解 (i) $\frac{y\,dy}{1+y^2}=\frac{1}{x+x^3}dx$

$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_0$　$C_0$为任意常数

$y^2=C\frac{x^2}{1+x^2}-1$　$C>0$

(ii) 令 $\xi=x+\frac{1}{3}$　$\eta=y-\frac{1}{3}$. 得

$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{2\xi-\eta}{\xi-2\eta}$　令 $u=\frac{\eta}{\xi}$，则方程成为 $\xi\frac{du}{d\xi}+u=\frac{2-u}{1-2u}$

$\frac{1-2u}{2-2u+2u^2}du=\frac{1}{\xi}d\xi$

$-\frac{1}{2}\ln(u^2-u+1)=\ln|\xi|+C$

$\frac{1}{u^2-u+1}=\xi^2\cdot C$　$C>0$

代回原变量 $(x+\frac{1}{3})^2-(x+\frac{1}{3})(y-\frac{1}{3})+(y-\frac{1}{3})^2=C$　$C>0$

2 (i) 解　$x\neq0$　$\frac{dy}{dx}+\frac{1+x}{x}y=3x^2e^{-x}$

为一阶非齐次线性方程. 通解为 $y=e^{-\int\frac{1}{x}+1dx}\left(C+\int 3xe^{-x}e^{\int1+\frac{1}{x}dx}dx\right)$

$=Cx^{-1}e^{-x}+x^2e^{-x}$　$C$为任一常数

(ii) 一阶非齐次线性方程

$\frac{dy}{dx}+y\tan x=0$　通解为 $y=C\cos x$.

常数变易法　设 $y=C(x)\cos x$ 为方程解 代入后　$C'(x)=\frac{1}{\cos^2x}$

$C(x)=\tan x+c$　$c$为任一常数

$y=(\tan x+c)\cos x$.

3. 证: 两边对 $x$ 求导　$y=xp+f(p)$　$p=\frac{dy}{dx}$　得　$(x+f'(p))\frac{dp}{dx}=0$

当 $\frac{dp}{dx}=0$ 时 $p=C$　　通解　$y=Cx+f(C)$

当 $x+f'(p)=0$ 时　　特解　$x=-f'(p)$　$y=-f'(p)p+f(p)$

因 $f''(p)\neq 0$，由 $x=-f'(p)$ 得反函数 $p=w(x)$

特解 $y=xw(x)+f(w(x))$

在 $x_0$ 点、微商 $w(x_0)=p_0$

在 $x_0$ 点处 特解 $y=p_0x+f(p_0)$ 在 $x_0$ 点处 $y=p_0x+f(p_0)$ 与 $y=xw(x)+f(w(x))$ 相切.

4. 证明：

反证法. 有两个解 $y_1, y_2$，有在 $x_1>x_0$ $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$ 设 $y_1(x_1)>y_2(x_1)$

令 $\bar{x}=\sup\{x\in[x_0,x_1],\ y_1(x)=y_2(x)\}$ $x_0\leq\bar{x}<x_1$

令 $r(x)=y_1(x)-y_2(x)$.

则 $r(x)>0$ $\forall\ \bar{x}<x\leq x_1$ $r(\bar{x})=0$

$r'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\leq 0$ $\bar{x}<x\leq x_1$

$r(x)\leq 0$ $\bar{x}<x\leq x_1$ 矛盾.!

5.

解 $y=y_0+\int_{x_0}^{x}\sin(s,y(s,x_0,y_0))\,ds$

$\frac{\partial y}{\partial x_0}=-\sin(x_0,y(x_0,x_0,y_0))+\int_{x_0}^{x}\cos(sy)\,s\frac{\partial y}{\partial x_0}\,ds$

令 $z_1=\frac{\partial y}{\partial x_0}$

$z_1$ 满足方程 $\frac{\partial z_1}{\partial x}=\cos(xy)x\,z_1$

$z_1(x_0)=-\sin(x_0\,y(x_0,x_0,y_0))$

$x_0=0$，$y_0=0$ 时 $\frac{\partial z_1}{\partial x}=xz_1$ 得 $z_1\big|_{x_0=0\ y_0=0}=0$

$z_1(0)=0$

$\frac{\partial y}{\partial y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\cos(sy)\cdot s\frac{\partial y}{\partial y_0}\,ds$

令 $z_2=\frac{\partial y}{\partial y_0}$

$\frac{\partial z_2}{\partial x}=x\cos(xy)z_2$ 当 $x_0=0$ $y_0=0$ 时 $\frac{dz_2}{dx}=xz_2$ $z_2\big|_{x_0=0\ y_0=0}=e^{\frac{1}{2}x^2}$.

