{5}\sin x)+\frac{1}{5}e^{-x}.$$

(3) 在方程两侧取拉氏变换，令$Y(s)=\mathcal{L}\{y\}$, 而对右侧查表，得

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+Y(s)=\frac{2}{s^2+4}.$$

利用初值条件，得

$$Y(s)=\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{5}{3(s^2+1)}-\frac{2}{3(s^2+4)}.$$

再反查拉氏变换表，得所求初值问题的解为

$$y(t)=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t.$$

§4.3 幂级数解法

习题4.3解答

习题 4.3.1 *用幂级数解法求解微分方程*

(1) $y''=xy$ *(Airy方程);*

(2) $y''-2xy'+\lambda y=0$ *(λ为常数, Hermite方程);*

(3) $y''-xy'-y=0;$

(4) $(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2y=0$ *(α为常数).*

解 (1) 设微分方程有幂级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k.$$

代入方程，得

$$\sum_{k=2}^{\infty}c_kk(k-1)x^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}.$$

比较同次幂的系数，得

$$c_2=0,\ 3\cdot 2c_3=c_0,\ 4\cdot 3c_4=c_1,\cdots,(k+3)(k+2)c_{k+3}=c_k.$$

于是，有

$$\begin{aligned}&c_{3k}=\tfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3k-1)3k},\\&c_{3k+1}=\tfrac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3k(3k+1)},\\&c_{3k-1}=0,\quad(k\geq 1).\end{aligned}$$

所以，通解为

$$\begin{aligned}y(x)=&\quad c_0[1+\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3k-1)3k}x^{3k}]\\+&\quad c_1[x+\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3k(3k+1)}x^{3k+1}],\end{aligned}$$

其中c_0,c_1为任意常数。

(2) 通解为

$$\begin{aligned}y=&\quad a_0[1-\tfrac{\lambda}{2!}x^2-\tfrac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4-\tfrac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6-\cdots]\\+&\quad a_1[x+\tfrac{2-\lambda}{3!}x^3+\tfrac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5+\tfrac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7+\cdots],\end{aligned}$$

其中a_0,a_1是任意常数。

(3) 设微分方程有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

代入方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

即

$$(2a_2-a_0)+\sum_{n=3}^{\infty}[(n-1)na_n-(n-1)a_{n-2}]x^{n-2}=0.$$

比较同次幂的系数，得

$$2a_2 - a_0 = 0,\ 3\cdot 2a_3 - 2a_1 = 0, \cdots, (n-1)na_n - (n-1)a_{n-2} = 0.$$

于是，

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \tfrac{1}{2\cdot 4\cdots 2n}a_0, \\ a_{2n+1} &= \tfrac{1}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}a_1, \quad (n\ge 1). \end{aligned}$$

所以，通解为

$$y = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1},$$

其中a_0, a_1为任意常数.

(4) 通解为

$$\begin{aligned} y = &\quad a_0[1 - \alpha^2\tfrac{x^2}{2!} - \alpha^2(2^2-\alpha^2)\tfrac{x^4}{4!} - \cdots] \\ + &\quad a_1[x + (1-\alpha^2)\tfrac{x^3}{3!} + (1-\alpha^2)(3^2-\alpha^2)\tfrac{x^5}{5!} + \cdots], \end{aligned}$$

其中a_0, a_1为任意常数。

习题 4.3.2 *用广义幂级数法求解下列微分方程:*

(1) $2xy'' + y' + xy = 0$*;*

(2) $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$*;*

(3) $2xy'' + (1-2x)y' - y = 0$*;*

(4) $xy'' + y = 0$*.*

解 (1) 设广义幂级数解

$$y = x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

代入方程，得

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1} + x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho} = 0.$$

由$x^{\rho-1}$的系数，得指标方程

$$2\rho(\rho-1) + \rho = 0.$$

由此得两个指标根$\rho_1 = 0,\ \rho_2 = \frac{1}{2}$.

(a) 对应于$\rho=\rho_1=0$, 由同次幂的系数相等，得

$$a_1=0,a_2=-\frac{1}{6}a_0,\cdots,a_{2n-1}=0,a_{2n}=-\frac{1}{8n^2-2n}a_{2n-2},\quad(n\geq 2).$$

由此得

$$a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{2^n\cdot n!\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-1)},\quad(n\geq -1).$$

所以，得原方程的一个解

$$y_1=a_0\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-1)}x^{2n}\Big).$$

(b) 对应于$\rho=\rho_2=\frac{1}{2}$, 由同次幂的系数相等，得

$$a_1=0,a_2=-\frac{1}{10}a_0,\cdots,a_{2n-1}=0,a_{2n}=-\frac{1}{2n(4n+1)}a_{2n-2},\ (n\geq 2).$$

由此得

$$a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)},\quad(n\geq 1).$$

所以，得原方程的另一个特解

$$y_2=a_0x^{\frac{1}{2}}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)}x^{2n}\Big).$$

于是，原方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

其中C_1,C_2是任意常数.

(2) 通解为

$$y=C_0x\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n+1)!!}\Big)+C_1x^{\frac{1}{2}}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)!!}\Big),$$

其中C_0,C_1为任意常数。

(3) 设广义幂级数解

$$y=x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

代入方程，得

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)a_nx^{n+\rho-2}+(1-2x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_nx^{n+\rho-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}=0.$$

由$x^{\rho-1}$的系数，得指标方程

$$2\rho^2-\rho=0.$$

得两指标根$\rho_1=\frac{1}{2},\rho_2=0$.

(a) 对应于$\rho_1=\frac{1}{2}$, 比较x的同次幂的系数，得

$$(2n+1)a_n-2a_{n-1}=0.$$

于是，

$$a_1=\frac{2}{3}a_0,a_2=\frac{2}{5}a_1,\cdots,a_n=\frac{2}{2n+1}a_{n-1}.$$

由此得

$$a_n=\frac{2^na_0}{(2n+1)!!}.$$

所以，得原方程的一个解

$$y_1=a_0x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!!}x^n.$$

(b) 对应于$\rho_2=0$, 比较x的同次幂的系数，得

$$na_n-a_{n-1}=0.$$

于是，

$$a_1=a_0,a_2=\frac{1}{2}a_1,\cdots,a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}.$$

由此得

$$a_n=\frac{1}{n!}a_0,\quad (n\geq 1)$$

所以，得原方程的另一个解

$$y_2=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

所以，原方程的通解为

$$y=C_0x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!!}x^n+C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

其中C_0, C_1为任意常数。

(4) 先求得一个广义幂级数解

$$y(x) = x\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^n\Big).$$

通解为

$$y = C_1 y(x) + C_2 y(x) \int \frac{1}{y^2(x)} dx,$$

其中C_1, C_2是任意常数。

习题 4.3.3 求方程$y'' + (\sin x)y = 0$在$x = 0$处展开的两个线性无关的幂级数解.

解 设方程有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

因

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

代入，得

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big) = 0,$$

即

$$\begin{aligned} 2a_2 \quad & + (3 \cdot 2a_3 + a_0)x + (4 \cdot 3a_4 + a_1)x^2 + \cdots \\ & + \Big[\sum_{i=0,\, n\geq 5,\, j=n-3-2i}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} a_j + (n-1) n a_n\Big] x^{n-2} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

比较同次幂的系数，得

$$\begin{aligned} & a_2 = 0,\ a_3 = -\tfrac{1}{3!} a_0,\ a_4 = -\tfrac{1}{3 \cdot 4} a_1,\ a_5 = \tfrac{1}{5!} a_0, \\ & a_6 = \tfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} a_1 + \tfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} a_0, \cdots. \end{aligned}$$

所以，通解为

$$y = a_0\Big(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots\Big) + a_1\Big(x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots\Big).$$

两个线性无关解是

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \tfrac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots, \\ y_2 &= x - \tfrac{x^4}{3 \cdot 4} + \tfrac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots. \end{aligned}$$

习题 4.3.4 用变换法求解下列微分方程:

(1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$;

(2) $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$;

(3) $x(1+x^2)^2y'' + 2(1+x^2)^2y' - xy = 0$.

解 (1) 令

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = \frac{z}{x},$$

则方程变成

$$z'' + z = 0.$$

于是，

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

所以，所求方程的通解为

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(2) 通解为

$$y = C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 \frac{e^{-x}}{x},$$

其中C_1, C_2是任意常数.

(3) 将方程改写成

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{(1+x^2)^2}y = 0.$$

作变换

$$y = \frac{z}{x},$$

则方程变成

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}z = 0,$$

或

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{(\sqrt{1+x^2})''}{\sqrt{1+x^2}}z = 0.$$

故$z = \sqrt{1+x^2}$为其一解,其通解是

$$z = \sqrt{1+x^2}\Big(C_1 + C_2\int \frac{1}{1+x^2}dx\Big) = \sqrt{1+x^2}(C_1 + C_2 \arctan x).$$

所以,所求方程的通解是

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}(C_1 + C_2 \arctan x),$$

其中C_1, C_2是任意常数.

§4.4 边值问题

习题4.4解答

习题 4.4.1 如果在*Sturm*定理中假设$R(x) > Q(x)$, $(x \in J)$, 则定理的结论可以加强到: $x_1 < x_0 < x_2$.

证 设$\phi(x)$是

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0,$$

的一个非零解, 而x_1和x_2是它的二个相邻的零点. 不妨设$\phi(x) > 0$ $(x_1 < x < x_2)$, 由此得

$$\phi'(x_1) > 0, \quad \phi'(x_2) < 0.$$

设$\psi(x)$是

$$y'' + p(x)y' + R(x)y = 0,$$

的一个非零解. 往证: $y = \psi(x)$在区间$x_1 < x < x_2$上至少有一个零点. 用反证法. 假设结论不真,则不妨设$\psi(x) > 0, (x_1 < x < x_2)$. 令$v(x) = \psi(x)\phi'(x) - \phi(x)\psi'(x)$, 则有

$$v'(x) + p(x)v(x) = [R(x) - Q(x)]\phi(x)\psi(x) > 0, \quad (x_1 < x < x_2).$$

所以,

$$\frac{d}{dx}[e^{\int_{x_1}^{x} p(x)dx} v(x)] > 0, \quad (x_1 < x < x_2).$$

从而,

$$e^{\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx} v(x_2) > v(x_1) \geq 0.$$

又$v(x_2) = \psi(x_2)\phi'(x_2) \leq 0$, 矛盾. 所以, $y = \psi(x)$在$x_1 < x < x_2$上至少有一个零点.

习题 4.4.2 如果微分方程

$$y'' + Q(x)y = 0$$

中的系数函数$Q(x)$满足不等式

$$Q(x) \leq M, \quad (a \leq x < \infty),$$

其中常数$M > 0$，则它的任何非零解$y = \phi(x)$的相邻零点的间距不小于常数$\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

证 设a_1和a_2是$y = \phi(x)$的两个相邻零点。要证：$a_2 - a_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

将方程和

$$y'' + My = 0$$

进行比较。后一方程有非零解$y = \sin[\sqrt{M}(x - a_1 + \epsilon)]$, ϵ充分小，它有二个零点$x_1 = a_1 - \epsilon$, $x_2 = a_1 - \epsilon + \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. 由Sturm比较定理推出$a_1 \leq x_2 \leq a_2$, 所以$a_2 - a_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}} - \epsilon$. 令$\epsilon \to 0$，得$a_2 - a_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

习题 4.4.3 证明方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0 \tag{$*$}$$

的任一非零解必有无穷多个零点，且当$x \to +\infty$时，此解的相邻零点之间的距离趋于零。

证 任取$\epsilon > 0$，在$[\frac{\pi^2}{\epsilon^2}, +\infty)$上将方程$(*)$ 与方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\pi^2}{\epsilon^2}y = 0$$

进行比较。在$[\frac{\pi^2}{\epsilon^2}, +\infty)$上，$x \geq \frac{\pi^2}{\epsilon^2} > 0$, 所以$(*)$的任一非零解必有无穷多个零点，且相邻二零点之间的距离不大于$\pi(\frac{\pi}{\epsilon})^{-1} = \epsilon$.

由ϵ的任意性知，当$x \to +\infty$时，其相邻的零点间的距离趋于零。

习题 4.4.4 证明: 方程

$$y'' + \frac{B}{x^2}y = 0 \tag{1}$$

的每个解, 在区间$(1, \infty)$上当$B > \frac{1}{4}$时有无穷多个零点; 而当$B \leq \frac{1}{4}$时, 只有有限个零点.

证明 是欧拉方程. 令$x=e^t$(当$x<0$时,令$x=-e^t$), 则有$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$. 代入方程,得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+By=0. \tag{2}$$

方程(2)的特征方程是

$$\lambda^2-\lambda+B=0,$$

特征根是

$$\lambda_1=\frac{1\pm\sqrt{1-4B}}{2}.$$

(1) 当$B>\frac{1}{4}$时, 则有一对复根

$$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta,$$

其中$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{4B-1}}{2}$. 由此知(2)的通解为

$$y=C_1e^{\alpha t}\cos\beta t+C_2e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

代回原变量,得方程(1)的通解为

$$y=C_1|x|^\alpha\cos(\beta\ln|x|)+C_2|x|^\alpha\sin(\beta\ln|x|),$$

其中C_1,C_2为任意常数. 此时易知每一个解都有无穷多个零点.

(2) 当$B=\frac{1}{4}$时, $\lambda=\frac{1}{2}$是二重特征根. 此时方程(2)的通解为

$$y=C_1e^{\frac{1}{2}t}+C_2te^{\frac{1}{2}t}.$$

代回原变量,得方程(1)的通解为

$$y=C_1|x|^{\frac{1}{2}}+C_2|x|^{\frac{1}{2}}\ln|x|,$$

其中C_1,C_2为任意常数. 此时易知每一个解都有有限多个零点.

(3) 当$B<\frac{1}{4}$时, 特征根是两不同的实根, 记为$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4B}}{2}$. 此时方程(2)的通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}.$$

代回原变量,得方程(1)的通解为

$$y=C_1|x|^{\lambda_1}+C_2|x|^{\lambda_2},$$

其中C_1,C_2为任意常数. 此时易知每一个解都有有限多个零点.

习题 4.4.5 求解边值问题

$$\begin{cases} y'' + y = e^x, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

解 特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

特征根是$\lambda_{1,2} = \pm i$. 容易求出一个特解$y = \frac{1}{2}e^x$. 于是, 通解是

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

代入边值条件, 有

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + \frac{1}{2}, \\ 0 = y(1) = C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1 + \frac{1}{2}e. \end{cases}$$

求得

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}e}{\sin 1}$$

所以,所求的解为

$$y = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}e}{\sin 1}\sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

习题 4.4.6 求解边值问题

$$\begin{cases} y'' - y = \sin x, \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad x \in (0, \pi) \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

解 所求的边值问题的解为

$$y(x) = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{\pi - x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

习题 4.4.7 求下列*S-L*边值问题的特征值及特征函数*:*

(1) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$*;*

(2) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(1) = 0.$

解 (1) $\lambda=0$时，通解为

$$y=C_1x+C_2.$$

由边值条件，得

$$\begin{cases} y'(0)=C_1=0, \\ y'(\pi)=C_1=0. \end{cases}$$

所以，$\lambda=0$是特征值，$\phi_0(x)=1$是特征函数.

