# 24-25学年秋季学期2023级数学强基班“数学分析”

# 期中考试试题(2024.11.04)

1. (15分) 设$\{a_n : X \to \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}\}$是复值函数序列，写出函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$在$E \subset X \subset \mathbb{R}$上(逐点)收敛和一致收敛的定义，并判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$在单位圆$K = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$内是否收敛，是否一致收敛(给出理由)。

2. (15分) 证明：若函数族$F_t : X \to \mathbb{C}$ $(t \in T)$关于基$\mathfrak{B}_T$一致收敛到函数$F : X \to \mathbb{C}$，而对每个$t \in T$，$\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F_t(x) = A_t$存在，则两个累次极限$\lim\limits_{\mathfrak{B}_X}\left(\lim\limits_{\mathfrak{B}_T} F_t(x)\right)$与$\lim\limits_{\mathfrak{B}_T}\left(\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F_t(x)\right)$都存在且相等：$\lim\limits_{\mathfrak{B}_X}\left(\lim\limits_{\mathfrak{B}_T} F_t(x)\right) = \lim\limits_{\mathfrak{B}_T}\left(\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F_t(x)\right)$.

3. (15分) 描述Weierstrass强函数判别法，并以此证明下式($\alpha > 0$)右端的函数项级数在区间$[0,1]$上一致收敛：

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

4. (15分) 计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)dx$.

5. (15分) 证明：$(n+1)$面体$A = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{\alpha}} \le 1; x_k \ge 0, 1 \le k \le n\}$的体积为$V_A = \dfrac{(\Gamma(\alpha+1))^n}{\Gamma(n\alpha+1)}$，这里$\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

6. (10分) 什么叫局部可积函数？证明：函数$f$在$G = \mathbb{R}$上局部可积当且仅当它在任何区间$[a,b]$上Riemann可积。

7. (15分) 试证：函数族

$$\Theta_t(x) := \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad a > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

当$t \to +0$时在$\mathbb{R}^n$中是$\delta$-型的。并以此证明函数$E(x,t) = H(t)\Theta_t(x)$满足方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)E = \delta,$$

其中$\Delta$是$\mathbb{R}^n$中对$x$的Laplace算子，$H(t), t \in \mathbb{R}$是Heaviside函数，而$\delta = \delta(x,t)$是$\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t = \mathbb{R}^{n+1}$中的$\delta$-函数。