测度与概率 -严士健课后习题参考解答

HQR-北京师范大学

2018 年 9 月 22 日

作者的话

这篇文档旨在帮助概率统计专业的同学进一步地学习《测度与概率》一书. 此书是国内公认的一流测度论教材, 对测度论内容的基本概念, 方法和在概率论中的应用都做了细致的讲解. 但作者本人在学习这本书时, 常常苦于课后习题没有完整的解答或者阶段性的提示, 常常使作者陷入困境. 本着前人栽树, 后人乘凉的传统, 作者利用课余时间, 结合《概率测度 I》,《概率测度 II》两门专业选修课的讲授内容与习题, 对此书的所有习题, 进行了一定程度的探讨, 并且修正了部分原书当中的打印错误与表述不严谨的地方. 对于部分习题, 也给出了几种解题思路.

习题的第一章参考了部分 [1],[2] 的中关于势的内容, 第二章参考了 [3],[4],[5],[6] 中度量空间与泛函分析四大基本定理的相关内容, 第三章参考了 [5] 中的豪斯多夫测度与距离外测度的部分内容, 第 6 章参考了 [1],[7] 中有限维乘积空间与无限维乘积空间的部分内容, 第 9,10 章参考了 [9],[10],[11] 的圣彼得堡悖论, 强大数定律, 无穷可分律与特征函数表示定理的部分内容. 同时参考文献中所列出的书目，也对理解本书的内容大有帮助。

可惜作者的水平实在有限, 对于部分习题中的解答, 必然有不严谨, 不清晰之处, 希望读者能多多指正, 此文档也仅供参考, 作为学习测度论的一个工具.

目录

1 集合、映射与势

1.1 集合及其运算

练习 1.1.1 证明: $(A\bigcup B)\backslash B = A \Leftrightarrow A\bigcap B = \varnothing$.

解:

$\Leftarrow$ 方向是显然的.

$\Rightarrow$: $(A\bigcup B)\backslash B = A\backslash B = A \to A\bigcap B = \varnothing$.

练习 1.1.2 证明: $(A\backslash B)\bigcup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.

解:

" $\Leftarrow$: "$B \subset A, A\backslash B\bigcup B \subset A$, 显然有 $A \subset (A\backslash B)\bigcup B$, 故 $(A\backslash B)\bigcup B = A$.

" $\Rightarrow$: " 若结论不成立, 则 $A\backslash B \subset B, (A\backslash B)\bigcup B \subsetneq A$ 矛盾. 故 $B \subset A$

练习 1.1.3 $(A\backslash B)\bigcup C = A\backslash(B\backslash C)$ 成立的充分必要条件是什么?

解:

左式为 $(A\bigcap B^c)\bigcup C$, 右式为 $A\bigcap(B^c\bigcup C)$ 可见左式必包含 C, 而右式未必, 容易得到充要条件为 $C \subset A$.

下证, 若 $C \subset A$ 两式相等是显然的, 若两式相等, 由于左式比右式大, 仅需考虑 $\forall x \in (A\bigcap B^c)\bigcup C, x \in C \to x \in A\bigcap(B^c\bigcup C) \to C \subset A$.

练习 1.1.4 证明下述等式:

$(1) A\bigcap B = A\backslash(A\backslash B)$;

(2)$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash C)\bigcup(A\bigcap C)$;

(3)$A\backslash(B\bigcap C)=(A\backslash B)\bigcup(A\backslash C)$;

(4)$A\backslash(B\bigcup C)=(A\backslash B)\bigcap(A\backslash C)$;

(5)$(A\backslash B)\bigcap(C\backslash D)=(A\bigcap C)\backslash(B\bigcup D)$;

(6)$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

(7)$(A\Delta B)\bigcap C=(A\bigcap C)\Delta(B\bigcap C)$;

(8)$B\bigcap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(B\bigcap A_\alpha)$;

(9)$B\bigcap(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(B\bigcap A_\alpha)$

解:

(1)$A\backslash(A\backslash B)=A\backslash(A\bigcap B^c)=A\bigcap(A^c\bigcup B)=A\bigcap B$.

(2)$A\backslash(B\backslash C)=A\backslash(B\bigcap C^c)=A\bigcap(B^c\bigcup C)=(A\bigcap B^c)\bigcup(A\backslash C)=(A\backslash B)\bigcup(A\backslash C)$

(3)$A\backslash(B\bigcap C)=A\bigcap(B^c\bigcup C^c)=(A\bigcap B^c)\bigcup(A\bigcap C^c)=(A\backslash B)\bigcup(A\backslash C)$

(4)$A\backslash(B\bigcup C)=A\bigcap(B^c\bigcap C^c)=A\bigcap B^c\bigcap A\bigcap C^c=(A\backslash B)\bigcup(A\backslash C)$

(5)$(A\backslash B)\bigcap(C\backslash D)=(A\bigcap B^c)\bigcap(C\bigcap D^c)=(A\bigcap C)\bigcap(B^c\bigcap D^c)=(A\bigcap C)\backslash(B\bigcup D)$

(6)$(A\Delta B)\Delta C=\left((A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)\right)\Delta C=\left((A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)\backslash C\right)\bigcup\left(C\backslash\left((A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)\right)\right)$
$=\left((A\bigcap B^c)\bigcup(B\bigcap A^c)\bigcap C^c\right)\bigcup\left(C\bigcap\left((A\bigcap B^c)\bigcup(B\bigcap A^c)\right)^c\right)$
$=\left((A\bigcap B^c\bigcap C^c)\bigcup(B\bigcap A^c\bigcap C^c)\right)\bigcup\left((A^c\bigcap B^c\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)\right)$

另一方面 $A\Delta(B\Delta C)=A\Delta\left((B\backslash C)\bigcup(C\backslash B)\right)$
$=\left((B\backslash C)\bigcup(C\backslash B)\backslash A\right)\bigcup\left(A\backslash\left((B\backslash C)\bigcup(C\backslash B)\right)\right)$
$=\left((B\bigcap C^c)\bigcup(C\bigcap B^c)\bigcap A^c\right)\bigcup\left(A\bigcap\left((B\bigcap C^c)\bigcup(C\bigcap B^c)\right)^c\right)$
$=\left((A\bigcap B^c\bigcap C^c)\bigcup(B\bigcap A^c\bigcap C^c)\right)\bigcup\left((A^c\bigcap B^c\bigcap C)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)\right)$

所以二者相等.

(7)$\forall x\in B\bigcap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha),x\in B,x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\Leftrightarrow\exists\alpha_0,x\in B,x\in A_{\alpha_0}\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(B\bigcap A_\alpha)\Leftrightarrow B\bigcap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(B\bigcap A_\alpha)$

(8)$\forall x\in B\bigcap(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha),x\in B,x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\Leftrightarrow x\in B,\forall\alpha,x\in A_\alpha\Leftrightarrow x\in$

$\bigcap\limits_{\alpha\in I}(B\bigcap A_\alpha) \Leftrightarrow B\bigcap(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in I}(B\bigcap A_\alpha)$

练习 1.1.5 下列等式是否成立？若不成立, 有怎样的包含关系？

(1)$A\bigcup(B\backslash C) = (A\bigcup B)\backslash(A\bigcup C)$;

(2)$A\bigcup(B\Delta C) = (A\bigcup B)\Delta(A\bigcup C)$;

(3)$A\backslash(B\bigcup C) = (A\backslash B)\bigcup(A\backslash C)$;

(4)$(A\backslash B)\bigcup C = (A\bigcup C)\backslash B$.

解:

(1) 当 $A = \varnothing$ 时:

$$A\bigcup(B\backslash C) = (A\bigcup B)\backslash(A\bigcup C)$$

当 $A \neq \varnothing$ 时, 不成立.

$$\begin{aligned}(A\bigcup B)\backslash(A\bigcup C) &= (A\bigcup B)\bigcap(A^c\bigcap C^c)\\ &= (A\bigcap A^c\bigcap C^c)\bigcup(B\backslash(A\bigcup C))\\ &= B\backslash(A\bigcup C) \subset B\backslash C \subset A\bigcup(B\backslash C)\end{aligned}$$

(2)$(A\bigcup B)\Delta(A\bigcup C) = (B\backslash C)\bigcup(C\backslash B) = (B\Delta C) \subset A\bigcup(B\Delta C)$. 故当 $A = \varnothing$ 时, 等式成立, 否则不成立.

(3) 当 $A = \varnothing$ 时:

$$A\backslash(B\bigcup C) = (A\backslash B)\bigcup(A\backslash C)$$

当 $A \neq \varnothing$ 时, 不成立.

$$
\begin{aligned}
&A \backslash (B \bigcup C) = A \bigcap B^c \bigcap C^c \\
&(A \backslash B) \bigcup (A \backslash C) = (A \bigcup B^c) \bigcup (A \bigcap C^c) \\
&A \bigcap B^c \bigcap C^c \subset A \bigcap B^c \subset (A \bigcup B^c) \bigcup (A \bigcap C^c)
\end{aligned}
$$

(4)$(A\backslash B)\bigcup C = (A\bigcap B^c)\bigcup C, (A\bigcup C)\backslash B = (A\bigcup C)\bigcap B^c$, 当 $C \subset B^c$ 时等式成立, 否则不成立.

练习 1.1.6 试化简集合 $(A\bigcup B^c \bigcup C^c)\bigcap(A\bigcup(B\bigcup C^c))$.

解:

由分配律, 原式可拆为 *9* 项的并: $(A\bigcap A)\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C^c)\bigcup(B^c\bigcap A)$
$\bigcup(B^c\bigcap B)\bigcup(B\bigcap C^c)\bigcup(C^c\bigcap A)\bigcup(C^c\bigcap B)\bigcup(C^c\bigcap C^c)$
$= A\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C^c)\bigcup(B^c\bigcap A)\bigcup(B\bigcap C^c)\bigcup(C^c\bigcap A)\bigcup(C^c\bigcap B)\bigcup C^c$
$= A\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(B^c\bigcap A)\bigcup(A\bigcap C^c)\bigcup(C^c\bigcap A)\bigcup(B\bigcap C^c)\bigcup(C^c\bigcap B)\bigcup C^c$
$= A\bigcup(A\bigcap C^c)\bigcup(B\bigcap C^c)\bigcup C^c$
$= A\bigcup C^c = A\backslash C$

练习 1.1.7 设 $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ 为单调减集序列, 则有 $A_1 = (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)\bigcup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1}))$

解:

(1)

$\forall x \in A_1$, 因为 $\{A_n, n = 1, 2, ...\}$ 递减, 故 $A_n \subset A_1, \forall n \in \mathbb{N}$.
若 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n$, 则 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1})\right)$
否则,$\exists N \geqslant 2, s.t. x \notin A_N$, 故 $x \in A_1 \backslash A_N$, 再由 $\{A_n\}$ 递减可知:

$x \in A_1 \backslash A_N = (A_1 \backslash A_2) \bigcup (A_2 \backslash A_3) \bigcup \ldots \bigcup (A_{N-1} \backslash A_N) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1})$.

于是 $A_1 \subset \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1}) \right)$. 矛盾.

反之,$\forall x \in \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1}) \right)$

则 $x \in \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right)$ 或 $x \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1}) \right)$

若 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $x \in A_1 \bigcap (\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} \subset A_1)$

若 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1})$, 则 $\exists N, s.t. x \in A_N \backslash A_{N+1} \subset A_N \subset A_1$.

即得 $A_1 = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1}) \right)$

(2)

$\forall k \neq l$, 不妨设 $k < l$, 则有：

$$A_k \backslash A_{k+1} = A_k \bigcap A_{k+1}^c \subset A_{k+1}^c$$
$$A_l \backslash A_{k+1} = A_k \bigcap A_{k+1}^c \subset A_l \subset A_{k+1}$$

故可得 $(A_k \backslash A_{k+1}) \bigcap (A_l \backslash A_{l+1}) = \varnothing, \forall k \neq l$. 设 $\exists x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1})$ 即 $\forall n \geqslant 1$, 有 $x_0 \in A_n$, 同时,$\exists n_0, s.t. x_0 \in A_{n_0} \backslash A_{n_0+1}$, 矛盾

故 $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n+1}) \right) = \varnothing$. 即证

练习 1.1.8 设 $\mathbb{R}$ 为 Ω 的一切子集组成的集类, 则 $\mathbb{R}$ 对集合的交 *(*看成乘法*)*、对称差 *(*看成加法*)* 运算作成一个环.Ω 是单位元,$\varnothing$ 是零元.

解:

①”$\bigcap$” 运算前例已证交换律和结合律;

②"Δ 在练习 *1.1.4(6)* 中证明了结合律, 交换律显然.

③ 由于 $\bigcap$" 有交换律, 故仅需验证 $(A\Delta B)\bigcap C=(A\bigcap C)\Delta(B\bigcap C)$, 这在练习 *1.1.4(7)* 中已经证明.

④$\Omega\bigcap A=A,\varnothing\bigcap A=\varnothing,\varnothing\Delta A=A.$

由此可得 $\mathbb{R}$ 对集合的交 *(看成乘法)*、对称差 *(看成加法)* 运算作成一个环.Ω 是单位元,$\varnothing$ 是零元.

练习 1.1.9 设 $\{A_n:n=1,2,\dots\}$ 是一集序列, 令 $B_1=A_1,B_n=A_n\backslash(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)$, 则 $B_n,n=1,2,\dots$ 两两不交, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$

解:

利用包含关系, 显然左包含右, 因为并集的每一项左都包含右, 仅需证右包含左*:*

$\forall\omega\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n,\exists j\leqslant n,s.t.j=min\{m:\omega\in A_m\}$

$\Rightarrow\omega\in\bigcup\limits_{i=1}^{j}\left(A_i\backslash\left(\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}A_k\right)\right)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(A_i\backslash\left(\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}A_k\right)\right)$

$\Rightarrow\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(A_i\backslash\left(\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}A_k\right)\right)$

练习 1.1.10 试证明定理 *1.1.7.*

解:

(2) 容易得到, 主要证明 (1). 由定义:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n &= \{x:\forall n\in\mathbb{N},\exists k\geqslant n,s.t.x\in A_k\},\\ \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n &= \{x:\exists n\in\mathbb{N},s.t.\forall k\geqslant n,x\in A_k\}\end{aligned}$$

$\forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists k \geqslant n s.t. x \in A_n \Leftrightarrow x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

$\forall x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, s.t. x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, s.t. \forall k \geqslant n, x \in A_k \Leftrightarrow x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Leftrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$

练习 1.1.11 试举例说明：$\{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ 不单调, 但 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在.

解:

令 $A_{2n-1} = (\frac{1}{2n-1}, 1), A_{2n} = (0, 1 - \frac{1}{2n}), n = 1, 2, \ldots$. 则 $\{A_n\}$ 不单调, 但 $\lim_{n\to\infty} A_n = (0, 1)$

练习 1.1.12 设 $\forall k = 1, 2, \ldots,$ 定义 $A_{2k+1} = [0, 2 - \frac{1}{2k+1}], A_{2k} = [0, 1 + \frac{1}{2k}]$, 试求 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n, \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$

解:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=2}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=2}^{\infty}([0,1]) = [0,1]$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=2}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=2}^{\infty}([0,2)) = [0,2)$$

PS: 注意到第二小问右端的开区间, 是取不到 *2* 的.

练习 1.1.13 给定非零自然数 m 及 m 个集合 $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$, 设 $A_m = B_k$, 当 m 整除 $n - k$ 时, 试求 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n, \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$

解:

由题意可得 $A_{Nn+k} = B_k$ 由定理 1.1.7 可得:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{k=0}^{m-1} B_k, \underline{\lim_{n\to\infty}} = \bigcap_{k=0}^{m-1} B_k.$$

练习 1.1.14 试证定理 *1.1.10* 的 (1), (2), (3), (4).

解:

(1)(2) 十分显然, 只证 (3)(4).

(3)$\forall x \in A, \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1; \forall x \in B\backslash A, \mathbb{1}_A(x) = 0 < \mathbb{1}_B(x) = 1; \forall x \in B^c, \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \Omega, \mathbb{1}_A(x) = 0 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.

(4)$\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha, \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha}(x) = 1 \Rightarrow \exists \alpha_0, s.t. \mathbb{1}_{A_{\alpha_0}}(x) = 1 \Rightarrow \max_{\alpha\in J} \mathbb{1}_{A_\alpha}(x) = 1$. 反之亦同理,$\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{\alpha\in J} A_\alpha}(x)$ 时类似可得.

练习 1.1.15 设 $A, B \subset \Omega$, 试将 $\mathbb{1}_{A\backslash B}, \mathbb{1}_{A\Delta B}$ 用 $\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B$ 表示出来.

解:

$$I_{A\backslash B} = I_A - I_A I_B \text{或} \max\{I_A - I_B, 0\}$$

$$I_{A^c} = 1 - I_A$$

$$I_{A\Delta B} = |I_A - I_B| \text{或} \max\{I_A - I_A I_B, I_B - I_A I_B\} \text{或} I_A + I_B - 2I_A I_B$$

1.2 映射与势

练习 1.2.1 证明定理 *1.2.3* 的证明 (i) 中所提出的事实.

解:

$\forall \alpha \in I, A_\alpha \sim B_\alpha$, 且 A_α, B_α 两两不交, 故存在 f_α 为 A_α 到 B_α 之间的一一

映射, 令 $f=\sum\limits_{\alpha\in I} f_\alpha \mathbb{1}_{A_\alpha}$, 则容易验证为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ 到 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$ 的一一映射, 则由 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha \sim \bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$.

练习 1.2.2 试作开上半平面与开单位圆间的一一映射.

解:

开上半平面 $A:=\{z:Imz>0\}$, 开单位圆 $B:=\{\omega,|\omega|<1\}$.

利用共形映射:

$$\omega=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$$

其中 $z_0\in A,\theta\in\mathbb{R}$ 为常数. 可得二者之间存在一一映射.

练习 1.2.3 设集合 A 有 n 个元素 $(n=1,2,\dots)$, 在 A 的子集和它的余集 *(*对 *A)* 间建立一一对应, 由此证明:

$$C_n^k=C_n^{n-k},0\leqslant k\leqslant n,$$

其中 C_n^k 表示从 n 个元中取出 k 个元的组合数.

解:

记 A 的有 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的子集的集合为 $\mathscr{B}$, 即:

$$\mathscr{B}=\{B\subset A:\overline{\overline{B}}=k\}$$

再令 $\mathscr{C}=\{C\subset A:\overline{\overline{C}}=n-k\}$, 做 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{C}$ 的映射 f:

$$f(B)=A\backslash B,B\in\mathscr{B}$$

则 f 是一一映射, 故 $\mathscr{B}\sim\mathscr{C},\overline{\overline{\mathscr{B}}}=\overline{\overline{\mathscr{C}}},C_n^k=C_n^{n-k}$

1.3 可数集

练习 1.3.1 $\mathbb{R}^d$ 以有理点为中心, 以正有理数为半径的球的全体是可数集.

解:

设 $\mathbb{Q}^d$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有理点,$\mathbb{Q}$ 为有理数, 题中所求集为 X, 则 $X = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}\bigcup\limits_{x\in\mathbb{Q}^d}\left(B(x,r)\bigcup\overline{B}(x,r)\right)$. 其中 $B(x,r)$ 表示以 x 为心,r 为半径的开球,$\overline{B}(x,r)$ 表示以 x 为心,r 为半径的闭球. 则 $X \sim \mathbb{Q}^{d+1}\times\{0,1\}$, 故 X 可数.

PS: 事实上直接由 X 的形式利用”可数的并仍可数”这个性质即可.

练习 1.3.2 直线上一个由长度不为零的互不相交的开区间组成的集至多可数.

解:

不放设 $A = \bigcup\limits_{\alpha\in I}(a_\alpha,b_\alpha)$, 其中 I 为指标集,$a_\alpha,b_\alpha\in\mathbb{R}$, 且两两不交. 则由实数的稠密性, 每一区间中存在有理数 r_α 且两两不同. 故存在一开区间到有理数的单射:

$$\begin{aligned} f:(a,b) &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (a_\alpha,b_\alpha) &\rightarrow r_\alpha \end{aligned}$$

f 是一单射, 故 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$. 故此集为至多可数集.

练习 1.3.3 证明任一可数集的所有有限子集的全体组成可数集.

解:

记 A 为可数集, 则 $A\sim\mathbb{N}$, 令 A_n 为 A 的有 n 个元素的子集全体

$n=1,2,\ldots$. 则 $A_n \sim \mathbb{N}^n$, 从而所有有限子集全体与 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$ 等势, 从而与 $\mathbb{N}$ 等势, 所以该集类的势为 $\aleph_0$.

练习 1.3.4 给定平面上的一个集, 若此集中的任意两点间的距离大于某个固定整数 α, 则此集至多是可数集.

解:

设题中所设集合为 X, 则 $\forall x \in X$, 可取 x 为中心, 边长为 $\sqrt{2}\alpha$ 的正方形覆盖, 且正方形中仅 x 一个点. 而平面可被 $\sqrt{2}\alpha$ 为边长的不交正方形划分, 所需的正方形个数为可数个, 故 X 至多可数.

练习 1.3.5 设 A 是有限集或可数集,B 是无限集, 则 $A\bigcup B \sim B$.

解:

法一：直接构造二者之间的映射

(1) 若 A 可数, 不妨设 A=$\{a_1,a_2,\ldots\}$, $A\bigcap B=\varnothing$,, 且 $B=B_1\bigcup B_2$, 其中 $B_1=\{b_1,b_2,\ldots\}$.

作映射如下：

$$\begin{aligned} f(a_i) &= b_{2i-1}, a_i \in A \\ f(b_i) &= b_{2i}, b_i \in B_1 \\ f(x) &= x, x \in B_2. \end{aligned}$$

则 f 是一一映射, 从而 $A\bigcup B \sim B$.

(2) 若 A 有限, 则设 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$, 此时利用映射:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= b_i, a_i \in A \\ f(b_i) &= b_{N+i}, b_i \in B_1 \\ f(x) &= x, x \in B_2. \end{aligned}$$

类似可得 $A\bigcup B \sim B$.

法二: 直接利用集合的势比较: B 是无限集, 故必然存在 B 的一个可数子集 B', 故 B 可以分解为 $B\backslash B'\bigcup B'$. 故:

$$\begin{aligned} &A\bigcup B = A\bigcup B'\bigcup(B\backslash B') \\ &A\bigcup B' \sim B' \\ &B\backslash B' \sim B\backslash B' \\ &A\bigcup B = A\bigcup B'\bigcup(B\backslash B') \sim B'\bigcup(B\backslash B') = B \end{aligned}$$

1.4 不可数集

练习 1.4.1 证明: 定义在 $[a,b]$ 上的连续函数的全体组成的集 $C[a.b]$ 的势为 $\aleph$.

解:

令 $f(x)=c, c\in\mathbb{R}, f$ 为常值函数, 故为连续函数, 简记 $C[a.b]$ 为 $C, \overline{\overline{C}} \geqslant \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph$, 由 *Berenstein* 定理, 仅需证明 $\overline{\overline{C}} \leqslant \aleph$.

记 $[a,b]$ 中的所有的有理序列为 $(r_1,r_2,\dots,r_n,\dots)$, 则对于任意一个连续函数 $f, a_f := (f(r_1),f(r_2),\dots,f(r_n),\dots)$. 若 $f\neq g, \rightarrow a_f \neq a_g$, 否则由有理数的稠密性,$f,g$ 在任意有理数都相等, 由连续函数的性质必然有 $f=g$. 故 a_f

是连续函数到全体实数列的单射, 后者的势为 $\aleph \to \overline{\overline{C}} \leqslant \aleph \to \overline{\overline{C}} = \aleph$.

练习 1.4.2 *(1)* 证明定义在 $[a,b]$ 上的右连续的单调函数全体的势为 $\aleph$.
(2) 定义在 $[a,b]$ 上的单调函数全体具有什么样的势?

解:
(1)
记 A 为定义在 $[a,b]$ 上的右连续单调函数全体, 则:

$$\begin{aligned}&\{c : c \in \mathbb{R}\} \subset A \subset \\ &\{(f(x_1), f(x_2), \dots, f(r_1), f(r_2), \dots) : x_n \text{为间断点}, r_n \in [a,b] \bigcap \mathbb{Q}\} := B \subset E^\infty\end{aligned}$$

其中 B 中元素给出了函数在跳跃点出的值和有理点处的值, 这可数个点能够唯一确定一个右连续的单调函数. 故 $\aleph \leqslant \overline{\overline{A}} \leqslant \aleph$, 从而 $\overline{\overline{A}} = \aleph$
(2)
与 *(1)* 同理, 并且有理点处的值能够逼近间断点处的左右极限, 故 *(1)* 中集合 B 能够包含 *[a,b]* 上的单调函数全体, 故其势为 $\aleph$.

练习 1.4.3 证明自然数列的全体的势为 $\aleph$.

解:
令 $A = \{(x_1, x_2, \dots) : x_n \in \{1, 2\}, n \in \mathbb{N}\}$, 则容易得到:

$$A \subset \mathbb{N}^\infty \subset E^\infty$$

故 $\overline{\overline{\mathbb{N}^\infty}} = \aleph$

练习 1.4.4 证明自然数的全体自己组成的集 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 为 $\aleph$.

解:

令 $A=\{(x_1,x_2,\cdots:x_n\in\{0,1\},n\in\mathbb{N}\}$.

构造映射 $f:\mathscr{P}(\mathbb{N})\to A$.

$$f(B)=(x_1,x_2,\ldots),B\in\mathscr{P}(\mathbb{N}).$$

其中 $x_n=I_{n\in B},n=1,2,\ldots$. 则 f 是 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 到 A 的一一映射, 从而有 $\overline{\overline{\mathscr{P}(\mathbb{N})}}=\overline{\overline{A}}=\aleph$.

2 距离空间

2.1 定义及例

练习 2.1.1 若 $p>1,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则 $\forall a,b\in\mathbb{R}_+$ 有 $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}$.

解:

$p,q,>1,a,b>0,\ln a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}=\dfrac{1}{p}\ln a+\dfrac{1}{q}\ln b$

$\because\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 且 $\ln x$ 为凹函数, 故有 $\dfrac{1}{p}\ln a+\dfrac{1}{q}\ln b\leqslant\ln(\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q})$

$\Rightarrow a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\geqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}$

练习 2.1.2 设 $[a,b]$ 是给定的区间,$C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上全体连续函数的集, 则由:

$$\rho(f,g)=\sup\nolimits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t0|,\qquad f,g\in C[a,b]$$

定义的 ρ 为 $C[a,b]$ 上的一个距离.

设 $\varphi\in C[a,b]$ 且 $\forall t\in[a,b],\varphi(t)>0,p\geqslant1$, 则由:

$$\rho_p(f,g) := [\int_a^b |f(t)-g(t)|\varpi(t)dt]^{\frac{1}{p}}, f,g \in C[a,b]$$

定义的 ρ_p 也是 $C[a,b]$ 上的一个距离.