$\lambda<0$时，通解为

$$y=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由边值条件，得

$$\begin{cases} y'(0)=C_1\sqrt{-\lambda}-C_2\sqrt{-\lambda}=0, \\ y'(\pi)=C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0. \end{cases}$$

由此求得$C_1=C_2=0$. 于是，$\lambda<0$不是特征值.

$\lambda>0$时，通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

由边值条件，得

$$\begin{cases} y'(0)=C_2\sqrt{\lambda}=0, \\ y'(\pi)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi=0. \end{cases}$$

由此得$C_2=0$. 如要求有非平凡解，则必有$\lambda=k^2$. 于是，有特征值$\lambda_k=k^2$. 相应的特征函数是$\phi_k(x)=\cos kx$, $k=1,2,\cdots$.

(2) 特征值是$\lambda_k=(k+\frac{1}{2})^2\pi^2$, 特征函数是$\phi_k(x)=\sin(k+\frac{1}{2})\pi x$, $k=0,1,2,\cdots$.

习题 4.4.8 证明边值问题

$$\begin{cases} x^2y''-\lambda xy'+\lambda y=0, \quad (1\le x\le 2) \\ y(1)=0,\ y(2)=0 \end{cases}$$

没有非零解(其中λ是实的参数). 这是否与上述定理4.13矛盾?

解 令$x=e^t$, 则$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$. 这时原方程变成

$$\frac{d^2y}{dt^2}-(1+\lambda)\frac{dy}{dt}+\lambda y=0.$$

当$\lambda \neq 1$时, 它有通解$y = C_1e^t + C_2e^{\lambda t}$. 所以,当$\lambda \neq 1$时, 原方程有通解$y = C_1x+C_2x^{\lambda}$, $1 \leq x \leq 2$. 由边值条件得, $C_1+C_2 = 0$, $2C_1+2^{\lambda}C_2 = 0$. 解得$C_1 = 0$, $C_2 = 0$. 所以, 上述边值问题没有非零解.

当$\lambda = 1$时, 方程的通解为$y = C_1x + C_2x\ln x$. 再由边值条件, $C_1 = C_2 = 0$. 所以，此时边值问题没有非零解。

它与定理4.13没矛盾, 因定理中要求y'前不含参数λ.

习题 4.4.9 求解周期性边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1). \end{cases}$$

并比较它与S-L边值问题的异同.

解 当$\lambda < 0$时, 记$\lambda = -R^2$, $(R > 0)$, 则方程的通解为

$$y = C_1e^{Rx} + C_2e^{-Rx}.$$

利用边值条件, 得到

$$\begin{cases} (1 - e^R)C_1 + (1 - e^{-R})C_2 = 0, \\ (1 - e^R)C_1 - (1 - e^{-R})C_2 = 0. \end{cases}$$

解得$C_1 = C_2 = 0$. 说明此情形,周期边值问题没有非零解.

当$\lambda = 0$时, 方程的通解为

$$y = C_1x + C_2.$$

利用边值条件, 得到

$$\begin{cases} C_2 = C_1 + C_2, \\ C_1 = C_1. \end{cases}$$

解得$C_1 = 0$. 此时可求得一非零解$y = \phi_0(x) = 1$, 它是对应于特征值$\lambda_0 = 0$的特征函数。

当$\lambda > 0$时，记$\lambda = R^2$, $(R > 0)$, 则方程的通解为

$$y = C_1 \cos Rx + C_2 \sin Rx.$$

利用边值条件，得到

$$\begin{cases} (1-\cos R)C_1 - \sin R \cdot C_2 = 0, \\ C_1 \sin R + (1-\cos R)C_2 = 0, \end{cases} \tag{$*$}$$

它的系数行列式为$\Delta(R) = 2(1-\cos R)$. 因此，$(*)$关于(C_1, C_2)有非零解的充要条件为$\Delta(R) = 2(1-\cos R) = 0$, 即$R = 2n\pi$, $(n = 1, 2, \cdots)$. 相应的特征函数为

$$y = C_n \cos 2n\pi x + D_n \sin 2n\pi x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

与S-L边值问题不同的是: 此时的特征值可以有两个线性无关的特征函数.

习题 4.4.10 考虑边值问题

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \alpha y(0) + y'(0) = 0,\, y(1) = 0,$$

其中α是常数. 证明*:*

(i). 对所有的$\alpha \in \mathbb{R}$*,* 存在无穷多个正的特征值*;*

(ii). 如$\alpha < 1$*,* 则所有特征根都是正的*;* 且当$\alpha \to 1-$时最小的特征值趋于0*;*

(iii). 仅当$\alpha = 1$时*,*$\lambda = 0$是特征值*;*

(iv). 如$\alpha > 1$*,* 证明仅有一个负的特征值*,* 且当α增加时这个负的特征值减少*.*

解 (i) 对$\lambda > 0$, 方程有通解

$$y = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x.$$

由边值条件得，

$$\begin{cases} C_1 \sin\sqrt{\lambda} + C_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0, \\ \alpha C_2 + \sqrt{\lambda} C_1 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

于是，当

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0,$$

或

$$\alpha \tan\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} \tag{2}$$

时，由(1)能求出非零的(C_1, C_2). 由简单的作图法可见，对所有的$\alpha \in \mathbb{R}$, 方程(2)有无穷多个正根

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots,$$

它们是特征值，而相应的特征函数为

$$\phi_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x - \alpha\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

(ii). 对$\lambda < 0$, 方程有通解

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

由边值条件得

$$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) + \sqrt{-\lambda}(C_1 - C_2) = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

(3)的系数行列式为

$$\Delta = (e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}})\sqrt{-\lambda} - \alpha(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}).$$

若记$\lambda = -R^2$, $R > 0$, 则上面的系数行列式可写成

$$\Delta(R) = (e^R + e^{-R})R - \alpha(e^R - e^{-R}). \tag{4}$$

容易求得

$$\Delta'(R) = (1-\alpha)(e^R + e^{-R}) + R(e^R - e^{-R}). \tag{5}$$

当$\alpha < 1$时，$\Delta'(R) > 0$和$\Delta(0) = 0$. 所以当$R > 0$时$\Delta(R) > 0$. 由此推出$C_1 = C_2 = 0$. 这证明当$\alpha < 1$时边值问题没有负的特征值。

对$\lambda = 0$, 方程有通解

$$y = C_1 x + C_2. \tag{6}$$

由边值条件得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \alpha C_2 + C_1 = 0. \end{cases}$$

由此推出

$$C_1 = -C_2 \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha = 1. \tag{7}$$

于是，当$\alpha < 1$时0不是边值问题的特征值。所以，当$\alpha < 1$时所有特征根都是正的，且由(2)式可见当$\alpha \to 1-$时最小的特征根趋于0。

(iii). 由(7)式见，仅当$\alpha = 1$时,$\lambda = 0$是特征值，且对应的特征函数是

$$\phi_0(x) = x - 1.$$

(iv). 由(3), (4)可见，$\alpha > 1$时有负特征值$\lambda = -R^2 \Longleftrightarrow$ (3)有非零解，即

$$\Delta(R) = (e^R + e^{-R})R - \alpha(e^R - e^{-R}) = 0,$$

亦即α满足

$$\alpha = \frac{(e^{2R}+1)R}{e^{2R}-1}.$$

记$f(x) = \frac{(e^{2x}+1)x}{e^{2x}-1}$, 则容易证明$f(x)$当$x > 0$时单调增加，且$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. 所以，对任意$\alpha > 1$, 有且仅有一个$R = R(\alpha)$, 使得$\Delta(R) = 0$. 于是, $\alpha > 1$时仅有一个负的特征根$\lambda_{-1} = -R^2$，且当α增加时这个负的特征根减少。

事实上，容易求得

$$f'(x) = \frac{e^{4x} - 4xe^{2x} - 1}{(e^{2x}-1)^2}.$$

记$g(x) = e^{4x} - 4xe^{2x} - 1$, 利用指数函数的幂级数表示，可得

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x)^k}{k!} - 4x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{4^k}{k!} - \frac{4\cdot 2^{k-1}}{(k-1)!})x^k.$$

显然，

$$\frac{4^k}{k!} - \frac{4\cdot 2^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{2^k(2^k - 2k)}{k!} \geq 0.$$

于是证得当$x > 0$时，$g(x) > 0$. 所以, $f(x)$当$x > 0$时单调增加.

第五章 微分方程的基本理论

§5.1 Picard存在和唯一性定理

习题5.1解答

习题 5.1.1 在矩形区域$R: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$上,考虑方程$\frac{dy}{dx} = x^2+y^2$. 试利用存在和唯一性定理确定经过点$(0,0)$的解的存在区间,并利用*Picard*序列, 求通过点$(0,0)$的第三次近似解.

解 $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 2$, 故$h = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$. 所以, 解的存在区间是$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Picard序列为

$$\begin{aligned} &\phi_k(x) = \int_0^x (s^2+\phi_{k-1}^2(s))ds, \quad k=1,2,\cdots, \\ &\phi_0(x) = 0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\phi_1(x) = \int_0^x (s^2+\phi_0^2(s))ds = \frac{x^3}{3}, \\ &\phi_2(x) = \int_0^x (s^2+\phi_1^2(s))ds = \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}, \\ &\phi_3(x) = \int_0^x (s^2+\phi_2^2(s))ds = \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}. \end{aligned}$$

习题 5.1.2 试用*Picard*逐次迭代法求初值问题

$$y''+{y'}^2-2y=0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

的第二次近似解.

解 令$z=y'$, 则初值问题变成

$$\begin{cases} y' = z, & y(0)=1, \\ z' = 2y-z^2, & z(0)=0. \end{cases}$$

取初始逼近函数为

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \\ z_0(x) = 0, \end{cases}$$

则一次逼近为

$$\begin{cases} y_1(x) = 1+\int_0^x 0dx = 1, \\ z_1(x) = \int_0^x 2d\tau = 2x. \end{cases}$$

第二次逼近为

$$\begin{cases} y_2(x) = 1 + \int_0^x 2\tau d\tau = 1 + x^2, \\ z_2(x) = \int_0^x [2 - (2\tau)^2] d\tau = 2x - \frac{4}{3}x^3. \end{cases}$$

习题 5.1.3 设a, b为常数，n为自然数。试对于n的不同的值，讨论微分方程$\frac{d^n y}{dx^n} = x + a\sin^2 y$有多少个满足条件$y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = b$的解。

解 (1). $n = 1$时，如$b \neq a\sin^2 y_0$, 问题无解；如$b = a\sin^2 y_0$，问题有唯一解。

(2). $n = 2$时，有唯一解。

(3). $n \geq 3$时，有无穷多解。

习题 5.1.4 在(x, y)平面上,下列方程的两个解的图形能够在某一点(x_0, y_0)彼此相切吗？

(1) $y' = x + y^2$;

(2) $y'' = x + y^2$;

(3) $y''' = x + y^2$.

解 (1) 不行; (2) 不行; (3) 可以.

习题 5.1.5 设$f(y)$在$y \in \mathbb{R}$上连续, 证明$\frac{dy}{dx} = f^2(y) + e^{-x}$具有解的唯一性.

解 显然方程过每一点P_0的解是存在的. 设$y = y(x)$是其过P_0的一个解. 因

$$\frac{dy(x)}{dx} = f^2(y(x)) + e^{-x} > 0,$$

故$y = y(x)$的反函数$x = x(y)$在P_0点附近存在, 且$x = x(y)$满足方程

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f^2(y) + e^{-x}} =: F(y, x). \qquad (*)$$

$F(y, x)$在$\mathbb{R}^2$上连续, 且关于x有连续偏导数. 从而, $F(y, x)$关于x满足局部李氏条件. 于是, 方程$(*)$过每点的解是存在唯一的. 所以, 原方程过每点的解是存在唯一的.

习题 5.1.6 利用右端函数的性质讨论下列微分方程满足初值条件$y(0)=0$的解的唯一性问题:

(1) $\frac{dy}{dx}=|y|^\alpha$, *(常数*$\alpha>0$*);*

(2) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}0, & 当\ y=0,\\ y\ln|y|, & 当\ y\neq 0.\end{cases}$

解 (1) 显然$y=0$是满足初值条件的解.

如$0<\alpha<1$, 则由关系式

$$\int_0^y \frac{dy}{|y|^\alpha}=x$$

确定的函数$\Phi(x,y)=0$是方程的解,满足初值条件, 且当$x\neq 0$时, $y\neq 0$. 所以,此时满足初值条件的解是不唯一的.

如$\alpha\geq 1$, 则方程满足初值条件的解是唯一的. 这是因为如果满足初值条件的解是不唯一的, 则存在另一解$y=y(x), y(0)=0$. 可设存在x_0和ϵ, 使得$y(x)\neq 0$, 如$x_0<x<x_0+\epsilon$; 且$y(x_0)=0$. 所以, 有

$$\frac{1}{|y(x)|^\alpha}\frac{dy(x)}{dx}=1,\quad x_0<x<x_0+\epsilon,$$

积分,得

$$\int_0^{y(x)}\frac{dy}{|y|^\alpha}=\int_{x_0}^x\frac{1}{|y(x)|^\alpha}\frac{dy(x)}{dx}=x-x_0,\quad x_0<x<x_0+\epsilon.$$

这与$\alpha\geq 1$时,积分

$$\int_0^1\frac{dy}{|y|^\alpha}=\infty$$

相矛盾.

(2) $y=0$是满足初值条件的解. 我们将说明方程满足初值条件的解是唯一的. 这是因为, 如果满足初值条件的解是不唯一的, 则存在另一个解$y=y(x), y(0)=0$. 可设存在x_0和ϵ, 使得$y(x)\neq 0$, 如$x_0<x<x_0+\epsilon$; 且$y(x_0)=0$. 所以, 有

$$\frac{1}{y(x)\ln|y(x)|}\frac{dy(x)}{dx}=1,\quad x_0<x<x_0+\epsilon,$$

积分,得

$$\int_0^{y(x)}\frac{dy}{y\ln|y|}=\int_{x_0}^x\frac{1}{y(x)\ln|y(x)|}dy(x)=x-x_0,\quad x_0<x<x_0+\epsilon.$$

这与积分

$$\int_0^1 \frac{dy}{y\ln|y|}$$

是发散的相矛盾.

习题 5.1.7 设$f(x,y)$在带形区域$S=[0,a]\times\mathbb{R}$上连续且满足*Rosenblatt*条件:

$$|f(x,y)-f(x,z)|\le \frac{q}{x}|y-z|,\quad 0<x\le a,\ y,z\in\mathbb{R},$$

其中$q<1$. 证明初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(0)=\eta$$

在$[0,a]$上有并且只有一个解.

证明 作逼近序列

$$\begin{aligned}&\phi_0(x)=\eta,\quad x\in[0,a],\\ &\phi_{n+1}(x)=\eta+\textstyle\int_0^x f(x,\phi_n(x))dx,\quad x\in[0,a],\end{aligned}$$

$n=0,1,\cdots$. 则$\phi_n(x)$在$[0,a]$上有定义且连续.

