北京师范大学 2019-2020 学年第一学期近世代数期末考试试题(A卷)

课程名称：近世代数　　　　任课老师姓名：＿＿＿＿

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷

院（系）：＿＿＿＿　　专业：＿＿＿＿　　年级：＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿

一、(20分) 设 $R=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}, i=\sqrt{-1}\}$ 是高斯整数环. 对于 $\alpha=a+bi\in R$, $I=\langle\alpha\rangle$, $\bar{R}=R/I$, 证明:

(1) $\forall\beta\in I^*$, $|\beta|^2\geqslant|\alpha|^2$;

(2) $\bar{R}$ 是域当且仅当 $|\alpha|^2$ 是素数;

(3) 对于 $\alpha=1+3i$, 求 $\bar{R}$ 的阶.

二、(15分) 设 R 是一个欧式环, δ 是 R 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个欧式映射. 证明:

(1) 若任取 $a,b\in R^*$ 都有 $\delta(a)=\delta(b)$, 那么 R 是一个域;

(2) 若任取 $a,b\in R^*$ 都有 $\delta(ab)=\delta(a)\delta(b)$, 则对于任意正整数 m, 都存在 R 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个欧式映射 δ' 满足 $\delta'(1)=m$, 这里 1 是 R 的单位元.

三、(15分) 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, $E=\mathbb{Q}(\alpha)$, 其中 α 是 $f(x)=x^4+2x^2+6$ 的一个根.

(1) 求 $[E:\mathbb{Q}]$, 并说明理由;

(2) 对于 $\beta=\alpha^2+1$, 求 β 在 $\mathbb{Q}$ 中的极小多项式和 $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$.

四、(15分) 设 E 是域 F 的 $n>1$ 次扩张且 $E=F(\beta)$. 若 $(n,6)=1$, 证明:

(1) $F(\beta)=F(\beta^2)=F(\beta^3)$;

(2) $F(\beta)=F(\beta^{2^r\cdot 3^s})$, 其中 $r,s\geqslant 0$.

五、(15分) 设 p 是素数, $r,s\in\mathbb{Z}^+$, $q_1=p^r$, $q_2=p^s$. 给定 F_{q_1}, F_{q_2} 上的两个次数分别为 m,n 的不可约多项式 $f(x),g(x)$. 令

$$E=F_{q_1}[x]/\langle f(x)\rangle,\ \bar{E}=F_{q_2}[x]/\langle g(x)\rangle,$$

试给出 E 与 $\bar{E}$ 同构的一个充要条件, 并证明你的结论.

六、(20分) 设 G 是一个群, $p\geqslant 3$ 是素数, $n\geqslant 1$, $|G|=6p^n$, 证明:

(1) G 包含唯一的指数为 2 的子群;

(2) G 的西罗 p-子群 P 在 G 中是正规的.