解:

①

(i) 显然有 $\rho(f,g) \geqslant 0$

(ii)$\rho(f,g)=0 \Rightarrow \sup\limits_{a\geqslant t\geqslant b}|f(t)-g(t)|=0 \Rightarrow \forall t\in[a,b], f(t)-g(t)=0 \Rightarrow f\equiv g, \forall t\in[a,b]$

(iii)$\rho(f,g)=\sup\limits_{a\geqslant t\geqslant b}|f(t)-g(t)|=\sup\limits_{a\geqslant t\geqslant b}|g(t)-f(t)|=\rho(g,f)$

(iv)$\rho(f,g) = \sup\limits_{a\geqslant t\geqslant b}|f(t)-g(t)| = \sup\limits_{a\geqslant t\geqslant b}|g(t)-h(t)+h(t)-f(t)| \leqslant \sup\limits_{a\geqslant t\geqslant b}|f(t)-h(t)|+\sup\limits_{a\geqslant t\geqslant b}|h(t)-g(t)| \leqslant \rho(f,h)+\rho(h,g)$

②

(i)$\varphi(t)>0, \rho_p(f,g)\geqslant 0$ *(ii)*$\rho_p(f,g)=[\int_0^b |f(t)-g(t)|^p\varphi(t)]^{\frac{1}{p}}=0, \varphi(t)>0, |f(t)-g(t)|>0 \Rightarrow |f(t)-g(t)|=0.a.e \Rightarrow f,g\in C[a,b], f\equiv g, \forall t\in[a,b]$

(iii)$\rho_p(f,g)=\rho_p(g,f)$

(iv) 由闵可夫斯基不等式 $\rho_p(f,g)=\|(f-g)\varphi(t)^1p\|_p \leqslant \|(f-h)\varphi(t)^1p\|_p + \|(h-g)\varphi(t)^1p\|_p=\rho_p(f,h)+\rho_p(h,g)$.

故 ρ,ρ_p 都是 $C[a,b]$ 上的距离.

练习 2.1.3 设 $\alpha:=(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$ 为正实数序列, 满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k<\infty.p\geqslant 1, E:=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 令:

$$E^{\mathbb{N}}(\alpha;p)=\left\{x:x=(x_1,x_2,\dots),x_k\in E,k\in\mathbb{N},\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k|x_k|^p<\infty\right\}$$

$$\rho_p(x,y)=[\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k|x_k-y_k|^p]^{\frac{1}{p}}$$

则 $(E^{\mathbb{N}}(\alpha;p),\rho_p)$ 为一距离空间. 此外设:

$$E^{\mathbb{N}}(\alpha;p)=\{x:x=(x_1,x_2,\dots),x_k\in E,k\in\mathbb{N},\sup_{x\in\mathbb{N}}|x_k|<\infty\}$$
$$\rho_p(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k-y_k|,x,y\in E^{\mathbb{N}},$$

则 $(E^{\mathbb{N}},\rho)$ 也是一距离空间.$\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p=\rho$

解:

①

(i) 显然有 $\rho_p(x,y)\geqslant 0$

(ii)$\rho_p(x,y)=0,\alpha_k>0\Rightarrow\forall k\in\mathbb{N},x_k=y_k\Rightarrow x\equiv y$

(iii) 显然有 $\rho_p(x,y)=\rho_p(y,x)$

(iv) 由闵可夫斯基不等式 $\rho_p(x,y)=\|\alpha^{\frac{1}{p}}(x-y)\|_p\leqslant\|\alpha^{\frac{1}{p}}(x-z)\|_p+\|\alpha^{\frac{1}{p}}(z-y)\|_p=\rho_p(x,z)+\rho_p(z,y)$

故 ρ_p 为 $E^{\mathbb{N}}$ 上的距离,$((E^{\mathbb{N}},\alpha),\rho_p)$ 为距离空间. 对于 ρ, 类似习题 *2.1.2* 中②的讨论可得 ρ 也为 $E^{\mathbb{N}}$ 上的距离.

②

先证 $\varlimsup\limits_{p\to\infty}\rho_p\leqslant\rho$.

由于 $\rho_p=[\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k|x_k-y_k|^p]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k-y_k|[\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k]^{\frac{1}{p}}$. 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k<\infty$. 故当 $p\to\infty,[\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k]^{\frac{1}{p}}\to 1.\to\varlimsup\limits_{p\to\infty}\rho_p\leqslant\rho$.

再证 $\varliminf\limits_{p\to\infty}\rho_p\geqslant\rho$.

由于 $\rho=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k-y_k|,\forall\varepsilon>0,\exists J\subset\mathbb{N}.s.t.\forall k\in J,\rho<|x_k-y_k|+\varepsilon,\rho_p>[\sum\limits_{k\in J}\alpha_k|x_k-y_k|^p]^{\frac{1}{p}}>\rho-\varepsilon$, 由 ε 的任意性, 可知 $\varliminf\limits_{p\to\infty}\rho_p\geqslant\rho$.

综上所述, 可得 $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p=\rho$

练习 2.1.4 设 $E:=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C},E^{\mathbb{N}}:=\{x:x=(x_1,x_2,\dots),x_n\in E,n\in\mathbb{N}\},\{\alpha_n:n\in\mathbb{N}\}$ 为一可和的正数列, 试证: $(E^{\mathbb{N}},\rho)$ 是距离空间, 其中 ρ 有如下定义:

$$\rho(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}, x, y \in E^{\mathbb{N}}.$$

解:

(i) 显然有 $\rho(x,y) \geqslant 0$.

(ii)$\rho(x,y) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, x_k = y_k \Rightarrow x \equiv y$.

(iii) 显然有 $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(iv) 由不等式 $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$, 且 $\rho(x,y) < \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$. 故求和号和加法可以交换顺序.$\Rightarrow$ $\rho(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n-z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n-y_n|}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n-z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n-y_n|} = \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

故 ρ 是 $E^{\mathbb{N}}$ 上的距离,$(E^{\mathbb{N}}, \rho)$ 是距离空间.

练习 2.1.5 设 $E := \{x : x = (x_1, x_2, \dots), x_k \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}\}, d$ 为 $\{0,1\}$ 上的离散距离, 试证：如下定义的 ρ 是 E 上的距离,

$$\rho(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} d(x_k, y_k), x, y \in E.$$

解:

注意到：$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \mathit{if}\ x = y \\ 1, & \mathit{otherwise}. \end{cases}$

d 是距离, 故有 $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$. 在习题 *2.1.4* 中令 $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$, 讨论是类似的, 不再赘述.

练习 2.1.6 设 p 是一给定素数, 对每一给定的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $U_p(n)$ 是能整除 n 的 p 的幂的最大指数 *(*即 $p^{U_p(n)}$ 能整除 n, 但 $p^{U_p(n)+1}$ 不能整除 n.*)* 设 $x = \pm\frac{r}{s}$ 为有理数,$r, s \in \mathbb{N}$, 定义 $U_p(x) := U_p(r) - U_p(s)$. 试证:

(1)$U_p(x), x\in\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的一个映射.

(2)$\forall x,y\in\mathbb{Q}$, 令:

$$d(x,y):=\begin{cases}0, & x=y\\ p^{-U_p(x-y)}, & x\neq y.\end{cases}$$

则 $d(x,y)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个距离 *(此距离称为 p-adic 距离)*. 而

$$d(x,y)\leqslant\max(d(x,z),d(z,y)),\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$$

解:

(1) 即证是良定义的, 不妨设 $x=\dfrac{r}{s}=\dfrac{m}{n}$, 其中 $m=kr,n=ks,r,s$ 互质,$k\in\mathbb{N}$, 则由定义 $U_p(x)=U_p(r)-U_p(s)=U_p(m)-U_p(n)=U_p(kr)-U_p(ks)$. 注意到 $r|p^{U_p(x)},kr|kp^{U_p(r)},\forall l\in\mathbb{N},k|p^l$ 时, 则有 $U_p(kr)=U_(r)+l$, 故有 $U_p(x)=U_p(m)-U_p(n)=U_(r)+l-U_p(s)-l=U_p(r)-U_p(s)$. 故定义是良定义的.

(2) 逐条验证距离的定义即可.

① 显然有 $d(x,y)\geqslant 0$;

② 显然有 $d(x,y)=0\Rightarrow x=y$;

③ 显然有 $d(x,y_=d(y,x)$;

④ 首先验证当 $n,m\in\mathbb{N}$ 时, 有:

$$p^{U_p(n-m)}\geqslant\min\{p^{U_p(n)},p^{U_p(m)}\}$$

这是因为 $n-m|p^{U_p(n-m)},n|p^{U_p(n)},m|p^{U_p(m)}$, 则 $n-m|\min\{p^{U_p(n)},p^{U_p(m)}\}$, 故由定义可得 $p^{U_p(n-m)}\geqslant\min\{p^{U_p(n)},p^{U_p(m)}\}$. 再证上式当 $n,m\in\mathbb{Q}$ 时也成立. 不妨设 $m=\dfrac{a}{b},n=\dfrac{c}{d},a,b$ 互质,c,d 互质, 则容易得到 $ad-bc$ 与 bd 互质.

故有:

$$\begin{aligned} p^{U_p(n-m)} &= p^{U_p(ad-bc)-U_p(bd)} \\ &\geqslant \min\{p^{U_p(ad)-U_p(bd)}, p^{U_p(bc)-U_p(bd)}\} \\ &= \min\{p^{U_p(n)}, p^{U_p(m)}\} \end{aligned}$$

则由此时可得,$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(z,y)\}$, 自然有三角不等式成立, 故 d 是 $\mathbb{Q}$ 上的距离.

2.2 开集、闭集

练习 2.2.1 给出 $\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r)$ 的例子

解:

援引 $Nathanson$ 的例子：取 $\mathbb{R}$ 的子集 $X = [0,1]\bigcup[2,3]$, 则 X 中的开球 $\{x \in X, d(1,x) < 1\}$ 的闭包为 $[0,1]$, 而 $\{x \in X, d(1,x) \leqslant 1\} = [0,1]\bigcup\{2\}$, 故开球 $\{x \in X, d(1,x) < 1\}$ 的闭包不是闭球.

练习 2.2.2 给定 $a \in E$, 则任何 a 的领域 A, 一定存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $B(a, \dfrac{1}{n}) \subset A$.

解:

$\exists r, s.t. a \in B(a,r)$. 取 $\dfrac{1}{n} < r$, 则有 $B(a, \dfrac{1}{n}) \subset A$.

练习 2.2.3 设 $\varnothing \neq A \subset E$, 则 A 的任意有限个领域的交仍然是 A 的领域.

解:

$\exists O_n$ 为开集, 且 $A \subset O_n$, 且 $\bigcap\limits_n O_n$ 仍为开集, 且 $A \subset \bigcap\limits_n O_n$ 故 $\bigcap\limits_n O_n$ 仍然为 A 的领域.

练习 2.2.4 $A \subset E$ 为开集的充要条件是 $\partial A \bigcap A = \varnothing$.

解:

$\Rightarrow$: A 为开集,$\partial A = \bar{A} \backslash A^o = \bar{A} \backslash A$.
故 $\partial A \bigcap A = \varnothing$.

$\Leftarrow$: 若 $\partial A \bigcap A = \varnothing \Rightarrow \bar{A} \backslash A^o \bigcap A = \varnothing \Rightarrow A^o \subset A, A \subset A^o \Rightarrow A^o = A, A$ 为开集.

练习 2.2.5 $A \subset E$ 为闭集的充要的条件是 $\partial A \subset A$.

解:

$\Rightarrow$: A 为闭集, 则有 $\bar{A} = A \Rightarrow A = A \bigcup \partial A \Rightarrow \partial A \subset A$.

$\Leftarrow$: 若 $\partial A \subset A \Rightarrow \partial A = \bar{A} \backslash A^o \subset A \Rightarrow \bar{A} \backslash A^o \subset A \backslash A^o \Rightarrow A \subset \bar{A}, A = \bar{A}$.
故 A 是闭集.

练习 2.2.6 $x \in \partial A$ 的充要条件是 x 的任何领域包含 A 的点又包含 A^c 的点.

解:

$$x \in \partial A, \because \partial A = \bar{A} \bigcap \bar{A}^c \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \bar{A} \Rightarrow x \notin (A^c)^o \\ x \in \bar{A}^c \Rightarrow x \notin A^o. \end{cases}, \because x \in A \Leftrightarrow$$

$$\forall r > 0 \begin{cases} B(x,r) \notin A \\ B(x,r) \notin A^c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(x,r) \bigcap A \neq \varnothing \\ B(x,r) \bigcap A^{\neq} \varnothing. \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \bigcap A^c$$

练习 2.2.7 $A \subset E$ 是开集的充要条件是对任意的 $B \subset E$, 都有 $A \bigcap \overline{B} \subset \overline{A \bigcap B}$.

解:

$\Rightarrow$: A 为开集, 则 $\forall x \in A\bigcap\overline{B}$, 由练习 *2.4.9*, 则 $\exists\{x_n\} \in B, s.t. x_n \to x$, 而 A 为开集, 故 $\{x_n\}$ 中至多只有有限个不属于 A, 故 $\{x_n\}$ 删除至多有限项在 $A\bigcap B$ 中, 则 $x \in \overline{A\bigcap B}$.

$\Leftarrow$: 若对任意的 $B \subset E$, 都有 $A\bigcap\overline{B} \subset \overline{A\bigcap B}$, 而 A 不是开集, 则 $\exists x_0 \in A$ 不为内点, 故 $\exists x_n \notin A, s.t. d(x_0, x_n) < \dfrac{1}{n}$. 取 $B = \{x_n\}$, 则 $x \in A\bigcap\overline{B}$, 但 $x \notin \overline{A\bigcap B}$. 矛盾, 故 A 为开集.

练习 2.2.8 给定距离空间 $(E, d), A \subset E$, 则

$(1)A^c$ 为闭集;

$(2)A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;

$(3)(A\bigcap B)' \subset A'\bigcap B'$;

$(4)(A\bigcup B)' = A'\bigcup B'$.

解:

(1) 设 x 为 A' 的极限点, 则任意一个 x 的领域 $N(x)$ 的领域, 使得 $A'\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_n \in \bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall(x_n), s.t. A\bigcap(N(x)\backslash\{x_n\}) \neq \varnothing \Rightarrow A\bigcap(N(x)\backslash x) \subset \bigcup_n A\bigcap(N(x_n)\backslash\{x_n\}) \neq\Rightarrow x \in A', A'$ 是闭集.

(2)$\forall x \in A \to x \in B \Rightarrow \forall x \in A', \forall N(x), s.t. A\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \neq\Rightarrow \varnothing \neq A\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \subset B\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \Rightarrow x \in B', A' \subset B'$.

(3)$\forall x \in (A\bigcap B)', \forall N(x), s.t. A\bigcap B\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \subset A\bigcap(N(x)\backslash\{x\})$ 和 $B\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \Rightarrow x \in A'\bigcap B' \Rightarrow (A\bigcap B)' \subset A'\bigcap B'$.

(4)$\forall x \in (A\bigcap B)' \Leftrightarrow \forall N(x), s.t. (A\bigcup B)\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) \neq \varnothing$

$= (A\bigcap(N(x)\backslash\{x\}))\bigcup(B\bigcap(N(x)\backslash\{x\}))$

$\Leftrightarrow x \in A\bigcap(N(x)\backslash\{x\})$ 或 $x \in B\bigcap(N(x)\backslash\{x\})$

$\Leftrightarrow x \in A'$ 或 $x \in B' \Leftrightarrow x \in A'\bigcup B'$

练习 2.2.9 作一实数列使其极限点集为空集.

解:

取 $a_n = n, n \in \mathbb{N}$ 即为例.

练习 2.2.10 作一实数列使其极限点集为全体实数集.

解:

取 $a_n = r_n, r_n \in \mathbb{Q}$ 即为例.

练习 2.2.11 设 (E, d) 为距离空间, 给定 $A \subset E$, 试证: $\overline{A}\backslash A'$ 为 A 的全体孤立点组成的集.

解:

记 B 为 A 的孤立点的集合.

$\forall x \in B, \exists N(x), s.t. A\bigcap(N(x)\backslash\{x\}) = \varnothing, \Leftrightarrow x \in A \subset \bar{A}, x \notin A' \Leftrightarrow x \in \bar{A}\backslash A'$.

练习 2.2.12 $\forall x_0 \in \overline{A}, \exists A$ 中序列 $\{x_n\}$ 使 $d(x_n, x_0) \to 0 (n \to 0)$.

解:

$x_0 \in \bar{A}, \bar{A}$ 是闭集, 故 x_0 是 $\bar{A}$ 的极限点, 则 $B(x_0, \dfrac{1}{2}, s.t. B(x_0, \dfrac{1}{2}\bigcap \bar{A} \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_1 \in B(x_0, \dfrac{1}{2})\bigcap \bar{A}$. 一般地,$\exists x_n \in B(x_0, \dfrac{1}{n})\bigcap \bar{A} \Rightarrow d(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n} \Rightarrow d(x_n, x_0) \to 0$.

2.3 完备性

练习 2.3.1 $\mathbb{R}$ 为实数集, 设

(1)$\rho_1(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$;

(2)$\rho_2(x,y)=|e^x-e^y|$.

证明: $(\mathbb{R},\rho_1),(\mathbb{R},\rho_2)$ 都不是完备距离空间.

解:

①: 令 $x_n=n,\arctan x_n\to\dfrac{\pi}{2},n\to\infty,\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,s.t.m,n>N,\rho(x_n,x_m)=|\arctan x_n-\arctan x_m|<\varepsilon$, 但 x_n 发散. 故不完备.

②: 令 $x_n=-n$, 推导类似 ①. 故不完备.

练习 2.3.2 设 $\rho(m,n)=|m^{-1}-n^{-1}|.m,n\in\mathbb{N}$, 证明 $(\mathbb{N},\rho)$ 不完备.

解:

令 $x_n=n,\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{n}\to 0,\exists\forall\varepsilon>0N>0,s.t.m,n>N,\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$, 但 $x_n\to\infty$, 故不完备.

练习 2.3.3 $\mathbb{Z}$ 为整数集,$\rho(m,n)=|m-n|$, 证明: $(\mathbb{Z},\rho)$ 是完备距离空间.

解:

假设 $\exists x_n\in\mathbb{Z}$ 是柯西列, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,s.t.m,n>N$ 时, 有 $|x_n-x_m|<\varepsilon,x_n\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_n=x_m,\forall m,n>N.\Rightarrow x_n\to c$ 为一常数且为整数. 容易验证 ρ 为距离, 故 $(\mathbb{Z},\rho)$ 为完备距离空间.

练习 2.3.4 考虑三个定义在整个 $\mathbb{R}$ 的连续函数集:

(1) 有界连续函数;

(2) 满足条件 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 的连续函数集;

(3) 在有限区间外恒等于零的连续函数集.

如果规定 $\rho(f,g)=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-g(x)|$, 哪一个是完备空间, 哪一个不是.

解:

(1) 完备.

(2) 不完备. 考虑 $f_n(x)=\begin{cases}x^{-\frac{1}{2n+1}}, & |x|\geqslant 1\\ x, & |x|<1.\end{cases}$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=0,\forall n\in\mathbb{N}$. 但 $f_n(x)\to f=\begin{cases}1, & |x|\geqslant 1\\ x, & |x|<1.\end{cases}$, 但此时极限 f 不再满足 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, 故不完备.

(3) 不完备. 考虑支撑在 $[-1,1]$ 的函数列 $f_n=\begin{cases}0, & x\notin[-1,1]\\ 1, & x\in(-1+\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n})\\ n(x+1), & x\in[-1,-1+\dfrac{1}{n})\\ -n(x-1), & x\in(1-\dfrac{1}{n},1].\end{cases}$,

但 $f_n(x)\to\mathbb{1}_{(-1,1)}\notin C(-\infty,\infty)$, 故不完备.

练习 2.3.5 给定 $\Omega:=\{\Delta:\Delta=[a,b],a<b\in\mathbb{R}\}$, 对于 $\Delta_1=[a,b],\Delta_2=[c,d]$, 规定 $\rho(\Delta_1,\Delta_2):=|a-c|+|b-d|$, 证明: ρ 是 Ω 上的距离函数, 但 (Ω,ρ) 不完备.

解:

①: 显然有 $\rho(\Delta_1,\Delta_2)\geqslant 0$.

②: 若 $\rho(\Delta_1,\Delta_2)=0\Rightarrow|a-c|+|b-d|=0\Rightarrow a=c,b=d\Rightarrow\Delta_1=\Delta_2$.

③ : 显然有 $\rho(\Delta_1, \Delta_2) = \rho(\Delta_2, \Delta_1)$

④ : 由绝对值的三角不等式, 容易推得 $\rho(\Delta_1, \Delta_2) \leqslant \rho(\Delta_1, \Delta_3) + \rho(\Delta_3, \Delta_2)$.

故 ρ 是 Ω 上的距离, 但取 $\Delta_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \Delta_n \to \{0\} \notin \Omega$, 故不完备.

练习 2.3.6 若 (X_1, ρ_1) 与 (X_1, ρ_2) 等距同构,(X_1, ρ_1) 完备, 则 (X_2, ρ_2) 完备.

PS: 书上为 (X_1, ρ_2), 应该 (X_1, ρ_1).

解:

$\forall \{x_n\} \in X_2$ 为基本列, 则 $\exists N > 0, n > N, \rho_2(X_n, X_m) < \epsilon$. 令 φ 是 X_2 到 X_1 的同构映射, 由于等距同构,$n > N, rho_1(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) = \rho_2(X_n, X_m) < \epsilon$, 故 $\{\varphi(x_n)\}$ 是 X_1 中的基本列, 而 X_1 完备, 故存在收敛点 $y, s.t. \varphi(x_n) \to y$. 必然存在 $x \in X_2 s.t. \varphi(x) = y$. 而 $\rho_2(x_n, x) = \rho_1(\varphi(x_n), y) < \epsilon$. 故 (X_2, ρ_2) 完备.

练习 2.3.7 证明 $(C[a, b], \rho)$ 完备.

解:

ρ 为距离已经在前例中给予证明, 下证 $(C[a, b], \rho)$ 完备.

取 $f_n \in C[a, b]$ 为基本列, 即有 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N$, 使

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon.$$

由此可得 $\forall t \in [a, b], |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon$. 对于固定的 $t, f_n(t)$ 都为 $\mathbb{R}$ 中的基本列, 故存在 $f(t), s.t. f_n(t) \to f(t)(n \to \infty)$.

故令 $m \to \infty$, 可得

$$\rho(f_n, f) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_m(t) - f(t)| < \epsilon.$$

由此得 f_n 一直收敛到 f, 且由一致收敛的性质,f 仍为 $[a,b]$ 上的连续函数, 故 $(C[a,b],\rho)$ 完备.

练习 2.3.8 证明引理 *2.3.4.*

解:

$\Rightarrow$ 方向显然, 基本列本身即为收敛子列.

$\Leftarrow$ 设 $\{a_n\}\in E$ 为基本列,$\{a_{nk}\}$ 为其收敛子列,a 为极限, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall k>N,s.t.|a_{nk}-a|<\epsilon$. 故对于 $|a_n-a|\leqslant|a_n-a_{nk}|+|a_{nk}-a|$. 由于 $\{a_n\}$ 为基本列, 仅需取足够大的 N', 则可控制两部分均小于任意整数, 故 $a_n\to a$.

后一部分即为推论.

练习 2.3.9 证明引理 *2.3.5*

解:

$\Rightarrow$, 若 (F,d) 为完备子空间, 则 $\overline{F}=F$, 故 F 是闭集.

$\Leftarrow$, 反之 F 为闭集, 任取 $\{x_n\}$ 为 F 的基本列, 则也为 E 中的基本列, 故存在 E 极限点 x, 由于 F 闭, 故 $x\in F,F$ 完备.

练习 2.3.10 *(Sierpinski* 距离空间*)* 设 $E:=\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$, 试证：由

$$d(x_n,x_m):=\begin{cases}1+(n+m)^{-1}, & n\neq m\\ 0, & n=m,n,m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

定义的 d 是 E 上的一个距离;(E,d) 的每一单点集都是开集, 因而每一点都是孤立点;(E,d) 是完备距离空间.

再证:$B(x_n,1+(2n)^{-1}),n\in\mathbb{N}$. 是一递降的闭球列, 但它们的交集为空集.

解:

(1) 证明 d 是 E 上的距离.

① 显然有 $d(x_n, x_m) \geqslant 0$;

② 显然有 $d(x_n, x_m) = 0 \Rightarrow x_n = x_m$;

③ 显然有 $d(x_n, x_m) = d(x_m, x_n)$;

④ 当 $x_n \neq x_m \neq x_k$ 时,$d(x_n, x_m) = 1+\dfrac{1}{n+m} < 1+1+\dfrac{1}{n+k}+\dfrac{1}{k+m} = d(x_n, x_k) + d(x_k, x_m)$. 故三角不等式成立,$d$ 是 E 上的距离.

(2) 设 $A = \{x_n\} \in E, A^o = \{x_n\} = A$, 则 A 是开集, 且 x_n 均为孤立点, 对于任意 E 中的基本列 $X_n, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n, m > N$ 时 $d(X_n, X_m) < \varepsilon$, 则 $X_n = X_m = X_N \in E$ 故 X_n 收敛,(E, d) 完备. 同时注意到每个点距离至少为 1, 故 $B(x_n, 1+(2n)^{-1})$ 是闭球, 且 $d(x_{n+1}, x_n) = 1 + \dfrac{1}{2n+1} < 1 + \dfrac{1}{2n}$, 故为递降闭球列, 并且容易验证 $B(x_n, 1+(2n)^{-1})$ 的元素即为 $\{x_m\}_{m \geqslant n}$ 但令 $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B(x_n, 1+(2n)^{-1}) = \varnothing$.

2.4 可分性、列紧性与紧性

练习 2.4.1 试证: $(\mathbb{R}, d)(d(x,y) = |x-y|)$ 完备, 可分, 但不是紧空间.

解:

$\mathbb{R}$ 完备由柯西收敛准则即定理 *2.3.4* 即可推出.$B(0,n), n \in \mathbb{N}$ 为 $\mathbb{R}$ 的可数拓扑基, 故 $\mathbb{R}$ 可分. 但 $\mathbb{R}$ 不存在有限开覆盖, 否则 $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{m=1}^{n} O_n$, 令 $N = \max\{\delta(O_n) : \max|x-y|, x, y \in O_n\}$. 则 $\bigcup\limits_{m=1}^{n} O_n \subsetneqq B(0, 2N) \subsetneqq R$, 矛盾. 故 $(\mathbb{R}, d)$ 不是紧空间.

练习 2.4.2 试证: $([a,b], d)$ 为完备, 可分, 紧距离空间.

解:

$[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集, 故完备且紧,$B(0,n), n \in \mathbb{N}$ 为其可数拓扑基, 故可分.

练习 2.4.3 试证：紧集的闭子集也是紧集, 闭集是否一定是紧集？

解:

前者已由定理 *2.4.8* 说明，后者显然不一定，因为 $\mathbb{R}$ 为闭集, 但显然不是紧集.

练习 2.4.4 若 $\{A_n \subset E, n \in \mathbb{N}\}$ 是递降非空紧集序列, 且 $\delta(A_n) = \sup\limits_{x,y\in A_n} d(x,y) \to 0$ 则存在唯一的 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 将 $\{A_n\}$ 改为闭集序列结论还成立吗？

解:

先证存在性, 由题意可知, 在 A_n 中任取一点 a_n, 由于 $d(a_m, a_n) \leqslant \min(\delta(A_n), \delta(A_m)) \to 0$, 则可以找到一列基本列 $\{a_n\}$, 而距离空间中,A 为紧集则 A 有界（其实等价于列紧）, 故 a_n 存在收敛子列. 由定理 *2.3.4*, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空.

再证唯一性, 若存在 $x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 记 $d = d(x_1, x_2)$, 则 $\delta(A_n) > d$, 与题设矛盾.

改为闭集序列显然结论不成立, 在正整数集中, 令 $A_n = \{k : k \geqslant n\}$, 则 A 为闭集,$d(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\min(x,y)}, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$, 容易验证此式定义了一个距离, 则 $A_n \downarrow \varnothing, \delta(A_n) \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0$.

PS: 若 E 为完备距离空间, 则题中所述结论对闭集依然成立！联系紧集在距离空间中是闭集, 固由定理 *2.4.11* 可推出完备性, 即可知反例根源性所在.