记$A=\sup\limits_{0\le x\le a}|f(x,\eta)|$, 利用归纳法, 易证

$$|\phi_{n+1}(x)-\phi_n(x)|\le Aq^n x,\quad x\in[0,a],\ n=0,1,\cdots.$$

由此知道, 级数

$$\phi_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_{n+1}(x)-\phi_n(x))$$

在$[0,a]$上一致收敛. 所以, 序列$\{\phi_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛, 极限记为$\phi(x)$. 则$\phi(x)$就是初值问题的解。

下面证明唯一性. 反证. 若$\psi(x)$是初值问题的解, 且设$\phi(x^*)\ne\psi(x^*)$, $0<x^*\le a$. 不妨设$\phi(x^*)>\psi(x^*)$. 令$v(x)=\phi(x)-\psi(x)$, 则$v(0)=0$, $v(x^*)>0$. 于是, 存在$0\le x_1<x_2$, 使得$v(x_1)=0$, $v(x)>0, v'(x)\ge 0$, $x_1<x\le x_2$. 从而,

$$v'(x)=\phi'(x)-\psi'(x)=f(x,\phi(x))-f(x,\psi(x))\le\frac{q}{x}v(x),\quad x_1<x\le x_2.$$

所以,

$$x^q v'(x)-qx^{q-1}v(x)\le 0,\quad x_1<x\le x_2,$$

即

$$\frac{d}{dx}(x^q v(x)) \le 0, \quad x_1 < x \le x_2.$$

由此得到

$$0 < x_2^q v(x_2) \le x_1^q v(x_1) = 0.$$

矛盾.

习题 5.1.8 试用逐段逼近法证明隐函数定理: 设$f(x,y)$在带域$G: a \le x \le b,\ -\infty < y < +\infty$上对$x$连续, 对$y$的偏导数处处存在且满足关系式: $0 < m \le f'_y(x,y) \le M$, 则方程$f(x,y)=0$在$a \le x \le b$上有且只有一个连续解.

证明 方程$f(x,y)=0$的解等价于$y = y - \frac{1}{M}f(x,y)$的解. 任取$y_0 \in (-\infty,+\infty)$. 记$K(y_0) = \max\limits_{a \le x \le b}|f(x,y_0)|$. 作函数序列

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \frac{1}{M}f(x,y_n(x)), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

其中$y_0(x) \equiv y_0,\ x \in [a,b]$, 则$y_n(x)$在$a \le x \le b$上连续. 此时, 有

$$y_n(x)\text{一致收敛} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1}(x) - y_n(x))\text{一致收敛}.$$

由归纳法, 可以证明

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= |y_n(x) - y_{n-1}(x) - \tfrac{1}{M}(f(x,y_n(x)) - f(x,y_{n-1}(x)))| \\ &\le (1-\tfrac{m}{M})^n \tfrac{K(y_0)}{M}. \end{aligned}$$

因$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{m}{M})^n$收敛, 故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(y_{n+1}(x) - y_n(x))$在$[a,b]$上一致收敛. 所以, $y_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛. 记$y^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$, 则$y^*(x)$在$a \le x \le b$上连续,且

$$y^*(x) = y^*(x) - \frac{1}{M}f(x,y^*(x)), \quad \text{即}, \quad f(x,y^*(x)) = 0.$$

存在性证得. 下证唯一性. 若$\hat{y}(x)$是它的任一解, 则

$$\begin{aligned} |y^*(x) - \hat{y}(x)| &= |y^*(x) - \hat{y}(x) - \tfrac{1}{M}(f(x,y^*(x)) - f(x,\hat{y}(x)))| \\ &\le (1-\tfrac{m}{M})|y^*(x) - \hat{y}(x)|. \end{aligned}$$

由此, 得$y^*(x) \equiv \hat{y}(x)$.

习题 5.1.9 *设连续函数$f(x,y)$对y是递减的，则初值问题*

$$(E)\quad \begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的右侧解是唯一的。(左侧解是否唯一？能否举一反例吗？).

证 用反证法，假设初值问题有两个解$y = y_1(x)$和$y = y_2(x)$, 且存在$x_1 > x_0$，使得$y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$。不妨设$y_1(x_1) > y_2(x_1)$。令

$$\bar{x} = \sup\{x \in [x_0, x_1];\ y_1(x) = y_2(x)\},$$

则显然有$x_0 \leq \bar{x} < x_1$, 而且

$$r(x) := y_1(x) - y_2(x) > 0, \quad 如\ \bar{x} < x \leq x_1,$$

和$r(\bar{x}) = 0$. 但是

$$r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leq 0, \quad \bar{x} < x \leq x_1.$$

由中值定理又可得$r(x) \leq 0$, $\bar{x} < x \leq x_1$. 矛盾.

左侧解不一定唯一. 例如, $y' = -\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$有特解$y = 0$及通解

$$-y^{\frac{2}{3}} = x + C, \quad x + C \leq 0.$$

因而过$y = 0$上每点的解是不唯一的.

§5.2 Peano 存在性定理的证明

习题5.2解答

习题 5.2.1 *利用Ascoli-Arzelá定理证明: 若一函数序列在有限区间I上是一致有界和等度连续的, 则在I上它至少有一个一致收敛的子序列.*

证明 如果$I = [a,b]$是有界闭区间, 则就是Ascoli-Arzelá定理.

不失一般性, 假设函数序列$\{f_n(x)\}$在有界开区间(a,b)上是一致有界和等度连续的, 即假设

(i) (一致有界)存在常数$M > 0$, 使得

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in (a,b),\ \forall n.$$

(ii) (等度连续) 对$\forall \epsilon > 0$, 存在$\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使对任意$x_1, x_2 \in (a, b)$, 只要$|x_1 - x_2| < \delta$, 就有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon, \qquad \forall n.$$

由Cauchy准则, 对每一个n, 极限

$$\lim_{x \to a+0} f_n(x), \qquad \lim_{x \to b-0} f_n(x)$$

存在. 定义函数序列

$$F_n(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f_n(x), & x = a, \\ f_n(x), & x \in (a, b), \\ \lim\limits_{x \to b-0} f_n(x), & x = b, \end{cases}$$

则$\{F_n(x)\}$在有界闭区间$[a, b]$上是一致有界和等度连续的, 因而它在$[a, b]$上至少有一个一致收敛的子序列. 由此推出$\{f_n(x)\}$在(a, b)上至少有一个一致收敛的子序列.

习题 5.2.2 *举例说明Ascoli-Arzelá定理中的三个条件(区间的有界性、函数族的一致有界性及等度连续性) 缺一不可.*

解 (i) 取有界区间$[0, 1]$和函数族$f_n(x) = x + n$, $n \in \mathbb{Z}$. 对每一个n, $f_n(x)$在区间$[0, 1]$上是有界的, 其界依赖于n. 因而, 函数族$\{f_n(x)\}$在区间$[0, 1]$上不是一致有界的.

易知, 函数族$\{f_n(x)\}$在区间$[0, 1]$上是等度连续的. 事实上, 对任意的$\epsilon > 0$, 取$\delta = \epsilon$, 则当$|x_1 - x_2| < \delta$时, 有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| = |x_1 - x_2| < \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

易见, $\{f_n(x)\}$的任何子序列都没有一致收敛的子序列.

(ii) 取有界区间$[0, 1]$和函数族$f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. 易见对$\forall n \in \mathbb{Z}$和$\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \le 1$. 所以, 函数族$\{f_n(x)\}$在区间$[0, 1]$上是一致有界的.

因

$$|f_n(1) - f_n(1 - \frac{1}{n})| = |1 - (1 - \frac{1}{n})^n| \to 1 - \frac{1}{e}, \qquad (n \to +\infty),$$

只要取$\epsilon_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$, 则当$n$充分大时,

$$\left| f_n(1) - f_n(1 - \frac{1}{n}) \right| \ge \epsilon_0 > 0.$$

所以, 函数族$\{f_n(x)\}$在区间$[0,1]$上不是等度连续的.

下面证明: $\{f_n(x)\}$没有子序列在$[0,1]$上一致收敛. 用反证法, 若$\{f_n(x)\}$有子序列$\{f_{n_k}(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛, 记其极限为$f(x)$. 则由数学分析知识知, $f(x)$应在$[0,1]$上连续. 但易知, 此时的$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$在$[0,1]$上是不连续的. 所以, $\{f_{n_k}(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛.

(iii) 取无界区间$[0,\infty)$和函数族$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}x, & 0 \le x \le n, \\ 1, & x \ge n. \end{cases}$. 易见, 函数族$\{f_n(x)\}$在$[0,\infty)$上是一致有界的.

下面说明函数族$\{f_n(x)\}$在$[0,\infty)$上是等度连续的. 事实上, 对$\forall \epsilon > 0$, 取$\delta = \epsilon$. 对任意的$x_1, x_2 \in [0,\infty)$, 当$|x_1 - x_2| < \delta$时, 对任意的$n \in \mathbb{Z}$, 都有

a) 如果$x_1, x_2 \le n$, 则

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| = \left|\frac{x_1}{n} - \frac{x_2}{n}\right| \le \frac{\delta}{n} \le \epsilon.$$

b) 如果$x_1, x_2 \ge n$, 则

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| = 0 \le \epsilon.$$

c) 如果$x_1 \le n \le x_2$, 则$n - \delta \le x_1 \le n$. 于是,

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| = \left|\frac{x_1}{n} - 1\right| \le \frac{\delta}{n} \le \epsilon.$$

所以, $\{f_n(x)\}$在区间$[0,\infty)$上等度连续.

最后, $\{f_n(x)\}$没有子序列$\{f_{n_k}(x)\}$在$[0,\infty)$上一致收敛. 用反证法, 若$\{f_n(x)\}$有子序列$\{f_{n_k}(x)\}$在$[0,\infty)$上一致收敛. 则必有$f_{n_k}(x) \implies 0$, 即, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, 使当$n \ge N$, 时,

$$|f_n(x) - 0| \le \epsilon.$$

如取$x_N \ge x$, 则$f_N(x_N) = 1 \ge \epsilon$. 矛盾.

习题 5.2.3 试用*Tonelli*序列和*Ascoli-Arzelá*定理证明*Peano*存在定理.

*Tonelli*序列在区间$I = [x_0, x_0+h]$上构造如下: 任给正整数n, 令$x_k = x_0 + kd_n$, 其中$d_n = \frac{h}{n}$, $k = 0, 1, \cdots, n$. 则分点

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \,(= x_0 + h)$$

把区间I分成n等份. 从$[x_0,x_1]$到$[x_1,x_2]$, 再从$[x_1,x_2]$到$[x_2,x_3]$, $\cdots$, 最后从$[x_{n-2},x_{n-1}]$到$[x_{n-1},x_0+h]$用递推法定义下面的函数:

$$y_n(x)=\begin{cases} y_0, & \text{当 } x\in[x_0,x_1];\\ y_0+\int_{x_0}^{x-d_n} f(s,y_n(s))ds, & \text{当 } x\in[x_1,x_0+h]. \end{cases}$$

称序列

$$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x),\cdots,(x\in I)$$

为**Tonelli序列**.

证明 先证明$y_n(x)$在$[x_0,x_0+h]$上有定义, 连续, 且$(x,y_n(x))\in R$.

事实上, $n=1$时结论显然. 对任何$n>1$, 由定义知, $y_n(x)$在$[x_0,x_1]$上有定义、连续, 且$(x,y_n(x))\in R$. 代入第二式得, $y_n(x)$在$[x_1,x_2]$上有定义、连续. 因

$$|f(s,y_n(s))|\le M, \qquad (x_0\le s\le x_1),$$

有

$$|y_n(x)-y_0|\le M|x-d_n-x_0|\le \frac{Mh}{n}\le b, \qquad (x_1\le x\le x_2).$$

因此有$(x,y_n(x))\in\mathbb{R}$, 即$y_n(x)$在$[x_1,x_2]$上满足所要证的结论. 再代入第二式, 可得$y_n(x)$在$[x_2,x_3]$上有定义、连续且$(x,y_n(x))\in R$. 依次作下去，经过有限次后, 可得$y_n(x)$在$[x_{n-1},x_n]$上有定义、连续且$(x,y_n(x))\in R$. 总之, 对任何的自然数n, $y_n(x)$在$[x_0,x_0+h]$上有定义、连续且$(x,y_n(x))\in R$.

其次, 由定义知, 对任意$x,\tilde{x}\in[x_0,x_0+h]$, 有

$$|y_n(x)-y_n(\tilde{x})|\le M\Big|\int_{\tilde{x}-d_n}^{x-d_n} ds\Big|\le M|x-\tilde{x}|.$$

所以, $\{y_n(x)\}$在$[x_0,x_0+h]$上等度连续且一致有界.

由Ascoli-Arzela定理, $\{y_n(x)\}$在$[x_0,x_0+h]$上存在一致收敛的子序列$\{y_{n_k}(x)\}$. 故有$[x_0,x_0+h]$上连续的$\phi(x)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k}(x)=\phi(x).$$

再由$f(x,y)$在R上一致连续性, 知当$x\in[x_0,x_0+h]$时, 有

$$\lim_{k\to\infty} f(x,y_{n_k}(x))=f(x,\phi(x)).$$

因
$$|\int_x^{x-d_{n_k}} f(s,y_{n_k}(s))ds| \le \frac{Mh}{n_k} \to 0, \quad (k\to\infty),$$
再由定义,
$$y_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s,y_{n_k}(s))ds + \int_x^{x-d_{n_k}} f(s,y_{n_k}(s))ds,$$
得
$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s,\phi(s))ds,$$
即$\phi(x)$是初值问题的一个解.

§5.3 解不唯一的情形-奇解

习题5.3解答

习题 5.3.1 *求解下列方程,并求奇解(如果存在的话):*

(1) $y = 2xy' + \frac{1}{2}x^2 + y'^2$;

(2) $y'^2 + (x+1)y' - y = 0$;

(3) $y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$;

(4) $(y-1)^2(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{4}{9}y$.

解 (1) 令$y' = p$, 则
$$y = 2xp + \frac{1}{2}x^2 + p^2.$$
两边对x求导，化简得
$$(p+x)\big(2\frac{dp}{dx} + 1\big) = 0.$$
由$2\frac{dp}{dx}+1=0$, 得
$$p = -\frac{1}{2}x + C.$$
从而，得通解
$$\Gamma_C: \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + xC + C^2,$$
其中C为任意常数。

由$p+x=0$, 得特解$\Lambda:\ y = -\frac{1}{2}x^2$. 下证$y = -\frac{1}{2}x^2$是奇解。

法一: 由$p-$判别式

$$\begin{cases} 2xp+\frac{1}{2}x^2+p^2-y=0, \\ 2x+2p=0, \end{cases}$$

得$y=\psi(x)=-\frac{1}{2}x^2$. 因为

$$\begin{aligned} &F'_y(x,\psi(x),\psi'(x))=-1\neq 0, \\ &F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x))=2\neq 0, \\ &F'_p(x,\psi(x),\psi'(x))=0, \end{aligned}$$

知$y=-\frac{1}{2}x^2$是奇解。

法二: Γ_C与Λ的交点满足

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x^2+xC+C^2, \\ y=-\frac{1}{2}x^2. \end{cases}$$

由此解得$x=-2C$. 又

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}\Big|_{\Gamma_C,\,x=-2C}=-\frac{1}{2}x+C\Big|_{x=-2C}=2C, \\ &\frac{dy}{dx}\Big|_{\Lambda,\,x=-2C}=-x\Big|_{x=-2C}=2C, \end{aligned}$$

知Γ_C与Λ在交点$x=-2C$处相切。所以，Λ上每一点的解都不是唯一的，它是奇解。

(2) 通解

$$\Gamma_C: \quad y=(x+1)C+C^2,$$

其中C是任意常数。$y=-\frac{1}{4}(x+1)^2$是奇解。

(3) 方程是Clairaut方程。令$y'=p$, 则

$$y=xp+\sqrt{1+p^2}.$$

两边对x求导，得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}.$$

由$\frac{dp}{dx}=0$, 得$p=C$. 从而，原方程的通解为

$$y=xC+\sqrt{1+C^2},$$

其中C是任意常数。

由$x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0$, 得

$$y=-\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}+\sqrt{1+p^2}=-\frac{x}{p}.$$

化简后，得特解

$$y=\sqrt{1-x^2},$$

它是奇解。

(4) 通解

$$\Gamma_C:\quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{2}{3}x+C,$$

其中C是任意常数。$y=0$是奇解。

习题 5.3.2 求解克莱洛*(Clairaut)*方程

$$y=xp+f(p),\quad (p=\frac{dy}{dx}),$$

其中$f''(p)\neq 0$. 进而，证明它的一个特解是奇解。

解 见教材例2.23.

