北京师范大学 2022 ～ 2023 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称： 概率论　　　　**任课老师姓名：** ________

卷面总分：120 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 □　其他 □

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

阅卷老师（签字）：________

---

1. (30分) 基础题: (1). 请复述随机变量的定义. (2). 请写出几何分布、二项分布的定义以及你知道的性质, 并解释概率意义. (3). 请复述并证明全概率公式, 并举例说明其如何应用.

2. (20分) 设 X, Y 相互独立, 分别服从 $\Gamma(r,\lambda)$, $\Gamma(s,\lambda)$ 分布 $(r>0, s>0, \lambda>0)$, 其中 $\Gamma(r,\lambda)$ 分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

令 $U=X+Y$, $V=\frac{X}{X+Y}$.

(1) 求证: U, V 相互独立, 并求出他们的分布;

(2) 对于 $-1<u<1$, 给定 $U=u$ 时, 求 X 的条件密度函数.

3. (20分) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列, 且分布函数 F 连续.

(1) 证明: $P(\xi_1=\xi_2)=0$.

(2) 证明: 令 $N=\inf\{n\ge 2: \xi_n>\xi_1\}$, 求 N 和 ξ_N 的分布?

4. (30分)

(1) 若 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{d} c$, 其中 c 是常数, 证明 $\xi_n\eta_n \xrightarrow{d} c\xi$.

(2) 设$X_n \sim \text{Poisson}(n)$, $Y_m \sim \text{Poisson}(m)$ 且相互独立, 求证: 当 $n, m\to\infty$ 时,

$$\frac{(X_n-n)+(Y_m-m)}{\sqrt{X_n+Y_m}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

(提示:综合利用中心极限定理, 大数定律以及泊松分布的可加性)

(3) (附加题) 设给定 $X_n = k$ 时, Z_n 服从 Poisson(k) 分布, 求出 Z_n 的特征函数, 并证明: 当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{Z_n - E[Z_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Z_n]}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{且} \quad \frac{Z_n - E[Z_n]}{\sqrt{Z_n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

5. (20分) 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一族独立同分布的取值于 $\{1,2,3,\cdots\}$ 的随机变量, 满足

$$P(X_1 \geq n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

记 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(1) 求 X_1 的分布, 并写出它的母函数.

(2) 证明 $\dfrac{S_n}{n\ln n} \xrightarrow{P} 1$. (可参考以下步骤)

(i) 定义

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbf{1}_{\{X_k \leq n\ln n\}}, \quad n \geq 1.$$

证明: $P(S_n \neq S_n') \to 0$.

(ii) 依次证明: $\dfrac{E[S_n']}{n\ln n} \to 1$ 且 $\dfrac{\mathrm{Var}[S_n']}{(E[S_n'])^2} \to 0$.

(iii) 证明: 若 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 且 $a_n \to a$, 则 $a_n\xi_n \xrightarrow{P} a\xi$.

(iv) 依次证明: $\dfrac{S_n'}{n\ln n} \xrightarrow{P} 1$ 且 $\dfrac{S_n}{n\ln n} \xrightarrow{P} 1$.

(3) 证明 $\dfrac{S_n}{n\ln n} \overset{a.s.}{\not\to} 1$. (此问为附加题, 可参考以下步骤)

(i) 证明: $\forall c > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq cn\ln n) = \infty.$$

(ii) 证明: $\forall c > 0$,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n\ln n} \geq c\right) = 1.$$

(iii) 证明:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\ln n} \overset{a.s.}{=} \infty.$$