练习 2.4.5 设 $A \subset B \subset E$, 若 $B \subset \overline{A}$, 则称 A 在 B 中稠, 试证：设 $A, B, C \subset E$ 且 A 在 B 中稠,B 在 C 稠, 则 A 在 C 中稠.

解:

$A \subset B \subset C, B \subset \overline{A}, C \subset \overline{B}$, 仅需证 $C \subset \overline{A}$.

而由定理 2.3.4,$\forall x \in \overline{B}, \exists X_n \in B \subset \overline{A}, s.t. x_n \to x, \overline{A}$ 闭, 故 $x \in \overline{A} \to C \subset \overline{B} \subset \overline{A}$, 则 A 在 C 中稠.

练习 2.4.6 A 为疏朗集的充要条件是任何非空开集 B 都有一非空开集 $C \subset B$, 使 $C \bigcap A = \varnothing$.

解:

$\Rightarrow$ $\overline{A}$ 无内点, 故 $\overline{A}$ 中不包含任何开集, 从而对于任何非空开集 B, 存在 $B(x_0, r_0) \in B, \exists x_1 \in B(x_0, r_0), x_1 \notin \overline{A}$, 而 $\overline{A}$ 为闭集, 故必然存在 $\varepsilon_1 > 0, s.t. \overline{B}(x_1, \varepsilon_1) = \varnothing$.(否则该点为聚点, 则与 $x_1 \notin \overline{A}$ 矛盾.). 取 $0 < r_1 < \min(\varepsilon_1, r_0 - d(x_0, x_1))$, 便有 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ 且 $B(x_1, r_1) \bigcap \overline{A} = \varnothing$, 则题中结论自然成立.

$\Leftarrow$: 如果 A 不为疏朗集, 则 $\overline{A}$ 中有内点, 则 $\exists B(x_0, r_0) \subset \overline{A}$. 由题设条件, 存在非空开集 (不妨设为非空开球), 设 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0), s.t. \overline{B}(x_1, r_1) \bigcap \overline{A} \neq \varnothing$, 则与 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \subset \overline{A}$ 矛盾. 故 $\overline{A}$ 为疏朗集.

练习 2.4.7 疏朗集的余集是稠集, 并举例说明稠集的余集不一定是疏朗集.

解:

设 A 是 (E, d) 中的疏朗集, 则由练习 2.4.6,$\forall x \in E, \forall r > 0, B(x, r) \bigcap A = \varnothing$, 则推出 $B(x, r) \bigcap A^c \neq \varnothing$, 则说明 A^c 在 E 中稠.

在实数集中, 无理数集为稠集, 但其余集为有理数集, 仍是稠集.

练习 2.4.8 给定 $(E,d), A\subset E$, 则下列命题成立.
(1)$a\in\overline{A}$, 当且仅当 $\{a_n: n\in\mathbb{N}\}\subset A$ 使 $d(a_n,a)\to 0$, 即 $(a_n\to a), n\to\infty$.
(1)$a\in A'$, 当且仅当 $\{a_n: n\in\mathbb{N}\}\subset A$, 且 $a_n, n\in\mathbb{N}$ 两两不同, 使 $d(a_n,a)\to 0$.

解:

(1)$\Leftarrow$ 显然成立, 若存在 $\{a_n: n\in\mathbb{N}\}\subset A$ 使 $d(a_n,a)\to 0$, 则 a 为聚点, 故 $a\in\overline{A}$
$\Rightarrow, a\in A$ 时显然成立, 取 $a_n=a$ 即可, 若 $a\in\overline{A}\backslash A$ 时, 若存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 A 中任何点列 $\{a_n\}$ 都有 $d(a_n,a)\geqslant\varepsilon_0$, 则 $B(a,\varepsilon_0)\backslash\{a\}$ 不在 A 中, 即 $B(a,\varepsilon_0)\backslash\{a\}\subset A^c$, 而 $a\in\overline{A}$ 故 $a\notin(A^c)^o$, 矛盾.

(2)$\Leftarrow$ 显然成立, 若存在 $\{a_n: n\in\mathbb{N}\}\subset A$, 且 $a_n, n\in\mathbb{N}$ 两两不同, 使 $d(a_n,a)\to 0$, 则 a 为聚点, 故 $a\in A'$
$\Leftarrow, a\in A', \forall N(a), A\bigcap(N(a)\backslash\{a\})\neq\varnothing$. 故取 a 的领域为 $B(a,\dfrac{1}{n}), n\in\mathbb{R}$, 则每个 $A\bigcap(N(a)\backslash\{a\})$ 中都可选出一点 a_n, 与 a_{n-1} 不同. 且 $d(a_n,a)<\dfrac{1}{n}$. 故存在 $\{a_n: n\in\mathbb{N}\}\subset A$, 且 $a_n, n\in\mathbb{N}$ 两两不同, 使 $d(a_n,a)\to 0$.

练习 2.4.9 设 (E,d) 为一紧距离空间,$\{G_\lambda: \lambda\in A\}$ 是 E 的一个覆盖, 则 $\exists\alpha>0$ 使任何半径为 α 的开球至少被包含在一个 G_λ 之中 *(Lebesgue 性)*. 并试举一反例说明: 当 E 为全有界时, 上诉结论不真.

解:

PS: 题中的覆盖应该指开覆盖, 否则令 $\{G_\lambda: \lambda\in A\}$ 为 E 的所有单点组成的集合, 则形成了 E 的一个覆盖, 但并不包含任何开球. 以下以开覆盖为准, 进行解答.

若对任何 $\alpha > 0$, 半径为 α 的开球都不被包含在一个 G_λ 之中, 则选取一列递降开球列 B_n, 第 n 个开球 B_n 的半径小于 $\frac{1}{n}$, 同时在每个球中选取一点 a_n, 则在紧距离空间中,$\{a_n\}$ 存在聚点, 设为 a_0, 即存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{nk}\}$ 收敛到 a_0. 因为 $\{G_\lambda : \lambda \in A\}$ 是 E 的一个开覆盖, 故 $\exists G_\lambda, s.t. a_0 \in G_\lambda$, 且 $E \backslash G_\lambda \neq \varnothing$(否则 E 中的每个开球已经被 G_λ 覆盖), 令 d 为 a_0 到 $E \backslash G_\lambda$ 的距离, 且严格大于 0, 由于 $\{a_{nk}\}$ 收敛到 a_0, 故存在 $\exists n_k > \frac{2}{d}, d(a_{nk}, a_0) < \frac{d}{2}$, 而 $\forall x \in A_{nk}, d(x, a_0) \leqslant d(x, a_k) + d(a_k, a_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{d}{2} = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$. 则 $A_{nk} \in G_\lambda$ 与假设矛盾, 故 (E, d) 具有 *Lebesgue* 性.

设 $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, d(x, y) = |x - y|$, 为完全有界, 但不是紧集,$(\frac{1}{n^2}, 1)$ 是 E 的一个开覆盖, 但永远盖存在无法盖住的开球.

练习 2.4.10 在紧距离空间中, 若 $\{x_n\}$ 两两不同, 且只有一个聚点 a, 则 $x_n \to a, (n \to \infty)$.

解:

设此空间为 E, 由紧性得 $\{x_n\}$ 有界, 若 $x_n \to a, (n \to \infty)$. 不成立, 则 $\forall r > 0, (E \backslash B(a, r)) \bigcap \{x_n\}$ 有无限个元素, 则必然存在聚点, 与题设矛盾.

练习 2.4.11 相对紧集一定全有界, 而在完备距离空间中, 全有界集一定相对紧.

解:

此题与定理 *2.4.11* 重复.

练习 2.4.12 $\mathbb{R}^n$ 中的子集为紧集当且仅当它是有界闭集.

解:

$\Rightarrow$: 由定理 *2.4.10*, 可知,$\mathbb{R}^n$ 中的子集为紧集当且仅当其为闭集且列紧, 而由定理 *2.4.9* 知, 列紧集全有界从而有界.

$\Leftarrow$: 由定理 *2.4.11* 可知, 仅需证明有界闭集为列紧集即可, 任取 $A \in \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, 则其中任取一列序列 $\{x_n\}$ 为有界序列, 则存在聚点. 又因为 A 为闭集, 故此聚点在 A 中. 而 $\overline{A} = A$, 故由定理 *2.4.11* 得,A 紧等价于 A 列紧, 故有界闭集为紧集.

练习 2.4.13 (E, d) 中任何两紧集之并仍为紧集.

解:

设 A, B 为 E 中的紧集, 则任意 A, B 的开覆盖 A_α, B_β, 存在有限开覆盖. 故对于 $A\bigcup B$ 的任意开覆盖, 自然是 A, B 的开覆盖, 故存在有限开覆盖 A_α, B_β, 则 $A_\alpha \bigcup B_\beta$ 为 $A\bigcup B$ 的有限开覆盖, 故 $A\bigcup B$ 仍为紧集.

练习 2.4.14 设 $(E_n, d_n), n \in \mathbb{N}$ 为一距离空间列.

$$\begin{aligned} E^\infty := E_1 \times E_2 \times \dots &= \{x : x = (x_1, x_2, \dots), x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}\}, \\ d(x, x') : &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, x'_n), 1), \end{aligned}$$

试证:

(1)(E^∞, d) 为一距离空间;

(2) 设 $n \in \mathbb{N}, U_k$ 是 E_k 的开子集 $(k = 1, 2, \dots, n)$, 则 (E^∞, d) 中一切形如

$$\begin{aligned} G : &= U_1 \times \cdots \times U_n \times E_{n+1} \times \dots \\ : &= \{x \in E^\infty : x = (x_1, \dots, x_n, \dots), x_k \in U_k, k = 1, 2, \dots, n, x_; \in E_l, l = n+1, n+2, \dots\} \end{aligned}$$

都是 E^∞ 的开集;

(3)(E^∞, d) 的任一开集都是形如 (2) 的集的并, 即一切由 (2) 列出的集族是

(E^∞, d) 的一个拓扑基;

(4) 若每一 (E_n, d_n) 可分, 则 (E^∞, d) 可分;

(5) 若每一 (E_n, d_n) 是紧空间, 则 (E^∞, d) 也是紧空间.

解:

(1) : 验证 d 为距离即可:

①:$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, y_n), 1), \forall n \in \mathbb{N}, \min(d_n(x_n, y_n), 1) \geqslant 0$, 故 $d(x,y) \geqslant 0$

②:$d(x,y) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, y_n), 1), \forall n \in \mathbb{N}, \min(d_n(x_n, y_n), 1) = 0, d_n$ 是距离, 故 $d_n(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = y_n \Rightarrow x = y$.

③:$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, y_n), 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(y_n, x_n), 1) = d(y,x)$.

④:$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, y_n), 1) \leqslant= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, z_n)+d_n(z_n, y_n), 1) \leqslant= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, z_n), 1) + \min(d_n(z_n, y_n), 1) = d(x,z) + d(z,y)$.

故 (E^∞, d) 为一距离空间

(2)$U_k \in E_k$ 为 E_k 的开子集, 故 $\forall k = 1, 2, \ldots, n, x_k \in U_k, \exists N(x_k) \in U_k$. 则 $N(x_1) \times N(x_2) \times \cdots \times N(x_n) \times E_{n+1} \times \ldots$ 为 x 在 G 中的领域, 故 G 是 E^∞ 中的开集.

(3) 设 U 是 E^∞ 中的开集, 故 $\forall x_0 \in U$, 存在 $0 < \delta < 1, d(x, x_0) < \delta$ 时, 则 $x \in U$, 注意到 E^∞ 中距离的定义, 可知 $d(x_{0n}, x_n) < \delta, \forall n \in \mathbb{N}$ 时,$x \in U$, 故 $x \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times \ldots$ 其中 U_n 为 E_n 中以 x_{0n} 为中心, 半径为 δ 的开球, 则遍历 x_0, 即可取得 (2) 中形式的并.

(4) 若 E_n 可分, 则设 A_n 为 E_n 的一个稠子集, 下证 $A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \ldots$ 为 E^∞ 的稠子集, 即 $\forall x_0 \in E^\infty, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, s.t. d(x, x_0) < \varepsilon$. 由于 $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$ 为 E_n 的稠子集, 故存在 $x_n, s.t. d_n(x_{0n}, x_n) < \varepsilon$, 故 $x =$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in A$, 且 $d(x, x_0) < \varepsilon$, 故 E^∞ 可分.

(5) 由定理 *2.3.11* 可得，E_n 完备且全有界。由全有界。则不难验证 E^∞ 也是完备的，仅需证明 E^∞ 全有界。$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon, \exists k_n \in \mathbb{N}, \exists \{x_{n1}, x_{n2}, x_{nk_n}\} \subset E_n s.t. E_n \subset \bigcup_{n=1}^{k_n} B(x_{k_n}, \varepsilon)$, 同时取充分大的正整数 N, 使得 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$, 则 $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_N), x_i \in \{x_{n1}, x_{n2}, x_{nk_n}\}, i = 1, 2, \ldots, N$, 则共有 $K := \prod_{n=1}^{N} k_n$ 个有限点，下证 $A := \bigcup_{n=1}^{K} B(x_n', 2\varepsilon)$ 为 E^∞ 的有限 ε 网，则 $\forall x \in E, \exists x' \in A, s.t. d(x, x') < \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon < 2\varepsilon.$, 故 E^∞ 全有界，则 E^∞ 为紧空间。

2.5 距离空间上的映射与函数

练习 2.5.1 完成引理 *2.5.2*、引理 *2.5.3*、引理 *2.5.4*、引理 *2.5.8* 和引理 *2.5.9* 的证明.

解:

引理 *2.5.2*:

$(2) \Rightarrow (3)$: 容易验证（定理 *4.1.2*）$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$. 故 F 为闭集, 则 F^c 为开集, 故由 (2) 可得 $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ 为开集, 故 $f^{-1}(F)$ 为闭集.

$(3) \Rightarrow (5)$: $\forall F \in S$ 为闭集, 则 $f^{-1}(F)$ 为闭集, 由定义 *1.2.1* 中罗列的性质知 $A \subset f^{-1}(f(A))$, 而 $\overline{f(A)}$ 为 S 的闭集, 故由 $(3) : f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是 E 中闭集, 故 $\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)}), f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}$.

$(5) \Rightarrow (4)$: 由定义 *1.2.1* 所罗列的性质可知：$\forall A \in S f(f^{-1}(A)) \subset A$, 由 $(5) : f(\overline{f^{-1}(A)}) \subset \overline{f(f^{-1}(A))} \subset \overline{A} \rightarrow \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

引理 *2.5.3:*

$\forall A \in E_3$ 为 E_3 的开集, 则由连续映射,$f_2^{-1}(A)$ 为 E_2 的开集,$f_1^{-1}(f_2^1(A))$ 为 E_1 的开集, 由引理 *2.5.2(2)* 即可得.

引理 2.5.4:

由题意知,$\forall x_0 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $d(x, x_0) < \delta$ 时,$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ 而注意到:

$$\begin{aligned}
||f(x)| - |f(x_0)|| &\leqslant |f(x) - f(x_0)| \\
|\alpha f(x) - \alpha f(x_0)| &= |\alpha||f(x) - f(x_0)| \\
|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| &\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\
|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0)| \\
&\leqslant |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\
&\leqslant (|f(x_0)| + \varepsilon)|g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\
|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}| &= |\frac{1}{f(x)f(x_0)}||f(x) - f(x_0)| \\
&\leqslant |\frac{1}{f(x)(|f(x_0)| - \epsilon)}||f(x) - f(x_0)| \\
f \vee g &= \frac{|f - g| + f + g}{2} \\
f \wedge g &= \frac{|f - g| - (f + g)}{2}
\end{aligned}$$

即可证明诸函数均为实值连续函数.

引理 2.5.8:

由题意知,$\forall x_0 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $d(x, x_0) < \delta(x_0, \varepsilon)$ 时,$\rho(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon$, 而 $\{B(x_0, \delta(x_0, \varepsilon)) : x_0 \in E\}$ 组成了 E 的一组开覆盖, 则由紧集的性质, 必然存在有限子覆盖 $B(x_1, \delta(x_1, \varepsilon)), B(x_2, \delta(x_2, \varepsilon)), \ldots, B(x_n, \delta(x_n, \varepsilon))$, 取 $\delta(\varepsilon) := \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta(x_k, \varepsilon)$, 则 $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $d(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon)$ 时,$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. 即有一致连续.

引理 2.5.9:

先证 $f(E)$ 也为紧集, 设 G_λ 为 $f(E)$ 的任意一组开覆盖, 由 f 为连续映射,$f^{-1}G(\lambda)$ 为开集, 且为 E 的开覆盖, 故存在有限子覆盖 $f^{-1}(G'_{\lambda_0})$, 此时 $G'_{\{}\lambda_0\}$ 为 $f(E)$ 的有限开覆盖, 故 $f(E)$ 为紧集, 由引理 *2.5.8*,$\mathbb{R}$ 中紧集等价于有界闭集, 故 $f(E)$ 有界, 则存在 $a = \max f(E), b = \min f(E)$. 由因为 $f(E)$ 为闭集, 故 a, b 为聚点, 则存在 $a_n \to, b_n \to b$ 故在 E 中存在 $f^{-1}(a_n), f^{-1}(b_n)$ 的子列收敛, 故 $f^{-1}(a_{nk}) \to a_0, f(f^{-1}(a_{nk})) = a_{nk} \to f(a_0) = a$. 故存在 $a_0 \in E, s.t. f(a_0) = \max f(E)$. 同理可达到最大值.

3 测度空间与概率空间

3.1 集类

练习 3.1.1 试验证 *3.1.3* 例 *2* 的 $d = 1, 3$ 情形.

解:

$d = 1$ 时:

①, $\varnothing = (a, a], \Omega = (-\infty, \infty]$, 故 $\varnothing, \Omega \in \mathscr{S}$.

②$\forall (a_1, b_1], (a_2, b_2] \in \mathscr{S}, (a_1, b_1] \bigcap (a_2, b_2] = \begin{cases} \varnothing, & b_1 \leqslant a_2 \text{或} a_1 \geqslant b_2 \\ (a_2, b_1] \text{或} (a_1, b_2], & \text{其他}. \end{cases}$.

故 $(a_1, b_1] \bigcap (a_2, b_2] \in \mathscr{S}$.

③ 若 $(a_1, b_1], (a_2, b_2] \in \mathscr{S}, (a_2, b_2] \subset (a_1, b_1]$, 即 $a_1 \leqslant a_2, b_1 \geqslant b_2$ 则存在 $(a_1, a_2], (b_2, b_1] \in \mathscr{S}$ 且 $(a_1, a_2], (a_2, b_2], (b_2, b_1]$ 两两不交, 而 $(a_1, b_1] = \bigcup (a_1, a_2] \bigcup (a_2, b_2] \bigcup (b_2, b_1]$. 故 $\mathscr{S}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 的半集代数.

$d = 3$ 时:

①, $\varnothing = (a, a], \Omega = (-\infty, \infty]$, 故 $\varnothing, \Omega \in \mathscr{S}$.

②$\forall(a,b],(c,d]\in\mathscr{S}$, 二者的交为每一维的交的叉积, 而 $\forall k=1,2,3$,

$$(a_k,b_k]\bigcap(c_k,d_k]=\begin{cases}\varnothing, & b_k\leqslant c_k\text{或}a_k\geqslant c_k\\ (c_k,b_k]\text{或}(a_k,d_k], & \text{其他}.\end{cases},$$

故每一维的交都是形如 $(a,b]$ 的区间形式,$(a,b]\bigcap(c,d]\in\mathscr{S}$.

③ 若 $(a,b],(c,d]\in\mathscr{S},(c,d]\subset(a_1,b_1]$, 即 $\forall k=1,2,3.a_k\leqslant c_k,d_k\geqslant b_k,$, 而由前证 $(a_k,b_k]=(a_k,c_k]\bigcup(c_k,d_k]\bigcup(d_k,b_k]$, 三三叉积后, 存在 *27* 个半开闭区间, 其中之一为 $(c,d]$, 且两两不交, 故存在 $\exists(c,d],A_1,A_2,\ldots,A_{26}\in\mathscr{S},s.t.(a,b]=(c,d])\bigcup(\bigcup\limits_{i=1}^{26}A_i)$ 故 $\mathscr{S}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的半集代数.

练习 3.1.2 设 $\mathscr{S}$ 是 Ω 的半集代数, 试证:

(1) 若 $\{A,A_1,\ldots,A_n\}\subset\mathscr{S}$, 且 $A_k\subset A,k=1,2,\ldots,n$ 两两不交, 则存在 $\{A_{n+1},A_{n+1},\ldots,A_s\}\subset\mathscr{S}$, 使 $A_1,A_2,\ldots,A_s$ 两两不交, 且 $A=\bigcup_{k=1}^{s}A_k$;

(2) 若 $\{A,A_1,\ldots,A_n\}\subset\mathscr{S}$, 则在 $\mathscr{S}$ 中存在两两不交的有限个集 $B_1,B_2,\ldots B_t$, 使每个 A_k 可以表成若干个 B_j 之并.

解:

(1)

用归纳法进行证明:

① 当 $n=1$ 时, 根据半集代数的定义, 结论显然成立.

② 设 *n-1* 时结论成立, 即 $\{A,A_1,\ldots,A_{n-1}\}\subset\mathscr{S}$, 且 $A_k\subset A,k=1,2,\ldots$ 两两不交, 则存在 $\{B_1,B_2,\ldots,B_m\}\subset\mathscr{S}$ 是的 $A,A_1,\ldots,A_{n-1},B_1,B_2,\ldots,B_m$ 两两不交, 且 $A=\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}A_k\right)\bigcup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i\right)$

上式记为 *(1)* 式

下证 n 时结论也成立, 即, 即 $\{A,A_1,\ldots,A_n\}\subset\mathscr{S}$, 且 $A_k\subset A,k=1,2,\ldots$ 两两不交

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A_n &\subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \\
\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} B_i &= A_n \bigcup [(\bigcup_{i=1}^{m} B_i) \backslash A_n] = A_n \bigcup [\bigcup_{i=1}^{m} (B_i \backslash A_n)] \\
&= A_n \bigcup [\bigcup_{i=1}^{m} (B_i \backslash (B_i \bigcap A_n))]
\end{aligned}$$

记最后一式为 *(2)* 式

又因为 $B_i \in \mathscr{S}, B_i \bigcap A_n \in \mathscr{S}$, 且 $B_i \bigcap A_n \subset B_i$, 由半集代数的定义

$\Rightarrow, \exists \{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ij_i}\}$ 且两两不交, 与 $\{A, A_1, \ldots, A_n\}$ 也两两不交:

$$B_i \backslash (B_i \bigcap A_n) = \bigcup_{j=1}^{j_i} C_{ij}$$

上式记为 *(3)* 式

令 $\{A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_s\} = \{C_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant j_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$, 且两两不交, 与 $\{A, A_1, \ldots, A_n\}$ 也两两不交, 并且综合 *(1)*,*(2)*,*(3)* 式可得:

$$\begin{aligned}
A &= (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) \bigcup [A_n \bigcup (\bigcup_{i=1}^{m} (B_i \backslash (B_i \bigcap A_n)))] \\
&= (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) \bigcup A_n \bigcup (\bigcup_{j=1}^{j_i} C_{ij}) \\
&= \bigcup_{k=1}^{s} A_k
\end{aligned}$$

由数学归纳法, 则结论得证. *(2)*

同样用归纳法证明:

①, $n=2$ 时, $\{A_1,A_2\}\subset\mathscr{S},\Rightarrow A_1\bigcap A_2\in\mathscr{S}$, 又显然有 $A_1\bigcap A_2\subset A_1, A_1\bigcap A_2\subset A_2$, 由定义可得:

$$\Rightarrow\begin{cases}\exists B_{11},B_{12},\ldots,B_{1n_1}, s.t. A_1=(A_1\bigcap A_2)\bigcup(\bigcup\limits_{i=1}^{n_1}B_{1i}), B_{1i}\in\mathscr{S}, i=1,2,\ldots,n_1, \text{且两两不交}\\ \exists B_{21},B_{22},\ldots,B_{2n_1}, s.t. A_2=(A_1\bigcap A_2)\bigcup(\bigcup\limits_{i=1}^{n_2}B_{2i}), B_{2i}\in\mathscr{S}, i=1,2,\ldots,n_2, \text{且两两不交}\end{cases}$$

令 $\{B_1,B_2,\ldots,B_t\}=\{A_1\bigcap A_2,B_{11},B_{12},\ldots,B_{1n_1},B_{21},B_{22},\ldots,B_{2n_2}\}$ 即可, 此时 $B_{ij}, i=1,2,\forall j$ 都两两不交. ② 设命题 *n-1* 时结论成立, 即 $\{A_1,A_2,\ldots,A_{n-1}\}\subset\mathscr{S},\exists\{B_1,B_2,\ldots,B_{t_1}\}\subset\mathscr{S}$ 两两不交, 使每个 A_i 可表示为若干个 B_j 的并, 下证 n 时结论也成立.

设 $A_n\in\mathscr{S}\Rightarrow A_n\bigcap B_k\in\mathscr{S}, k=1,2,\ldots,t_1$ 且两两不交. 显然有 $\{A_n,A_n\bigcap B_k,k=1,2,\ldots,t_1\}\subset\mathscr{S}$. 由半集代数的定义 $B_k, B_k\bigcap A_n\in\mathscr{S}$, 则 $\exists\{C_1^k,\ldots,C_{m_k}^k\}\subset\mathscr{S}, B_k\bigcap A_n, C_1^k,\ldots,C_{m_k}^k$ 两两不交, 且使 $B_k=(B_k\bigcap A_n)\bigcup(\bigcup\limits_{l=1}^{m_k}C_l^k)$. 由 *(1)* 的结论和 $\{A_n,A_n\bigcap B_k,k=1,2,\ldots,t_1\}\subset\mathscr{S}$, 得到 $\exists\{C_1,\ldots,C_m\}\subset\mathscr{S}$, 且 $A_n\bigcap B_k, k=1,2,\ldots,t_1,C_1,\ldots,C_m$ 两两不交, $s.t. A_n=(\bigcup\limits_{k=1}^{t_1}(A_n\bigcap B_k))\bigcup(\bigcup\limits_{i=1}^{m}C_i)$.
令 $\{B_1,\ldots,B_t\}=B_k\bigcap A_n, C_j^k, j=1,\ldots,m_k, k=1,\ldots,t_1$, 即为所求.

练习 3.1.3 称 Ω 的子集类 $\mathscr{S}$ 为半环, 如果它满足定义 *3.1.1* 中的 $(ii)(iii)$.
试证:
(1)$\varnothing\in\mathscr{S}$;
(2)$\mathscr{S}:=\{(a,b]:a,b\in\mathbb{R}^d, a\leqslant b\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的半环.

解:

(1), $\forall A\in\mathscr{S},\exists\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}\in\mathscr{S}$ 且两两不交使得 $A=A\bigcup\bigcup\limits_{m=1}^{n}A_m\Rightarrow\bigcup\limits_{m=1}^{n}A_m=\varnothing\Rightarrow\varnothing\in\mathscr{S}$.

(2) 仅需证明对 $\mathbb{R}^1$ 成立即可, $\mathbb{R}^d$ 的情况可以平行推广, 则不再赘述.

$$①\forall(a_1,b_1],(a_2,b_2]\in\mathscr{S},(a_1,b_1]\bigcap(a_2,b_2]=\begin{cases}\varnothing, & b_1\leqslant a_2\text{或}a_1\geqslant b_2\\(a_2,b_1]\text{或}(a_1,b_2], & \text{其他}.\end{cases}.$$

故 $(a_1,b_1]\bigcap(a_2,b_2]\in\mathscr{S}$.

