5. ①. 先证明 $\sigma(X_1,X_2)$ 与 $\sigma(X_3,X_4)$ 独立. 这里 $\sigma(Y,Z):=\sigma(\sigma(Y)\cup\sigma(Z))$.

15

为此先证 $\sigma(X_1,X_2)$ 与 $\sigma(X_3)$ 独立. 设 $\Lambda=\{A\cap B \mid A\in\sigma(X_1), B\in\sigma(X_2)\}$.

由于 $\Omega\in\sigma(X_1)\cap\sigma(X_2)$, 故 $\sigma(X_1)\cup\sigma(X_2)\in\Lambda$.

又 $\forall A\cap B\in\Lambda$, $C\in\sigma(X_3)$. 由于 X_i, $i=1,2,3,4$ 相互独立, 有 $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(A\cap B)\cdot\mathbb{P}(C)$.

故 $A\cap B$ 与 C 独立, 故 Λ 与 $\sigma(X_3)$ 独立. 即 $\sigma(X_1)\cup\sigma(X_2)$ 与 $\sigma(X_3)$ 独立. 由独立事件类的扩张定理, 可知 $\sigma(X_1,X_2)$ 与 $\sigma(X_3)$ 独立.

同理 $\sigma(X_1,X_2)$ 与 $\sigma(X_4)$ 独立. 即 $\sigma(X_1,X_2)\perp(\sigma(X_3)\cup\sigma(X_4))\Longrightarrow\sigma(X_1,X_2)\perp\sigma(X_3,X_4)$.

② ~~对于~~ 由于 $\sin(X_1+X_2^2)$ 是连续函数, 故 $\sigma(X_1,X_2)$ 可测. 同理 $\tan X_3+X_3\sqrt{|X_4|}$ 是 $\sigma(X_3,X_4)$ 可测. 由 $\sigma(X_1,X_2)\perp\sigma(X_3,X_4)$, 可知 $\sin(X_1+X_2^2)$ 与 $\tan X_3+X_3\sqrt{|X_4|}$ 独立.

诚信承诺：我保证独立完成，永不舞弊！ 承诺人

95

2024秋季 测度与概率 课堂练习题 (T2)（2024 年 11 月 26 日）

一简答题（75分）

1.叙述随机变量、连续型随机变量的定义.

2.f是$(R_x,\mathcal{B}(R_x))\to(R_y,\mathcal{B}(R_y))$函数，若$f$连续，则$f$是$\mathcal{B}(R_x)$可测.

3.设$0\le a_n,b_n,n\in N$, 证明：$(\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n)^2\le(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2)(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2)$.

4.给定测度空间$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 若$0\le f\in\mathcal{F}$, $\int fd\mu<\infty$, 则$f<\infty$ (μ-a.e.).

5.给定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$. X_i, $i=1,2,3,4$ 是相互独立的随机变量. 证明：$\sin(X_1+X_2^2)$ 与$\tan X_3+X_3\sqrt{|X_4|}$相互独立.

二(25分)叙述并（用积分的定义）证明“非负单调收敛定理”。

一、1. 随机变量：这里定义取实值的随机变量. 其它类型的定义类似.

10

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为概率空间. $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 是可测函数.

即 $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$.

则称 X 是实值随机变量.

连续型随机变量：若 $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 是随机变量.

$F_X(x):=\mathbb{P}(X^{-1}((-\infty,x]))$, $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ 是连续函数. ?

则称 X 是连续型随机变量.

因 $F_X(x)$ 关于Lebesgue测度绝对连续 (即存在密度函数)

2. 记 $\tau(R_x)$, $\tau(R_y)$ 是 R_x、R_y 的全体开集. 故 $\sigma(\tau(R_x))=\mathcal{B}(R_x)$, $\sigma(\tau(R_y))=\mathcal{B}(R_y)$.

