北京师范大学 2024-2025 学年第 1 学期

《数学分析》课程期中考试试题

课程所在学院：数学科学学院　　考试形式：闭卷　考试时间：100 分钟

一、（每小题 5 分，共 10 分）求下列数列极限

（1）　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$;

（2）　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1}\right)$.

二、（每小题 5 分，共 10 分）利用 Stolz 定理，证明

（1）　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0\ (a>1)$;

（2）　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ \left(a>1，\text{k 为正整数}\right)$.

三、（每小题 6 分，共 12 分）求下列函数极限

（1）　$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

（2）　$\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

四、（每题 6 分，共 12 分）指出下列函数的不连续点，并确定其不连续的类型

（1）　$\mathrm{y}=[x]\sin\frac{1}{x}$;

（2）　$\mathrm{y}=\begin{cases}\sin\pi x，& x\text{为有理数}\\ 0，& x\text{为无理数}\end{cases}$

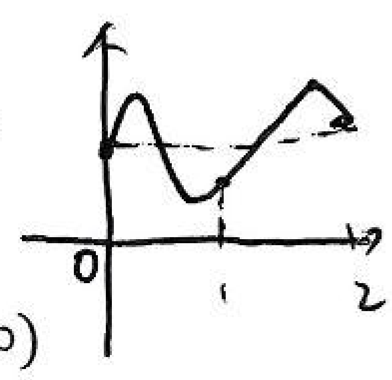
五、（15 分）对于数列$\{x_n\}$构造数集A_k：

$$A_k=\{x_n|n\ge k\}=\{x_k,x_{k+1},\cdots\}$$

记$diamA_k=sup\{|x_n-x_m|,x_n\in A_k,x_m\in A_k\}$，证明数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}diamA_k=0.$$

六、（15 分）证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在而且有限的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛.



七、（12 分）设函数$f(x)$在$[0,2]$上连续，且$f(0)=f(2)$，证明：存在$x,y\in[0,2],y-x=1$，使得$f(x)=f(y)$.

八、（14 分）若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（有限数），则$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.