② 若 $(a_1,b_1],(a_2,b_2]\in\mathscr{S},(a_2,b_2]\subset(a_1,b_1]$, 即 $a_1\leqslant a_2,b_1\geqslant b_2$ 则存在 $(a_1,a_2],(b_2,b_1]\in\mathscr{S}$ 且 $(a_1,a_2],(a_2,b_2],(b_2,b_1]$ 两两不交, 而 $(a_1,b_1]=\bigcup(a_1,a_2]\bigcup(a_2,b_2]\bigcup(b_2,b_1]$. 故 $\mathbb{R}^1$ 是半环.

练习 3.1.4 称 Ω 的子集类 $\mathscr{R}$ 是为环 *(或布尔环)*, 如果它满足 $A,B\in\mathscr{R}$, 则有 $A\bigcup B,A\backslash B\in\mathscr{R}$, 试证称 Ω 的子集类 $\mathscr{R}$ 是环的充要条件是对并及真差封闭.

解:

只需注意到 $A\backslash B=A\backslash(A\bigcap B)$, 则有对差封闭与对真差封闭等价, 故子集类为环的充要条件是对并与真差封闭.

练习 3.1.5 如果将对称差看做集合间的加法运算 ”$+$”. 将交看做集合间的乘法运算 ”$\cdot$”, 则

(1)Ω 的任一集代数 $\mathscr{A}$ 对 ”$+$”,”$\cdot$” 作成一个具有单位元的可换环, 而且每个元都是幂等的.

(2)Ω 的任一环 $\mathscr{R}$ 对 ”$+$” 及 ”$\cdot$” 作成一幂等可换环.

解:

(i) 由练习 *3.1.4* 可知, 集代数为环, 且 $\varnothing$ 是 ”$+$” 运算的单位元, 是 ”$\cdot$” 运算的零元. 且 $A\cdot A=A\bigcap A=A,\forall A\in\mathscr{A}$, 故每个元是幂等的.

(ii) 由练习 *3.1.4* 与 (i) 知结论成立.

练习 3.1.6 设 $\mathscr{S}$ 为 Ω 的一个半环, 则 $\{A\subset\Omega : A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k, n\in\mathbb{N}, \{A_1,A_2,\ldots,A_n\}\subset$ $\mathscr{S}$两两不交$\}$ 为包含 $\mathscr{S}$ 的最小环, 由此说明 $\{A\subset\mathbb{R}^d : A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k], n\in$ $\mathbb{N}, a_k, b_k\in\mathbb{R}^d, a_k\leqslant b_k, k=1,2,\ldots,n\}$ 是一个环.

解:

记题中所证集合为 X, 先证集合 X 为环, 即 $A,B\in X$, 则有 $A\bigcup B\in X$, 且 $B\subset A$ 时,$A\backslash B\in X$,.

①$\forall A,B\in X, \exists A_1,A_2,\ldots,A_n,B_1,B_2,\ldots,B_m\in\mathscr{S} s.t. A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k, B=\bigcup\limits_{l=1}^{m}B_l$, 若 $A_k\bigcap B_l=\varnothing, k=1,2,\ldots,n, l=1,2,\ldots,m.$, 则 $A_k\bigcup B_l\in X$, 否则 $A_k\bigcap B_l\in A_k, A_k\in\mathscr{S}$, 故 $\exists A_{k_1},A_{k_2},\ldots,A_{k_n}\in\mathscr{S}, s.t. A_k=(A_k\bigcap B_l)\bigcup\bigcup\limits_{n=k_1}^{k_n}A_n$. 同理,$\exists B_{l_1},B_{l_2},\ldots,B_{l_m}\in\mathscr{S}, s.t. B_l=(A_k\bigcap B_l)\bigcup\bigcup\limits_{m=l_1}^{l_m}B_m$, 且 $(A_k\bigcap B_l), A_{k_n}, B_{l_n}$ 两两不交, 且由于 A_n 两两不交,B_m 两两不交, 故上述表述不会有重复, 且上述操作为有限次, 产生的集合为有限个, 故

$$A\bigcup B=\left(\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{n=k_1}^{k_n}A_n\right)\bigcup\left(\bigcup_{l=1}^{m}\bigcup_{m=l_1}^{l_m}B_m\right)$$

且 A_{k_n}, B_{l_m} 两两不交. 故 $A\bigcup B\in X$.

②$\forall A,B\in X, B\subset A$. 类似地 $\exists A_1,A_2,\ldots,A_n,B_1,B_2,\ldots,B_m\in\mathscr{S} s.t. A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k, B=\bigcup\limits_{l=1}^{m}B_l$, 则有:

$$\begin{aligned}A\backslash B &= \left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\backslash\left(\bigcup_{l=1}^{m}B_l\right)\\ &= \bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{l=1}^{m}(A_k\backslash(A_k\bigcap B_l))\end{aligned}$$

而由半环的性质, 类似 ①,$\exists A_{k_1},A_{k_2},\ldots,A_{k_n}\in\mathscr{S}, s.t. A_k=(A_k\bigcap B_l)\bigcup\bigcup\limits_{n=k_1}^{k_n}A_n\rightarrow$

$(A_k\backslash(A_k\bigcap B_l))=\bigcup\limits_{n=k_1}^{k_n}A_n$. 上式可改写为:

$$A\backslash B=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{l=1}^{m}\bigcup_{n=kl_1}^{kl_n}A_{kl_n}$$

由半环的性质 (iii), 上述集合是可以做到两两不交的, 故 $A\backslash B\in X$.

下证 X 是包含 $\mathscr{S}$ 的最小环. 记 $\mathscr{S}$ 的最小环为 $\mathscr{R}(\mathscr{S})$, 即证 $X=\mathscr{R}(\mathscr{S})$.

由于 $\mathscr{R}(\mathscr{S})$ 是环, 故对有限并封闭, 故 $\mathscr{S}$ 的有限元的并都属于 $\mathscr{R}(\mathscr{S})\to X\subset\mathscr{R}(\mathscr{S})$. 反之由于 X 是环, 且包含 $\mathscr{S}$, 而 $\mathscr{R}(\mathscr{S})$ 是包含 $\mathscr{S}$ 的最小环, 故 $\mathscr{R}(\mathscr{S})\subset X$, 综上可得 $X=\mathscr{R}(\mathscr{S})$.

故由上证可得,$\{A\subset\mathbb{R}^d:A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k],n\in\mathbb{N},a_k,b_k\in\mathbb{R}^d,a_k\leqslant b_k,k=1,2,\ldots,n\}$ 是一个环.

PS: 上述过程中, 若集合的并操作的上标为 *0*, 则默认并上一空集.

练习 3.1.7 若 $A_k\subset\Omega,k=1,2,\ldots,n$ 两两不交, 且 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\Omega$, 设 $\mathscr{E}:=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$, 试将 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 的全部元用 $\mathscr{E}$ 的元表出, 请读者考查此 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 与 $\Omega_n=\{1,2,\ldots,n\}$ 的一切子集作成的集代数之间的关系.

解:

$\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 是由 $\mathscr{E}$ 的元素经过有限交、并、补运算得到的. 故:

$$\mathscr{A}(\mathscr{E})=\{\varnothing,A_i(i=1,2,\ldots,n),A_i\bigcap A_j(i\neq j,i,j=1,2,\ldots,n),\ldots,\Omega\}$$

$\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 与 $\Omega_n=\{1,2,\ldots,n\}$ 的一切子集做成的集代数是对等的, 共有 2^n 个元素.

练习 3.1.8 设 $\mathscr{E}$ 是 Ω 的任一子集类, 且 $\mathscr{E}_1:=\{A:A\in\mathscr{E}\text{或}A^c\in\mathscr{E}\}\bigcup\{\varnothing,\Omega\},\mathscr{E}_2:=\{\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k:A_k\in\mathscr{E}_1,k=1,2,\ldots,n,n\in\mathbb{N}\}$ 则 $\mathscr{A}:=\{\bigcup_{i=1}^m B_i\in\mathscr{E}_2,i=1,2,\ldots,m\text{两两不交},m\in\mathbb{N}\}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的最小集代数.

解:

(1) 显然有 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}(\mathscr{E})$

(2) 下证 $\mathscr{A}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$, 由于 $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$, 因此只需证明 $\mathscr{A}$ 是集代数

① $:\Omega \in \mathscr{A}$

②$:$ $\mathscr{A}$ 对交封闭, 设 $C_1, C_2 \in \mathscr{A}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{m_1} B_{1i}, B_{1i} \in \mathscr{E}_2, \text{且两两不交}, i = 1, 2, \ldots, m_1, B_{1j} = \bigcap\limits_{k=1}^{n_i} A_k^1, A_k^1 \in \mathscr{E}_1 \\ C_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{m_2} B_{2i}, B_{2i} \in \mathscr{E}_2, \text{且两两不交}, i = 1, 2, \ldots, m_2, B_{2j} = \bigcap\limits_{l=1}^{H_i} A_l^2, A_l^2 \in \mathscr{E}_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow C_1 \bigcap C_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{m_1} \bigcup\limits_{j=1}^{m_2} (B_{1i} \bigcap B_{2j}), B_{1i} \bigcap B_{2j}$ 两两不交,$i = 1, 2, \ldots, m_1, j = 1, 2, \ldots, m_2$, 且 $B_{1i} \bigcap B_{2j} = \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n_i} A_k^1\right) \bigcap \left(\bigcap\limits_{l=1}^{H_i} A_l^2\right)$

$\Rightarrow C_1 \bigcap C_2 \in \mathscr{A}$.

③$:$ $\mathscr{A}$ 对余封闭, 设 $H \in \mathscr{A} \Rightarrow H = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i = \bigcup\limits_{i=1} \bigcap\limits_{j=1}^{n_i} A_{ij}$, 其中 $A_{ij} \in \mathscr{E}_1, B_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ 互不相交.$\Rightarrow H^c = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} A_{ij}^c$.

由于 $A_{ij} \in \mathscr{E}_1, \Rightarrow A_{ij}^c \in \mathscr{E}_1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} A_{ij}^c \in \mathscr{A} \overset{②}{\Longrightarrow} H^c = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} A_{ij}^c \in \mathscr{A}$

故综合 ①,②,③ $\Rightarrow \mathscr{E} \subset \mathscr{A}$, 而 $\mathscr{A}$ 是集代数即可推出 $\mathscr{A}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$

PS: 对于 *(*)* 式, 实际上是 $\mathscr{E}_1$ 对并运算封闭, 任取 $A, B \in \mathscr{E}_1, A \bigcup B = (A \backslash B) \bigcup (A \bigcap B) \bigcup (B \backslash A) = (A \bigcap B^c) \bigcup (A \bigcap B) \bigcup (B \bigcap A^c)$

而 $A, B \in \mathscr{E}_1 \Rightarrow A^c, B^c \in \mathscr{E}_1 \overset{②}{\Longrightarrow} A \bigcap B^c, A \bigcap B, B \bigcap A^c \in \mathscr{E}_2$

而上述集合为不交并, 故 $A \bigcup B \in \mathscr{A}$.

练习 3.1.9 设 Ω 为不可数集, 试证:

$(i)\Omega$ 的一切有限集, 可数集以及它们的余集作成一个 σ 代数;

$(ii)\Omega$ 的一切有限集, 可数集作成 Ω 的一个 σ 环 *(*即 Ω 的对可数并及差封闭的子集类*)*.

解:

(i) 令 X 为所设集类, 逐一验证条件即可:

①$\varnothing$ 为有限集, 故 $\varnothing, \varnothing^c = \Omega$ 均属于 X.

② 若 $A \in X$,A 为有限集, 可数集时,A^c 必然为不可数集, 故 $A^c \in X$,A 的余集为有限集、可数集时, 显然有 $A^c \in X$. 综上 A^c 总在 X 中.

③$\forall A_n \in X, n \in \mathbb{N}$, 若存在 A_n 为可数集或者有限集, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 仍为有限集或可数集, 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in X$, 否则 A_n 的余集均为有限集或至多可数集, 则 $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c$, 后者为有限集或可数集, 故 $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \in X, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in X$.

综上所述,X 为一 σ 代数.

(ii) 设所设集类为 X, 按照定义验证即可:

① 若 $A, B \in X, A \backslash B$ 仍为有限集或者可数集, 故 $A \backslash B \in X$.

② 若 $A_n \in X, n \in \mathbb{N}, \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为有限集或可数集.

综上所述,X 为一 σ 环

练习 3.1.10 设 $\mathscr{E}$ 是 Ω 的任意子集类,$A \in \sigma(\mathscr{E})$ 则有 $\mathscr{E}$ 的一个可列子类 $\mathscr{D}$ 是的 $A \in \sigma(\mathscr{E})$.

解:

运用 $\lambda - \pi$ 系方法, 令:

$$\Lambda = \{A \in \sigma(\mathscr{E}) : \text{存在}\mathscr{E}\text{的一个可列子类}\mathscr{D}, s.t. A \in \mathscr{D}\}$$

显然,$\mathscr{E} \subset \Lambda$, 只需证明 Λ 为 $\sigma-$ 代数即可.

①: 显然有 $\Omega \in \Lambda$

②:Λ 对余封闭：设 $A \in \Lambda \Rightarrow \exists \mathscr{D}_0, s.t. A \in \sigma(\mathscr{D}_0) \Rightarrow A^c \in \sigma(\mathscr{D}_0) \Rightarrow A^c \in \Lambda$.

③:Λ 对可列并封闭：设 $A_n \in \Lambda, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathscr{D}_n, s.t. A_n \in \sigma(\mathscr{D}_n), n \in \mathbb{N}$. 令 $\mathscr{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}_n$. 则 $\mathscr{D}$ 仍然是 $\mathscr{E}$ 的可列子类. 并且有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}_n \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda$.
故 Λ 为 $\sigma-$ 代数, 即证结论.

练习 3.1.11 设 $\mathscr{E} := \{A_k, k = 1, 2, \dots\}$ 其中 $A_k \subset \Omega, k = 1, 2, \dots$ 两两不交, 试求 $\sigma(\mathscr{E})$.

解:

容易验证 $\sigma(\mathscr{E}) = \{\bigcup\limits_{J} A_n, A_n \in \mathscr{E}, J \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}\}$

练习 3.1.12 设 A 是 Ω 的一个子集,$\mathscr{E} := \{B : A \subset B \subset \Omega\}$, 试指出 $\sigma(\mathscr{E})$ 由哪些集组成.

解:

令 $\mathscr{G}$ 为所需集合, 则 $\mathscr{G}$ 可以表示为：

$$\mathscr{G} = \sigma(\mathscr{E}) = \{B : A \subset B \subset \Omega\} \bigcup \{G : G \subset A^c\}$$

(1) 显然有 $\mathscr{G} \subset \sigma(\mathscr{E})$.

(2) 下证 $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{G}$, 因为 $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}$, 故仅需证明 $\mathscr{G}$ 为 $\sigma-$ 代数即可.

①: 显然有 $\Omega \in \mathscr{G}$.

②:$\forall C \in \mathscr{G} \Rightarrow \begin{cases} (i) A \subset C \Rightarrow C^c \subset A^c \\ (ii) C \subset A^c \Rightarrow A^c \subset C, \end{cases} \Rightarrow C^c \in \mathscr{G}.$

$$③: \forall C_n \in \mathscr{G}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} (i) A \subset C_n \Rightarrow A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \subset A \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathscr{G} \\ (ii) C_n \subset A^c \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \subset A^c \subset A \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathscr{G} \end{cases}$$

故 $\mathscr{G}$ 为 $\sigma-$ 代数

练习 3.1.13 设 $\mathscr{E}$ 是 Ω 的一个子集类,$\varnothing \neq A \subset \Omega$, 令 $\mathscr{E}\bigcap A := \{B\bigcap A : B \in \mathscr{E}\}$. 试证: $\mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$ 是 A 的子集类 $\mathscr{E}\bigcap A$ 生成的 A 的集代数,$\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$ 是 A 的子集类 $\mathscr{E}\bigcap A$ 生成的 A 的 σ 代数/

解:

(1) 证明 $\mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$ 是 A 的子集类 $\mathscr{E}\bigcap A$ 生成的 A 的集代数

先证 $\mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$ 是 A 的集代数.

(i) 因为 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ 是 Ω 的集代数, 故有 $\Omega \in \mathscr{A}(\mathscr{E})$, 于是 $A \in \mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$.

(ii)$\forall B\bigcap A, C\bigcap A \in \mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$, 其中 $B, C \in \mathscr{A}(\mathscr{E})$. 可以得到 $B\bigcap C \in \mathscr{A}(\mathscr{E})$, 于是 $(B\bigcap A)\bigcap(C\bigcap A) = (B\bigcap A)\bigcap A \in \mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$. 故 $\mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$ 对有限交运算封闭.

(iii)$\forall B\bigcap A \in \mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$, 其中 $B \in \mathscr{A}(\mathscr{E})$. 可以得到 $B^c \in \mathscr{A}(\mathscr{E}) \Rightarrow B^c\bigcap A \in \mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$, 而 $B\bigcap A$ 在 A 中的补集为 $A\backslash(B\bigcap A) = B^c\bigcap A \in \mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$.

由 *(i)(ii)(iii)* 得 $\mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$ 是 A 的集代数.

记 $\mathscr{A}_A(\mathscr{E}\bigcap A)$ 为 A 的子集类 $\mathscr{E}\bigcap A$ 生成的 A 的集代数.

显然有 $\mathscr{E}\bigcap A \subset \mathscr{A}(\mathscr{E})$, 又 $\mathscr{E}\bigcap A$ 是 A 的集代数, 所以有 $\mathscr{A}_A(\mathscr{E}\bigcap A) \subset \mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A$.

下证 $\mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A \subset \mathscr{A}_A(\mathscr{E}\bigcap A)$.

法一:

$\forall B\bigcap A\in\mathscr{E}\bigcap A$, 其中 $B\in\mathscr{A}(\mathscr{E})$. 由习题 3.1.8 可知 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcap\limits_{j=i}^{k_i}A_{ij}$, 其中 $A_{ij}\in\{F\ F\in\mathscr{E},or,F^c\in\mathscr{E}\}\bigcup\{\varnothing,\Omega\}$. 故利用习题 3.1.8, 子集类所生成的集代数的构造知,$B\bigcup A\in\mathscr{A}_A(\mathscr{E})$

法二:

令:

$$\mathcal{C}=\{C\in\mathscr{A}(\mathscr{E}):C\bigcap A\in\mathscr{A}_A(\mathscr{E})\}.$$

显然有 $\mathscr{E}\subset\mathcal{C}$. 通过验证定义容易证得 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的集代数. 又有 $\mathscr{E}\subset\mathcal{C}$, 于是 $\mathscr{A}(\mathscr{E})\subset\mathcal{C}$, 故 $\mathscr{A}(\mathscr{E})\bigcap A\subset\mathscr{A}_A(\mathscr{E}\bigcap A)$.

(2) 证明 $\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$ 是 A 的子集类 $\mathscr{E}\bigcap A$ 生成的 A 的 $\sigma-$ 代数.

先证 $\sigma(\mathscr{E})\bigcap$ 是 A 的 $\sigma-$ 代数.

(i) 因为 $\sigma(\mathscr{E})$ 是 Ω 的 $\sigma-$ 代数, 故 $\Omega\in\sigma(\mathscr{E}),A\in\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$.

(ii)$\forall B\bigcap A\in\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$, 其中 $B\in\sigma(\mathscr{E})$, 有 $B^c\in\sigma(\mathscr{E})$, 于是 $B^c\bigcap A\in\sigma(\mathscr{E})$, 因为 $B\bigcap A$ 在 A 中的补集为 $A\backslash(B\bigcap A)=B^c\bigcap A\in\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$.

(iii) $\forall B_n\bigcap A\in\sigma(\mathscr{E})\bigcap A,n\in\mathbb{N}$, 其中 $B\in\sigma(\mathscr{E}),n\in\mathbb{N}$. 有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\sigma(\mathscr{E})$, 于是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(B_n\bigcap A)=\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)\bigcap A\in\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$

综合 (i)(ii)(iii) 可得 $\sigma(\mathscr{E})\bigcap$ 是 A 的 $\sigma-$ 代数. 记 $\sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$ 是 A 的子集类 $\mathscr{E}\bigcap A$ 生成的 A 的 $\sigma-$ 代数.

显然 $\mathscr{E}\in A\subset\sigma(\mathscr{E}),\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$ 是 A 的 $\sigma-$ 代数, 故有 $\sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)\subset\sigma(\mathscr{E})\bigcap A$.

下证 $\sigma(\mathscr{E})\bigcap A\subset\sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$

记:

$$\mathcal{F}=\{F\in\sigma(\mathscr{E}):F\bigcap A\in\sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)\}.$$

首先, 易得 $\mathscr{E}\subset\mathcal{F}.$, 下证 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的 $\sigma-$ 代数.

(i) 易得 $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii)$\forall F \in \mathcal{F}, F\bigcap A \in \sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$, 由于 $\sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$ 是 A 的 $\sigma-$ 代数, 于是 $F\bigcap A$ 在 A 中的补集 $A\backslash F \in \sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$. 于是 $F^c\bigcap A = A\backslash F \in \sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A) \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}$

(iii)$\forall F_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, 有 $F_n\bigcap A \in \sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$, 因为 $\sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$ 是 A 的 $\sigma-$ 代数, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(F_n\bigcap A) \in \sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A) \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$.
综合 *(i)(ii)(iii)*,$\mathcal{F}$ 是 Ω 的 $\sigma-$ 代数, 于是 $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathscr{E})\bigcap A \subset \sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A \Rightarrow \sigma(\mathscr{E})\bigcap A = \sigma_A(\mathscr{E}\bigcap A)$ 即得结论

练习 3.1.14 若 $\mathscr{A}$ 是集代数且对一切两两不交的集序列的并封闭, 则 $\mathscr{A}$ 是 σ 代数.

解:
由于 $\mathscr{A}$ 已经为集代数, 仅需证明其对可列并封闭, 利用习题 *1.1.9* 的结果, 可以将集合化为不交并.
故 $\forall A_n \in \mathscr{A}$, 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k, \forall n > 1, n \in \mathbb{N}$. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.
由于 $\mathscr{A}$ 对差封闭, 故 $B_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}, \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{A}$
$\mathscr{A}$ 是 $\sigma-$ 代数.

练习 3.1.15 设 $\mathscr{E}$ 是 Ω 的一个子集类, 它含有 Ω 且对对称差和可列交两种运算封闭, 问它是不是一个 σ 代数?

解:
$\mathscr{E}$ 是 $\sigma-$ 代数.

①:$\Omega \in \mathscr{E}$

②:$\forall A \in \mathscr{E} \Rightarrow A^c = A^c\bigcup\varnothing = \Omega\Delta A \in \mathscr{E}$

③: $\forall A_n \in \mathscr{E}, n \in \mathbb{N} \xRightarrow{②} A_n^c \in \mathscr{E} \xRightarrow{\text{条件}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{E} \xRightarrow{②} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathscr{E}$

故 $\mathscr{E}$ 是 σ 代数.

练习 3.1.16 设 S 是一组集运算, 若 Ω 中的非空子集类 $\mathscr{E}$ 对 S 中每一集运算都封闭, 则称 $\mathscr{E}$ 为一 S 类, 试证:

(1) 任意多个 S 类之交还是 S 类;

(2) 设 $\mathscr{E}$ 是 Ω 的一个子集类, 则存在一个唯一的包含 $\mathscr{E}$ 的最小 S 类.

解:

(1) 设有 $\mathscr{E}_t, t \in I$ 为一列 S 类,I 为一指标集, 则 $\bigcap\limits_{t\in I}\mathscr{E}$ 仍对 S 中的每一集运算封闭, 故 $\bigcap\limits_{t\in I}\mathscr{E}$ 仍为 S 类.

(2) 取 $\mathscr{E}^*$ 为所有包含 $\mathscr{E}$ 的 S 类的交, 由 *(1)* 知其仍为一 S 类, 下证其为包含 $\mathscr{E}$ 的最小 S 类, 若不然存在包含 $\mathscr{E}$ 的 S 类 $\mathscr{D}$ 且 $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}^*$, 则由 $\mathscr{E}^*$ 的构造知 $\mathscr{E}^* \subset \mathscr{D} \Rightarrow \mathscr{E}^* = \mathscr{D}$, 故 $\mathscr{E}^*$ 为所有包含 $\mathscr{E}$ 的最小 S 类, 即这样的 S 类总存在.

练习 3.1.17 称空间 Ω 中满足下述条件的集系 $\mathscr{D}$ 为 d 系:

(1)$\Omega \in \mathscr{D}$;

(2) 若 $A, B \in \mathscr{D}$ 且 $A \bigcap B = \varnothing$, 则 $B \bigcup A \in \mathscr{D}$(对不交并封闭);

(3) 若 $A \subset B, A, B \in \mathscr{D}$ 则 $B \backslash A \in \mathscr{D}$(对真差封闭).

试证: π 系上的最小 d 系等于 π 系上的最小集代数, 从而包含某一 π 系的 d 系必包含此 π 系生成的集代数.

解:

设 $\mathcal{C}$ 为一 π 系, 记 $\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 为该 π 系上的最小 d 系,$\mathscr{A}(\mathcal{C})$ 为包含该 π 系上的最小集代数, 下证 $\mathscr{D}(\mathcal{C}) = \mathscr{A}(\mathcal{C})$.

(1) 先证 $\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 是集代数, 由 d 系的定义, 仅需证对集合的有限交封闭即可, 故令:

$$\mathscr{D}_A := \{B \in \mathscr{D}(\mathcal{C}) : A \bigcap B \in \mathscr{D}(\mathcal{C})\}$$

① 先证: $\forall A \in \mathscr{D}(\mathcal{C}), \mathscr{D}_A$ 为 d 系.

由 $\mathscr{D}_A$ 的定义知, 仅需验证对不交并与真差封闭:

$\forall B, C \in \mathscr{D}_A, B \bigcap C = \varnothing, A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, 因为 B, C 不相交, 故 $A \bigcap B, A \bigcap C$ 也不相交 $\Rightarrow (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C) \in \mathscr{D}(\mathcal{C}) \Rightarrow B \bigcup C \in \mathscr{D}_A$

$\forall B, C \in \mathscr{D}_A, B \subset C, A \bigcap (C \backslash B) = (A \bigcap C) \backslash (A \bigcap B) \in \mathscr{D}(\mathcal{C})$ 后者是因为 d 系对真差封闭, 故 $C \backslash B \in \mathscr{D}_A$

② 其次证: $\forall A \in \mathcal{C}, \mathscr{D}_A = \mathscr{D}(\mathcal{C})$

容易看出 $\mathscr{D}_A \subset \mathscr{D}(\mathcal{C})$, 而 $\mathcal{C} \subset \mathscr{D}_A$, 且 $\mathscr{D}_A$ 为集代数, 故 $\mathscr{D}(\mathcal{C}) \subset \mathscr{D}_A$, 故 $\forall A \in \mathcal{C}, \mathscr{D}_A = \mathscr{D}(\mathcal{C})$

③ 最后: $\forall A \in \mathscr{D}(\mathcal{C}), \mathscr{D}_A = \mathscr{D}(\mathcal{C})$.