习题 5.3.3 求下列曲线族的包络,并绘出图形*:*

(1) $y=Cx^2+C^2$*;*

(2) $(x-C)^2+y^2=4C$*.*

解 (1) 由$C-$判别式

$$\begin{cases} Cx^2+C^2-y=0,\\ x^2+2C=0,\end{cases}$$

得$C=-\frac{x^2}{2}$. 于是，得$C-$判别曲线$\Lambda:\ y=-\frac{x^4}{4}$. 下面说明$\Gamma$是包络.

法一: 记

$$\Phi(x,y,C)=Cx^2+C^2-y,$$

及Λ的参数表达

$$\Lambda:\quad x=\sqrt{-2C}:=\phi(C),\quad y=-C^2:=\psi(C).$$

因

$$(\phi'(C),\psi'(C))\neq(0,0),\quad (\Phi'_x,\Phi'_y)\neq(0,0),$$

知Λ： $y=-\frac{x^4}{4}$是包络.

法二: Γ_C： $y=Cx^2+C^2$与Λ的交点满足

$$\begin{cases} y=Cx^2+C^2, \\ y=-\frac{x^4}{4}. \end{cases}$$

由此得$x=\sqrt{-2C}$. 因为

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}\Big|_{\Gamma_C,\,x=\sqrt{-2C}} &= 2Cx\Big|_{\Gamma_C,\,x=\sqrt{-2C}} = 2C\sqrt{-2C}, \\ \frac{dy}{dx}\Big|_{\Lambda,\,x=\sqrt{-2C}} &= -x^3\Big|_{\Lambda,\,x=\sqrt{-2C}} = 2C\sqrt{-2C}, \end{aligned}$$

知Γ_C与Λ在交点处相切. 所以, Λ是Γ_C的包络.

(2) 包络：Λ： $y^2=4(x+1)$.

习题 5.3.4 试求一微分方程，使它有奇解为$y=\sin x$.

解已知Clairaut方程

$$y=xp+f(p), \quad p=\frac{dy}{dx}$$

的通解是直线族，而特解是一个奇解。为此，我们只须构造一个Clairaut方程使$y=\sin x$是它的特解即可。为此，只须求$f(p)$. 将$y=\sin x$代入上述方程，有

$$\sin x=x\cos x+f(\cos x).$$

令$y=\cos x$, 则$x=\arccos y$, $\sin x=\sqrt{1-y^2}$。由此得

$$f(y)=-y\arccos y+\sqrt{1-y^2}.$$

从而所求方程为

$$y=xp-p\arccos p+\sqrt{1-p^2}, \quad p=\frac{dy}{dx}.$$

习题 5.3.5 试问微分方程$\sin(y\frac{dy}{dx})=y$是否有奇解？给出理由。

解 令$F(x,y,p)=\sin(yp)-y, \quad (p=\frac{dy}{dx})$。微分方程的$p$-判别式是:

$$\begin{cases} F(x,y,p)=\sin(yp)-y=0, \\ F'_p(x,y,p)=y\cos(yp)=0. \end{cases}$$

由此得p-判别曲线$y=0$. 又知微分方程的奇解必满足p-判别式。显然$y=0$是微分方程的解。下说明$y=0$ 不是奇解。事实上，若记$y=t$, 则有参数表示

$$y=t, \quad p=\frac{1}{t}\arcsin t.$$

由$dy=pdx$, 得

$$dx=\frac{tdt}{\arcsin t}$$

可求得微分方程有通积分

$$\begin{cases} x &= \int \frac{t}{\arcsin t}dt + C_1 =: G(t)+C_1, \\ y &= t, \end{cases}$$

即，$x=G(y)+C$, 其中C为任意常数。这时，通解族$\Delta(x,y):\ G(y)-x+C=0$在$y=0$上的切向量为

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y}=1\neq 0.$$

这说明通解族中的曲线与$y=0$不相切。由定义知，$y=0$不是奇解。

习题 5.3.6 设连续函数$E(y)$满足条件

$$E(0)=0, \quad \text{而当}0<y\leq 1\text{时}\ E(y)\neq 0.$$

则$y=0$是微分方程

$$\frac{dy}{dx}=E(y) \tag{$*$}$$

的奇解当且仅当瑕积分

$$\int_0^1 \frac{dy}{E(y)}$$

收敛。

证明 ”$\Rightarrow$” 若$y=0$是方程$(*)$的奇解，则由定义知，对$y=0$上每一点P_0, 方程$(*)$有一个解$y=y(x), x\in(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$, 它与$y=0$在$P_0$点相切，且在$P_0$点的任一邻域中，$y=y(x)$与$y=0$是不同的，即，可设$y(x_0)=0$, 而$y(x)\neq 0,\ x_0<x<x_0+\epsilon$. 由

$$\frac{dy(x)}{dx}=E(y(x)), \quad x\in(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon),$$

知
$$\frac{dy(x)}{E(y(x))}=dx,\quad x_0<x<x_0+\epsilon.$$
积分得
$$\int_0^{y(x)}\frac{dy}{E(y)}=\int_{x_0}^{x}\frac{dy(x)}{E(y(x))}=\int_{x_0}^{x}dx=x-x_0.$$
所以，瑕积分收敛。

”$\Leftarrow$” 若瑕积分收敛，在$y=0$上任取一点$P_0(x_0,0)$, 则由
$$\int_0^{y}\frac{dy}{E(y)}=x-x_0$$
确定的函数关系$\Phi(x,y)=0$是微分方程的解,当$x\neq 0$时, $y\neq 0$, 且过P_0点; 并易知, 由它确定的函数满足$\frac{dx}{dy}\big|_{P_0}=\infty$. 所以, 曲线$\Phi(x,y)=0$在$P_0$点的切向量为$(1,0)$, 即, 它与$y=0$在$P_0$点相切. 从而, $y=0$是奇解.

习题 5.3.7 求一曲线,使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数a.

解 切线在x轴和y轴上的截距分别为$X=x-\frac{y}{y'}$和$Y=y-xy'$. 因要求两截距之和等于常数a, 有
$$x-\frac{y}{y'}+y-xy'=a.$$
得到方程
$$y=xy'+\frac{ay'}{y'-1},$$
是Clairaut方程. 因而可求出方程的通解为
$$y=Cx+\frac{aC}{C-1},$$
特解为$(y-x-a)^2=4ax$. 特解方程是所求的曲线.

§5.4 解的延伸

习题5.4解答

习题 5.4.1 证明初值问题$y' = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 1$解的最大存在区间为$-1 < x < 1$.

证明 通解为

$$x^2 + y^2 = C,$$

其中C是任意常数. 由初始条件,得$C = 1$. 所求初值问题的解为

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

虽然$y = \sqrt{1 - x^2}$在$[-1, 1]$上有定义, 但它的导数在$x = \pm 1$无定义. 所以,此初值问题解的最大存在区间为$(-1, 1)$.

习题 5.4.2 证明微分方程$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3y^2$ 的解的存在区间都是有界的.

解 参见例5.11.

习题 5.4.3 讨论下列微分方程解的存在区间:

(1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$;
(2) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$;
(3) $\frac{dy}{dx} = y(y - 1)$;
(4) $\frac{d^2y}{dx^2} = x\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin y + e^x$.

解 (1) 容易求出通解

$$y = \sin\frac{1}{x} + C.$$

所以,存在区间是$(-\infty, 0)$或$(0, +\infty)$.

(2) 容易求出通解

$$y = \tan(x + C).$$

所以, 存在区间为$(-C - \frac{\pi}{2}, -C + \frac{\pi}{2})$.

(3) 当$y \neq 0, y \neq 1$时, 变量分离

$$\frac{dy}{y(y - 1)} = dx.$$

积分，得通解

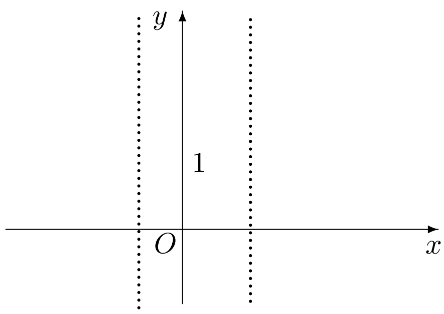
$$y(x) := \frac{1}{1 - Ce^x},$$

其中C为任意的常数。还有特解$y=0$.

当$C<0$时, $0<y(x)<1$, 定义区间为$(-\infty,+\infty)$, 且当$x\to+\infty$时, $y(x)\to 0$; 当$x\to-\infty$时, $y(x)\to 1$.

当$C>0$时, 分母有零点, 即由$1-Ce^x=0$知, $x_c=-\ln C$. 当$x\in(-\infty,x_c)$时, $y(x)=\frac{1}{1-Ce^x}>1$, 且$y(x)\to 1$(当$x\to-\infty$), $y(x)\to\infty$(当$x\to x_c$); 当$x\in(x_c,+\infty)$时, $y(x)=\frac{1}{1-Ce^x}<0$, 且$y(x)\to 0$(当$x\to+\infty$), $y(x)\to-\infty$(当$x\to x_c$). 所以,存在区间分别为

$$(-\infty,\infty),\quad (-\infty,-\ln C),\quad (-\ln C,+\infty).$$



(4) 令$v=\frac{dy}{dx}$, 则方程将变成

$$\frac{dy}{dx}=v,\quad \frac{dv}{dx}=x\cos v+\sin y+e^x.$$

记

$$f(x,y,v)=\begin{pmatrix} v \\ x\cos v+\sin y+e^x \end{pmatrix},$$

则

$$||f(x,y,v)||\le |v|+1+|x|+e^x.$$

所以，解的存在区间$(-\infty,+\infty)$.

习题 5.4.4 设初值问题

$$(E):\quad \frac{dy}{dx}=(y^2-2y-3)e^{(x+y)^2},\quad y(x_0)=y_0$$

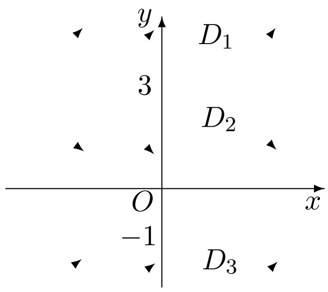
的解的最大存在区间为$a<x<b$，其中(x_0,y_0)是平面上的任意一点，则$a=-\infty$和$b=\infty$中至少有一个成立.

解 右端函数在$\mathbb{R}^2$中连续可微, 故由存在唯一性定理和延拓定理, 解可延伸到$\mathbb{R}^2$的边界, 且过$\mathbb{R}^2$中每点的解是唯一的.

由$y^2-2y-3=(y-3)(y+1)$, 知$y=3$和$y=-1$是方程的解. 这两个解可将平面$\mathbb{R}^2$分成三部分

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>3\},\\ D_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -1<y<3\},\\ D_3 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y<-1\}, \end{aligned}$$

且在D_1,D_3中轨线单调上升, 在D_2中轨线单调下降.



对$\forall(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 若$y_0=3$或$-1$, 则$y(x)\equiv 3$或$-1$, $-\infty<x<\infty$.

若$y_0\neq 3$和-1, 则(x_0,y_0)必落在D_1,D_2,D_3三个之一中.

如$(x_0,y_0)\in D_1$, 则取

$$G_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -\infty<y<+\infty,-\infty<x<x_0\}.$$

这时过(x_0,y_0)的积分曲线向左延拓时, 它是单调上升的且它要达到G_1的边界. 又$y=3$是解, 此积分曲线不能穿越$y=3$, 故此时$a=-\infty$.

其它情形同理.

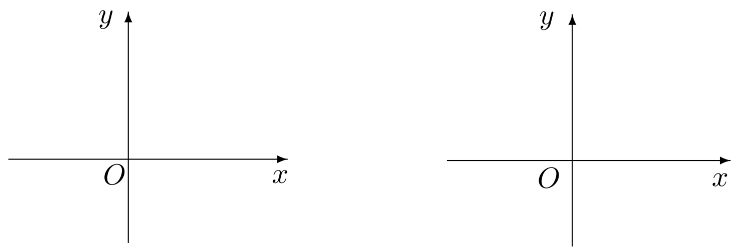
习题 5.4.5 试说明$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\sin 2\pi y$及$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\sin[2\pi(y-x)]+1$, $f(x,y)\in C^1$ 的每一个解都是整体存在的。

解 显然方程满足解的存在唯一性定理的条件，记$y(x;x_0,y_0)$为过(x_0,y_0)的解。

(1). 对方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\sin 2\pi y$，它有一族解$y=\frac{k}{2}$, $-\infty<x<+\infty$, ($k=0,\pm1,\pm2\cdots$), 是整体存在的。如$y_0=\frac{k}{2}$, 则$y(x;x_0,y_0)\equiv$

$\frac{k}{2}$, $-\infty < x < +\infty$,是整体存在的。如$2y_0 \neq$整数, 则有某个k,使得$\frac{k}{2} < y_0 < \frac{k+1}{2}$. 这时，$y = \frac{k}{2}$和$y = \frac{k+1}{2}$都是解，由解的存在唯一性知，$y(x; x_0, y_0)$永远位于$y = \frac{k}{2}$和$y = \frac{k+1}{2}$之间。由延拓定理知，$y(x; x_0, y_0)$是整体存在的。

(2). 对方程$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\sin[2\pi(y - x)] + 1$, 令$u = y - x$, 则方程变成$\frac{du}{dx} = f(x, y)\sin 2\pi u$, 它的解是整体存在的。所以，原方程的解是整体存在的。



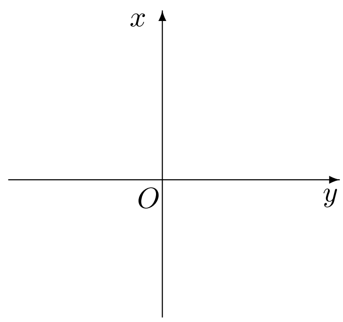
习题 5.4.6 讨论微分方程$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2+3y^2}$的存在区间.

