北京师范大学2018~2019学年第1学期期末考试试卷

课程名称：近世代数　　任课教师姓名：______

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷

院（系）：______　　专业：______　　年级：______

姓　名：______　　学号：______　　阅卷教师：______

一、(15分) 设 $R=\mathbb{R}[x]$ 是实数域上一元多项式环.

(1) 证明 R 是主理想环;

(2) 对于 $f(x)=x^5+x^4+x+1\in R$, 判断 $I=(f(x))$ 是否是素理想, 并证明你的结论.

二、(18分) 给定数域 F, 用 R, D 分别表示 $M_n(F)$ 中全体上三角矩阵和对角矩阵构成的子环, 在 R 与 D 之间建立映射

$$\varphi: R\to D,\quad A=\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ & a_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \mapsto \varphi(A)=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

(1) 证明 φ 是 R 到 D 的同态映射, 并计算 $\mathrm{Ker}(\varphi)$;

(2) 在 R 中令

$$I_1=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ & a_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix}\middle|\ a_1=0\right\}$$

和

$$I_2=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ & a_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix}\middle|\ a_1+a_2=0\right\}.$$

判断 I_1, I_2 是否是 R 的理想, 并证明你的结论.

(3) 对于上问中构成理想的 I_1, 证明 $R/I_1\simeq F$.

三、(16分) 设 E 是域 F 的一个超越扩张, D 是 E 的一个子环且满足 $F\subseteq D\subsetneqq E$, 并且 D 中元均为 F 上代数元.

(1) 证明 D 是 E 的子域;

(2) 证明 E 是 D 的超越扩张.

四、(18分) 设 $E=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma)$, 其中 $\alpha=\sqrt{2}, \beta=\sqrt[3]{3}, \gamma=\sqrt[5]{5}$.

(1) 证明 $E=\mathbb{Q}(\alpha\beta\gamma)$;

(2) 求 $[E:\mathbb{Q}]$, 并说明理由.

五、(15分) 构造一个 35 阶群 G, 并证明任意一个 35 阶群都与 G 同构.

六、(18分) 设 G 为 $6p$ 阶群, 其中 p 为奇素数. 证明 G 的 Sylow p–子群是 G 的正规子群