$\forall A \in \mathscr{D}(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{C}$, 由 ② 知 $A \in \mathscr{D}_B$, 由 $\mathscr{D}_B$ 的定义知 $A \bigcap B \in \mathscr{D}(\mathcal{C})$, 再由 $\mathscr{D}_A$ 的定义知 $B \in \mathscr{D}_A \Rightarrow \mathcal{C} \in \mathscr{D}_A$. 由 ① 知 $\mathscr{D}_A$ 为 d 系, 故 $\mathscr{D}(\mathcal{C}) \subset \mathscr{D}_A \subset \mathscr{D}(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathscr{D}(\mathcal{C}) = \mathscr{D}_A$

由此得 $\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 对有限交封闭, 故 $\mathscr{D}(\mathcal{C})$ 为集代数, 故 $\mathscr{A}(\mathcal{C}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{C})$, 而集代数显然是 d 系, 故 $\mathscr{D}(\mathcal{C}) \subset \mathscr{A}(\mathcal{C})$, 即证 $\mathscr{D}(\mathcal{C}) = \mathscr{A}(\mathcal{C})$, 后一结论显然是前者的推论.

练习 3.1.18 Ω 的子集类 $\mathscr{M}$ 称为 Ω 的单调类, 如果它满足:

(i) 对不降集列的并封闭: 即 $A_n \in \mathscr{M}$ 且 $A_n \uparrow, n \in \mathbb{N}$, 则有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{M}$;

(ii) 对不升序列的并封闭: 即 $A_n \in \mathscr{M}$ 且 $A_n \downarrow, n \in \mathbb{N}$, 则有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{M}$;

试证:

(1) 若 $\mathscr{A}$ 为 Ω 的集代数且为单调类, 则 $\mathscr{A}$ 为 σ 代数；

(2)Ω 的任一子集类 $\mathcal{C}$ 上的最小单调类总是存在的;

(3) 若 $\mathscr{A}$ 为 Ω 的集代数, 则包含 $\mathscr{A}$ 的最小单调类等于 $\sigma(\mathscr{A})$, 因而包含 $\mathscr{A}$ 的单调类必包含 $\sigma(\mathscr{A})$.

解:

(1) 只需证明 $\mathscr{A}$ 对可列并封闭即可, 设 $A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}$, 令 $B_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$, 且容易得到 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{A}$, 而 $B_n \uparrow$, 故由单调类对不将并的封闭性, 可推得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

故 $\mathscr{A}$ 是 $\sigma-$ 代数.

(2) 令 $\mathscr{M}_0$ 为所有包含 $\mathcal{C}$ 的单调类的交, 则容易验证 $\mathscr{M}_0$ 仍然是单调类, 且是包含 $\mathcal{C}$ 的最小单调类.

若不然, 存在包含 $\mathcal{C}$ 的单调类 $\mathscr{M} s.t. \mathscr{M} \subset \mathscr{M}_0$, 则由 $\mathscr{M}_0$ 的构造可知,$\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M} \Rightarrow \mathscr{M} = \mathscr{M}_0$. 故包含 $\mathcal{C}$ 的最小单调类存在. *(3)* 若记包含 $\mathscr{A}$ 的最小单调类为 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. 现需证 $\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A})$. 由于 $\sigma(\mathscr{A})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的单调类, 故有 $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{A})$. 则只需证 $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$. 而要证 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 为 $\sigma-$ 代数. 由 *(1)* 知, 仅需证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 为集代数即可, 则仅需证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对余运算与有限交运算封闭即可.

$\forall A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, 令：

$$\mathscr{M}_A := \{B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) : A \bigcap B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), B^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).\}$$

要证 $\forall A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$

①:$\forall A in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \mathscr{M}_A$ 是单调类：

设 $B_n \uparrow, B_n \in \mathscr{M}_A \Rightarrow A \bigcap B_n \uparrow \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), B_n^c \downarrow \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$

$\xRightarrow{\mathscr{M}(\mathscr{A})\text{是单调类}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\bigcap B_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{A}). \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$

$\Rightarrow \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)\bigcap A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)^c = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n^c\right) \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$

$\xRightarrow{\text{由定义}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$.

②:$\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_A, \forall A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{A}, \mathscr{M}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A})$.

由于 $\mathscr{D}_A \subset \mathscr{M}(\mathscr{A})$, 因此只需证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{D}_A$, 由①知 $\mathscr{D}_A$ 是单调类, 故只需证 $A \subset \mathscr{D}_A, A \in \mathscr{A}$

$\forall B \in \mathscr{A}$, 由于 $A \in \mathscr{A}, \Rightarrow A\bigcap B \in \mathscr{A}$, 因为 $\mathscr{A}$ 为集代数,$B^c \in \mathscr{A}, \Rightarrow \mathscr{A} \subset \mathscr{D}_A, \forall A \in \mathscr{A}$. 综合 ①,② $\Rightarrow \mathscr{D}_A = \mathscr{M}(\mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{M}(\mathscr{A})$ 是集代数, 且为包含 $\mathscr{A}$ 的最小单调类 $\xRightarrow{①} \mathscr{M}(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A})$. 即证

3.2 单调函数与测度的构造

练习 3.2.1 设 $(\Omega, \mu, \mathscr{F})$ 是可测空间,μ 是 $\mathscr{F}$ 上的可加测度, 且具有次 σ 可加性, 试证 μ 是测度.

解:

只需证明 μ 具有 $\sigma-$ 可加性.

设 $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$, 且两两不交, 由于 μ 可加:

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

由因为 μ 有次 $\sigma-$ 可加性:

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 故可得 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, 即证.

练习 3.2.2 设 $(\Omega, \mu, \mathscr{F})$ 是测度空间, 则

(1)$\mu(\varnothing) = 0$;

(2)μ 可加;

(3)μ 下方连续：即对 $\mathscr{F}$ 中任何不降集列 $\{A_n\}$(即 $A_n \in \mathscr{F}$, 且 $A_n \uparrow$) 都有：

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty})A_n;$$

(3)μ 上方连续：即对 $\mathscr{F}$ 中任何不升集列 $\{A_n\}$(即 $A_n \in \mathscr{F}$, 且 $A_n \downarrow$), 且 $\exists m \in \mathbb{N}$, 使 $\mu(A_n) < \infty$ 有：

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty})A_n.$$

解:

(1)$\forall A \in \mathscr{F}, \mu(A\bigcup\varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing) \to \mu(\varnothing) = 0.$

(2)$\forall A_k \in \mathscr{F}, k = 1, 2, \ldots, n$, 且两两不交,$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$. 故

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{k=1}^{n}A_k) &= \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)\end{aligned}$$

故 μ 可加;

(3) 与定理 3.3.2 重复, 不再赘述.

(4) 与定理 3.3.2 重复, 不再赘述.

练习 3.2.3 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间,μ 为 $\mathscr{F}$ 上的可加测度, 且满足下述条件之一：

(1)μ 下方连续;

(2)$\mu(\Omega) < \infty$ 且对 $\mathscr{F}$ 中的任何下降到 $\varnothing$ 的集列 $\{A_n\}$ 都有：

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0 = \mu(\varnothing)$$

则 μ 为 $\mathscr{F}$ 上的测度.

解:

与定理 *3.3.3* 重复, 不再赘述.

练习 3.2.4 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为测度空间,$\{A_n\}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的集序列, 记:

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k, \varlimsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k$$

试证: $\mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

若 $\exists m \in \mathbb{N}$, 使 $\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k) < \infty$, 则:

$$\mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

若 μ 为有限测度, 且 $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = A$, 则:

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

解:

(1) 令 $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow B_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n \\
&\Rightarrow \forall m > n, B_n \subset B_m \subset A_m \\
&\Rightarrow \forall m > n, \mu(B_n) \leqslant \mu(A_m) \\
&\xRightarrow{m\to\infty} \mu(B_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_m) \\
&\xRightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \mu(A_m), \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) \\
&\Rightarrow \mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

(2) 令 $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_n$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow B_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n \\
&\xRightarrow{\exists m, s.t. \mu(B_m)<\infty} \forall n > m, B_m \backslash B_n \uparrow B_m \backslash \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = B_m \backslash \left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) = \varliminf_{n\to\infty} (B_m \backslash A_n) \\
&\xRightarrow{\text{单调性}} \lim_{n\to\infty} \mu(B_m \backslash B_n) = \mu(B_m \backslash \varlimsup_{n\to\infty} A_n) \\
&\Rightarrow \mu(B_m) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B_m) - \mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n), \text{又显然} \forall n, B_n \subset A_n \Rightarrow \mu(B_n) \geqslant \mu(A_n) \\
&\Rightarrow \mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

当 μ 是有限测度是,$\mu(A) = \mu(\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n) \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu(\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n) = \mu(A_n)$ 故有 $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$

练习 3.2.5 证明引理 *3.2.13.*

解:

逐个验证外测度的条件:

①$\forall \varepsilon > 0$, 任取开区间 $I, s.t. |I| < \varepsilon$, 则 $0 \leqslant \lambda^*(\varnothing) < |I| < \varepsilon$. 由 ε 的任意性, 得 $\lambda^*(\varnothing) = 0$.

②$\forall A, B \in \mathbb{R}^d, B \subset A$. 任意 A 的覆盖必为 B 的覆盖, 则由定义:

$$\lambda^*(B) \leqslant \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|, A \in \bigcup_{n=1}^{\infty}, I_n \text{为开区间}\} = \lambda^*(A).$$

③ 设 $A_n \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) = \infty$ 则 $\lambda^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$ 自然成立, 下只考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) < \infty$ 的情况, 此时 $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 由 $\lambda^*(A)$

的定义知,$\exists\{I_{nk}:k\in\mathbb{N}\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的开区间族, 使得:

$$A_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{nk}\text{ 且 }\sum_{k=1}^{\infty}|I_{nk}|\leqslant\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$$

成立, 因而由 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_nk$ 及 λ^* 的定义知:

$$\begin{aligned}\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^*(A_{nk})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)\end{aligned}$$

由于 ε 的任意性, 可知 $\lambda^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)$.

练习 3.2.6 设 $A_n,n\in\mathbb{N}$ 两两不交, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$(称 $\{A_n\}$ 为 Ω 的一个可数划分), 试证:$\mathscr{S}=\{\varnothing\}\bigcup\{A_n,\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k:n\in\mathbb{N}\}$ 为 Ω 的半集代数.
再设 $q_n\geqslant 0,n\in\mathbb{N}$, 在 $\mathscr{S}$ 上定义 $\mu(A_n)=q_n,\mu(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}q_k,n\in\mathbb{N},\mu(\varnothing)=0$, 试具体写出 $\sigma(\mathscr{S})$ 的元以及 μ 在 $\sigma(\mathscr{S})$ 上的扩张.
上述测度空间与下列测度空间 $(\Omega,\mathscr{A},\tilde{\mu})$ 是否相同? 此时,$\mathscr{A}$ 为 $A_n,n\in\mathbb{N}$ 的任意并作成的类,

$$\tilde{\mu}(\bigcup_{n\in J}A_n)=\sum_{n\in J}q_n,\qquad\qquad \forall J\subset\mathbb{N}$$

解: (1)$\mathscr{S}$ 是半集代数:

①$\varnothing,\Omega\in\mathscr{S}$.

②$\forall A,B\in\mathscr{S},\exists n_1,n_2\in\mathbb{N},s.t,A=\bigcup\limits_{n=n_1}^{\infty}A_k,B=\bigcup\limits_{n=n_2}A_k$, 取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, 则 $A\bigcap B=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}A_k\in\mathscr{S}$

③$\forall B, B_1 \in \mathscr{S}, B_1 \subset B$. 令 $B = \bigcup\limits_{k=n_1}^{\infty} A_k, B_1 = \bigcup\limits_{k=n_2}^{\infty}, n_2 > n_1$. 则 $B_2, \ldots, B_m$ 为 $A_{n_1+1}, \ldots, A_{n_2-1}$. 于是有 $B = \bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n$ 且 B_n 两两不交, 即证 $\mathscr{S}$ 为半集代数. 其 σ 代数的形式为:

$$\sigma(\mathscr{S}) = \{\bigcup_{n \in J} A_n, J \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$$

由于 $\mathscr{S} \in \sigma(\mathscr{S})$, 仅需证 $\sigma(\mathscr{S})$ 为 σ 代数即可, 易得 $\varnothing, \Omega \in \sigma(\mathscr{S})$.
且 $\forall A \in \sigma(\mathscr{S}), A = \bigcup\limits_{n \in J} A_n, J\mathscr{P}(\in \mathbb{N}), A^c = \bigcup\limits_{n \in J^c} A_n \in \sigma(\mathscr{S})$.
又有 $\forall A_n \in \sigma(\mathscr{S}), A_n = \bigcup\limits_{n \in J_n} B_n, J_n \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n} B_n \in \sigma(\mathscr{S})$,
故上式所定义的集类是 σ 代数, 即证. 而 $\tilde{\mu}$ 在 $\sigma(\mathscr{S})$ 上的扩张为:

$$\tilde{\mu}(\bigcup\nolimits_{n \in J} A_n) = \sum_{n \in J} q_n, \forall J \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

是相同的.

(2)$(\Omega, \sigma(\mathscr{S}), \mu) = (\Omega, \mathscr{A}, \tilde{\mu})$

$$① \ \sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A} \begin{cases} (i)\text{容易得到}\mathscr{A}\ \sigma-\text{代数, 且}\mathscr{S} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A} \\ (ii)\text{因为}\sigma(\mathscr{S})\text{对任意并封闭}, \mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{S}), \end{cases}$$

② 容易得到 $\forall A \in \mathscr{S}, \tilde{\mu}(A) = \mu(A) \Rightarrow \tilde{\mu}|_{\mathscr{S}} = \mu$.

因为 $\mu|_{\mathscr{S}}$ 是 $\sigma-$ 有限的, 故由测度扩张定理的唯一性,$\tilde{\mu}|_{\sigma(\mathscr{S})=\mathscr{A}} = \mu$.

练习 3.2.7 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率场, 若 $B \in \mathscr{F}, \mathbb{P}(B) > 0$, 则 $\forall A \in \mathscr{F}$, 定义:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

称为 A 在 B 之下的条件概率, 试证 $\mathbb{P}(\cdot|B)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度, 因而 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot|B))$ 是概率空间.

解:

(1) 验证 $\mathbb{P}(\cdot|B)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度:

$$①\mathbb{P}(|B)=\frac{\mathbb{P}(\varnothing\bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}=0.$$

②$\forall A_n\in\mathscr{F}$ 且两两不交, 则 $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n|B)=\dfrac{\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathbb{P}(A_n\bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n|B)$, 故 $\mathbb{P}(\cdot|B)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度.

(2) 显然有 $\mathbb{P}(\Omega|B)=1$, 故结论成立.

练习 3.2.8 设 $\{A_k:k\in\mathbb{N}\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 中随机事件系, 试证:

(1) 若 $\mathbb{P}(A_n)=1,n=1,2,\ldots$ 则 $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=1$;

(2) 若 $\mathbb{P}(A_n)=0,n=1,2,\ldots$ 则 $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=1$.

解:

$\forall n\in\mathbb{N},\mathbb{P}(A_n)=1,\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\mathbb{P}(A_n^c)=0\Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n^c)=0\Rightarrow P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1-P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)=1-0=1$

则 *(1)(2)* 皆证.

练习 3.2.9 若 $\mathbb{P}_0,\mathbb{P}_1$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的两个概率测得, 且 $\forall\varepsilon>0,\exists A_\varepsilon\in\mathscr{F}$, 使得 $\mathbb{P}_1(A_\varepsilon)>1-\varepsilon$, 而 $\mathbb{P}_0(A_\varepsilon)<\varepsilon$, 试证: 存在 $A\in\mathscr{F}$ 是的 $\mathbb{P}_1(A)=1,\mathbb{P}_0(A)=0$.

解:

对 $\varepsilon=2^{-m},\exists A_{2^{-m}},s.t.\mathbb{P}_1(A_{2^{-m}})>1-2^{-m},\mathbb{P}_0(A_{2^{-m}})<2^{-m}$

令 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_{2^{-m}}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \geqslant \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_1(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_{2^{-m}}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_{2^{-m}}) \\ \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(A_{2^{-m}}) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty}(1-2^{-m)}) = 1 \\ 0 \leqslant \mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}_0(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_{2^{-m}}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_{2^{-m}}) \\ \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}_0(A_{2^{-m}}) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}_1(A) = 1, \mathbb{P}_0(A) = 0$

练习 3.2.10 设 $\mathbb{P}', \mathbb{P}$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的两个概率测度, 若对任何使 $\mathbb{P}(A) = 0$ 的 $A \in \mathscr{F}$, 都有 $P'(A) = 0$, 则称 $\mathbb{P}'$ 对 $\mathbb{P}$ 连续, 记作 $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$. 试证:

(1) 设 $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的两个概率测度, 则有 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的一个概率测度 $\mathbb{P}$ 使得 $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}$ 且 $\mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}$.

(2) 将 (1) 推广至无穷多个概率测度 $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots$ 的情形.

解:

(1) 令 $P = \dfrac{\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2}{2}$, 容易验证 P 是概测测度. 且 $P, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \geqslant 0, \Rightarrow \forall A \in \mathscr{F}, \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A) = 0, \mathbb{P}_1 \ll P, \mathbb{P}_2 \ll P$.

(2) 令 $P = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathbb{P}_n}{2^n}$, 容易验证 P 是概测测度. 且 $P, \mathbb{P}_n, \geqslant 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall A \in \mathscr{F}, \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_n(A) = 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{P}_n \ll P, n \in \mathbb{N}$

练习 3.2.11 设 f 是增函数且存在实数 A 与 B 使得 $\forall x : A \leqslant f(x) \leqslant B$. 证明 $\forall \varepsilon > 0$, 大小超过 ε 的跳跃数最多为 $(B - A)\varepsilon^{-1}$, 由此证明, 任何不降函数 f 的不连续点集合最多可数.

解:

反之, 若 $\forall\varepsilon>0$, 大小超过 ε 的跳跃数最多为 $(B-A)\varepsilon^{-1}$, 则由于 $f(x)$ 为增函数, 故 $\max f(x)>A+(B-A)\varepsilon^{-1}\times\varepsilon>B$ 与假设矛盾. 故大小超过 ε 的跳跃数最多为 $(B-A)\varepsilon^{-1}$.

而 $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n], b_{n-1}\geqslant a_n\leqslant b_n$, 且 $a_n\to\infty, n\to\infty$, 由此可得:$\forall\varepsilon>0$, 任意不降函数在 $[a_n,b_n]$ 大小超过 ε 的跳跃数最多为 $(b_n-a_n)\varepsilon^{-1}$ 为有限个, 则总不连续点数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\varepsilon^{-1}$, 至多可数.

练习 3.2.12 设 f 是 $(-\infty,\infty)$ 上的一个任意函数,L 是所有这种 x 的集：f 在 x 处右连续但不左连续, 证明 L 是一有限集或可数集.

解:

令 $M_n:=\{x|O(f;x)>\dfrac{1}{n}\}$, 其中 $O(f;x)=:\inf\limits_{\varepsilon>0}\sup\limits_{t\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}\{|f(x)-f(t)|\}$ 则仅需证明 $\forall L\bigcap M_n$ 为至多可数集. 否则, 存在一 $L\bigcap M_n$ 为不可数集. 定义 $a\in L\bigcap M_n$ 为右孤立点, 指存在充分小的 ε, 使得 $(a,a+\varepsilon)$ 中的点都不属于 $L\bigcap M_n$, 在每一个右孤立点 a 确定的区间 $(a,a+\varepsilon)$ 中选取一个有理数, 则 $L\bigcap M_n$ 有至多可数的右孤立点, 由假设,$L\bigcap M_n$ 为不可数集, 故存在 $p\in L\bigcap M_n$, 且 p 不是右孤立点. 此时, 对于给定的 $\varepsilon,(p,p+\varepsilon)$ 中必然存在 $L\bigcap M_n$ 中的点, 但此时 $x\to p$ 时,$|f(x)-f(y)|>\dfrac{1}{n}, x,y\in(p,p+\varepsilon)$. 与 L 中点右连续矛盾.

练习 3.2.13 设 f 是 D 上的增函数,D 在 $(-\infty,\infty)$ 中稠密, 在 $\mathbb{R}$ 上如下定义 $\tilde{f}:\tilde{f}(x)=\inf\limits_{x<t\in D}f(t),\forall x\in\mathbb{R}$. 证明：$f$ 在 D 上一致连续性一定蕴含 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一致连续性；并举一反例说明 f 在 D 上的连续性并不蕴含 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的连续性.

解:

f 在 D 上一致连续, 即 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x_1<x_2\in D$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$

时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 此时 $|\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(x_2)|=|\inf\limits_{x<x_1}f(t)-\inf\limits_{x<x_2}f(t)|\leqslant|\inf\limits_{x<x_1}f(t)-\inf\limits_{x<x_1}(f(t)-\varepsilon)|=\varepsilon$. 故 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一致连续.

取 $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}, f(x)=\mathbb{1}_{x>0}(x)$, 则不难验证 f 在 D 上连续, 但不一致连续, 且 0 是 $\tilde{f}$ 的间断点.

练习 3.2.14 任给 $\mathbb{R}$ 上的实值函数 f, 存在可数集 D 具有如下性质.$\forall t,\exists t_n\in D,n\in\mathbb{N},t_n\to t(n\to\infty)$, 使得 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)$. 如果 "$t_n\to t$" 用 "$t_n\downarrow t$" 或 "$t_n\uparrow t$" 来代替, 上述论断仍成立.

解:

容易证明可分距离空间的子空间仍然是可分的（仅需将原空间存在的稠子集与子空间取交即可得到子空间的稠子集）. 而 $(\mathbb{R}^2,|x-y|)$ 是可分距离空间,$(x,f(x)),x\in\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间, 故也可分, 考虑距离:

$$d((x,f(x)),(y,f(y))):=|x-y|+|\frac{f(x)}{1+|f(x)|}+\frac{f(y)}{1+|f(y)|}|$$

而容易验证 d 与 $\mathbb{R}^2$ 的距离 $|x-y|$ 等价, 故 $(x,f(x)),x\in\mathbb{R},d$ 是可分距离空间, 则存在一稠子集 D, 使得 $\forall t\in\mathbb{R},(t,f(t))$ 都存在 D 中的元素 $(t_n,f(t_n))$ 使得 $d((t_n,f(t_n)),(t,f(t)))\to 0$, 即证上述结论.

练习 3.2.15 计算下列各 *Borel* 集的 *Lebesgue* 测度;

(1)$[0,1]$ 中的无理点集;

(2)*Cantor* 集;

(3)*Sierpinski* 海绵;

(4) 圆周;

(5) 开圆 $B(0,1)$;

(6)$[a,b]$ 上的连续函数 $f(x),x\in[a,b]$ 的图 $\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$.

解:

(1): 有理数为可数集, 测度为 0, 故 $[0,1]$ 中的无理点集测度为 1.

(2): 由 *Cantor* 集的构造知测度为 0.

(3): 由 *Sierpinski* 海绵的构造知测度为 0.

(4): 圆周的测度为 0

(5): 测度为 π

(6): 测度为 0.

练习 3.2.16 若 $\mu^*(A)=0$, 则 $\mu*(A\bigcup B)=\mu^*(B)$.

解:

由 μ^* 的次 σ 可加性, 仅需证 $\mu^*(A\bigcup B)\geqslant\mu^*(B)$. 而由 μ^* 的单调性可知成立, 即证.

练习 3.2.17 若 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭区间 $[a,b]$ 至少有一边长为 0(即至少有一 $k, 1\leqslant k\leqslant n$, 使 $a_k=b_k$) 则

$$\lambda^*([a,b])=0.$$

解:

由非负性 $\lambda^*([a,b])\geqslant 0$, 仅需证 $\forall\varepsilon>0, \lambda^*([a,b])<\varepsilon$.

不妨设 $a_k=b_k, [a,b]=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_k,b_k]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 则存在 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_k,a_k+\varepsilon]\times\cdots\times[a_n,b_n]\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 $[a,b]$ 的一个覆盖, 记为 A_ε, 其满足 $\lambda(A_\varepsilon)=\prod\limits_{k=1}^{n}\leqslant\varepsilon c^{n-1}$, 其中 $c=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{b_k-a_k\}$. 由题意知 $b-a$ 有限, 故有:

$$0<\lambda^*([a.b])\leqslant\lambda(A_\varepsilon)\leqslant\varepsilon c^{n-1}$$

令 $\varepsilon\to 0$, 即证 $\lambda^*([a,b])=0$.

练习 3.2.18 设 μ,ν 是可测空间 $\Omega,\mathscr{F}$ 上的两个有限测度,$\mathcal{C}$ 为 π 系,$\Omega\in\mathcal{C}$ 且 $\sigma(\mathcal{C})=\mathscr{F}$. 若 μ,ν 在 $\mathcal{C}$ 上一直, 则 μ,ν 在 $\mathscr{F}$ 上一致.

解:

令:

$$\Lambda=\{A\in\mathcal{F}:\mu(A)=\nu(A)\}$$

往证 $\Lambda=\mathcal{F}$, 而 $\mathcal{C}$ 是 π 系, 且容易得到 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$, 故只需证明 Λ 是 λ 系即可.

① 因为 $\Omega\in\mathcal{F}\subset\Lambda\Rightarrow\Omega\in\Lambda$,

②$\forall A,B\in\Lambda,A\subset B\Rightarrow\mu(A)=\nu(A),\mu(B)=\nu(B)$

$\Rightarrow\mu(B\backslash A)=\mu(A)-\mu(A)=\nu(B)=\nu(A)=\nu(B\backslash A)\Rightarrow B\backslash A\in\Lambda.$

③$\forall A_n\uparrow,A_n\in\Lambda,\Rightarrow\mu(A_n)=\nu(A_n),\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\nu(A_n)=\nu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$

$\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Lambda.$

由 $\lambda-\pi$ 系方法易得: $\Lambda=\mathcal{F}$.

练习 3.2.19 设 $\Omega=\{a,b,c,d\},\mathcal{C}=\{\{a,b\},\{c,d\},\{a,c\},\{b,b\},\Omega,\varnothing\}$, 令

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\{a\})=\mu_1(\{d\})=\mu_2(\{b\})=\mu_2(\{c\})=1,\\
&\mu_1(\{b\})=\mu_1(\{c\})=\mu_2(\{a\})=\mu_2(\{d\})=2,\\
&\mu_i(\{x,y\})=\mu_i(\{x\})+\mu_i(\{y\}),\qquad i=1,2,\{x,y\}\in\mathcal{C},\\
&\mu_i(\varnothing)=0,\qquad \mu_i(\Omega)=6,\qquad i=1,2.
\end{aligned}$$

试证: $\mathcal{C}$ 不是半集代数, 在 $\mathcal{C}$ 上 $\mu_1=\mu_2$ 且都 σ 可加, 但在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上 $\mu_1\neq\mu_2$. 这个例子说明了什么问题?

解:

(1)$\mathcal{C}$ 对交运算不封闭：$\{a,b\},\{a,c\}\in\mathcal{C},\{a,b\}\bigcap\{a,c\}=\{a\}\notin\mathcal{C}$. 故 $\mathcal{C}$ 不是半集代数.

(2) 在 $\mathcal{C}$ 上 $\mu_1=\mu_2$, 且容易验证它们都有 $\sigma-$ 可加性.

(3) 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上 $\mu_1\neq\mu_2$:

例如 $\{a\}\in\sigma(\mathcal{C}),\mu_1(\{a\})=1\neq\mu_2(\{a\})=2$.

故此例说明 $\mathcal{C}$ 不是半集代数时, 测度扩张定理所得测度未必唯一.

练习 3.2.20 如果测度扩张定理中的 ”σ 有限” 条件去掉, 则扩张的唯一性未必成立. 例如 $\Omega=\mathbb{R}$, 在 $\mathscr{S}$ 上定义 $\mu_1(A)=|A|,\mu_2=2\mu_1$, 试证 μ_1,μ_2 都是 $\mathscr{B}$ 上的测度, 不是 σ 有限的, 但在 $\mathscr{S}$ 上 $\mu_1=\mu_2$, 而在 $\sigma(\mathscr{S})=\mathscr{B}$ 上,$\mu_1\neq\mu_2$.