15

由于 f 连续, 故 $f^{-1}(\tau(R_y))\subset\tau(R_x)$

对两侧取σ代数. 有 $f^{-1}(\mathcal{B}(R_y))=f^{-1}(\sigma(\tau(R_y)))=\sigma(f^{-1}(\tau(R_y)))\subset\sigma(\tau(R_x))=\mathcal{B}(R_x)$

即 $\forall B\in\mathcal{B}(R_y)$. $f^{-1}(B)\in\mathcal{B}(R_x)$. 故 f 是 $\mathcal{B}(R_x)$ 可测

3. 在 $\mathbb{N}^*$ 的记数测度空间 $(\mathbb{N}^*,2^{\mathbb{N}^*},\#)$ 上, 非负可测函数表为非负数列.

15

函数的积分表为数项级数. 则 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}_+$ 为非负可测函数,

由 ~~Schwarz~~ Schwarz 不等式, 有

$$\Big(\int_{\mathbb{N}^*}\{a_n\}\cdot\{b_n\}d\#\Big)^2\le\Big(\int_{\mathbb{N}^*}\{a_n\}^2d\#\Big)\cdot\Big(\int_{\mathbb{N}^*}\{b_n\}^2d\#\Big)$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\Big)^2 \qquad \Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\Big).$$

$\{x\mid f(x)=\infty\}=f^{-1}(\infty)\in\mathcal{F}$, 可测.

4. 反证. 若 $\mu(\{f=\infty\})>0$. 则由 f 的非负性. $\int_{\Omega}fd\mu\ge\int_{\{x\mid f(x)=\infty\}}fd\mu=\infty\cdot\mu(\{f=\infty\})=\infty$.

15

与 $\int fd\mu<\infty$ 矛盾. 故有 $f<\infty$ μ.a.e.

~~3.(2). 由(1)可知 $\mu(A)=\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)$~~ $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)=\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(A_n)$ 则 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$, 则 $\mu(A_n)$

~~只需再证 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(A_n)\le\mu(A)$?~~ 只需证 μ 是测度

一、3.(2) 错误. 取 $\Omega=N$, $\mu(A)=\begin{cases}0,\\1,\end{cases}$ 则令 $A_n=\{k\in N\mid k\le N\}$,

见补纸

二、由外测度定义. 对于 $A\in\mathcal{A}_{\mu^*}$, $\mu^*(A)<\infty$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\varphi$, s.t. $\mu^*(A)+\frac{\varepsilon}{2}>\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$. 且 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$.

15

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)<\infty$. 故 $\exists N\in N^*$, $\sum_{n=N+1}^{\infty}\mu(B_n)<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $A_\varepsilon=\bigcup_{n=1}^{N}B_n$

则 $\mu^*(A\triangle A_\varepsilon)\le\mu^*(A\setminus A_\varepsilon)+\mu^*(A_\varepsilon\setminus A)\le\mu^*(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}B_n)+\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\setminus A)\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\mu^*(B_n)+\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)-\mu^*(A)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

诚信承诺：我保证独立完成，永不舞弊！ 承诺人

2024秋季学期 测度与概率 课堂小测 (T1)（2024 年 10 月 18 日）

98

0. 您对教学的意见、建议和要求？

一 (60分). 判断：正确的给出证明；错误的给出反例 (没有说明理由不得分)。

1. $\overline{\overline{\Omega}}<\overline{\overline{\mathcal{F}(\Omega)}}$. 意思是 $\mathcal{P}(\Omega)$. Ω的幂集.

2. μ是半集代数φ上的测度, $\{A,A_1,\ldots,A_n\}\subset\varphi$,且$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k$,则$\mu(A)\le\Sigma_{k=1}^{n}\mu(A_k)$.

3.给定测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\{A_n,n\in N\}\subset\mathcal{F}$, 则(1) $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(A_n)$; (2)进一步，若$\lim_{n\to\infty}A_n=A$, 则 ~~$\mu(\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A)$~~. $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$

二 (15分)设μ是半集代数φ上的测度, $\mathcal{A}(\varphi)$是φ生成的集代数, μ^*是由μ引出的外测度;则$\forall A\in\mathcal{A}_{\mu^*}$, $\mu^*(A)<\infty$, 及$\forall\varepsilon>0$, 存在$A_\varepsilon\in\mathcal{A}(\varphi)$ 使得$\mu^*(A\triangle A_\varepsilon)<\varepsilon$.