解 $f(x, y) = \frac{1}{2x^2+3y^2}$在除原点$(0, 0)$外的整个平面上连续可微, 由延拓定理, 积分曲线可延伸到$G = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$的边界.

设$y = y(x)$, $x \in J$为一个饱和解,则有$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{2x^2+3y^2(x)} > 0$. 故$y = y(x), x \in J$的反函数存在, 记为$x = x(y)$, 且$x(y)$满足

$$\frac{dx(y)}{dy} = 2x^2(y) + 3y^2.$$

$x = x(y)$作为y的函数,其存在区间是有限的, 如记为(c, d), 则$x(y) \to \infty$当$y \to c+$或$y \to d-$时, 其图形为.



此时, $y(x)$是有界的. 由此知道, 这时解的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$, 或$(0,+\infty)$, 或$(-\infty,0)$.

习题 5.4.7 研究方程

$$\frac{dy}{dx}=(1-y^2)e^{xy^2}$$

的解的最大存在区间.

解 显然, $f(x,y)=(1-y^2)e^{xy^2}$在平面$\mathbb{R}^2$上连续可微,所以该方程经过平面$\mathbb{R}^2$上的任一点$P_0=(x_0,y_0)$的积分曲线$\Gamma: y=y(x)$是唯一存在的, 并将延伸到无限远.设它的最大存在区间是(α,β).

方程有两个特解$y=1$和$y=-1$. 如果$y_0=1$或-1,则由唯一性知,解$y(x)\equiv 1$或$y(x)\equiv -1$, 存在区间为$(-\infty,+\infty)$.

若$y_0\neq\pm1$, 则y_0有三种情形: (1) $-1<y_0<1$; (2) $y_0<-1$; (3) $y_0>1$.

用直线$y=-1$和$y=1$将平面$\mathbb{R}^2$分成三个区域

$$\begin{aligned}
G_1&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ -1<y<1\},\\
G_2&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y<-1\},\\
G_3&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y>1\}.
\end{aligned}$$

在情形(1), $y'>0$. 因而解$y(x)$是单调上升的.由唯一性和延伸性知,解$y(x)$永远位于$y=-1$和$y=1$这两条直线之间的区域G_1内, 且要延伸到无穷远. 因为$y(x)$有界,从而x能到无穷远. 所以,此时解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$.

在情形(2), $y'<0$. 由唯一性知,解$y(x)$永远位于$y=-1$的下方区域G_2内, 且解$y(x)$是下降的.所以,向左延伸时解$y(x)$是上有界的,即$y=-1$挡住了解$y(x)$, 因而x向左能延伸到无穷远. 由于方程的特殊性, 设$y=y(x)$是方程过(x_0,y_0)的解, $y_0<-1$, 则有

$$\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{1-y^2}=\int_{x_0}^{x}e^{xy^2(x)}dx.$$

因为$\int_{-\infty}^{y_0}\frac{dy}{y^2-1}$收敛及$\int_{x_0}^{x}e^{xy^2(x)}dx\geq\int_{x_0}^{x}e^{x}dx$, 所以解的向右延伸区间是有限的, 即解的存在区间为$(-\infty,\beta)$, 其中β是有限数.

在情形(3), $y' < 0$. 由唯一性知,解$y(x)$永远位于$y = 1$的上方区域G_3内, 且解$y(x)$是单调下降的.所以,向右延伸时解$y(x) > 1$是下有界的,因而x向右能延伸到无穷远.

先假设$y(x)$向左延伸时必穿过y轴. 设存在区间为$(\alpha, +\infty)$. 断言: $\alpha = -\infty$. 反证. 若设$-\infty < \alpha < 0$, 则由延伸定理知, 当$x \to \alpha + 0$时, $y(x) \to +\infty$. 于是, $x = \alpha$是解曲线的渐近线. 另一方面, 当$\alpha < x < x_1 < 0$时, 有

$$0 \le -y'(x) = (y^2(x) - 1)e^{xy^2(x)} \le (y^2(x) - 1)e^{x_1 y^2(x)}.$$

易知,

$$(y^2(x) - 1)e^{x_1 y^2(x)} \to 0 \qquad (\text{当} x \to \alpha + 0).$$

因而, $y'(x) \to 0$, 当$x \to \alpha + 0$时, 得矛盾. 所以, $\alpha = -\infty$, 且$y'(x) \to 0$, 当$x \to -\infty$.

再由延伸定理和解对初值的连续性定理知, 所有的解必将穿过y轴, 因而所有的解的存在区间为$(-\infty, \infty)$.

习题 5.4.8 证明方程$y' = \ln(1 + x^4 y)$满足初值条件$y(x_0) = y_0 > 0$的解的存在区间为$(-\infty, +\infty)$.

解 显然$y = 0$是一特解，且在$y \ge 0$的上半平面满足存在唯一性定理的条件。于是，满足初值条件$y(x_0) = y_0 > 0$的解$y(x) := y(x, x_0, y_0) > 0$. 设$x \in (\alpha, \beta)$为最大存在区间。易知

$$y'(x) = \ln(1 + x^4 y(x)) \le x^4 y(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

从而,

$$y(x) \le y_0 \exp\big(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{5}x_0^5\big), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

由延伸定理知，存在区间必为$(-\infty, +\infty)$.

习题 5.4.9 考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n,$$

其中$f:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$连续,关于$y$满足局部李氏条件. 假设

$$||f(x,y)||\le\lambda(x)(1+h(||y||),\quad (x,y)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n,$$

其中$\lambda(x)$, $h(r)$是$[0,+\infty)$上非负连续函数,且满足

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+h(r)}dr=\infty.$$

则初值问题的解$y(x)$的最大存在区间是$[0,+\infty)$.

证明 显然,初值问题的解存在唯一, 记为$y(x)$, 其最大存在区间是$[0,\beta)$. 因为$||y(x)||^2=(y^T(x),y(x))$, 知

$$2||y(x)||\frac{d||y(x)||}{dx}=2\big(y^T(x),\frac{dy(x)}{dx}\big),$$

其中$y^T(x)$表示$y(x)$的转置. 由此得到

$$\frac{d||y(x)||}{dx}\le\Big|\Big|\frac{dy(x)}{dx}\Big|\Big|$$

下证$\beta=\infty$. 用反证法. 设$\beta<+\infty$, 则当$x\to\beta$时, 有$||y(x)||\to\infty$. 由条件知,

$$\frac{d||y(x)||}{dx}\le\lambda(x)(1+h(||y(x)||),\quad x\in[0,\beta),$$

即

$$\int_{||y_0||}^{||y(x)||}\frac{dr}{1+h(r)}\le\int_0^x\lambda(x)dx,\quad x\in[0,\beta).$$

当$x\to\beta$时,得矛盾. 所以, $\beta=\infty$.

习题 5.4.10 *(第一比较定理)* 设纯量函数$f(x,y)$与$F(x,y)$都在平面区域G内连续且满足不等式

$$f(x,y)<F(x,y),\quad (x,y)\in G;$$

又设函数$y=\phi(x)$与$y=\Phi(x)$在区间$a<x<b$上分别是初值问题

$$(E_1):\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

与

$$(E_2):\qquad \frac{dy}{dx}=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的解,其中$(x_0,y_0)\in G$. 则我们有

$$\phi(x)<\Phi(x),\qquad \text{当 } x_0<x<b;$$
$$\phi(x)>\Phi(x),\qquad \text{当 } a<x<x_0.$$

证明 记$\psi(x)=\Phi(x)-\phi(x)$, 则有

$$\psi(x_0)=0,\quad \psi'(x_0)=F(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)>0.$$

因此存在$\sigma>0$, 使得

$$\psi(x)>0,\quad x_0<x<x_0+\sigma.$$

如果结论中的第一式不成立, 则至少存在一个$x_1\,(>x_0)$, 使得$\psi(x_1)=0$. 令

$$\beta=\min\{x|\ \psi(x)=0,x_0<x<b\}.$$

则我们推得

$$\psi(\beta)=0,\quad \psi(x)>0,\quad (x_0<x<\beta),$$

它蕴含

$$\psi'(\beta)\le 0.$$

但另一方面, 由于$\psi(\beta)=0$, 则有$\Phi(\beta)=\phi(\beta):=\gamma$. 于是,

$$\psi'(\beta)=\Phi'(\beta)-\phi'(\beta)=F(\beta,\gamma)-f(\beta,\gamma)>0.$$

矛盾. 所以结论的第一式成立. 同理证明第二式.

§5.5 解对初值与参数的连续依赖性

习题5.5解答

习题 5.5.1 试求下列方程过$(0,0)$的解，并由此讨论解对参数μ的连续性:

(1) $\frac{dy}{dx}+\mu y=1$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\mu x\sqrt{1-y^2}$.

解 (1) 当$\mu\neq 0$时, 求得通解

$$y=Ce^{-\mu x}+\frac{1}{\mu}.$$

因而,过$(0,0)$点的解为

$$y=\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu x}).$$

当$\mu=0$时, 易得过$(0,0)$点的解为

$$y=x.$$

合知, 方程过$(0,0)$点的解为

$$y=\phi(x,\mu)=\begin{cases}\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu x}), & (\mu\neq 0),\\ x, & (\mu=0),\end{cases}$$

它在整个(x,μ)平面连续.

(2) 易求得方程过$(0,0)$点的解为

$$y=\phi(x,\mu)=\sin\frac{\mu x^2}{2},$$

它在整个(x,μ)平面连续.

习题 5.5.2 试求下列方程过(x_0,y_0)的解，并由此讨论解对初值的连续性:

(1) $\frac{dy}{dx}-3y=e^x$;

(2)$\frac{dy}{dx}=3x^2e^y$.

解 (1) 方程是线性方程, 通解为

$$y=Ce^{3x}-\frac{1}{2}e^x,$$

其中C是任意常数. 由初始条件$y(x_0)=y_0$,得

$$C=(y_0+\frac{1}{2}e^{x_0})e^{-3x_0}.$$

于是, 满足初始条件的解可表示为

$$y=\phi(x,x_0,y_0)=(y_0+\frac{1}{2}e^{x_0})e^{3(x-x_0)}-\frac{1}{2}e^x,$$

它在整个(x,x_0,y_0)平空间内连续.

(2) 通解为

$$e^{-y}+x^3=C,$$

其中C为任意常数. 由初始条件$y(x_0)=y_0$, 得

$$C=e^{-y_0}+x_0^3.$$

于是, 满足初始条件的解可表示为

$$y=\phi(x,x_0,y_0)=-\ln(e^{-y_0}+x_0^3-x^3),$$

在其存在的范围内连续.

习题 5.5.3 给定区间$I=[a,b]$. 证明：如$|\epsilon|$充分小，则初值问题

$$\frac{dy}{dx}=\cos(x(y-x)),\quad y(a)=a+\epsilon$$

在区间$[a,b]$上有唯一解$y=\phi(x,\epsilon)$, 且$\lim\limits_{\epsilon\to 0}\phi(x,\epsilon)=x$ 在I上一致地成立。

证明 记$f(x,y)=\cos(x(y-x))$, 则显然$f(x,y)$在整个(x,y)-平面上连续可微，且$|f(x,y)|\le 1$. 从而，初值问题的解$y=\phi(x,\epsilon)$是存在唯一的，关于参数ϵ是连续的，且解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 现在，区间I是$\mathbb{R}$的一个有界闭区间。于是，初值问题在区间$[a,b]$上有唯一解$y=\phi(x,\epsilon)$，关于(x,ϵ) 在有界闭区域$[a,b]\times[0,1]$上是一致连续的。注意到，$y=x$是$\epsilon=0$情形初值问题的唯一解。由此知$\lim\limits_{\epsilon\to 0}\phi(x,\epsilon)=x$ 在I上一致地成立。

习题 5.5.4 *(1)* 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx}+x(y-x)+x^3(y-x)^2=1; \tag{1}$$

(2) 设$\phi_n(x)$是初值问题

$$\frac{dy}{dx}+x\big(y-n\sin\frac{x}{n}\big)+x^3\big(y-n\sin\frac{x}{n}\big)^2=1,\quad y\Big|_{x=0}=1 \tag{2_n}$$

的解. 证明，当$n\to+\infty$时，$\phi_n(x)$有极限，并求它的极限。

解 (1) 令$u=y-x$, 则方程(1)变成

$$\frac{du}{dx}+xu+x^3u^2=0. \tag{3}$$

它是一Bernoulli方程. 再令$z=\frac{1}{u}$, 则方程(3)变成

$$\frac{dz}{dx}=xz+x^3. \tag{4}$$

方程(4)是线性方程, 其通解为

$$z=e^{\frac{1}{2}x^2}C-x^2-2.$$

于是, 方程组(1)的通解为

$$y=\frac{1}{Ce^{\frac{1}{2}x^2}-x^2-2}+x,$$

其中C为任意常数. 进而, 可求得(1)满足条件$y\Big|_{x=0}=1$的解为

$$y(x)=\frac{1}{3e^{\frac{1}{2}x^2}-x^2-2}+x.$$

(2) 方程(2_n)中的函数在(x,y)平面是连续可微的, 从而它的初值问题的解是存在唯一的,且解对初值和参数是连续依赖的. 因当$n\to\infty$时, 方程(2_n)的极限方程是(1). 所以,

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\frac{1}{3e^{\frac{1}{2}x^2}-x^2-2}+x.$$

习题 5.5.5 *(Coddington-Levinson定理) 设$f(x,y)$在有界闭区域R上连续，而且微分方程*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

经过R内任何一点的积分曲线都是(存在)唯一的，则上述微分方程的解对初值是连续依赖的。

证 假设R是n维空间中的区域。设方程过(x_0,y_0)点的解记为$y=\phi(x;x_0,y_0)$. 只须证：$\phi(x;x_0,y_0)$关于(x_0,y_0)是连续的。用反证法。若存在x^*, 使$\phi(x^*;x_0,y_0)$关于(x_0,y_0) 是不连续的，则存在$(x_0^{(k)},y_0^{(k)})\to(x_0,y_0)$, $\epsilon_*\geq 0$, 使

$$||\phi(x^*;x_0^{(k)},y_0^{(k)})-\phi(x^*;x_0,y_0)||\geq\epsilon_*.$$

不妨设$x^* > x_0$. 因$f(x,y)$在有界闭区域R上连续，它有界，可设$M > \sup\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$. 于是, 函数族$\{\phi(x;x_0^{(k)},y_0^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$在$[x_0,x^*]$上有定义, 一致有界, 等度连续. 从而存在子列$(x_0^{(k)},y_0^{(k)}) \to (x_0,y_0)$ (不妨设)，使$\phi(x;x_0^{(k)},y_0^{(k)})$在$[x_0,x^*]$上一致收敛于$\psi(x)$. 这时，$\psi(x^*) \neq \phi(x^*;x_0,y_0)$.