解:

(1) 仅需说明 μ_1 为测度:

①:$\mu_1(\varnothing)=|\varnothing|=0$.

② :$\forall A_n\in\mathscr{B},n\in\mathbb{N}$, 且两两不交,$\mu_1\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=|\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|A_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_1(A_n)$.

但 μ_1 不为 $\sigma-$ 有限的:

$\mu_1(\mathbb{R})=\infty$, 但对 $\mathbb{R}$ 中任意的非空区间 $(a,b),\mu_1(a,b)=\infty$.

(2) 在 $\mathscr{S}$ 上显然有 $\mu_1=\mu_2$.

(3) 但在 $\sigma(\mathscr{S})=\mathscr{B}$ 上,$\mu_1\neq\mu_2$

例如 $A=\{1\}\in\mathscr{B},\mu_1(A)=1\neq\mu_2(A)=2$.

练习 3.2.21 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为一测度空间,Δ 为 Ω 的任一子集, 令

$$\mu_\Delta(A)=\mu^*(\Delta\bigcap A),$$

试证：$(\Delta, \Delta\bigcap\mathscr{F}, \mu_\Delta)$ 为一以 Δ 为空间的测度空间. 若 $0<\mu^*(\Delta)<\infty$, 则

$$\left(\Delta, \Delta\bigcap\mathscr{F}, \frac{\mu_\Delta}{\mu^*(\Delta)}\right)$$

为一以 Δ 为样本空间的概率空间.

解:

由习题 *3.1.13* 知 $\Delta\bigcap\mathscr{F}$ 为一 $\sigma-$ 代数, 下证 μ_Δ 为 $\Delta\bigcap\mathscr{F}$ 上的测度, 易得只需要证 $\sigma-$ 可加性. 故任取 $A_n\in\Delta\bigcap\mathscr{F}, n\in\mathbb{N}$, 且两两不交. 由定义可知 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\Delta\bigcap B_n)=\Delta\bigcap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$. 由习题 *1.1.9* 类似的技巧, 我们总可以将 B_n 化为两两不交的集合的并, 故不妨设 B_n 两两不交.
由定义, 当 $\mu_\Delta\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu^*\left(\Delta\bigcap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\right)$
根据外测度的定义, 当 $\mu_\Delta\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)<\infty$ 时,$\exists D_i\in\mathscr{F}, \in\in\mathbb{N}, \Delta\bigcap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_i$ 使得:

$$\begin{aligned}
\mu_\Delta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon &= \mu^*\left(\Delta\bigcap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\right)+\varepsilon\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(D_i)\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu(D_i\bigcap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n))=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_i\bigcap B_n))\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_i\bigcap B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(D_i\bigcap B_n)\\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(\Delta\bigcap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(\Delta\bigcap(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_\Delta(A_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{由}\varepsilon\text{的任意性} \Rightarrow \mu_\Delta\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu_\Delta(A_n) \\ \text{当}\mu_\Delta\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty, \text{上式显然成立} \\ \text{由外测度的次可加性,}\mu_\Delta\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu_\Delta A_n. \end{cases} \Rightarrow \mu_\Delta\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_\Delta A_n$$

$\Rightarrow \mu_\Delta$ 是 $\Delta\bigcap\mathscr{F}$ 上的测度.

若 $0 < \mu^*(\Delta) < \infty$, 显然有 $\dfrac{\mu_\Delta}{\mu^*(\Delta)}(\Omega) = \dfrac{\mu^*(\Delta)}{\mu^*(\Delta)} = 1$, 则 $\dfrac{\mu_\Delta}{\mu^*(\Delta)}$ 是 $(\Delta, \Delta\bigcap\mathscr{F})$ 上的概率测度

练习 3.2.22 设 (E,ρ) 为一完全可分距离空间,$K_n \subset E, n \in \mathbb{N}$ 为 E 的一个上升的紧集列,$\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是作为 E 的可数拓扑基的开球列,$\mathscr{F}$ 为 $\overline{S_m}\bigcap K_n, m, n \in \mathbb{N}$ 的一切有限并作成的集类.$\nu : \mathscr{F} \mapsto \mathbb{R}_+$, 具有性质:

(i) 若 $F \in \mathscr{F}, i = 1, 2, F_1 \subset F_2$, 则 $\nu(F_1) \leqslant \nu(F_2)$;

(ii) 若 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, 则 $\nu(F_1\bigcup F_2) \leqslant \nu(F_1) + \nu(F_2)$;

(iii) 若 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}, F_1\bigcap F_2 = \varnothing$, 则 $\nu(F_1\bigcup F_2) = \nu(F_1) + \nu(F_2)$.

对于 E 的开集 O 及任何 $A \subset E$, 定义:

$$\begin{aligned} \lambda(O) :&= \sup\{\nu(F) : F \subset O, F \in \mathscr{F}\}, \\ \lambda^*(A) :&= \inf\{\lambda(G) : A \subset G, G\text{为开集}\}, \end{aligned}$$

则 λ^* 为 E 上的一个外测度.

解:

① 由 ν 的性质, 可以得到 $\nu(F\bigcup\varnothing) = \nu(F) + \nu(\varnothing)$, 故 $\nu(\varnothing) = 0$, 从而有 $\lambda(\varnothing) = 0, \lambda^*(\varnothing) = 0$;

② 设 O_1, O_2 为 E 中的开集, 且 $O_1 \subset O_2$, 则 $F \in \mathscr{F}, F_1 \subset O_1 \subset O_2$, 自然有 $\lambda(O_1) \leqslant \lambda(O_2)$, 故 λ 具有单调性. 设 $A \subset B \subset E$, 则 B 的开覆盖自然是 A 的开覆盖, 又由 λ 在开集上的单调性, 故 $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$;

③ 设 $A_n \subset E$, 则由下确界的性质,$\exists G_n$ 为 $A_n, n \in \mathbb{N}$ 的开覆盖, 使得:

$$\lambda(G_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} < \lambda^*(A_n) < \lambda(G_n) \quad \forall \varepsilon > 0$$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ 为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的开覆盖, 而为证 λ^* 的次可加性, 需利用 λ 的次可加性.G_n 为 E 中的开集列, 则 $\forall m, \forall \varepsilon > 0, \exists F_n \in \mathscr{F}, s.t. F_n \subset G_n, \nu(F_n) > \lambda(G_n) - \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ 则有 $\bigcup\limits_{n=1}^{m} F_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} G_n$. $\sum\limits_{n=1}^{m} \nu(F_n) \geqslant \nu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n) > \lambda(\bigcup\limits_{n=1}^{m} G_n) - \varepsilon$ 故可得 $\forall m$:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{m} A_n) &\leqslant \lambda(\bigcup_{n=1}^{m} G_n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m} \lambda(G_n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(A_n) + \varepsilon \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon
\end{aligned}$$

上式让 $m \to \infty, \varepsilon \to 0$ 即可.

综上所述,λ^* 为 E 上的一个外测度.

3.3 测度空间的一些性质

练习 3.3.1 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, 若 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{F}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, 则 $\mathbb{P}(\{A_n\ i.o\}) = 0$, 其中 $\{A_n\ i.o\}$ 表示有无穷个 A_n 发生的事件.

解:

先证明 $\{A_n, i.o\} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$

由 $\{A_n.i.o\}$ 的定义可知,$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \{A_n, i.o\}$, 且记 B_i 为第 i 个 $\{A_n\}$ 中发

生的事件,$B_i \subset \bigcup\limits_{k=i}^{\infty} A_n$. 所有 i 个事件都发生则取无穷交, 得到 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \{A_n.i.o\} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=i}^{\infty} A_n$. 即证二者等价.

故有 $0 \leqslant \mathbb{P}(\{A_n.i.o\}) = \mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=i}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=i}^{\infty} A_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=i}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$. 由于级数收敛, 故尾项趋于 0, 得 $\mathbb{P}(\{A_n.i.o\}) = 0$

练习 3.3.2 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的集代数, 设 μ_1, μ_2 是 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的测度且在 $\mathscr{A}$ 上 σ 有限, 若 $A \in \sigma(\mathscr{A}), \mu_i(A) < \infty, i = 1, 2$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ 使 $\mu_i(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon, i = 1, 2$.

解:

考虑 $\mu = \mu_1 + \mu_2$, 则 μ 是 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的测度, 且 $\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A) < \infty$. 由中命题 *3.3.7* 可得 $\exists A_\varepsilon \in \mathscr{A}, s.t. \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$. 又因为 $A, A_\varepsilon \in \sigma(\mathscr{A}), \mu^*|_{\sigma(\mathscr{A})} = \mu \Rightarrow \mu(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \mu_i(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon, i = 1, 2$.

练习 3.3.3 证明 $A \subset \mathbb{R}^n$ *Lebesgue* 可测的充要条件是对任何 $I \subset \mathbb{R}^n$ 开区间有

$$\lambda^*(I) = \lambda^*(A \bigcap I) + \lambda^*(A^c \bigcap I).$$

解:

$\Rightarrow$: 由定义知显然.

$\Leftarrow$: 只需证明 $\forall D \subset R, \lambda^*(D) \geqslant \lambda^*(D \bigcap A) + \lambda^*(D \bigcap A^c)$.

由 λ^* 的定义,$\forall\varepsilon>0.\exists\{D_i,i\in\mathbb{N}\}$ 是区间, 使得 $D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}D_i$, 且有:

$$\begin{aligned}
\varepsilon+\lambda^*(D) &\geqslant \lambda^*(D)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(D_i)\\
D_i\text{ 为开区间时成立} &= \sum_{i=1}^{\infty}[\lambda^*(D_i\bigcap A)+\lambda^*(D_i\bigcap A^c)]\\
\lambda^*\text{ 的次可加性} &\geqslant \lambda^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i\bigcap A)+\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i\bigcap A^c)\\
\lambda^*\text{ 的单调性} &\geqslant \lambda^*(D\bigcap A)+\lambda^*(D\bigcap A^c)
\end{aligned}$$

故结论得证.

练习 3.3.4 若 I 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界开区间, 试证: $B\subset I$ 为 *Lebesgue* 可测集的充要条件是:

$$\lambda^*(I)=\lambda^*(B)+\lambda^*(I\bigcap B^c)$$

如果对于闭集 F, 令 $\lambda(F)$ 为体积测度, 定义 $\lambda_*(B)=\sup\{\lambda(F):F\subset B,F\text{为闭集}\}$(称为 B) 的内测度, 试证: 上述条件等价于 $\lambda^*(B)=\lambda_*(B)$.

解:

设 I_n 为任一组开区间, 为 $I\backslash B$ 的覆盖则 $\lambda^*(I\backslash B)=\inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|,I\backslash B\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\}$, 而 $I\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\subset B$, 且 $I\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 为闭集,I 为有界开区间, 不难证明定义内测度 $\lambda_*(B)=\sup\{\lambda(F):F\subset B,F\text{为闭集}\}$ 与 $\sup\{|I|-\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|,I\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subset B\}$ 是等价的

故 $\lambda_*(B)=\sup\{|I|-\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|,I\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\subset B\}=|I|-\inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|,I\backslash B\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\}=|I|-\lambda^*(I\bigcap B^c)$.

下证若 B 有界且可测, 则下述条件等价:

- (1)$\lambda^*(B)=\lambda_*(B)$;
- (2)$\forall D\in\mathbb{R}^n,\lambda^*(D)=\lambda^*(D\bigcap B)+\lambda^*(D\bigcap B^c)$.

先证 (2) $\Rightarrow$ (1): 取 D 为覆盖 B 的开区间 I, 则有

$$\begin{aligned}|I| &= \lambda^*(I\bigcap B)+\lambda^*(I\bigcap B^c)\\ &= \lambda^*(B)+\lambda^*(I\bigcap B^c)\end{aligned}$$

由上证, 从而有 $\lambda^*(B)=|I|-\lambda^*(I\bigcap B)=\lambda_*(B)$.

再证 (1) $\Rightarrow$ (2), 只需证 $\forall D\subset\mathbb{R}^n$,$D$ 有界, 有:

$$\lambda^*(D)\geqslant\lambda^*(D\bigcap B)+\lambda^*(D\bigcap B^c)$$

而 $\varepsilon>0,\exists G:=\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n,I_n$ 为开区间族, 且 $D\subset G$, 使得:

$$\lambda^*(D)>\lambda^*(G)-\varepsilon.$$

由条件 (1), 若 B 有界, 且 $\lambda^*(B)=\lambda_*(B)$, 而 $G\bigcap B,G\bigcap B^c$ 也为有界集, 故有 $\lambda^*(G\bigcap B)=\lambda_*(G\bigcap B),\lambda^*(BG\bigcap B^c)=\lambda_*(G\bigcap B^c)$, 这时有 $D\bigcap B\subset G\bigcap B,D\bigcap B^c\subset G\bigcap B^c$, 于是有:

$$\begin{aligned}&\lambda^*(D)=\lambda^*(D\bigcap B)+\lambda^*(D\bigcap B^c)\\ \leqslant\ &\lambda^*(G\bigcap B)+\lambda^*(G\bigcap B^c)\\ =\ &\lambda_*(G\bigcap B)+\lambda_*(G\bigcap B^c)\\ \leqslant\ &\lambda_*((G\bigcap B)\bigcup(G\bigcap B^c))\\ =\ &\lambda_*(G)=\lambda^*(G)<\lambda^*(D)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得.

故由此可得, 若 I 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界开区间, 试证：$B \subset I$ 为 *Lebesgue* 可测集的充要条件是：$\lambda^*(B) = \lambda_*(B)$, 同时因为 $\lambda_*(B)|I| - \lambda^*(I \bigcap B^c)$, 即得 $\lambda^*(I) = \lambda^*(B) + \lambda^*(I \bigcap B^c)$ 也是 B 为 *Lebesgue* 可测集的充要条件.

练习 3.3.5 证明对任一集 $E \subset \mathbb{R}$, 有 G_δ 集（可表示为可数个开集的交）A, 使 $\lambda(A) = \lambda^*(E)$.

解:

根据 λ^* 的定义,$\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}, \exists \{B_n^k, k \in \mathbb{N}\}$ 为开集, 使得 $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^k, \lambda^*(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n^k) \leqslant \lambda^*(E) + \dfrac{\varepsilon}{k}, \forall k \geqslant 1$.

令 $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^k$, 由于 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^k$ 都是开集, 则 A 是 G_δ 型集. 且 $E \subset A \Rightarrow \lambda^*(E) \leqslant \lambda(A) \leqslant \lambda^*(E) + \dfrac{\varepsilon}{k}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda^*(E) = \lambda(A)$.

练习 3.3.6 $E \subset \mathbb{R}$ 是 *Lebesgue* 可测集 $\Leftrightarrow E = A \backslash H$, 其中 A 为 G_δ 型集,$\lambda(H) = 0$.

解:

由练习 *3.3.5*, 对任一集 $E \subset \mathbb{R}$, 有 G_δ 集 A, 使 $\lambda(A) = \lambda^*(E)$., 故当 E *Lebesgue* 可测时, 不妨设 E 为有界集（否则可用可数区间段分割）$\lambda(A) = \lambda(E) \to \lambda(A \backslash E) = 0$.

反之, 若 $\lambda(A \backslash E) = 0$, 则 $A \backslash E$ 可测,$E = A \backslash (A \backslash E)$ 也可测.

练习 3.3.7 $E \subset \mathbb{R}$ 是 *Lebesgue* 可测集 $\Leftrightarrow E = B \bigcup H$, 其中 B 为 F_σ 型集（可表示为可数个闭集的并）, 而 $\lambda(H) = 0$.

解:

$\Leftarrow$: 设 $\lambda^*(E \backslash B) = 0$, 其中 B 为 F_σ 型集. 故 B 可测, 而：

$$0 \leqslant \lambda_*(E\backslash B) \leqslant \lambda^*(E\backslash B) = 0$$

由此 $\lambda_*(E\backslash B) = \lambda^*(E\backslash B)$, 由练习 *3.3.4* 可知 $E\backslash B$ 可测, 故 $B\bigcup(E\backslash B)$ 可测.

$\Rightarrow$: 先构造一 F_σ 型集, 即一串闭集列使得 $F_n \subset \mathbb{R}^n, F_n$ 闭,$B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \subset E$, 且 $\lambda^*(E\backslash B) = 0$. 由于 E 可测, 且:

$$\lambda_*(B) = \sup\{\lambda(F) : F \subset B, F\text{为闭集}\} = \lambda(B)$$

由上确解的性质可知, 对于 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0, n \in \mathbb{N}$ 存在闭集列 F_n 使得:

$$\lambda(E\backslash F_n) = \lambda(E) - \lambda(F_n) < \frac{1}{n}$$

不妨设闭集列 $\{F_n\}$ 是递增的,(否则将其取并即可). 故 $\{E\backslash F_n\}$ 是递降的, 从而由测度的上连续性

$$\lambda(\lim_{n\to\infty} E\backslash F_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E\backslash F_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

令 $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 B 为 F_σ 型集, 且 $B \subset E$. 并且由上式 $\lambda(E\backslash B) = \lambda(\lim\limits_{n\to\infty} E\backslash F_n) = 0$, 即有 $\lambda(E\backslash B) = 0$.

练习 3.3.8 设 (E, d) 为距离空间, 定义:

(i) 对一切 E 的子集 A, 称 $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ 为集合 A, B 的距离, 如果 $d(A, B) > 0$, 称 A, B 是正分离的;

(ii) 对任何的 E 的子集 A, 称 $\delta(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ 为集合 A 的直径;

(iii) 如果 μ 是 E 上的外测度, 对任何正分离的集合 A, B 有 $\mu(A\bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$, 则称 μ 为距离外测度;

(iv) 若对 E 的任意子集 $A, s > 0, \varepsilon > 0$, 令:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_\varepsilon^s(A) : &= \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leqslant \varepsilon\}, \\ \mathscr{H}^s(A) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{H}_\varepsilon^s. \end{aligned}$$

称 $\mathscr{H}^s$ 为集合 A 的 *Hausdorff* 测度.

试证:

(1)*(引理)* 若 μ 为 (E, d) 上的距离外测度,$\{A_n\} \subset E$ 为不降集列,$A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}, d(A_n, A \backslash A_{n+1}) > 0$, 则 $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$;

(2)(定理)若 μ 为 (E, d) 上的距离外测度, 则 E 的一切 *Borel* 子集是 μ 可测集;

(3)(定理)$\mathscr{H}^s$ 是 (E, d) 上的距离外测度.

解:

(1) 令 $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, 记 $A_0 = \varnothing$. 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n, \forall m \in \mathbb{N}$. 则 $\forall m \leqslant n, d(B_{n+2}, B_m) = d(A_{n+2} - A_{n+1}, A_m - A_{m-1}) > 0$, 故:

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{n=1}^{2m} A_n) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{2m} B_n) \\ &= \mu(B_m \bigcup B_{m-1}) + \sum_{n=1}^{2m-2} \mu(B_{2n} \bigcup B_{2n-1}) \\ &= \mu(A_m \backslash A_{m-2}) + \sum_{n=1}^{m-2} \mu(A_{2n} \backslash A_{2n-1}) \\ &= \mu(A_{2m}) \end{aligned}$$

最后一式源于 $d(A_{n+2} \backslash A_n, A_n) > 0, \forall n > 1$, 故可得 $\mu(A) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(A_{2m})$. 由外测度的单调性:

$$\mu(A)=\lim_{m\to\infty}\mu(A_{2m-2})\leqslant\lim_{m\to\infty}\mu(A_{2m-1})\leqslant\lim_{m\to\infty}\mu(A_{2m})=\mu(A)$$

即证得上述结论.

(2) 先证明对于 E 中的任意闭集 F, 均为 μ 可测集. 设 A 为 E 中的任意集合, 且 $\mu(A)<\infty$(否则 *Caratheodory* 条件自动成立）.$\forall n\in\mathbb{N}$, 记:

$$A_n:=\{x\in F^c\bigcap A:d(x,F)>\frac{1}{n}\}.$$

故 $\{A_n\}$ 是不降集列, 并且 $d(F\bigcap A,A_n)\geqslant\frac{1}{n}$, 且由外测度的单调性:

$$\mu(A)\geqslant\mu((F\bigcap A)\bigcup A_n)=\mu(F\bigcap A)+\mu(A_n).$$

注意到 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=F^c\bigcup A$, 由 (1) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(F^c\bigcap A)$, 故有:

$$\mu(A)\geqslant=\mu(F\bigcap A)+\mu(F^c\bigcap A).$$

故 E 中的闭集 F 均为 μ 可测集. 则 F^c 为开集也为可测集, 由 $Borel$ 集的定义, 则 E 中集合均为 μ 可测集.

(3) 先证明 $\mathscr{H}^s$ 是 (E,d) 上的外测度.

① 由 $\mathscr{H}^s$ 的定义显然有 $\mathscr{H}^s(\varnothing)=0$;

② 设 $E_1\subset E_2\subset E$, 则 E_2 的覆盖自然是 E_1 的覆盖, 故自然有 $\mathscr{H}^s(E_1)\leqslant\mathscr{H}^s(E_2)$;

③ 设 $E_n\subset E,n\in\mathbb{N}$, 对于任意固定的 ε 对每个 n 可以选择一个覆盖 $\{U_{n,k}\}$, 其直径小于 ε, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta(U_{n,k})^s\leqslant\mathscr{H}_\varepsilon^s(E_n)+\frac{\eta}{2^n},\forall\eta>0$. 同时注意到 $\bigcup\limits_{n,k}U_{j,k}$ 是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 的直径不超过 ε 的覆盖, 故有:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\varepsilon^s(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{H}_\varepsilon^s(E_n)+\eta\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{H}^s(E_n)+\eta\end{aligned}$$

由 η 的任意性可得 $\mathscr{H}_\varepsilon^s(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^s(E_n)$, 让 $\varepsilon \to 0$ 即证 $\mathscr{H}^s(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^s(E_n)$. 故 $\mathscr{H}^s$ 是 (E,d) 上的外测度.

再证其对具有分离性的子集的可加性, 设 $E_1, E_2 \subset E, d(E_1,E_2) > 0$, 由次可加性, 仅需证明 $\mathscr{H}^s(E_1) + \mathscr{H}^s(E_2) \leqslant \mathscr{H}^s(E_1 \bigcup E_2)$. 不妨设 $\{U_n\}$ 为 $E_1 \bigcup E_2$ 的直径不超过 ε 的覆盖, 则 $\{E_1 \bigcap U_n\}$ 与 $\{E_2 \bigcap U_n\}$ 分别为 E_1, E_2 直径不超过 ε 的覆盖, 且:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta(E_1 \bigcap U_n)^\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(E_2 \bigcap U_n)^\varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \delta(U_n)^\varepsilon$$

令上式中的 $\varepsilon \to 0$ 即可证 $\mathscr{H}^s(E_1) + \mathscr{H}^s(E_2) \leqslant \mathscr{H}^s(E_1 \bigcup E_2)$.

综上所述, 故 $\mathscr{H}^s$ 为 (E,d) 上的距离外测度.

4 可测函数与随机变量

4.1 可测函数与分布

练习 4.1.1 试证示性函数有下列性质:

(1)$\mathbb{1}_{A\bigcap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A\bigcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\bigcap B}$,

$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$;

(2)$\mathbb{1}_{\bigcup\limits_n A_n} = \sup_n \mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{\bigcap\limits_n A_n} = \inf_n \mathbb{1}_{A_n}$,

$\mathbb{1}_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbb{1}_{A_n}$.

解:

(1)

①$\forall x \in A \bigcap B, \to x \in A$ 且 $x \in B$, 故 $\mathbb{1}_{A\bigcap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = 1$ 反之 $\forall x \notin A \bigcap B, \to x \notin A$ 或 $x \notin B$, 故 $\mathbb{1}_{A\bigcap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = 0$ 即证.

②$\forall x \in A \bigcup B, \to x \in A$ 或 $x \in B$, 故 $\mathbb{1}_{A\bigcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\bigcap B} = 1$ 反之 $\forall x \notin A \bigcap B, \to x \notin A$ 且 $x \notin B$, 故 $\mathbb{1}_{A\bigcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\bigcap B} = 0$ 即证.

③$\forall x \in A^c, \to x \notin A$, 故 $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A = 1$ 反之 $\forall x \notin A^c, \to x \in A$, 故 $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A = 0$ 即证.

④$\forall x \in A\Delta B, \to x \in A\backslash B$ 或 $x \in B\backslash A$, 故 $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = 1$ 反之 $\forall x \notin A\Delta B, \to x \in A\bigcap B$, 故 $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = 0$ 即证.

(2)

①$\forall \omega \in \bigcup\limits_n A_n, \mathbb{1}_{\bigcup\limits_n A_n(\omega)} = 1, \Rightarrow A_{n_0}, s.t.\omega \in A_{n_0}$, 故有 $1 = \mathbb{1}_{A_{n_0}} \leqslant \sup_n \mathbb{1}_{A_n} \leqslant 1 \Rightarrow \sup_n \mathbb{1}_{A_n(\omega)} = 1$. 类似可证 $\forall \omega \notin \bigcup\limits_n A_n, \mathbb{1}_{\bigcup\limits_n A_n} = \sup_n \mathbb{1}_{A_n} = 0$. 即证 $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_n A_n} = \sup_n \mathbb{1}_{A_n}$.

②$\mathbb{1}_{\bigcap\limits_n A_n} = 1 - \mathbb{1}_{\bigcup\limits_n A_n^c} = 1 - \sup_n \mathbb{1}_{A_n^c} = \inf_n \mathbb{1}_{A_n}$

③$\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_n \Rightarrow \mathbb{1}_{\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \inf\limits_n \mathbb{1}_{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n} = \inf\limits_n \sup\limits_{k\geqslant n} \mathbb{1}_{A_n} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$

④ 同理可得 $\mathbb{1}_{\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \sup\limits_n \inf\limits_{k\geqslant n} \mathbb{1}_{A_n} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$

练习 4.1.2 设 f, g 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的(广义)实(或复)可测函数, 问下列函数是否 $\mathscr{F}$ 可测函数? 并说明理由.

(1)$f_1(\omega) := \begin{cases} f(\omega), & \omega \in \{|f| < \infty\} \\ 0, & \omega \in \{|f| = \infty\}. \end{cases}$, 即 $f_1 = f \cdots \mathbb{1}_{\{|f|<\infty\}}$

(2)$f_2 := f \cdots \mathbb{1}_{\{\omega\}^c} + (f+1)\mathbb{1}_{\{\omega\}}, \omega$ 为 Ω 的给定元.

(3)$f_3 := f \cdots \mathbb{1}_A + g\mathbb{1}_{A^c}, A \in \mathscr{F}$.

解:

(1) 可测.f 可测 $\xRightarrow{4.1.11}$ $|f|$ 可测 $\Rightarrow |f| < \infty \in \mathscr{F} \Rightarrow \mathbb{1}_{\{|f|<\infty\}}$ 可测 $\Rightarrow f_1 = f\mathbb{1}_{\{|f|<\infty\}}$ 可测.

(2) 不一定. 若 $\{\omega\} \in \mathscr{F}$, 则有可测性, 否则不具有可测性.

(3) 可测.$A \in \mathscr{F} \Rightarrow I_A, I_{A^c} \in \mathscr{F}$.

练习 4.1.3 f 是实 $(\Omega,\mathscr{F})$ 可测函数, 则 $|f|$ 是 $\mathscr{F}$ 可测的, 逆命题是否成立?

