北京师范大学 2021～2022学年第二学期期末考试试卷(A卷)

课程名称： 实变函数 **任课教师姓名：**

卷面总分： 100分 **考试时长：** 120分钟 **考试类别：** 闭 卷

院（系）：________________ 专业：________________ 年级：________________

姓　名：________________ 学号：________________ 分数：________________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
分数											

1. (15分)判断下述命题，并简要说明理由.

   (1) 设$|f(x)|$为E上的可测函数, 则$f(x)$也是可测函数.

   (2) 可测集类的基数为2^c.

   (3) 若$f(x)$为可测集E上的有界可测函数,则$f(x)$于E上可积.

   (4) 于任意可测集E上的可测函数列, 几乎处处收敛一定是近乎一致收敛的.

   (5) 对于几乎处处有限可测函数$f(x)$, 一定存在连续函数列逼近$f(x)$.

2. (10分)若 $f(x), g(x)$是$\mathbb{R}$上可测函数, 试证明 $f(x)-g(x)$ 是$\mathbb{R}$上可测函数.

3. (10分)设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列, 若 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)<\infty$, 试证明

$$m\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m\left(E_k\right).$$

4. (10分)设函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 且 $f_n(x) \leqslant g(x)$ a.e. 于 E, $n=1,2,\cdots$. 试证 $f(x) \leqslant g(x)$ 在E 上几乎处处成立.

5. (10分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上非负可积, $f(0)=0$, 且$f'(0)$存在, 试证明存在积分

$$\int_{[0,+\infty)} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

6. (10分)设函数$f(x)\in L([a,b])$. 若对任意的$c\in[a,b]$, 有

$$\int_{[a,c]} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

则$f(x)=0$ a.e. $x\in[a,b]$.

7. (10分)设$f(x)$是$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处大于零的可测函数, 且满足$\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$, 试证明$m(E)=0$.

8. (8分)设$f\in L([a,b])$, 且令$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(x\in[a,b])$, 则$F\in BV([a,b])$, 且$\displaystyle\bigvee_a^b(F)\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

9. (8分)设 $E\subset\mathbb{R}$ 且 $m(E)>0$, 则存在 $x_1,x_2\in E$, 使得 $|x_1-x_2|$ 是有理数.

10. (9分)设$\{g_k(x)\}$是在$[a,b]$上的绝对连续函数列, 又有$\left|g_k'(x)\right|\leq F(x)$ a.e. $(k=1,2,\cdots)$且$F\in L([a,b])$. 若$\displaystyle\lim_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)(a\leq x\leq b)$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}g_k'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$,试证明$g'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.