又因

$$\phi(x;x_0^{(k)},y_0^{(k)}) = y_0^{(k)} + \int_{x_0^{(k)}}^{x} f(x,\phi(x;x_0^{(k)},y_0^{(k)}))dx,$$

令$k\to\infty$, 得

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))dx.$$

由唯一性得，$\psi(x) = \phi(x;x_0,y_0)$. 矛盾。

§5.6 解对初值和参数的可微性

习题5.6解答

习题 5.6.1 求给定方程的解对初始值的导数

$$y' = y + y^2 + xy^3, \quad y(2) = y_0,$$

试求$\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

解 设$y(x,y_0) = y(x,2,y_0)$是初值问题的解。令$z = \frac{\partial y}{\partial y_0}$, 则$z$满足

$$\begin{cases} z' = (1+2y(x,y_0)+3xy^2(x,y_0))z, \\ z(2) = 1. \end{cases}$$

从而

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\int_2^x (1+2y(x,y_0)+3xy^2(x,y_0))dx}.$$

注意到方程右端满足解对初值的存在唯一性条件，故$y(x,0) = y(x,2,0) \equiv 0$. 所以

$$\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = e^{x-2}.$$

习题 5.6.2 设$y=\phi(x;x_0,y_0)$是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=e^{x^\alpha y}-1, \quad \alpha>1; \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解. 试求$\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0,y_0=0}$, $\frac{\partial\phi}{\partial y_0}\Big|_{x_0=0,y_0=0}$的表达式.

解 答案是

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0,y_0=0}=0.$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y_0}\Big|_{x_0=0,y_0=0}=e^{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}.$$

习题 5.6.3 设微分方程

$$(D): \quad \frac{dy}{dx}=\lambda(1+\sin^2 x+\sin^2 y)+x,$$

其中λ是参数。又设边界条件

$$(B): \quad y(0)=0,\ y(1)=b.$$

试证: 对任意常数b, 存在唯一的$\lambda=\lambda_0$, 问题$(D)+(B)$有解。

证明 记$f(x,y,\lambda)=\lambda(1+\sin^2 x+\sin^2 y)+x$, 则$f(x,y,\lambda)$关于$(x,y,\lambda)$是连续可微的，且

$$|f(x,y,\lambda)|\le|x|+3|\lambda|.$$

由解的存在唯一性定理和解对参数的可微性定理知，方程(D)满足初始条件$y(0)=0$的解是存在唯一的，记为$\phi(x,\lambda)$，它是连续可微的，且其存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 下面只须证明存在唯一$\lambda=\lambda_0$满足$\phi(1,\lambda)=b$.

首先注意到

$$\phi(x,\lambda)=\int_0^x[\lambda(1+\sin^2 t+\sin^2\phi(t,\lambda))+t]dt.$$

于是，

$$\phi(1,\lambda)=\lambda\int_0^1(1+\sin^2 t+\sin^2\phi(t,\lambda))dt+\frac{1}{2}.$$

从而，$\phi(1,\lambda)\to\infty$, 当$\lambda\to\infty$时；$\phi(1,\lambda)\to-\infty$, 当$\lambda\to-\infty$时。所以，由连续性知，对任意$b$, 都有$\lambda=\lambda_0$满足$\phi(1,\lambda)=b$。下证明唯一性。

记$z(x,\lambda)=\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(x,\lambda)$, 则$z=z(x,\lambda)$满足初值问题

$$\frac{dz}{dx}=(1+\sin^2 x+\sin^2\phi)+\lambda\sin 2\phi\cdot z,\quad z(0)=0,$$

其中$\phi=\phi(x,\lambda)$. 解得

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(x,\lambda)=\int_0^x(1+\sin^2 t+\sin^2\phi(t,\lambda))e^{\int_x^t\lambda\sin 2\phi(s,\lambda)ds}dt.$$

于是，

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)=\int_0^1(1+\sin^2 t+\sin^2\phi(t,\lambda))e^{\int_1^t\lambda\sin 2\phi(s,\lambda)ds}dt>0,\quad\forall\lambda.$$

说明$\phi(1,\lambda)$关于λ是严格单调增加的。所以，满足$\phi(1,\lambda)=b$的λ是唯一的。

习题 5.6.4 设$\phi(x;x_0,y_0)$是标量方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\quad\in C^1,\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$$

的解, 试证明

$$\frac{\partial\phi(x;x_0,y_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial\phi(x;x_0,y_0)}{\partial y_0}f(x_0,y_0)=0.$$

证明 因$\frac{\partial\phi}{\partial x_0}$满足

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f_y(x,\phi(x;x_0,y_0))z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0),\end{cases}$$

而$\frac{\partial\phi}{\partial y_0}$满足

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f_y(x,\phi(x;x_0,y_0))z,\\ z(x_0)=1,\end{cases}$$

推得$\frac{\partial\phi(x;x_0,y_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial\phi(x;x_0,y_0)}{\partial y_0}f(x_0,y_0)$满足

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f_y(x,\phi(x;x_0,y_0))z,\\ z(x_0)=0.\end{cases}$$

由此可推得结论.

习题 5.6.5 设$(x,y)=(x(t,\mu),y(t,\mu))$是初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}=x+y, & x(0)=1+\mu, \\ \dot{y}=2x+\mu y^2, & y(0)=-2 \end{cases}$$

的解。求$\frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$.

解 由方程的形式和定理知，解关于参数是连续可微的。在方程中令$\mu=0$, 则得

$$\begin{cases} \frac{dx(t,0)}{dt}=x(t,0)+y(t,0), & x(0,0)=1; \\ \frac{dy(t,0)}{dt}=2x(t,0), & y(0,0)=-2. \end{cases}$$

将上面方程组的第二式代入第一式，得

$$\frac{d^2y(t,0)}{dt^2}=\frac{dy(t,0)}{dt}+2y(t,0), \qquad y(0,0)=-2,\ y'(0,0)=2, \tag{1}$$

方程(1)的特征方程是

$$\lambda^2-\lambda-2=0,$$

特征根是$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$. 从而，方程(1)的解是

$$y(t,0)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}.$$

由初值条件，得

$$-2=C_1+C_2, \qquad 2=2C_1-C_2.$$

于是，$C_1=0, C_2=-2$. 所以，可得

$$y(t,0)=-2e^{-t}, \quad x(t,0)=e^{-t}.$$

记

$$\begin{aligned} z_1(t,\mu)&=\tfrac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}, & z_2(t,\mu)&=\tfrac{\partial y(t,\mu)}{\partial \mu}, \\ \dot{z}_1&=\tfrac{dz_1(t,\mu)}{dt}, & \dot{z}_2&=\tfrac{dz_2(t,\mu)}{dt}. \end{aligned}$$

则有

$$\begin{cases} \dot{z}_1=z_1+z_2, & z_1(0,\mu)=1; \\ \dot{z}_2=2z_1+y^2(t,\mu)+2\mu y(t,\mu)z_2, & z_2(0,\mu)=0. \end{cases}$$

如再记

$$v_1(t)=z_1(t,0), v_2(t)=z_2(t,0),$$

则有
$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_1 + v_2, & v_1(0) = 1, \\ \dot{v}_2 = 2v_1 + 4e^{-2t}, & v_2(0) = 0,\ \dot{v}_2(0) = 6. \end{cases}$$
由上面的第二方程, 知$v_1 = \frac{1}{2}\dot{v}_2 - 2e^{-2t}$, 再代入第一方程，得
$$\ddot{v}_2 - \dot{v}_2 - 2v_2 = -12e^{-2t}. \tag{2}$$
方程(2)的特征方程是
$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$
特征根是$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$. 从而，方程(2)的通解是
$$v_2(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 3e^{-2t}.$$
再由条件$v_2(0) = 0,\ \dot{v}_2(0) = 6$, 得
$$C_1 + C_2 - 3 = 0, \quad 2C_1 - C_2 + 6 = 6.$$
于是，$C_1 = 1$, $C_2 = 2$. 从而求得
$$v_2(t) = e^{2t} + 2e^{-t} - 3e^{-2t}.$$
所以
$$\frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0} = e^{2t} + 2e^{-t} - 3e^{-2t}.$$

第六章　定性理论

§6.1　动力系统概念

习题6.1解答

习题 6.1.1 设系统$\frac{dx}{dt}=f(x)$有一个解$\phi(t)$当$t\to+\infty$时满足$\phi(t)\to c$，其中f连续可微。证明c是此系统的平衡点。

证明 容易知道

$$\phi(t+1)-\phi(t)=\int_t^{t+1}\phi'(s)ds=\int_t^{t+1}f(\phi(s))ds=\int_0^1 f(\phi(s+t))ds.$$

令$t\to+\infty$得,$f(c)=0.$

习题 6.1.2 设二维自治系统$\frac{dx}{dt}=f(x)$的解$\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t))$的轨道是一条闭曲线,其中$f(x)$有界连续可微. 证明$\phi(t)$是周期解.

证明 因$\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t))$的轨道是一条闭曲线, 从而存在$t_0$及$T>0$, 使得

$$\phi(t_0)=\phi(t_0+T).$$

因$\phi(t+T)$也是方程的解，由存在唯一性定理，有

$$\phi(t)=\phi(t+T).$$

§6.2　Lyapunov稳定性

习题6.2解答

习题 6.2.1 从定义出发,研究方程$x'=1+t-x$满足条件$x(0)=0$的解的稳定性.

解 方程的通解为

$$x=Ce^{-t}+t,$$

得满足初值条件$x(0)=x_0$的解为$x(t)=x(t;0,x_0)=x_0e^{-t}+t$. 从而,满足初值条件$x(0)=0$的解为$\phi(t)=t$.

对任意的$\epsilon > 0$, 取$\delta \le \epsilon$, 当$|x_0| < \delta$时,有

$$|x(t) - \phi(t)| = |x_0 e^{-t}| < \epsilon, \quad \forall t \ge 0.$$

所以, 解$\phi(t) = t$是稳定的. 又$\lim\limits_{t\to+\infty}(x(t) - \phi(t)) = \lim\limits_{t\to+\infty} x_0 e^{-t} = 0$. 所以, 解$\phi(t) = t$是渐近稳定的.

习题 6.2.2 *试确定下列方程的平衡点,并判断其稳定性:*

(1) $\frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)$*;*

(2) $\frac{dx}{dt} = (x-1)(e^x - 1)$*;*

(3) $\frac{dx}{dt} = Ax + Bx^2$*, 其中*$A > 0, B > 0$*是常数.*

解 (1) 0不稳定, 1渐近稳定, 2不稳定;

(2) 0渐近稳定, 1不稳定;

(3) $-\frac{A}{B}$渐近稳定, 0不稳定.

习题 6.2.3 *讨论下列方程组零解的稳定性:*

(1) $\frac{dx}{dt} = -2x + y + x^2e^x, \quad \frac{dy}{dt} = x - y + x^3y$*;*

(2) $\frac{dx}{dt} = \sin(x+y), \quad \frac{dy}{dt} = -\ln(1+y)$*;*

(3) $\frac{dx}{dt} = -3x + y + x^2\sin y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 3y + y^2e^x$*.*

解 (1) 线性部分的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

特征根都小于0. 所以，零解渐近稳定。

(2) 在$(0,0)$展开

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 + \cdots, \\ \frac{dy}{dt} = -y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \cdots. \end{cases} \tag{$*$}$$

方程$(*)$的线性部分的特征方程是$\lambda^2 - 1 = 0$, 有特征根$\lambda_{1,2} = \pm 1$, 有正实部的根. 所以,零解是不稳定的.

(3) 线性部分的特征方程为

$$(3+\lambda)^2 + 2 = 0.$$

特征根是$\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{2}$, 具有负实部. 因而，零解是渐近稳定.

习题 6.2.4 用V函数法研究下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -2(x^3 + y^5);$

(2) $\frac{dx}{dt} = -y - xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^4 y;$

(3) $\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1);$

(4) $\frac{dx}{dt} = 2y + yz - x^3, \ \frac{dy}{dt} = -x - xz - y^3, \ \frac{dz}{dt} = xy - z^3.$

解 (1) 取$V = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^2$定正, 则

$$\frac{dV}{dt} = 2x^3\dot{x} + y\dot{y} = 2x^3(y - x^3) - 2y(x^3 + y^5) = -2x^6 - 2y^6$$

定负. 所以,零解是渐近稳定的.

(2) 取$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$定正，知零解是稳定的。

(3) 取$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$定正, 则

$$\frac{dV}{dt} = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) < 0, \quad \text{当} 0 < x^2 + y^2 < 1 \text{时}.$$

所以,原点渐近稳定.

(4) 取$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, 其中取$a = c = 1$, $b = 2$, 知零解是渐近稳定的.

习题 6.2.5 求下列方程组的平衡点, 并研究其稳定性:

(1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + (x-1)^3, \\ \frac{dy}{dt} = x - 1 + y^3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2 - x, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$

解 (1) 平衡点是$(1, 0)$. 令

$$u = x - 1, \quad v = y,$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt} = -v + u^3, \quad \frac{dv}{dt} = u + v^3.$$

取$V = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2$, 则

$$\frac{dV}{dt} = u\dot{u} + v\dot{v} = u^4 + v^4.$$

所以，平衡解是不稳定的。

(2) 求得平衡点$(0,0)$, $(1,2)$.

(i) 对平衡点$(0,0)$, 因线性部分的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda-2=0.$$

它有一个正的特征根。所以，$(0,0)$是不稳定的。

(ii) 对平衡点$(1,2)$. 令

$$x=u+1, \quad y=v+2,$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt}=-3u+v-u^2, \quad \frac{dv}{dt}=u-v-u^2.$$

特征方程是

$$\lambda^2+4\lambda+2=0.$$

特征根的实部都小于零。所以，$(1,2)$是渐近稳定的.

习题 6.2.6 *求方程$\dddot{x}+x=\cos t$的周期解，并研究它的稳定性。*

解 特征方程是

$$\lambda^3+1=0,$$

特征根是

$$\lambda_1=-1, \quad \lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

得到方程的通解是

$$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t).$$

由此可见，方程的周期解是

$$\phi(t)=\frac{1}{2}(\cos t-\sin t).$$

因

$$x(t)-\phi(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

是无界的，只要$|C_2|+|C_3|\neq 0$, 知这周期解是不稳定的。

习题 6.2.7 研究方程组

$$\dot{x}=y^2-2ty-2y-x,\quad \dot{y}=2x+2t^2+e^{2t-2y}$$

的解$x=-t^2$, $y=t$是不是稳定的.

解 令

$$x=u-t^2,\quad y=v+t,$$

代入方程得

$$\begin{cases}\dot{u}=-u-2v+v^2,\\ \dot{v}=2u-1+e^{-2v}=2u-2v+\frac{(2v)^2}{2!}+\cdots.\end{cases}\tag{$*$}$$

$(*)$的线性部分的特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+6=0.$$

得特征根$\lambda_{1,2}=\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$, 具有负的实部. 所以, 方程$(*)$的零解是渐近稳定的. 从而,得所求问题的解是渐近稳定的.

习题 6.2.8 若在原点的某个邻域内恒有$h(x,\dot{x})\geq 0$, 证明方程$\ddot{x}+h(x,\dot{x})\dot{x}+x=0$的零解是稳定的.

解 方程变成

$$x'=y,\quad y'=-x-h(x,x')y.$$

取$V=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$, 则

$$\frac{dV}{dt}=x\dot{x}+y\dot{y}=-h(x,y)y^2\leq 0.$$

所以，零解稳定.

习题 6.2.9 证明: 线性方程零解的渐近稳定性等价于它的全局渐近稳定性.

证 $\Leftarrow$是显然的.

$\Rightarrow$ 只须证:"局部吸引$\Rightarrow$全局吸引".