解:

定理 *4.1.11* 可得结论正确, 但逆命题不成立:
取一 $(\Omega,\mathscr{F}),\forall A\in\Omega, A\notin\mathscr{F}$. 令 $f=\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_{A^c}\Rightarrow|f|=1$ 可测, 但易得 f 可测.

练习 4.1.4 设 $\mathscr{F}:=\{\varnothing,A,A^c,\Omega\},A\subset\Omega$ 给定, 试写出 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的全部 $\mathscr{F}$ 可测函数.

解:

容易得到, 任取 $c_1,c_2\in\mathbb{R},f=c_1\mathbb{1}_A+c_2\mathbb{1}_{A^c}$ 为 $\mathscr{F}$ 可测函数, 下证取值超过三个不同值的 f 在 $\mathscr{F}$ 中不可测.
不妨设取值为 c_1,c_2,c_3 且互不相同,f 可测, 则有 $f^{-1}(c_1),f^{-1}(c_2),f^{-1}(c_3)\in\mathscr{F},f^{-1}(c_1),f^{-1}(c_2)f^{-1}(c_3)$ 两两不交, 则 $f^{-1}(c_1),f^{-1}(c_2),f^{-1}(c_3)$ 形成 Ω 的一个划分,$\Omega=A\bigcup A^c=f^{-1}(c_1)\bigcup f^{-1}(c_2)\bigcup f^{-1}(c_3)$, 矛盾.
故 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的全部可测函数为 $f=c_1\mathbb{1}_A+c_2\mathbb{1}_{A^c},c_1,c_2\in\mathbb{R}$

练习 4.1.5 如果两个随机变量几乎处处相等, 则它们具有相同的概率分布测度.

解:

设 X,Y 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)\to(\mathbb{R},\mathscr{B})$ 随机变量, 由题意知 X,Y 几乎处处相等 $\Rightarrow\mathbb{P}(\{\omega:X(\omega)=Y(\omega)\})=1\Rightarrow\mathbb{P}(\{\omega:X(\omega)\neq Y(\omega)\})=0$
$\forall A\in\mathscr{B},\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}(\{\omega:X(\omega)\in A\})$
$=\mathbb{P}(\{\omega:X(\omega)\in A\}\bigcap\{\omega:X(\omega)=Y(\omega)\})+\mathbb{P}(\{\omega:X(\omega)\in A\}\bigcap\{\omega:$

$X(\omega) \neq Y(\omega)\})$
$= \mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) \in A\} \bigcap \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = \mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}_Y(A)$.
即证

练习 4.1.6 对于给定的 $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ 上的任何概率测度 μ, 定义一个概率分布测度为 μ 的随机变量.

解:

定义 $(\Omega, \mathscr{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mu) : X(x) = x$, 则 $X : (\Omega, \mathscr{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mu_X)$. 其中 $\mu_X = \mu$ 即为所求.

练习 4.1.7 设 θ 为 $[0, 1]$ 中均匀分布的随机变量, 对于每个概率分布函数 F, 定义 $G(y) = \sup\{x : F(x) < y\}$, 则 $G(\theta)$ 具有概率分布函数 F.

解:

$F(x)$ 是单调右连续函数, 记广义逆 $F^{-1}(y) = G(y) = \sup\{x, F(x) < y\}$, 注意到: $G(y) \leqslant x \Leftrightarrow F(x) \leqslant y, \Rightarrow F_{G(\theta)}(x) = \mathbb{P}(G(\theta) \leqslant x) = \mathbb{P}(\{\omega : \theta(\omega) \leqslant F(x)\}) = F(x)$.

练习 4.1.8 设 X 具有连续分布函数 F, 则 $F(X)$ 具有 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 如果 $F(x)$ 不连续, 情况又怎样?

解:

设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 则其逆像 $F^{-1}(y)$ 如习题 4.1.7 中定义, 注意到 $F^{-1}(F(x)) \leqslant x, \forall x \in \mathbb{R}, F^{-1}(F(y)) \geqslant y, \forall y \in [0, 1]$, 且 $F^{-1}(F(y)) = y \Leftrightarrow F(x)$ 是连续函数.

① 当 F 连续时,$0 \leqslant y \leqslant 1$ 时,$F_{F(X)}(y) = \mathbb{P}(\{\omega : F(X(\omega)) \leqslant y\}) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leqslant F^{-1}(y)\}) = F((F^{-1}(y))) = y$.

$y<0$ 时,$F_{F(X)}(y)=0$,$y>1$ 时,$F_{F(X)}(y)=1$.
故 $F(X(\omega))$ 是 $[0,1]$ 上的均匀分布.

②F 不连续时, 则结论未必成立.

练习 4.1.9 如果 f 为 *Borel* 可测,X 与 Y 同分布, 则 $f(X)$ 与 $f(Y)$ 也同分布.

解:
X, Y 同分布 $\Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{B}, \mu_X(B)=\mu_Y(B)$
f 是 *Borel* 可测 $\Rightarrow \forall A \in \mathscr{B}, f^{-1}(A) \in \mathscr{B}$., 故对任意的 $A \in \mathscr{B}$:

$$\begin{aligned}
\mu_{f(X)}(A) &= \mathbb{P}(f(X) \in A)=\mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)) \\
&= \mu_X(f^{-1}(A))=\mu_Y(f^{-1}(A)) \\
&= \mu(Y \in f^{-1}(A))=\mu(f(Y) \in A)=\mu_{f(Y)}(A)
\end{aligned}$$

练习 4.1.10 (1) 设 $\sigma(X)$ 是由随机变量 X 所产生的 σ 域, 则 $\Lambda \in \sigma(X)$ 的充要条件是对于某个 $B \in \mathscr{B}, \Lambda=X^{-1}(B)$. 问此 B 是否唯一? 能否存在一个集 $A \notin \mathscr{B}$, 使得 $\Lambda=X^{-1}(A)$?
(2) 将上题中的论断推广到有限个随机变量的情况.(推广到任意个随机变量的情况也是可能的)

解:
(1)

(a) 由 $\sigma(A)$ 的定义可知,$\Lambda \in \sigma(X)$ 的充要条件是存在 $B \in \mathscr{B}$, *s.t.* $\Lambda=X^{-1}(B)$. 此处的 B 可能是不唯一的.
例: 对有界随机变量 X: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 即存在 M 使得 $|X(\omega)|<M, \forall \omega \in \Omega$, 令 $\Lambda=\Omega, B_1=(-\infty,\ M+1],\ B_2=(-\infty,\ M+2]$, 则 $\Lambda=X^{-1}(B_1)=X^{-1}(B_2)$.

(b) 对 $\Lambda \in \sigma(X)$, 可能存在集合 $A \notin \mathscr{B}$, 使得 $\Lambda = X^{-1}(A)$.

例: 若 $X \equiv c(c \in \mathbb{R})$, $\Lambda = \Omega$, 集合 $C \subset \mathbb{R}$, 且 $C \notin \mathscr{B}$, 则 $A := C \bigcup \{c\} \notin \mathscr{B}$, 且 $\Lambda = X^{-1}(A)$. *(2)* 推广*:* 设 $\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是由随机变量 $X_1, X_2 \ldots X_n$ 生成的 σ 域, 则 $\Lambda \in \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的充要条件是存在某个 $B \in \mathscr{B}^n$ 使得 $\Lambda = X^{-1}(B)$, 并且 B 不唯一, 可能存在 $A \notin \mathscr{B}^n$, 使得 $\Lambda = X^{-1}(A)$.

练习 4.1.11 设 X 是 n 维实随机变量,F_X, μ_X 分别是 X 的分布函数和概率分布测度, 试用 F_X, μ_X 表示 $f(X)$ 的分布函数或概率分布测度, 其中 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是下列 *Borel* 可测函数*;*

(1) 当 $n = 1$ 时,$f(x) := x^2, x \in \mathbb{R}$;

(2) 当 $n = 1$ 时,$f(x) := (x + 4)(x - 1)(x - 3), x \in \mathbb{R}$;

(3) 当 $n = 1$ 时,$f(x) := \cos kx, x \in \mathbb{R}, k$ 为常数;

(4)$f(x) := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

(5)$f(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

(6)$f(x) := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

(7)$f(x) := \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

解:

(1) 当 $n = 1$ 时 $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

用 F 表示 $f(X)$ 的分布函数, 当 $y < 0$ 时 $F(y) = 0$; 当 $y \geqslant 0$, 时 $F(y) = \mathbb{P}(f(X) \leqslant y) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = \mu_X([-\sqrt{y}, \sqrt{y}]) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$.

当 $n = 1$ 时,$f(x) = (x + 4)(x - 1)(x - 3), x \in \mathbb{R}$. 用 F 表示 $f(X)$ 的分布函数, 容易求出 $f(x)$ 的极值点, 当 $x = -\sqrt{\dfrac{13}{3}}$ 时, 有极大值 $f(x) =$

$\frac{2}{9}(54+13\sqrt{39}) := a, x = \sqrt{\frac{13}{3}}$ 时，有极小值 $f(x) = 12 - \frac{26}{3}\sqrt{\frac{13}{3}} := b$. 故当 $y < b$ 或 $y > a$ 时，

$$f(x) \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{27y^2-648y-4900}+9y-108}}{\sqrt[3]{18}} + \frac{13\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{27y^2-648y-4900}+9y-108}} := c,$$

当 $b \leqslant y \leqslant a$ 时，$f(x) \leqslant y$ 除了 $x \leqslant c$ 外，还有一范围为：

$$d := -\frac{(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{27y^2-648y-4900}+9y-108}}{2\sqrt[3]{18}} - \frac{13(1+i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{27y^2-648y-4900}+9y-108}} \leqslant x \leqslant -\frac{(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{27y^2-648y-4900}+9y-108}}{2\sqrt[3]{18}} - \frac{13(1-i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{27y^2-648y-4900}+9y-108}} =: e$$

故当 $y < b$ 或 $y > a$ 时，$F(y) = \mathbb{P}(f(x) \geqslant y) = \mu_X((-\infty, c])$, 当 $b \leqslant y \leqslant a$ 时,$F(y) = \mathbb{P}(f(x) \geqslant y) = \mu_X((-\infty, c]) + \mu_X([d, e])$.

(3) 当 $n = 1 f(x) := \cos kx, x \in \mathbb{R}, k$ 常数.

用 F 表示 $f(X)$ 的分布函数.

当 $k = 0$, 时 $f(x) \equiv 1$, 于是当 $y < 1$ 时,$F(y) = 0$; 当 $y \geqslant 1$ 时 $F(y) = 1$..

$k \neq 0$ 时, 若 $y < -1$, 则 $F(y) = 0$; 若 $y \geqslant 1$, 则 $F(y) = 1$; 若

$-1 \leqslant y < 1$, 则

$$\begin{aligned} F(y) &= \mathbb{P}(f(X) \leqslant y) = \mathbb{P}(\cos kX \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(kX \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\arccos y + 2n\pi,\ 2\pi - \arccos y + 2n\pi]) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(kX \in [\arccos y + 2n\pi,\ 2\pi - \arccos y + 2n\pi]) \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mu_X([\frac{\arccos y+2n\pi}{k},\ \frac{2\pi-\arccos y+2n\pi}{k}]), \text{if } k > 0 \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mu_X([\frac{2\pi-\arccos y+2n\pi}{\text{k}},\ \frac{\arccos y+2n\pi}{k}]), \text{if } k < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(4) 用 F 表示 $f(X)$ 的分布函数，当 $y < 0$ 时，$F(y) = 0, y \geqslant 0$ 时，$F(y) = \mu(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2} \leqslant y) = \mu_X(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant y^2)$.

(5) 用 F 表示 $f(X)$ 的分布函数，类似 (4) 可得 $F(y) = \mu_X(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \leqslant y), \forall y \in \mathbb{R}$.

(6) 用 F 表示 $f(X)$ 的分布函数，$F(y) = \mathbb{P}(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant y) = \mathbb{P}(x_1 \leqslant y, x_2 \leqslant y, \ldots, x_n \leqslant y) = \mu_X((-\infty, y]^n), \forall y \in \mathbb{R}$.

(7) 用 F 表示 $f(X)$ 的分布函数，类似 (6) 可得 $F(y) = \mathbb{P}(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k, \leqslant y) = 1 - \mu_X((y, \infty)^n), \forall y \in \mathbb{R}$.

PS: 第 (3) 小问的结果是借助软件给出的，形式比较复杂，但把握三次函数的图像，不难给出一般解。

4.2 可测函数的构造性质

练习 4.2.1 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个 π 系,$\mathscr{H}$ 为 Ω 上的函数类, 且满足下列条件:

(1)$1 \in \mathscr{H}$;

(2)$\mathscr{H}$ 对非负线性组合封闭, 且若 $f, g \in \mathscr{H}$, 有界,$f \geqslant g$, 则 $f - g \in \mathscr{H}$;

(3) 若 $f_n \in \mathscr{H}, n \in \mathbb{N}$, 且 $0 \leqslant f_n \uparrow f$, 则 $f \in \mathscr{H}$;

(4)$\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{C}\}\mathscr{H}$, 则 $\mathscr{H}$ 一切非负 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测函数.

解:

令:

$$\Lambda = \{A \subset \Omega, \mathbb{1}_A \in \mathscr{H}\}$$

(i) 下证 Λ 为一 λ 系.

①: 由 *(1)*,$1 \in \mathscr{H} \Rightarrow \Omega \in \Lambda$.

② 若 $A, B \in \Lambda, B \subset A, \Rightarrow i_A, \mathbb{1}_B \in \mathscr{H}, \mathbb{1}_A \geqslant \mathbb{1}_B, \overset{(2)}{\Longrightarrow} \mathbb{1}_{A\backslash B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \in \mathscr{H} \Rightarrow A\backslash B \in \Lambda$.

③ 设 $A_n \uparrow, A_n \in \Lambda, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{1}_{A_n} \in \mathscr{H}$ 且 $0 \geqslant \mathbb{1}_{A_n} \uparrow \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}} \in \mathscr{H} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \in \Lambda$

故 Λ 为一 λ 系

(ii) $\mathcal{C}$ 是 π 系, 由 $(4)\mathcal{C} \subset \Lambda$.

由集类的单调类定理:$\Rightarrow \Lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) \subset \Lambda. \Rightarrow \forall A \in \sigma(\mathcal{C}), A \in \mathcal{C}$, 即有 $\mathbb{1}_A \in \mathscr{H} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \mathscr{H}$ 含有一切非负 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测简单函数.

(iii) 对于任意的非负 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测简单函数 f, 由定理 4.2.4(4),$\mathscr{H}$ 存在非负 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测简单函数 f_n 使得 $0 \geqslant f_n \uparrow f, \overset{(3)}{\Longrightarrow} f \in \mathscr{H}$

故 $\mathscr{H}$ 包含一切非负 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测简单函数.

练习 4.2.2 设 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 的每一点可求导, 试证其导函数 *Borel* 可测.

解:

令 $f_n(x) = n[f(x + \dfrac{1}{n} - f(x)], x \in \mathbb{R}$, 由于 $f(x)$ 处处可导, 故可得 $\forall n \in$

$\mathbb{N}, f_n(x)$ 是连续函数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}, \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f_n$ 为可测函数,$\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 也为可测函数.

练习 4.2.3 *Cantor* 集 $\mathbb{P}_0 = [0,1]\backslash G_0$,

$$G_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{a_k = 0,2 \\ k=1,2,\dots n-1}} \left(\frac{1}{3^n}[\sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}3^k + 1], \frac{1}{3^n}[\sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}3^k + 2]\right)$$

今定义函数 $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ 如下：当

$$x \in \left(\frac{1}{3^n}[\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}3^k + 1], \frac{1}{3^n}[\sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}3^k + 2]\right)$$

时,

$$f(x) := \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{2} \cdot 2^k + 1\right),$$

于是 f 在 G_0 上有定义, 且在 G_0 不降. 其次, 令 $f(0) = 0$, 而 $x \in \mathbb{P}_0\{0\}$, 定义 $f(x) := \sup\{f(t) : t \in G_0, t < x\}$, 试证：$f$ 为 $[0,1]$ 上的不降连续函数, 因而 f 为 $\mathscr{B}[0,1]$ 可测.

解:

$\forall x_0 \in G_0, f(x) \uparrow \Rightarrow \forall x_1 \leqslant x_2 \in [0,1]$

$$f(x_1) = \sup\{f(t) : t \in G_0, t < x_1\} \leqslant \sup\{f(t) : t \in G_0, t < x_2\} = f(x_2)$$

故 f 在 $[0,1]$ 不降.

仅需证 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in [0,1]$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 由于存在 $n \geqslant> 1$ 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$. 此时仅需取 $\delta = \dfrac{1}{3^n}$, 由 f 的定义可知所证成立, 故 f 连续, 由定理 4.2.11 知 f 为 $\mathscr{B}([0,1])$ 可测.

练习 4.2.4 设 (E,d) 是一距离空间, 试证:

(1)$\forall G\subset E$ 为开集, 令 $f)n:=\dfrac{nd(x,G^c)}{1+nd(x,G^c)},x\in E$, 则 $0\leqslant f_n\uparrow \mathbb{1}_G$;

(2) 设 $\mathscr{L}$ 为 (E,d) 上的全体实值函数类,L 为 $\mathscr{L}$ 系, 且 $C_b(E,\mathbb{R})\subset L$(即 E 上的有界实连续函数类), 则 L 包含 $\mathscr{B}(E)$ 可测函数类.

解:

(1) 由于 (E,d) 为距离空间,G^c 为闭集, 故 G^c 为紧集.

(a) 若 $x\in G\Rightarrow d(x,G^c)>0\Rightarrow f_n(x)=\dfrac{nd(x,G^c)}{1+nd(x,G^c)}=1-\dfrac{1}{1+nd(x,G^c)}\xrightarrow{n\to\infty}1.$

(b) 若 $x\in G^c\Rightarrow d(x,G^c)=0\Rightarrow f_n(x)=1-1=0.$

故 $0\geqslant f_n\uparrow\mathbb{1}_G$.

(2) 设 $\mathcal{C}=\{G\subset E,G$ 为开集 $\}$, 则 $\mathscr{B}(E)=\sigma(\mathcal{C})$. 根据单调类定理, 只需证明 $\forall G\in\mathcal{C},\mathbb{1}_G\in L,\forall G\in\mathcal{C},\stackrel{(1)}{\Longrightarrow}0\geqslant f_n\uparrow\mathbb{1}_G$, 且 f_n 连续,$|f_n|\leqslant 1$, 故对任意的 $n,f_n\in C_0(E,R)\subset L$, 又因为 L 是 $\mathscr{L}$ 系, 故 $\mathbb{1}_G\in L$

故由单调类定理 L 包含 $\mathscr{B}(E)=\sigma(\mathcal{C})$ 的可测函数类.

5 积分与数学期望

5.1 积分的定义

练习 5.1.1 给出非负可测函数积分的另一种定义:

(1) 按照定义 *5.1.2(1)* 定义的非负简单函数的积分, 证明定义的合理性;

(2) 证明非负简单函数的积分具有性质: 若 $f\leqslant g$, 则 $\displaystyle\int f\leqslant\int g$;

(3) 如下定义非负可测函数的积分: 若 f 非负可测,$\{f_n\}$ 为简单函数列, 满足 $0\leqslant f_n\uparrow f$ 则令 $\displaystyle\int f=\lim_{n\to\infty}\int f_n$;

(4) 证明定义 (3) 的合理性.

(5) 证明单调收敛定理.

解:

(4) 设 f 非负可测, 只需要证: 任取两非负简单函数列,$\{f_n\},\{g_n\}$, 如果满足 $f_n\uparrow f, g_n\uparrow f$, 那么就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int g_n$.

先证：对于任意的 $m\geqslant 1, \int f_m\leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\int g_n$.

设 $f_n=\sum\limits_{k=1}^{r_n}a_k^n\mathbb{1}_{A_k^n}+\infty\mathbb{1}_{A_{r_n+1}^n}$, 其中 $a_k^n\geqslant 0,\{A_k^n,\ k=1,\ ...,\ r_n+1\}$ 两两不交, 且 $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{r_n+1}A_k;g_n=\sum\limits_{k=1}^{s_n}b_k^n\mathbb{1}_{B_k^n}+\infty\mathbb{1}_{B_{s_n+1}^n}$, 其中 $b_k^n\geqslant 0,\{B_k^n,\ k=1,\ ...,\ s_n+1\}$ 两两不交, 且 $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{s_n+1}B_k$.

任取 $m\geqslant 1$, 及 $c\in(0,1)$, $l\in\mathbb{Z}^+$, 令 $h_{c,l}^m=\sum\limits_{k=1}^{r_m}(ca_k^m)\mathbb{1}_{A_k^n}+lI_{A_{r_m+1}^m}$. 显然 $h_{c,l}^m$ 是一非负简单函数, 令 $\Omega_n=\{\omega\in\Omega\ :\ h_{c,l}^m(\omega)\leqslant g_n(\omega)\}$, 注意到 $h_{c,l}^m\leqslant f$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=f$, 则可知 $\Omega_n\uparrow\Omega$. 由 *(1)* 中非负简单函数积分的定义及测度的下连续性,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega_n}h_{c,l}^m=\int_\Omega h_{c,l}^m$. 由 $h_{c,l}^m\mathbb{1}_{\Omega_n}\leqslant g_n\mathbb{1}_{\Omega_n}\leqslant g_n$, 以及 *(2)*

$$\int_{\Omega_n}h_{c,l}^m=\int_\Omega h_{c,l}^m\mathbb{1}_{\Omega_n}\leqslant\int_\Omega g_n.$$

上式两端对 $n\to\infty$ 取极限

$$\int_\Omega h_{c,l}^m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n.$$

现再先后对 $c \to 1^-, l \to \infty$ 取极限, 于是证得:

$$\int_\Omega f_m \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n.$$

于是 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_\Omega f_m \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega g_n$. 同理可证 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_\Omega g_m \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f_n$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega g_n$. 于是得到定义是合理的.

(5) 即证: 任取 $f_n, n \in \mathbb{N}$ 非负可测, 且 $f_n \uparrow f$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n = \int f$.

(a) 现在 *(3)* 定义的非负可测函数积分的单调性, 即: 若 $0 \leqslant f \leqslant g$, 则 $\int f \leqslant \int g$.

由定理 4.2.4(4) 可知存在非负简单函数列 $f_n, g_n, n \in \mathbb{N}$, 使得 $f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$. 任取 $m \geqslant 1$, 令 $h_n = f_m \wedge g_n, n \geqslant 1$, 显然 h_n 非负简单且满足 $h_n \uparrow f_m, n \to \infty$, 及 $h_n \leqslant g_n, \forall n \geqslant 1$. 于是由 (4) , $\lim\limits_{n\to\infty}\int h_n = \int f_m$, 由 *(2)*, $\int h_n \leqslant \int g_n$. 结合上面两式 $\int f_m \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\int g_n, \forall m \geqslant 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_m \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\int g_n$. 再由 (4) $\int f \leqslant \int g$.

(b) 单调收敛定理

由 *(a)* 知 $\int f_n \leqslant \int f, \forall n \geqslant 1$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n \leqslant \int f. \text{ (1)}$$

取一列非负简单函数列 $\{h_n\}$ 使得 $h_n \uparrow f$. 设 $h_n = \sum\limits_{k=1}^{t_n} d_k^n \mathbb{1}_{D_k^n} + \infty \mathbb{1}_{D_{t_n+1}}$, 其中 $d_k^n \geqslant 0, \{D_k^n, k = 1, \ldots, r_n + 1\}$ 两两不交, 且 $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{t_n+1} D_k^n$. 取定 $m \in \mathbb{N}$, 对任意的 $c \in (0,1)$, $l \in \mathbb{N}$, 令 $h_{c,l}^m = \sum\limits_{k=1}^{t_m}(cd_k^m)\mathbb{1}_{D_k^m} + l\mathbb{1}_{D_{t_m+1}}, \Omega_n = \{\omega \in \Omega : h_{c,l}^m(\omega) \leqslant f_n(\omega)\}$. 则 $\Omega_n \uparrow \Omega$, 并且 $\int_\Omega h_{c,l}^m \leqslant \int_\Omega f_n$. 让 $c \to 1^-, l \to \infty$, 则有

$\int h_m \leqslant \lim_{n\to\infty}\int f_n$. 于是

$$\int f = \lim_{n\to\infty}\int h_m \leqslant \lim_{n\to\infty}\int f_n. \ (2)$$

结合 (1)(2) 式, $\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$.

练习 5.1.2 证明注 *5.1.10.*

解:

以下只证明相应的单调收敛定理: 若 $f_n, n\in\mathbb{N}$ 是一列非负几乎处处可测的函数列, 满足 $f_n \uparrow f$, 则 $\lim_{n\to\infty} f_n = \int f$.

因为 f_n 几乎处处可测, 所以存在 μ-零集 A_n, 可测集 B_n 以及可测函数 g_n 使得 $g_n(\omega) = f_n(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega\backslash A_n, A_n\subset B_n$, 且 $\mu(B_n)=0$. 令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 则 $\mu(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)=0$. 且 $g_n(\omega)=f_n(\omega)$, $\forall\omega\in A$. 令 $g_{\acute{n}} = g_n\mathbb{1}_{\Omega\backslash A}$ 则有 $g'_n\uparrow$, 且 g'_n 非负可测, 令 $g=\lim_{n\to\infty} g'_n$. 由非负可测函数的单调收敛定理, 即定理 5.1.10,

$$\int g = \lim_{n\to\infty}\int g'_n. \ (3)$$

$\{\omega : g'_n(\omega)\neq g_n(\omega)\}\subset A$, 而 $\mu(A)=0$, 则 $g'_n = g_n, a.e.$ 于是由定义 5.1.9, $\int g'_n = \int g_n$. 而 $g_n = f_n, a.e.$, 则 $\int f_n = \int g_n$. 于是

$$\int g'_n = \int f_n. \ (4)$$

另一方面 $\forall\omega\in\Omega\backslash A, f(\omega)=\lim f_n(\omega)=\lim f_n(\omega)=\lim g'_n(\omega)=g(\omega)$, 所以 $f=g, a.s.$, 于是

$$\int f = \int g. \ (5)$$

结合 (3)(4)(5), 有 $\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n$.

5.2 积分的性质

练习 5.2.1 设 μ_1,μ_2 是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的测度,a_1,a_2 是两个非负有限数,$\mu=a_1\mu_1+a_2\mu_2$, 试证：若 f 对 μ_1,μ_2 的积分存在, 且 $a_1\displaystyle\int fd\mu_1+a_2\displaystyle\int fd\mu_2$ 有意义, 则 f 对 μ 的积分也存在, 且

$$\int fd\mu=a_1\int fd\mu_1+a_2\int fd\mu_2$$

解:

(1) 当 f 为非负简单函数时, 不妨设 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\mathbb{1}_{A_i}$, 其中 A_i 两两不交, 构成 Ω 的一个划分, 则有简单函数的积分的定义:

$$\begin{aligned}\int fd\mu &= \sum_{i=1}^{n}b_i\mu(A_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}b_ia_1\mu_1(A_i)+a_2\mu_2(A_i)\\ &= a_1\int fd\mu_1+a_2\int fd\mu_2\end{aligned}$$

则结论成立

(2) 当 f 为非负可测函数时, 则存在非负的递增的简单函数列 $0\leqslant f_n\uparrow f$, 由单调收敛定理即 (1) 中所证, 有：

$$\begin{aligned}\int fd\mu &= \lim_{n\to\infty}f_nd\mu=\lim_{n\to\infty}\left(a_1\int f_nd\mu_1+a_2\int f_nd\mu_2\right)\\ &= a_1\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu_1+a_2\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu_2\\ &= a_1\int fd\mu_1+a_2\int fd\mu_2\end{aligned}$$

则结论成立.

