北京师范大学 2014 ~ 2015 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：复变函数　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　考试时长：120 分钟　考试类别：闭卷☒ 开卷☐ 其他☐

院（系）：数学科学学院　　专业：数学与应用数学　　年级：2013 级

姓名：＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师（签字）：＿＿＿＿＿＿

一. (20 分)(1) 叙述孤立奇点的的定义. (2) 求下列各函数在复平面 $\mathbb{C}$(不含 ∞ 点) 中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型 (极点要指明阶数).

$0<|z-a|<R$

$$(a)\ \frac{1}{z(z^2+1)^2};\quad (b)\ \frac{e^z-1-z}{z^2(\cos z-1)};\quad (c)\ \frac{1}{z^3\sin\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

$D(a,R)\setminus\{a\}$

(2) 求 (a) 和 (b) 中函数在孤立奇点 0 点的留数.

二. (20 分) 叙述留数定理并计算下列积分:

$$(1)\ \int_{|z|=2}\frac{z-6}{z^2(z^2-1)}dz;\quad (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(1+x^2)(4+x^2)};$$

三. (15 分) 分式线性映射 $w=T(z)=\frac{z-i}{z+i}$ 将区域 $\Omega=\{z:\mathrm{Re}\,z<0,\mathrm{Im}\,z<0\}$ 映射为什么区域 $T(\Omega)=?$ (作图标明原像区域和像区域.)

四. (20 分) 叙述儒歇 (Rouché) 定理并求方程 $z^5-5z^2+z+1=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内根的个数.

五. (15 分) 设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析, 且 $|f(z)|$ 在区域 Ω 内为常数, 证明 $f(z)$ 在 Ω 中为常数.

$(z-1)$

六 (10 分) (1) 说明多值函数 $(z(1-z)^2)^{\frac{1}{3}}$ 在割去线段 $[0,1]$ 的 z 平面上可以分出三个单值解析分支. (2) 求出在 $[0,1]$ 的上沿取正值的那个单值解析分支 $g_0(z)$ 在点 $z=-1$ 处的值 ($g_0(-1)=?$). (3) 计算积分

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x(1-x)^2}\,dx}{(1+x)}.$$

$\frac{(z)^n}{n!}$