设$X(t)$是基解矩阵, 则过(t_0,x_0)的解可以写成

$$x(t;t_{,0},x_0)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0.$$

因零解吸引, 则存在$\delta_0>0$, 使当$|\tilde{x}_0|<\delta_0$时, 有$x(t;t_0,\tilde{x}_0)\to 0$, 当$t\to\infty$时. 对任意的$x_0$, 存在常数$\tilde{c}\neq 0$, 使得$|\tilde{c}x_0|\le\delta_0$. 从而,

$$x(t;t_{,0},\tilde{c}x_0)=X(t)X^{-1}(t_0)(\tilde{c}x_0)=\tilde{c}X(t)X^{-1}(t_0)x_0\to 0,\quad (t\to\infty).$$

所以, $X(t)X^{-1}(t_0)x_0\to 0$, $(t\to\infty)$, 即, 零解是全局吸引的.

习题 6.2.10 设$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$都是正数, $x\ge 0, y\ge 0$, 求出方程组

$$\frac{dx}{dt}=-\alpha x+\beta x^2-\gamma xy,\quad \frac{dy}{dt}=-\delta y+\epsilon xy$$

的所有平衡解并讨论其稳定性.

解 平衡点是$(0,0),(\frac{\alpha}{\beta},0),(\frac{\delta}{\epsilon},\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon\gamma})$.

(i) 对平衡点$(0,0)$, 特征方程是

$$(\alpha+\lambda)(\delta+\lambda)=0.$$

特征根是$\lambda_1=-\alpha,\lambda_2=-\delta$. 所以，$(0,0)$是稳定的.

(ii) 对平衡点$(\frac{\alpha}{\beta},0)$，令

$$x=u+\frac{\alpha}{\beta},\quad y=v.$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt}=\alpha u-\frac{\gamma\alpha}{\beta}v+\beta u^2-\gamma uv,\quad \frac{dv}{dt}=(-\delta+\frac{\epsilon\alpha}{\beta})v+\epsilon uv.$$

有一特征根$\lambda=\alpha>0$. 所以，平衡点$(\frac{\alpha}{\beta},0)$不稳定。

(iii) 当$\beta\delta-\epsilon\alpha>0$时，平衡点在第一象限. 令

$$x=u+\frac{\delta}{\epsilon},\quad y=v+\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon\gamma}.$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt}=\frac{\delta\beta}{\epsilon}u-\frac{\delta\gamma}{\epsilon}v+\beta u^2-\gamma uv,\quad \frac{dv}{dt}=\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\gamma}u+\epsilon uv.$$

特征方程是

$$\lambda^2-\frac{\delta\beta}{\epsilon}\lambda+\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon}\delta=0.$$

有正特征根。所以，$(\frac{\delta}{\epsilon},\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon\gamma})$是不稳定的.

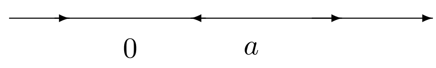
习题 6.2.11 研究下列含参数a的微分方程的相图,并画出分支图.

(1) $\frac{dx}{dt} = x^2 - ax$;

(2) $\frac{dx}{dt} = x^3 - ax$;

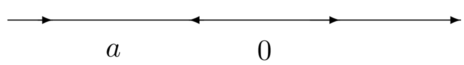
(3) $\frac{dx}{dt} = x^3 - x + a$.

解 (1) 当$a > 0$时, 方程有两个平衡点0和a. 0是稳定的，而a是不稳定的. 相图为

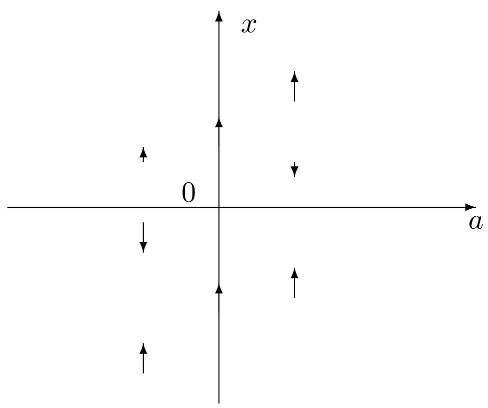


当$a = 0$时, 方程只有一个平衡点0. 0是不稳定的. 相图为

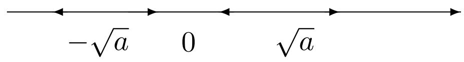
当$a < 0$时, 方程有两个平衡点0和a. 0是不稳定的，而a是稳定的. 相图为



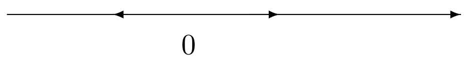
$a = 0$是分支值, 分支图为



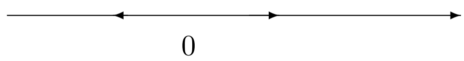
(2) 当$a > 0$时, 方程有三个平衡点0,$-\sqrt{a}$和$\sqrt{a}$. 0是稳定的, 而$-\sqrt{a}$和$\sqrt{a}$是不稳定的. 相图为



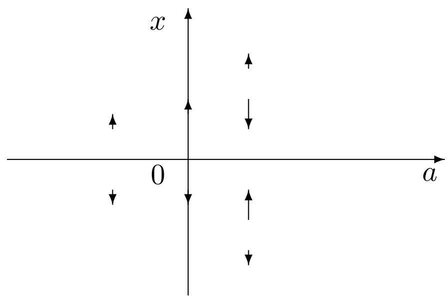
当$a=0$时, 方程只有一个平衡点0. 0是不稳定的. 相图为



当$a<0$时, 方程只有一个平衡点0. 0是不稳定的. 相图为



$a=0$是分支值, 分支图为



(3) 三次方程

$$x^3-x+a=0$$

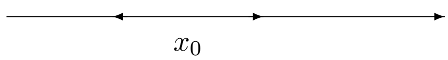
的判别式为$\Delta=\frac{a^2}{4}-\frac{1}{27}$.

当$\Delta<0$时, 即$a^2<\frac{4}{27}$时有三个实根$x_1<x_2<x_3$;

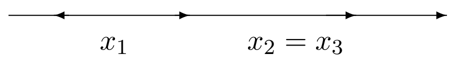
当$\Delta=0$时, 即$a^2=\frac{4}{27}$时三个实根中有两个相等, 即$x_1=x_2$或$x_2=x_3$;

当$\Delta>0$时, 即$a^2>\frac{4}{27}$时只有一个实根x_0.

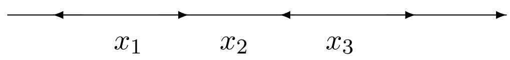
当$a>\frac{2\sqrt{3}}{9}$时, 只有一个平衡点x_0, 是不稳定的. 相图为



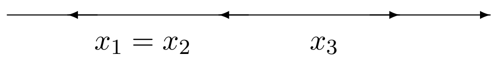
当$a=\frac{2\sqrt{3}}{9}$时, 有两个平衡点x_1和$x_2=x_3$. x_1是不稳定的, $x_2=x_3$也是不稳定的. 相图为



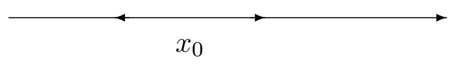
当$-\frac{2\sqrt{3}}{9}<a<\frac{2\sqrt{3}}{9}$时, 有三个平衡点$x_1<x_2<x_3$, x_1和x_3是不稳定的, 而x_2是稳定的. 相图为



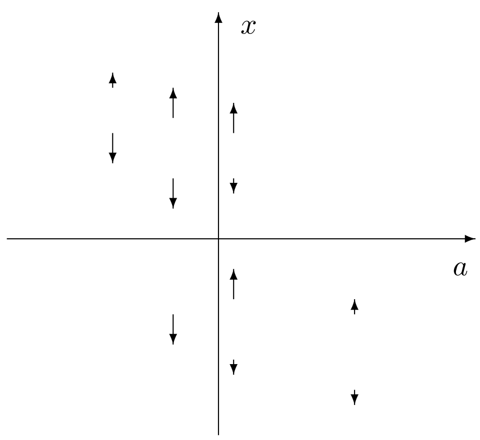
当$a=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$时, 有两个平衡点$x_1=x_2$和x_3. $x_1=x_2$是不稳定的, x_3也是不稳定的. 相图为



当$a<-\frac{2\sqrt{3}}{9}$时, 只有一个平衡点x_0, 是不稳定的. 相图为



$a=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$和$a=\frac{2\sqrt{3}}{9}$是分支值, 分支图为



§6.3 平面动力系统

习题6.3解答

习题 6.3.1 判断下列方程的奇点(0,0)的类型，并作出该奇点附近的相图:

(1) $\dot{x} = 4x - y, \quad \dot{y} = x + 2y;$

(2) $\dot{x} = x - 3y, \quad \dot{y} = 3x - 4y;$

(3) $\dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4, \quad \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2;$

(4) $\dot{x} = 2x + 4y + \sin y, \quad \dot{y} = x + y + e^y - 1;$

(5) $\dot{x} = x(1-y), \quad \dot{y} = y(1-x).$

解 (1) 特征方程是

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

特征根$\lambda = 3$是二重根. 故奇点为不稳定的临界结点或不稳定的退化结点.

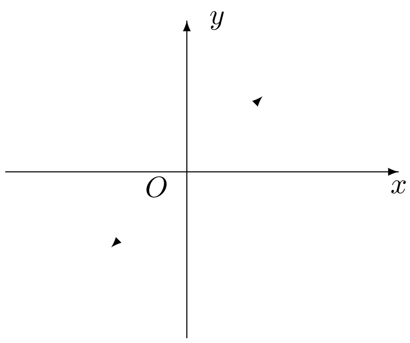
设$y = kx$是特殊方向, 则

$$k = \frac{1+2k}{4-k},$$

即

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

于是, $k = 1$. 所以, 奇点是不稳定的退化结点. 容易算出(1,0)点处的向量为(4,1). 再利用向量场的性质, 可画出相图如下:



(2) 奇点是稳定的焦点.

(3) 方程可以改写成

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y - \frac{y^3}{3} - y^4 + \cdots, \\ \dot{y} = x - 3y + 3x^2 + \frac{x^3}{3!} + \cdots. \end{cases}$$

其线性部分的特征方程为

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda - 23 = 0.$$

有两个相异的特征根$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{27}$. 故其线性方程

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y, \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

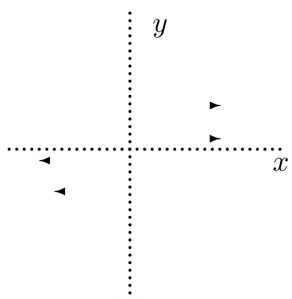
的奇点$(0,0)$是鞍点。显然$x = 0$不是特殊方向。设特殊方向为直线$y = kx$所指的方向，其中常数k待定。则$y = kx$是一积分曲线。因此，我们有

$$k = \frac{dy}{dx}\Big|_{y=kx} = \frac{x - 3y}{7x + 2y}\Big|_{y=kx} = \frac{1 - 3k}{7 + 2k},$$

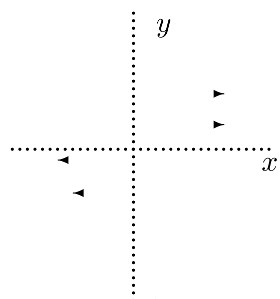
由此推出

$$2k^2 + 10k - 1 = 0,$$

解得$k_1 = \frac{-5+\sqrt{27}}{2}$和$k_2 = \frac{-5-\sqrt{27}}{2}$。容易算出向量场在$(1,0)$点处的向量为$(7,1)$. 再利用鞍点的结构和向量场的连续性，可确定轨线定向，从而可以作出相图如下：



(线性)



(非线性)

(4) 利用Taylor展开, 方程可写成

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y - \frac{y^3}{3!} + \cdots, \\ \dot{y} = x + 2y + \frac{y^2}{2!} + \cdots. \end{cases}$$

故其线性方程

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

的奇点$(0,0)$是鞍点。

(5) 方程可以改写成

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = y - xy. \end{cases}$$

其线性部分的特征方程为

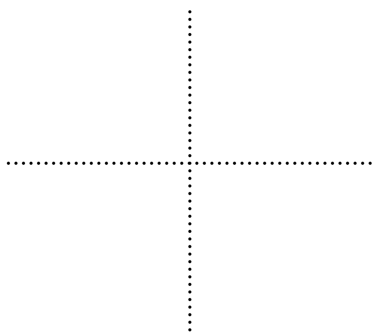
$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 = 0.$$

特征根$\lambda = 1$是二重根.

设特殊方向为直线$y = kx$所指的方向，其中常数k待定, 则$y = kx$是一积分曲线。因此, 我们有

$$k = \frac{dy}{dx}\Big|_{y=kx} = \frac{y}{x}\Big|_{y=kx} = k,$$

说明有无穷多个特殊方向. 于是, 奇点是不稳定的临界结点.



习题 6.3.2 求方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

的极限环并判定其稳定性。

解 令$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则原方程变成

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} &= -r(r^2-1), \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1. \end{cases}$$

它有两个特解

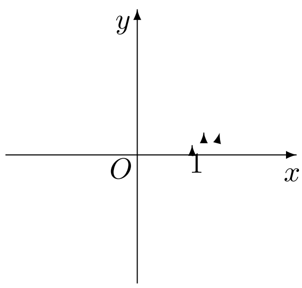
$$\begin{cases} r &= 0, \\ \theta &= t - t_0 \end{cases} \qquad \text{及} \qquad \begin{cases} r &= 1, \\ \theta &= t - t_0. \end{cases}$$

第一个特解是奇点$O(0,0)$, 第二个特解是以原点为中心半径为1的圆。其通解为

$$\begin{cases} r^2 &= \frac{C}{C+e^{-2t}}, \\ \theta &= t - t_0, \end{cases}$$

不是闭轨。所以$r=1$是系统的极限环。

可见，当$r>1$时，$\frac{dr}{dt}<0$；当$r<1$时，$\frac{dr}{dt}>0$；而$\theta(t)=t-t_0\to+\infty$，当$t\to+\infty$. 由此可知，当$t\to+\infty$时，$r=1$两侧的轨线盘旋趋近于1，所以$x^2+y^2=1$是稳定的极限环。



习题 6.3.3 证明系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1+\mu)y + (1-x^2-y^2)x, \\ \frac{dy}{dt} = -(1+\mu)x + (1-x^2-y^2)y \end{cases}$$

有且仅有唯一的非平凡的周期解, 并证明它的周期依赖于μ ($\mu \neq -1$).

解 作极坐标变换

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x},$$

则方程变成

$$\frac{dr}{dt} = (1-r^2)r, \quad \frac{d\theta}{dt} = -(1+\mu).$$

所以，$r=1$是周期解，在(x,y)坐标下对应表示为

$$x = \cos(1+\mu)t, \quad y = -\sin(1+\mu)t.$$

所以，周期解的周期依赖于μ.

习题 6.3.4 *(杜拉克判别(Dulac,1870-1955,法国数学家))* 设函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在单连通区域D内连续可微. 如果存在D内的连续可微函数$B(x,y)$使得

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \neq 0, \qquad 当(x,y)\in D.$$

试证系统

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y)$$

在D内不存在闭轨线.

