北京师范大学 2023-2024 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：实变函数　　任课老师姓名：_____

卷面总分：____ 分　考试时长：120 分钟　考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院（系

姓名：

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师（签字）：____________

装订线

（注意：可以承认并使用问题 $1,\cdots,k$ 的结果来回答第 $k+1$ 题。）

1. 基础题：陈述 Vitali 收敛定理，并予以证明.

2. 令 $f\in L^1(\mathbb{R})$.

   (a) 请证明对于任意的 $\varepsilon>0$, 都存在阶梯函数 $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 s 在某个有界闭区间之外为零，且
   $$\int_{\mathbb{R}}|f-s|dm<\varepsilon.$$

   (b) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 请证明存在一个连续函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 g 在某个有界闭区间之外为零，且
   $$\int_{\mathbb{R}}|f-g|dm<\varepsilon.$$

   (c) 证明
   $$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)\cos(nx)dm=0.$$

3. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个绝对连续的函数. 请证明 f 在 $[a,b]$ 上 Lipschitz 连续当且仅当存在常数 $c>0$ 使得
$$|f'|\le c,\ \text{a.e. on }[a,b].$$

4. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个有界变差的函数. 令 $v(x)=TV(f_{[a,x]}),\forall x\in[a,b]$.

   (a) 证明 $|f'|\le v'$ 几乎处处在 $[a,b]$ 上成立，并且
   $$\int_{[a,b]}|f'|dm\le TV(f).\qquad(*)$$

(b) 证明 (*) 中等式成立当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的.

5. 假设可测集合 E 的测度有限.

(a) 对于 $f \in L^{\infty}(E)$, 证明

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

(b) 令 $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$. 假设 f_n 在 $L^{p_2}(E)$ 中收敛到 f, 请证明 $f_n, f \in L^{p_1}(E)$ 且

$$\|f_n - f\|_{p_1} \to 0.$$

装

订

线