

2024 秋季学期复变函数期中考试

命题人：

考试时间：2024 年 11 月 20 日 10:00-12:00

整理人：Aut

1.(10 分) 求下列极限

$$(1) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}; \quad (2) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(z+1)}{z} (\ln 1 = 0).$$

2.(10 分) 试求函数 $f(z) = ze^{\bar{z}}$ 在何处可微和解析?

3.(30 分) 计算下列积分:

$$(1) \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}, \text{ 其中 } \gamma \text{ 是从 } 0 \text{ 到 } 1 \text{ 且不过点 } \pm i \text{ 的简单连续曲线};$$

$$(2) \int_{|z|=2} \frac{z^2}{z^4-1} dz;$$

$$(3) \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}, \text{ 其中 } C \text{ 是圆 } |z|=1 \text{ 沿逆时针方向, } \sqrt{z} \text{ 是由 } \sqrt{1}=-1 \text{ 确定的解析分支}.$$

4.(10 分) 设 $f(z)$ 在区域 D 外和 D 的边界 Γ 上解析, 且满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \alpha$. 对 $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, 求积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

5.(20 分) 设 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$, 求

(1) $f(z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展式及其收敛半径;

(2) $f(z)$ 在 $2 < |z| < 3$ 和 $|z| > 3$ 的 Laurent 展式。

6.(15 分) 指出下列函数的孤立奇点和类型

$$(1) \frac{z^2-1}{z(z^2+2)}; \quad (2) \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1} \quad (3) \cos \frac{1}{1-z}.$$

7.(5 分) 函数 $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ 的零点 $1 - \frac{1}{n\pi}$ 有聚点 1, 但 $f(z)$ 不恒为 0, 这是否与解析函数的唯一性矛盾? 请说明理由。