三 (25分) 设Ω的子集类$\mathcal{C}$是π系, 证明: $\Lambda(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$.

58

一、1. 正确. 由于 $\{\{a\}\mid a\in\Omega\}\subseteq\mathcal{F}(\Omega)$, 且 $\Omega\sim\{\{a\}\mid a\in\Omega\}$.

18

可知 $\overline{\overline{\Omega}}\le\overline{\overline{\mathcal{F}(\Omega)}}$, 为此只需证 $\Omega\not\sim\mathcal{F}(\Omega)$, 试说明了 $\overline{\overline{\Omega}}<\overline{\overline{\mathcal{F}(\Omega)}}$. $f(x)$

采用反证法. 若 $\Omega\sim\mathcal{F}(\Omega)$, 则 $\exists f:\Omega\to\mathcal{F}(\Omega)$ 是双射.

则令 $\tilde{A}=\{x\in\Omega\mid x\notin f(x)\}\subset\Omega$. 必 $\exists y\in\Omega$ s.t. $\tilde{A}=f(y)$.

则若 对 $\forall x\in\Omega$, 若 $x\in\tilde{A}$, 有 $x\notin\tilde{A}$, 矛盾. 若 $x\notin\tilde{A}$, 有 $x\in\tilde{A}$, 矛盾. 故不存在这样的y, 即 不存在双射f. 即 $\overline{\overline{\Omega}}<\overline{\overline{\mathcal{F}(\Omega)}}$

2、正确. 考虑 $\tilde{\mu}$ 是 μ 在 $\mathcal{A}(\varphi)$ 上的扩张. ($\mathcal{A}(\varphi)$, φ生成的集代数. $\tilde{\mu}$与μ在φ上取值同.) 令 $B_m=A_m\setminus\bigcup_{k=1}^{m-1}A_k$, $1\le m\le n$.

20

则 B_m 两两不交, 且 $\bigcup_{m=1}^{n}B_m=\bigcup_{m=1}^{n}A_m$. 且由于 $\mathcal{A}(\varphi)$ 对并、补运算封闭 $A_k\in\varphi\subseteq\mathcal{A}(\varphi)$.

故 $B_m\in\mathcal{A}(\varphi)$, 且 $\bigcup_{m=1}^{n}B_m\in\mathcal{A}(\varphi)$. 此外, $\forall C,D\in\mathcal{A}(\varphi)$, 由$\tilde{\mu}$的可加性 有 $\tilde{\mu}(D)=\tilde{\mu}(D\cap C^c)+\tilde{\mu}(D\cap C)$. 故 $\tilde{\mu}(D\setminus C)\le\tilde{\mu}(D)$

再由$\tilde{\mu}$的可数可加性, 可知 $\tilde{\mu}(\bigcup_{m=1}^{n}B_m)=\sum_{m=1}^{n}\tilde{\mu}(B_m)\le\sum_{m=1}^{n}\tilde{\mu}(A_m)$, 即 $\tilde{\mu}(\bigcup_{m=1}^{n}A_m)\le\sum_{m=1}^{n}\mu(A_m)$

又由于 $A\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k$. 则 $\tilde{\mu}(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\tilde{\mu}((\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\cap A)+\tilde{\mu}((\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\cap A^c)\ge\tilde{\mu}(A)=\mu(A)$

综上, $\mu(A)\le\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$.

3、20

(1) 正确. 由于 $\bigcap_{n\ge k}A_n$ 关于k是递增列, 由测度的下连续性可知 $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)=\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\ge k}A_n)=\lim_{k\to\infty}\mu(\bigcap_{n\ge k}A_n)$.

而由于 $\bigcap_{n\ge k}A_n\subset A_k$. 由测度的单调性, $\mu(\bigcap_{n\ge k}A_n)\le\mu(A_k)$, $\forall k\in N^*$.

这就有 $\lim_{k\to\infty}\mu(\bigcap_{n\ge k}A_n)\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\mu(A_k)$. 即 $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(A_n)$