北京师范大学 2024–2025 学年第一学期高等代数 I 期末考试题 (A 卷)

课程名称： 高等代数 I　　任课老师姓名：

卷面总分： 100 分　　考试时长： 120 分钟　　考试类别： 闭卷

院 (系)：　　专　业：　　年　级：

姓　名：　　学　号：

一. (18 分) 求下列线性方程组的一个特解 γ_0 和导出组的一个基础解系, 并用它们表出线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

二. (18 分) 设 $A \in M_{m\times n}(F)$, $r(A) = m$, $B \in M_{m\times s}(F)$, 证明

(1) 存在 $n \times s$ 矩阵 X 使得 $AX = B$;

(2) 满足 $AX = B$ 的矩阵 X 是唯一的当且仅当 $n = m$.

三. (17 分) 设 W 是 F 上向量空间 V 的子空间, 并且有 V 的 $s \geq 1$ 维子空间 $W_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \rangle$, 使 $V = W \oplus W_1$. 对于任意 $r_1, ..., r_s \in W$, 令 $\beta_i = \alpha_i + r_i, i = 1, ..., s$, $W_2 = \langle \beta_1, \beta_2, ..., \beta_s \rangle$. 证明

$$V = W \oplus W_2$$

四. (17 分) 记 n 阶矩阵 $J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} J_r(0) & \\ & J_s(0) \end{pmatrix}$, $r \leq s$.

设 $V = F[x]$ 是 F 上向量空间. 证明

(1) $F_A[x] = \{f(x) \in V | f(A) = 0\}$ 是 V 的子空间, 并求出 $F_A[x]$ 中一个次数最低的首 1 系数多项式 $m_A(x)$, 使得

$$F_A[x] = m_A(x)F[x]$$

(2) 令 $F[A] = \{f(A) | f(x) \in F[x]\}$, 则 $F[A]$ 是向量空间 $U = M_n(F)$ 的一个子空间, 并且

$$F[A] \cong F^s.$$

五. (15 分) 设正整数 $n_1, n_2, ..., n_s$ 两两互素, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 分别是 $n_1, n_2, ..., n_s$ 次本原单位根. 令 $n = n_1 n_2 ... n_s$, $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_s$. 证明

(1) α 是 n 次单位根, 并且若 α 是 d 次本原单位根, 则有 $\alpha_i^d = 1, i = 1, ..., s$.

(2) α 是 n 次本原单位根.

六. (15 分) 设 $p(x) = x^6 + p^2$, 其中 p 为素数. 令 $\alpha = i \cdot \sqrt[3]{p}$, $i = \sqrt{-1}$.

(1) 若 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $f(x) | p(x)$, 且 $deg(f(x)) \leq 3$, 证明 $f(\alpha) \neq 0$;

(2) 求出 α 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的极小多项式和包含 α 的最小数域.