北京师范大学 2024–2025 学年第二学期高等代数 II 期中考试题 (A 卷)

课程名称：高等代数 II　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷

院 (系)：________　　专　业：________　　年　级：________

姓　名：________　　学　号：________

一. (20 分) 设 V 是数域 F 上 n 维向量空间, n 为偶数. 对于 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots. \alpha_n \in V$, 有 $\sigma \in \mathcal{L}(V)$ 满足

$$\sigma(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n) = x_n\alpha_1 + x_1\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_n.$$

(1) 求出 σ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵和 σ 的特征多项式;

(2) 当 $F = \mathbb{R}$ 时, 求出 σ 的全部特征值和特征子空间;

(3) 当 $F = \mathbb{C}$ 时, 判断 σ 能否对角化, 并说明理由.

二. (20 分) 设向量空间 $V = M_{m\times n}(F)$, 对于 $A \in M_m(F)$, $B \in M_n(F)$ 定义 V 上的变换

σ: $X \mapsto AXB, \forall X \in V$.

(1) 证明 σ 是线性变换;

(2) 若 A, B 均相似于对角阵, 判断 σ 能否对角化? 并证明你的结论

三. (20 分) 设 V 是数域 F 上 n 维向量空间, $f(\lambda)$ 是 $\sigma \in \mathcal{L}(V)$ 的一个零化多项式. 对于 $g(\lambda) \in F[\lambda]$, 若有 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$, 证明 $g(\sigma)$ 是可逆线性变换; 并对 $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ 和 $g(\lambda) = \lambda + 1$, 求出 $g(\sigma)^{-1}$.

四. (20 分) 设 V 是数域 F 上 n 维向量空间, 对于 $\alpha, \beta \in V$ 和 $\sigma \in \mathcal{L}(V)$, 分别用 $d_\alpha(\lambda)$ 和 $d_\beta(\lambda)$ 表示 σ 关于 α, β 的极小多项式. 用 W_α, W_β 分别表示 V 中包含 α, β 的最小 $\sigma-$ 不变子空间 (即 $\sigma-$ 循环子空间), 若 $(d_\alpha(\lambda), d_\beta(\lambda)) = 1$, 证明: $V = W_\alpha + W_\beta$ 的充要条件是

$$deg\,(d_\alpha(\lambda)) + deg\,(d_\beta(\lambda)) = n.$$

五. (20 分) 用 M 表示 $M_n(\mathbb{C})$ 中特征多项式为 $\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, $n_i \geq 6$, 和极小多项式为 $\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i - 3}$ 的集合.

(1) 证明矩阵相似是 M 中的一个等价关系;

(2) 求出 M 中相似等价类的个数, 并说明理由.