解 反证, 设有闭轨Γ, 由格林公式(Green)有

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\Gamma BPdy - BQdx,$$

其中Ω是Γ所围之区域. 因Γ是闭曲线,上式右端曲线积分之被积函数

$$BPdy - BQdx = B(PQ-QP)dt = 0.$$

所以,曲线积分为零. 又左端重积分不为零. 矛盾.

习题 6.3.5 证明方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax + b\frac{dx}{dt} - \alpha x^2 - \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

没有极限环存在，其中a,b,α,β为常数，且$b\neq 0$.

证 令$y = \frac{dx}{dt}$, 则方程变成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y =: P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = \alpha x^2 + \beta y^2 - ax - by =: Q(x,y). \end{cases}$$

有平衡点$(0,0)$与$(\frac{a}{\alpha}, 0)$. 如用Bendixson判断，因

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -b + 2\beta y.$$

所以，只知道在$y > \frac{b}{2\beta}$与$y < \frac{b}{2\beta}$这两个半平面内都没有闭轨。但不能排除有与直线$y = \frac{b}{2\beta}$相交之闭轨。

进一部用Dulac判断。考虑下形状之$B(x,y)$

$$B(x,y) = e^{mx+ny},$$

其中m, n待定。因为

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = e^{mx+ny}[-b - anx - (bn - m - 2\beta)y + \alpha nx^2 + \beta ny^2].$$

如取$n = 0$, $m = -2\beta$, 即取

$$B(x,y) = e^{-2\beta x},$$

则有

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -be^{-2\beta x}$$

在全平面上不变号。所以，在全平面上无闭轨。

习题 6.3.6 设

$$T(A) = \frac{2\sqrt{2}\,A}{a} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\cos Au - \cos A}}$$

证明*:*

$$\lim_{A\to 0} T(A) = \frac{2\pi}{a}, \quad \lim_{A\to\pi} T(A) = \infty.$$

证明 因

$$\lim_{A\to 0} \frac{A^2}{\cos Au - \cos A} = \lim_{A\to 0} \frac{2A}{-u\sin Au + \sin A} = \frac{2}{1-u^2},$$

有

$$\lim_{A\to 0} T(A) = \frac{2\sqrt{2}}{a}\int_0^1 \lim_{A\to 0}\frac{A}{\sqrt{\cos Au - \cos A}}du = \frac{2\sqrt{2}}{a}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{2\pi}{a}.$$

又因

$$\lim_{A\to\pi}\frac{A}{\sqrt{\cos Au - \cos A}} = \frac{\pi}{\sqrt{\cos \pi u + 1}},$$

及

$$\begin{aligned} & \lim_{u\to 1}\tfrac{\sqrt{\cos\pi u+1}}{1-u} = \sqrt{\lim_{u\to 1}\tfrac{\cos\pi u+1}{(1-u)^2}} \\ = \ & \sqrt{\lim_{u\to 1}\tfrac{-\pi\sin\pi u}{-2(1-u)}} = \sqrt{\lim_{u\to 1}\tfrac{\pi^2\cos\pi u}{-2}} = \tfrac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

以及$\int_0^1 \frac{du}{1-u} = \infty$发散, 知$\int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{\cos\pi u+1}}du = \infty$发散. 所以, $\lim\limits_{A\to\pi} T(A) = \infty$.

习题 6.3.7 作出下列系统的相图*:*

(1) $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + x^2;$

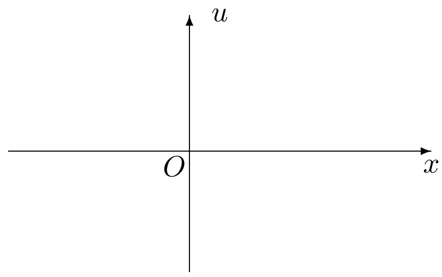
(2) $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + x^3.$

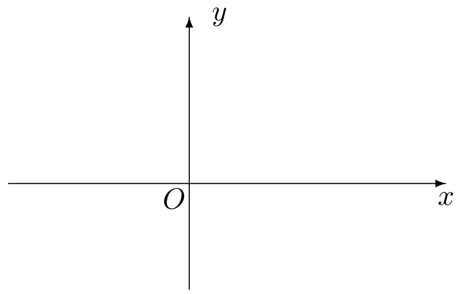
解 (1) 由$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+x^2}{y}$, 得首次积分

$$y^2 = -x^2 + \frac{2}{3}x^3 - C_1.$$

作图

$$\Delta: \quad u = -x^2 + \frac{2}{3}x^3.$$



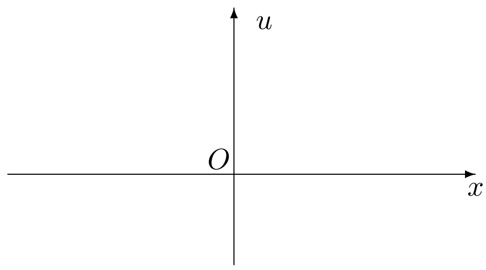


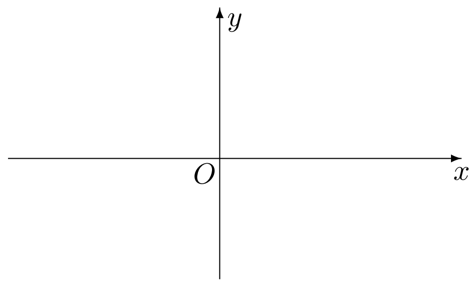
(2) 由$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+x^3}{y}$, 得首次积分

$$y^2=-x^2+\frac{1}{2}x^4-C_1.$$

作图

$$\Delta:\quad u=-x^2+\frac{1}{2}x^4.$$





第七章　一阶偏微分方程

§7.1　基本概念

习题7.1解答

例 7.1.1 试指出下列偏微分方程所属的类型:

(1) $u(x+u)u_x - y(y+u)u_y = 0$;

(2) $u_x + u_y + u_z = u^2$;

(3) $xu_x + yu_y + u_z = u$.

解 (1) 是一阶拟线性偏微分方程.

(2) 是一阶半线性偏微分方程.

(3) 是一阶线性偏微分方程.

§7.2　首次积分

习题7.2解答

例 7.2.1 求解常微分方程组:

(1) $\frac{dt}{x+y} = \frac{dx}{y+t} = \frac{dy}{t+x}$;

(2) $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{-y(z^2+x^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$;

(3) $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$;

(4) $(z-y)^2\frac{dy}{dx} = z,\ (z-y)^2\frac{dz}{dx} = y$.

解 (1) 由合比定理，有

$$\frac{dt-dx}{x-t} = \frac{dx-dy}{y-x}.$$

得首次积分

$$\frac{x-t}{y-x} = C_1.$$

再由合比定理，知

$$\frac{dt+dx+dy}{2(t+x+y)} = \frac{dx-dy}{y-x}.$$

得另一首次积分

$$(x-y)\sqrt{t+x+y} = C_2.$$

所以，通解为

$$\begin{cases} \frac{x-t}{y-x} = C_1, \\ (x-y)\sqrt{t+x+y} = C_2, \end{cases}$$

其中C_1, C_2是任意常数。

(2) 有首次积分

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1$$

和

$$zy = C_2 x.$$

所以，通解为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \\ zy = C_2 x, \end{cases}$$

其中C_1, C_2是任意常数。

(3) 由第1,2,3式的分子分母分别相加，再由合比定理，得

$$\frac{dx + dy + dz}{0} = \frac{dx}{x(y-z)}.$$

于是，有

$$dx + dy + dz = 0.$$

得首次积分

$$x + y + z = C_1.$$

由第1,2式的分子分母分别乘以y, x，分子分母分别相加，再由合比定理，得

$$\frac{ydx + xdy}{xy(y-z) + xy(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)},$$

即

$$\frac{ydx + xdy}{xy(y-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

得另一首次积分

$$xyz = C_2.$$

所以，通解为

$$\begin{cases} x + y + z = C_1, \\ xyz = C_2, \end{cases}$$

其中C_1, C_2是任意常数。

(4) 有首次积分

$$y^2 - z^2 = C_1$$

和

$$2x + (z-y)^2 = C_2.$$

所以，通解为

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = C_1, \\ 2x + (z-y)^2 = C_2, \end{cases}$$

其中C_1, C_2是任意常数。

§7.3 一阶拟线性偏微分方程的Cauchy问题

习题7.3解答

例 7.3.1 *求解偏微分方程的Cauchy问题:*

(1) $uu_x + u_y = 1,\ \Gamma : x = s, y = s, u = 0$;

(2) $uu_x + u_y = 1,\ \Gamma : x = \frac{s^2}{2}, y = s, u = s$;

(3) $x^2u_x + y^2u_y = u^2,\ u(x, 2x) = 1$.

解 (1) 由特征方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, & x(0,s) = s, \\ \frac{dy}{dt} = 1, & y(0,s) = s, \\ \frac{du}{dt} = 1, & u(0,s) = 0, \end{cases}$$

直接解出后两个方程,得

$$y(t,s) = t + s, \quad u(t,s) = t.$$

代入第一个方程,得

$$x(t,s) = \frac{t^2}{2} + s.$$

反解$x = x(t,s) = s + \frac{t^2}{2}$和$y = y(t,s) = s + t$, 得到

$$t = 1 \pm \sqrt{1 + 2(x-y)}.$$

因而

$$u(x,y) = 1 \pm \sqrt{1 + 2(x-y)}.$$

再一次利用初始条件$u(s,s)=0$, 得所求的解为

$$u(x,y)=1-\sqrt{1+2(x-y)}.$$

(2) 由特征方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=u, & x(0,s)=\frac{s^2}{2}, \\ \frac{dy}{dt}=1, & y(0,s)=s, \\ \frac{du}{dt}=1, & u(0,s)=s, \end{cases}$$

直接解出后两个方程,得

$$y(t,s)=t+s, \quad u(t,s)=t+s.$$

代入第一个方程后,得

$$x(t,s)=\frac{(t+s)^2}{2}.$$

由此得三个解

$$u=y, \quad u=\pm\sqrt{2x}.$$

实际上,有无穷多个解,而Γ是一条特征线.

(3) 将初始条件参数表示

$$\Gamma: \quad x=s,\ y=2s,\ u=1.$$

由特征方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x^2, & x(0,s)=s, \\ \frac{dy}{dt}=y^2, & y(0,s)=2s, \\ \frac{du}{dt}=u^2, & u(0,s)=1, \end{cases}$$

解得

$$u(t,s)=\frac{1}{1-t},\ x(t,s)=\frac{1}{\frac{1}{s}-t},\ y(t,s)=\frac{1}{\frac{1}{2s}-t}.$$

再由$x=x(t,s)$, $y=y(t,s)$反解, 得

$$t=\frac{1}{x}-\frac{2}{y}.$$

于是, 所求的解为

$$u=\frac{1}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}.$$

§7.4　一阶拟线性偏微分方程的通解

习题7.4解答

例 7.4.1 *求解偏微分方程:*

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

(2) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$;

(3) $(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$;

(4) $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 当$x=2y$时$z=y^2$;

(5) $xz\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}-(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u\big|_{x=1}=2y+z^2$.

解 (1) 方程是一阶齐次线性偏微分方程. 特征方程是

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-z}.$$

由第一式和第二式,得首次积分

$$x^2y=C_1.$$

由第二式和第三式, 得首次积分

$$xz=C_2.$$

所以, 通解是

$$u=\phi(x^2y,xz),$$

其中$\phi(\cdot,\cdot)$是任意的连续可微函数.

(2) 通解为

$$\psi(x^2+y^2,z+xy)=0.$$

它可写成

$$z=-xy+\phi(x^2+y^2),$$

其中$\phi(\cdot)$是任意的可微函数.

(3) 方程是一阶拟线性偏微分方程.特征方程是

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

由第二式和第三式,得首次积分

$$z-2y=C_1.$$

第三式的分子分母分别减去第一式和第二式的分子分母, 由合比定理,得

$$\frac{dz-dx-dy}{-\sqrt{z-x-y}}=dy.$$

得首次积分

$$2\sqrt{z-x-y}+y=C_2.$$

所以,通解是

$$\psi(z-2y,2\sqrt{z-x-y}+y)=0,$$

其中$\psi(\cdot,\cdot)$是任意可微函数.

(4) 通解是

$$z=\phi\Big(\frac{y}{x^2-y^2}\Big),$$

其中$\phi(\cdot)$为任意常数。再由$x=2y$时，$z=y^2$, 得$z=\phi(\frac{1}{3y})=y^2$. 从而，$\phi(s)=\frac{1}{9s^2}$. 于是，所求的解为

$$z=\frac{(x^2-y^2)^2}{9y^2}.$$

(5) 方程是一阶齐次线性偏微分方程。特征方程组是

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}.$$

由第一式和第二式，得首次积分

$$\frac{y}{x}=C_1.$$

将第一式和第二式的分子分母分别乘以x和y, 分子分母分别相加，再由合比定理，得

$$\frac{xdx+ydy}{z(x^2+y^2)}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}.$$

由此得另一首次积分

$$x^2+y^2+z^2=C_2.$$

所以，通解是

$$u=\phi\Big(\frac{y}{x},x^2+y^2+z^2\Big),$$

其中$\phi(\cdot,\cdot)$是任意可微函数。

再由初始条件，得当$x=1$时，$y=C_1$, $1+y^2+z^2=C_2$. 于是，$1+C_1^2+z^2=C_2$. 从而

$$u\Big|_{x=1}=\phi(C_1,C_2)=2y+z^2=2C_1+C_2-1-C_1^2=C_2-(C_1-1)^2.$$

所以，所求的解是

$$u=x^2+y^2+z^2-\left(\frac{y}{x}-1\right)^2.$$

参考文献

[1] 博亚尔丘克，戈洛瓦奇编著，郑元禄译，常微分方程，清华大学出版社，2005。

[2] 丁同仁，李承治，常微分方程（第二版），北京，高等教育出版社，2004。

[3] 东北师范大学数学系微分方程教研室，常微分方程(第二版)，北京，人民教育出版社，1982。

[4] 非利波夫，常微分方程习题集，上海，上海科学技术出版社，1981。

[5] 高素志，马遵路，曾昭著，陈平尚，常微分方程，北京，北京师范大学出版社，1988。

[6] 阮炯，差分方程和常微分方程，复旦大学出版社，2002。

[7] 史捷班诺夫，微分方程教程，北京，人民教育出版社，1955。

[8] 塞蒙斯著，张理京译，微分方程-附应用及历史注记，北京，人民教育出版社，1981。

[9] 王高雄，周之铭，朱思铭，王寿松，常微分方程(第三版), 北京，高等教育出版社，1983。

[10] 王柔怀，伍卓群，常微分方程讲义，北京，人民教育出版社，1963。

[11] 伍卓群，李勇，常微分方程，北京，高等教育出版社，2004。

[12] 叶彦谦，常微分方程讲义(第二版), 北京，高等教育出版社，1984。

[13] 尤秉礼编, 常微分方程教程, 人们教育出版社, 1982.

[14] 袁荣,常微分方程, 高等教育出版社, 2012.

[15] 周尚仁，权宏顺，常微分方程习题集，北京，人民教育出版社，1980。

[16] 朱思铭, 常微分方程学习辅导与习题解答, 北京, 高等教育出版社, 2009.

[17] 庄万, 常微分方程习题解, 济南, 山东科学技术出版社, 2006.