$z_2(x_0)=1$ $z_2(0)=1$

6. 证明：

$f(x,y)=ye^{(x+y)^2}$ 在 XOY 平面连续且满足局部 L 条件，方程满足 $y(0)=0$ 的解存在且唯一，在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

根据解对初值连续性. 任意闭区间 $[A,B]$，和 $\varepsilon>0$，存在 N. 当 $n>N$ 时 $|\varphi_n(x)|<\varepsilon$.

7. 证明

(i) $|f(x,y)\sin\frac{x}{n}-f(x,\bar{y})\sin\frac{x}{n}|\le|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|, L>0$

故初值问题解存在唯一.

反证法. 若 $y_n$ 最大存在区间 $(\alpha,\beta)$ $\beta<+\infty$，则

$y_n(x)=\int_0^x f(t,y_n(t))\sin\frac{t}{n}\,dt$

$$|y_n(x)|\le\int_0^x|f(t,y_n(t))-f(t,0)|\,dt+\int_0^x|f(t,0)|\,dt$$

$$\le\beta M+\int_0^x L|y_n(t)|\,dt$$

由 Gronwall 不等式 $|y_n(x)|\le M\beta e^{Lx}$ $x\to\beta$ 时 $y_n(x)\not\to\infty$.

与解延伸定理矛盾 故 $\beta=+\infty$

同理可证 $\alpha=-\infty$.

(ii) $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$y_n(x)=\int_0^x f(t,y_n(t))\sin\frac{t}{n}\,dt$

利用 L 条件

$$|f(x,y_n(x))\sin\frac{x}{n}|\le|f(x,0)\sin\frac{x}{n}|+L|y_n(x)||\sin\frac{x}{n}|$$

$$\le\frac{1}{n}|f(x,0)x|+\frac{L}{n}|x||y_n(x)|$$

$$|y_n(x)|\le\frac{1}{n}\int_0^x|f(s,0)s|\,ds+\frac{L}{n}\int_0^x|s||y_n(s)|\,ds$$

~~利用 Gronwall 不等式~~

$\forall$ 固定 $x$，取 B 足够大 $|x|<B$ $|y_n(x)|\le\frac{B^2}{n}M_2+\frac{B}{n}L\int_0^x|y_n(t)|\,dt$

利用Gronwall不等式 $|y_n(x)| \le \frac{B^2}{n} M_2 \exp(\frac{B^2}{n} L) \to 0 \quad n \to +\infty.$

8. 证明

作逼近序列 $\varphi_0(x) = f(x)$

$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi) \varphi_0(\xi) d\xi$

$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi) \varphi_n(\xi) d\xi$

令 $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad L = \max\limits_{x,\xi} |K(x,\xi)|$. $\quad |\varphi_1 - \varphi_0| = |\lambda \int_a^b K(x,\xi) \varphi_0(\xi) d\xi|$

$\le |\lambda| M L (b-a)$

假设 $|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \le |\lambda|^k L^k M (b-a)^k$

则

$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |\lambda \int_a^b K(x,\xi) (\varphi_k(\xi) - \varphi_{k-1}(\xi)) d\xi|$

$\le |\lambda| \int_a^b |K(x,\xi)| \, |\varphi_k - \varphi_{k-1}| d\xi \le |\lambda|^{k+1} L^{k+1} M (b-a)^{k+1}$

由归纳法知

$|\varphi_n - \varphi_{n-1}(x)| \le M L^n |\lambda|^n (b-a)^n$

当 $|\lambda| < \frac{1}{(b-a)L}$ 时 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M L^k |\lambda|^k (b-a)^k$ 收敛

故当 $|\lambda| < \frac{1}{(b-a)L}$ 时 级数 $\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k - \varphi_{k-1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

即 $\{\varphi_n\}$ 一致收敛. 记极限为 $\varphi^*$

由 $\varphi_n$ 连续性，知 $\varphi^*$ 连续. 且满足 $\varphi^*(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi) \varphi^*(\xi) d\xi$

唯一性

设另有一解 $\bar{\varphi}(x) \quad \bar{\varphi}(x) \ne \varphi^*(x)$

记 $\bar{M} = \max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi^*(x) - \bar{\varphi}(x)| > 0$

$|\varphi^* - \bar{\varphi}(x)| = |\lambda \int_a^b K(x,\xi)(\varphi^*(\xi) - \bar{\varphi}(\xi)) d\xi| \le |\lambda| \int_a^b L |\varphi^*(\xi) - \bar{\varphi}(\xi)| d\xi = L|\lambda| \bar{M} (b-a)$

$\bar{M} \le |\lambda| \bar{M} (b-a) L \quad |\lambda| > \frac{1}{L(b-a)}$ 矛盾!