BNUZ 2023 秋季学期近世代数期末试题

命题人： **考试时间：** 2024.1.4 10:20-12:20 **整理人：** ***Aut***

一、1.(5 分) 求 $\mathbb{Z}_{18}$ 在加法下的子群;

2.(5 分) 求 $\mathbb{Z}_{18}$ 的极大理想.

二、1.(5 分) 证明 $\ln : (\mathbb{R}_+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ 是群同构;

2.(5 分) 设 $f : G \to H$ 是群的满同态, 证明 $|H|$ 整除 $|G|$.

三、1.(5 分) 求置换 $\sigma = (1234)$ 在 S_4 中的共轭类;

2.(5 分) 证明 $\sigma = (1234)$ 在 S_4 中的中心化子 $C_{S_4}(\sigma)$ 有 4 个元素;

3.(10 分) 证明 $\sigma = (12 \cdots n)$ 在 S_n 中的中心化子 $C_{S_n}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$.

四、(10 分) 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是欧式环.

五、设 R 是交换环,I 是 R 的理想, 定义

$$\sqrt{I} = \{a \in R | \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}.$$

1.(10 分) 证明 $\sqrt{I}$ 是 R 的理想;

2.(5 分) 设 P 是 R 的素理想, 若 $I \subseteq P$, 证明 $\sqrt{I} \subseteq P$.

六、1.(5 分) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$;

2.(5 分) 求 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$;

3.(5 分) 求 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式.

七、设 E/K 是有限扩张.

1.(5 分) 设 α 是 E 上的代数元, 证明 $[E(\alpha) : K(\alpha)] \leqslant [E : K]$;

2.(10 分) 设 F, L 为 E 中包含 K 的子域,F, L 为 E 中包含 F, L 的最小子域, 证明

$$[FL : K] \leqslant [F : K][L : K].$$

八、(5 分) 设 F 为有限域, 证明 $\forall a \in F$, 都存在 $b, c \in F$, 使得

$$a = b^2 + c^2.$$