(3) 当 f 为一般可测函数时, 则可以分解为正部和负部, 即 $f = f^{+}+f^{-}$:

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f^{+}+f^{-} d\mu \\
&= a_1\int f^{+}d\mu_1 - a_1\int f^{-}d\mu_1 + a_2\int f^{-}d\mu_2 - a_2\int f^{-}d\mu_2 \\
&= \left(a_1\int f^{+}d\mu_1 - a_1\int f^{-}d\mu_1\right) + \left(a_2\int f^{+}d\mu_2 - a_2\int f^{-}d\mu_2\right) \\
&= a_1\int f d\mu_1 + a_2\int f d\mu_2
\end{aligned}$$

综合 $(1),(2),(3)$ 上述结论对所有可测函数成立.

练习 5.2.2 *(积分中值定理)* 设 f,g 是测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数,g 对 μ 可积,$-\infty < a \leqslant f \leqslant b < \infty, a.e.$, 则存在一个常数 $c\in[a,b]$, 使 $\int_\Omega f|g|d\mu = c\int_\Omega |g|d\mu$. 特别, 若 μ 有限, 则 $\int_\Omega f d\mu = c\mu(\Omega)$.

解:

容易得到 g 对 μ 可积, 则 $|g|$ 对 μ 也可积, 而 f 有界, 故 fg 对 μ 也可积. 令 $F(x) = x\int_\Omega |g|d\mu - \int_\Omega f|g|d\mu$. 则 $F(x)$ 连续且 $F(a)\leqslant 0, F(b)\geqslant 0 \Rightarrow \exists c\in[a,b]$ 使得 $\int_\Omega f|g|d\mu = c\int_\Omega |g|d\mu$.

特别的, 当 μ 有限时, 取 g 为 *1* 即证.

练习 5.2.3 设 f,g 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上取有限值的 $\mathscr{F}$ 简单函数, 若 f,g 之一对 μ 可积, 则 fg 也可积.

解:

不妨设:

$$f(\omega)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{A_i},,\ \text{且 } A_i \text{ 两两不交, 构成 } \Omega \text{ 的一个划分},a_i<\infty$$
$$g(\omega)=\sum_{j=1}^{m}b_i\mathbb{1}_{B_j},,\ \text{且 } B_j \text{ 两两不交, 构成 } \Omega \text{ 的一个划分},b_j<\infty$$

则 $fg(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j\mathbb{1}_{A_i\bigcap B_j}$. 不妨设 f 对 μ 可积, 则 $\int|f|d\mu<\infty\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}|a_i|\mu(A_i)<\infty\Rightarrow\mu(f\neq 0)<\infty$.

令 $c=\max_{i,j}\{a_i,b_j\}$, 由于 i,j,a_i,b_j 都有限, 故 c 有限 $\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_ib_j|\mu(A_i\bigcap B_j)\leqslant c\mu(f\neq 0)<\infty\Rightarrow\int|fg|d\mu<\infty$. 即证.

练习 5.2.4 设 f 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上的可积函数, 则对每一个正数 $\varepsilon,\mu(\{\omega:|f(\omega)|\geqslant\varepsilon\})<\infty$.

解:

用反证法证明, 设存在某正数 ε_0 使得 $\mu(\{\omega:f(\omega)\geqslant\varepsilon_0\})=\infty$ 则有:

$$\begin{aligned}\int|f|d\mu &\geqslant \int|f|\mathbb{1}_{\{\omega:f(\omega)\geqslant\varepsilon_0\}}d\mu\\ &\geqslant \int\varepsilon_0\mathbb{1}_{\{\omega:f(\omega)\geqslant\varepsilon_0\}}d\mu\\ &= \varepsilon_0\mu(\{\omega:f(\omega)\geqslant\varepsilon_0\})=\infty\end{aligned}$$

而这与 f 可积是矛盾的.

练习 5.2.5 设 Ω 是全体正整数组成的空间,$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一切子集作成的 σ 代数, 对于 $A\in\mathscr{F},\mu(A)=A$ 中点的个数, 则 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是一个测度空间, 称此 μ 为计数测度, 讨论此空间上的函数积分存在的充分与必要条件.

解:

容易验证 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间. 下讨论 $f(\omega)$ 对 μ 的积分:

①: 对任意一非负简单函数,$f(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{A_i}, a_i\geqslant 0, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega, A_i$ 两两不交.

$$\int fd\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)=\sum_{\omega\in\Omega}f(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

②: 对任意一非负可测函数, 则存在单调递增的简非负简单函数,$0\leqslant f_n\uparrow f$, 则:

$$\int fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu$$

而仿照非负可测函数的积分良定义证明可证上述定义也是良定义的, 故不放设 $f_n=f\mathbb{1}_{\Omega_n}, \Omega=\{1,2,\ldots,n\}$ 故有:

$$\int fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(i)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

③: 对于任意可测函数 $f, f=f^+-f^-$, 当 $\int f^+d\mu, \int f^-d\mu$ 至少有一个有限时, 定义积分:

$$\int fd\mu=\int f^+d\mu-\int f^-d\mu$$

此时的减法运算时有意义的, 故 f 积分存在等价于 $\sum\limits_{\omega\in\Omega}f^+(\omega)$ 或 $\sum\limits_{\omega\in\Omega}f^-(\omega)$ 至少有一个有限.

练习 5.2.6 从两方面进行证明:

①: 先证 $\forall\omega\in\Omega, f(\omega)\geqslant g(\omega)$, 否则有 $A:=\{\omega:f(\omega)<g(\omega)\}\neq\varnothing\Rightarrow\exists\omega_0\in A$. 定义:

$$\delta_{\omega_0}(B)=\begin{cases}1, & \omega\in B\\ 0, & \omega\notin B\end{cases}, \forall B\in\mathscr{F}$$

设 f,g 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的可测函数,$\mathscr{P}(\mathscr{F})$ 表示 $\mathscr{F}$ 上的一切概率测度的集, 若

$\forall \nu \in \mathscr{P}(\mathscr{F}), \int f d\nu = \int g d\nu$, 则 $f(\omega) = g(\omega), \forall \omega \in \Omega$ 成立.

解:

容易验证 δ_{ω_0} 为 $\mathscr{F}$ 上的一个概率测度, 且 $\forall f \in \mathscr{F}, \int f d\delta_{\omega_0} = f(\omega_0)$.

由于 $\forall \nu \in \mathscr{P}(\mathscr{F}), \int f d\nu = \int g d\nu$ 成立, 故对于 δ_{ω_0} 而言, 也有上式成立, 故 $\int f d\delta_{\omega_0} = \int g d\delta_{\omega_0} \Rightarrow f(\omega_0) = g(\omega_0)$ 矛盾!

②: 由于 f, g 是在此问题中是对称的, 故也有 $\forall \omega \in \Omega, f(\omega) \leqslant g(\omega)$, 即证 $\forall \omega \in \Omega, f(\omega) = g(\omega)$.

5.3 期望的性质及 L-S 积分表示

练习 5.3.1 设 ξ, η 为实 $r.v.$, $\mathbb{E}\xi^2, \mathbb{E}\eta^2$ 有限, 试证:$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ 的充要条件是 $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$.

解:

由于 $\mathbb{E}\xi^2, \mathbb{E}\eta^2$ 有限, 则有 $\mathbb{E}|\xi|\mathbb{E}|\xi| \leqslant \mathbb{E}\xi^2 < \infty$, 类似可得 $\mathbb{E}|\eta|, \mathbb{E}|\xi\eta|$ 均有限. 故可得:

$$\begin{aligned}
D(\xi + \eta) &= \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta)^2 \\
&= \mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}\eta^2 + 2\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}^2\xi - \mathbb{E}^2\eta - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta \\
&= D\xi + D\eta + 2(\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta)
\end{aligned}$$

故 $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta \Leftrightarrow \mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

练习 5.3.2 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 n 个实 $r.v.$, 其分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \eta$ 是一 $r.v.$, 其分布函数为 $\dfrac{1}{n}(F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x))$. 设 r 为一正整数, 证明:

$$\mathbb{E}|\eta|^r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_n|^r$$

解:

$$\begin{aligned}
E|\eta|^r &= \int_{\mathbb{R}}|x|^r d\mathbb{P}_\eta = \int_{\mathbb{R}}|x|^r dF_\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}}|x|^r d\left(\frac{1}{n}(F_1(x)+\cdots+F_n(x))\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\int_{\mathbb{R}}|x|^r dF_1(x)+\cdots+\int_{\mathbb{R}}|x|^r dF_n(x)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E|x_n|^r
\end{aligned}$$

练习 5.3.3 设 X 是一实 $r.v.$, 它的分布函数是 $F(x), c$ 为一正数, 令:

$$X{:=}\begin{cases} X, & \text{当}|X|<c \\ c, & \text{当}X\geqslant c \\ -c, & \text{当}X\leqslant c. \end{cases}$$

试将 $\mathbb{E}X^c, DX^c$ 用对于 F 的 $L-S$ 积分表出.

解:

$$\begin{aligned}
EX^c &= \int_{\Omega}X^c dP = \int_R X^c dF_X(x) \\
&= \int_c^c x dF_X(x) + c\int_c^\infty dF_X(x) - c\int_{-\infty}^c dF_X(x) \\
&= \int_c^c x dF_X(x) + c(1-F(c-)) - c(F(-c))
\end{aligned}$$

类似的, 对于 DX^c 有:

$$
\begin{aligned}
D(X^c) &= E((X^c)^2) - E^2(X^c) \\
&= \int_c^c x^2 dF_X(x) + c^2(1-F(c-)) - c^2(F(-c)) \\
&\quad + \left(\int_c^c x dF_X(x) + c(1-F(c-)) - c(F(-c))\right)^2
\end{aligned}
$$

练习 5.3.4 设 $F(x)$ 是一分布函数, 按定义

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_{(a,b]} f(x)dF(x),$$

问它是否等于 $\int_{[a,b]} f(x)dF(x)$? 在什么情况下它们不相等?

解:

不一定, 当 $F(x)$ 存在跳跃点时, 则二者不相等. 例如设:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases} \text{ 为一分布函数}$$

取 $f(x) \equiv 1, a = 1, b = 2$, 则有:

$$
\begin{aligned}
\int_{(a,b]} f(x)dF(x) &= \int_{(1,2]} dF(x) = F(2) - F(1) = 0 \\
\int_{[a,b]} f(x)dF(x) &= \int_{[1,2]} dF(x) = F(2) - F(1-) = 1
\end{aligned}
$$

练习 5.3.5 设 X 是一实 $r.v., m$ 是一实数, 它满足:

$$\mathbb{P}(\{X \geqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{X \leqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2}$$

称满足上述条件的 m 为 X 的中数, 试证:

(1)$\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{E}|X-m| \leqslant \mathbb{E}|x-a|$ (2)X 的中数, 数学期望, 方差之间有下述关系:

$$\mathbb{E}X-\sqrt{DX} \leqslant m \leqslant \mathbb{E}X+\sqrt{DX}$$

解:

(1) 只需证明: $\forall a \in \mathbb{R}, E(|X-a|-|X-m|) \geqslant 0$

当 $a \leqslant m$ 时,

$$\begin{aligned} E(|X-a|-|X-m|) &= \int_{X<a}(a-X)-(m-X) \\ &\quad+\int_{a \leqslant X<m}(X-a)-(m-X)+\int_{X \geqslant m}(X-a)-(X-m) \\ &\geqslant (a-m)\mathbb{P}(X<a)+(a-m)\mathbb{P}(a \leqslant X<m)+(m-a)\mathbb{P}(X \geqslant m) \\ &= (m-a)\left(\mathbb{P}(X \geqslant m)-\mathbb{P}(X<m)\right) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

当 $a \geqslant m$ 时, 利用 $\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ 类似上证可得.

(2) 由 *(1)*, 令 $a=EX$ 得 $|EX-m| \leqslant E|X-m| \leqslant E|X-EX|$, 再利用 *Schwartz* 不等式可得 $E|X-EX| \leqslant \sqrt{DX}$. 联立上述不等式, 得:

$$|EX-m| \leqslant \sqrt{DX} \Rightarrow EX-\sqrt{DX} \leqslant m \leqslant EX+\sqrt{DX}$$

练习 5.3.6 设 $X=\sum\limits_{k \in I} a_k \mathbb{1}_{\{X=a_k\}}, a_k \in \mathbb{R}, I \subset \mathbb{N}$, 试证

$$\mathbb{P}(X \in B)=\sum_{k \in I, a_k \in B} \mathbb{P}_x(\{a_k\}), \qquad \mathbb{E}g(x)=\sum_{k \in I} g(a_k)\mathbb{P}_X(\{a_k\}).$$

解:

由定理 *5.3.12* 与定理 *5.3.13* 立得表达式, 已重复, 不再赘述.

练习 5.3.7 设 X_1, X_2 是在 $[a,b]$ 上均匀分布的独立 $r.v.$, 求 $Y = X_1 + X_2$ 的分布函数与分布密度.

解:

$X = (X_1, X_2)$ 的分布密度为:

$$\mathbb{P}_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^2}, & a \leqslant x_1, x_2 \leqslant b \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$Y = X_1 + X_2$ 的分布函数 $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leqslant y)$, 当 $y < 2a$ 时,$F_Y(y) = 0$

当 $2a \leqslant y < a + b$ 时:

$$F_Y(y) = \int_a^{y-a} dx_1 \int_a^{y-x_1} \frac{1}{(b-a)^2} dx_2 = \frac{(y-a)^2}{2(b-a)^2}$$

当 $a + b < y \leqslant 2b$ 时:

$$F_Y(y) = \int_{y-b}^{2b} dx_1 \int_{y-x_1}^{2b} \frac{1}{(b-a)^2} dx_2 = 1 - \frac{(2b-y)^2}{2(b-a)^2}$$

当 $y > 2b$ 时,$F_Y(y) = 1$. 故可得其分布函数与密度函数为:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2a \\ \dfrac{(y-a)^2}{2(b-a)^2}, & 2a \leqslant y < a+b \\ 1 - \dfrac{(2b-y)^2}{2(b-a)^2}, & a+b \leqslant y < 2b \\ 1, & y \leqslant 2b. \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_y(y) = \begin{cases} \dfrac{y-a}{(b-a)^2}, & 2a \leqslant y < a+b \\ \dfrac{2b-y}{(b-a)^2}, & a+b \leqslant y < 2b \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

练习 5.3.8 设 X, Y 为独立 $r.v.$, X 在 $[0,1]$ 上为均匀分布,Y 按二项分布律 $B(n,p)$ 分布, 试证 $X+Y$ 是连续型随机变量, 并求其分布密度.

解:

设 $Z = X+Y$, 其分布函数 $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X+Y \leqslant z)$. 容易看出,$z < 0, F_Z(z) = 0; z \geqslant n+1, F_Z(z) = 1$. 当 $0 \leqslant z < n+1$ 时, 则存在整数 $0 \leqslant m \leqslant n s.t. m \leqslant z < m+1$, 故有:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(X+Y \leqslant z) = P\left(\{0 \leqslant X+Y \leqslant m\} \bigcup \{m < X+Y \leqslant z\}\right) \\ &= \mathbb{P}(0 \leqslant X+Y \leqslant m) + \mathbb{P}(m < X+Y \leqslant z) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(k \leqslant X+Y \leqslant k+1) + \mathbb{P}(Y=m)\mathbb{P}(m < X+Y \leqslant z | Y=m) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1) + \mathbb{P}(Y=m)\mathbb{P}(m < X \leqslant z-m) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^m p^m q^{n-m}(z-m) \end{aligned}$$

故 $Z = X+Y$ 是连续型随机变量, 有密度函数:

$$f_Z(z) = \begin{cases} C_n^m p^m q^{n-m}, & \text{当} m \leqslant z < m+1, m = 0,1,2,\ldots,n \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

练习 5.3.9 (1) 设 $X = (X_1, X_2)$ 的分布密度为 $p_X(x_1, x_2)$,

$$Y_1 := \sqrt{X_1^2+X_2^2}, Y_2 := \frac{X_1}{X_2},$$

试求 $Y=(Y_1,Y_2)$ 的分布密度 $p_Y(y_1,y_2)$.

(2) 设 $X=(X_1,X_2)$ 的分布密度为 $p_X(x_1,x_2) := \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}}$, 试求 (1) 中定义的 $Y=(Y_1,Y_2)$ 的分布密度, 并证明 Y_1,Y_2 独立.

解:

(1) 由 $\begin{cases} Y_1 = \sqrt{X_1^2+X_2^2}, \\ Y_2 = \dfrac{X_1}{X_2}, \end{cases}$. 知映射 $\begin{cases} y_1 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}, \\ y_2 = \dfrac{x_1}{x_2}, \end{cases}$. 的逆映射由两个分支:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{y_1y_2}{\sqrt{1+y_2^2}} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{y_1}{\sqrt{1+y_2^2}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1^{(2)} = -\dfrac{y_1y_2}{\sqrt{1+y_2^2}} \\ x_2^{(2)} = -\dfrac{y_1}{\sqrt{1+y_2^2}} \end{cases}$$

于是 $D_1^x=\{x_2>0\}, D_2^x=\{x_2<0\}, D_1^x\bigcup D_2^x=\mathbb{R}^2\backslash\{x_2=0\}, D_1^y=D_2^y=\{y_1>0\}$

$y=(y_1,y_2): D_k^x \to D_k^y$ 是 $1-1$ 映射, 有逆映射 $x(y_1,y_2)=(x_1,x_2): D_k^y \to D_k^x$

$$J_1(y) = \frac{\partial(x_1^{(1)},x_2^{(1)})}{\partial(y_1^{(1)},y_2^{(1)})} = \begin{vmatrix} \dfrac{y_2}{\sqrt{1+y_2^2}} & \dfrac{y_1}{(1+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+y_2^2}} & -\dfrac{y_1y_2}{(1+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} = -\frac{y_1}{1+y_2^2}$$

类似可得 $J_2(y) = -\dfrac{y_1}{1+y_2^2}$, 故由定理 *5.3.12* 可得:

$$\mathbb{P}_Y(y_1,y_2) = \begin{cases} \left(\mathbb{P}_X(\dfrac{y_1y_2}{\sqrt{1+y_2^2}}, \dfrac{y_1}{\sqrt{1+y_2^2}}) + \mathbb{P}_X(-\dfrac{y_1y_2}{\sqrt{1+y_2^2}}, -\dfrac{y_1}{\sqrt{1+y_2^2}})\right)\dfrac{y_1}{1+y_2^2}, & \text{当} y_1>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 代入计算得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_Y(y_1,y2) &= \frac{2}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}}\frac{y_1}{1+y_2^2}\\
&= \frac{y_1}{\sigma^2}e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}}\times\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y_2^2}\\
&= \mathbb{P}_{Y_1}(y_1)\mathbb{P}_{Y_2}(y_2)
\end{aligned}$$

而 Y_1,Y_2 的密度直接积分即可得到, 则不再赘述了. 注意变量的取值范围即可.

练习 5.3.10 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是具有相同密度 $p(x)$ 的独立 $r.v.$, 且当 $x<0$, 时 $p(x)=0$, 当 $x\geqslant 0$ 时,$p(X)$ 连续, 其次设 ξ_k^* 为 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 按不降顺序排列的第 k 个值, 试证: $(\xi_1^*,\xi_2^*,\ldots,\xi_r^*),1\leqslant r\leqslant n$ 的分布密度为

$$\mathbb{P}(y_1,y_2,\ldots,y_r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!}p(y_1)p(y_2)\ldots p(y_r)\left(\displaystyle\int_{y_r}^{\infty}p(x)dx\right)^{n-r}, & 0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_r\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解:

可以对 r 使用数学归纳法进行证明:

①: $r=1,y_1\geqslant 0$ 时:

$$\begin{aligned}
F_{\xi_1^*}(y_1) &= \mathbb{P}(\xi_{1^*}\leqslant y_1)=1-\mathbb{P}(\xi_1^*>y_1)\\
&= 1-\mathbb{P}(\xi_{1^*}>y_1,\xi_2>y_2,\ldots,\xi_n>y_n)=1-(1-F_X(y_1))^n
\end{aligned}$$

$$\text{故 }\mathbb{P}_{\xi_1^*}=\begin{cases}np(y_1)\left(\displaystyle\int_{y_1}^{\infty}p(x)dx\right)^{n-1}, & y_1\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

①：设结论对 $r<m$ 均成立, 证明 $r=m$ 时也成立, 实际上只需证明 $m=2$ 时成立, 对于一般的 m, 只需令 $A=\{\xi_1^*\leqslant y_1,\ldots,\xi_{m-2}^*\leqslant y_{m-2}\}$, 用完全类似的方法即可证明, 下证 $m=2$ 时结论成立,$y_1\leqslant y_2$ 时,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_1^*\leqslant y_1,\xi_2^*\leqslant y_2) &= \mathbb{P}(\xi_2^*\leqslant y_2)-\mathbb{P}(\xi_1^*>y_1,\xi_2^*\leqslant y_2)\\
&= \mathbb{P}(\xi_2^*\leqslant y_2)-[\mathbb{P}(\xi_1^*>y_1)-\mathbb{P}(\xi_1^*>y_1,\xi_2^*>y_2)]\\
&= \mathbb{P}(\xi_2^*\leqslant y_2)-\mathbb{P}(\xi_1^*>y_1)+\mathbb{P}(\xi_1^*>y_1,\xi_2^*>y_2)\\
&= \mathbb{P}(\xi_2^*\leqslant y_2)-\mathbb{P}(\xi_1^*>y_1)+\mathbb{P}(\xi_1^*>y_2,\xi_2^*>y_2)\\
&+ \mathbb{P}(y_1<\xi_1^*\leqslant y_2,\xi_2^*>y_2)
\end{aligned}$$

注意到上式最后一行中, 前三项都是一元函数, 故分别对两个变量求导后为 0, 只需看最后一项.

又因为：

$$\{y_1<\xi_1^*\leqslant y_2,\xi_2^*>y_2\}=\{\text{只有一个随机变量落入}(y_1,y_2]\}$$

所以可得：

$$\mathbb{P}(y_1<\xi_1^*\leqslant y_2,\xi_2^*>y_2)=C_n^1\int_{y_1}^{y_2}p(u)du(\int_{y_2}^{\infty}p(v)dv)$$

当 $y_1>y_2$ 时, 有：

$$\mathbb{P}(y_1<\xi_1^*\leqslant y_2,\xi_2^*>y_2)=\mathbb{P}(\xi_2^*\leqslant y_1)$$

综上可得：

$$\mathbb{P}(y_1,y_2)=\begin{cases}\frac{n!}{(n-2)!}p(y_1)p(y_2)(\int_{y_2}^{\infty}p(v)dv)^{n-2}, & 0\leqslant y_1\leqslant y_2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即证.

练习 5.3.11 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两个有界分布函数 (不一定是概率分布函数）,$G(-\infty)=0, f(x)$ 是连续函数, 且 $0<c_1\leqslant f(x)\leqslant c_2<\infty,\forall x\in\mathbb{R}$, 试应用定理 5.3.13 证明：若

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{f(x)}dG(x),\forall x\in\mathbb{R},$$

则

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dF(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

解:

设分布函数 $F(x),G(x)$ 分别对应的分布测度为 ν,μ, 由于 F,G 有界, 则 $\forall x\in R,\nu((-\infty,x])=F(x),\mu((-\infty,x])=G(x)$, 而 $f(x)$ 连续且非负有界, 故 f 非负可测, 因为:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{f(x)}dG(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{f(x)}d\mu;\forall x\in R$$

故有 $\nu(A)=\displaystyle\int_A\frac{1}{f(x)}d\mu,\forall A\in\mathscr{F}$, 由定理 5.3.15 可得:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}f(x)dF(x) &= \int_{-\infty}^{x}f(x)d\nu\\ &= \int_{-\infty}^{x}f(x)\frac{1}{f(x)}d\mu\\ &= \int_{-\infty}^{x}d\mu=\mu((-\infty,x])\\ &= G(x)\end{aligned}$$

练习 5.3.12 设 $X_1, X_2, \ldots$ 是无穷个独立 $r.v.$(即其中任意有限个都独立)，且它们的分布都是以 $\lambda(>0)$ 为参数的指数分布, 即 $\mathbb{P}(X_k > t) = e^{-\lambda t}, t \geqslant 0$, 令

$$N(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant t\}.$$

试证：

(1) 若 $0 < s < t < \infty$, 则 $N(s)$ 与 $N(t) - N(s)$ 独立, 且分别服从参数为 λs 及 $\lambda(t-s)$ 的 *Poisson* 分布；

(2)$\forall m$ 及任何 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < \infty, N(t_k) - N(t_{k-1}), k = 1, 2, \ldots, m$ 独立, 且 $N(t_k) - N(t_{k-1})$ 服从以 $\lambda(t_k - t_{k-1})$ 为参数的 *Poisson* 分布,$k = 1, 2, \ldots, m$.

解:

(1) 为证 $N(s), N(t) - N(s)$ 独立, 先求其联合分布, 记 $X^k := X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, 且由题意易得 $X^k \sim \Gamma(\lambda, k), X_{k+1} \sim E(\lambda)$, 再利用练习 *5.3.13* 中

的部分结论,$\forall k,m\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(s)=k,N(t)-N(s)=m)=\mathbb{P}(N(s)=k,N(t)=k+m)\\
= & \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k\leqslant s<X_1+\cdots+X_k+X_{k+1},\\
& X_1+\cdots+X_{k+m}\leqslant s<X_1+\cdots+X_{k+m+1})\\
= & \int_0^s\mathbb{P}(0\leqslant s-x<X_{k+1},\\
& X_{k+1}+X_{k+2}+\cdots+X_{k+m}\leqslant t-x<X_{k+1}+\cdots+X_{k+m+1})dp(X^k\leqslant x)\\
= & \int_0^s[\int_{s-x}^{t-x}\mathbb{P}(X_{k+2}+\cdots+X_{k+m}\leqslant t-x-y<X_{k+2}+\cdots+X_{k+m+1}\lambda e^{-\lambda y}dy)]dp(X^k\leqslant x)\\
= & \int_0^s\int_{s-x}^{t-x}\frac{[\lambda(t-x-y)]^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda(t-x-y)}\lambda e^{-\lambda y}dydp(X^k\leqslant x)\\
= & \int_0^s\frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda(t-x)}\times\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}dx\\
= & \frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda(t)}\times\frac{(\lambda s)^k}{k!}\\
= & \frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}\times\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

再求 $N(s),N(t)-N(s)$ 的分布密度, 容易得到:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(s)=k) &= \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}(N(s)=k,N(t)-N(s)=m)\\
&= \frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

同理可得:

$$\mathbb{P}(N(t)-N(s)=m)=\frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}$$

综上所述, 不难验证: $\mathbb{P}(N(s)=k,N(t)-N(s)=m)=\mathbb{P}(N(s)=k)\mathbb{P}(N(t)-N(s)=m)$, 故可得 $N(s),N(t)-N(s)$ 独立.

(2) 利用数学归纳法证明：

① 由 (1) 知，当 $m=1$ 时，结论成立.

② 不妨设 $m=n$ 时结论成立，令:

$$A=\{N(t_1)-N(t_0)=k_1,\ldots,N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n\}$$

则有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N(t_1)-N(t_0)=k_1,\ldots,N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n,N(t_{n+1})-N(t_n)=k)\\=\;&\mathbb{P}(N(t_{n+1})-N(t_n)=k|A)\mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

而有指数分布的无记忆性，容易得到：

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N(t_{n+1})-N(t_n)=k|A)\\=\;&\mathbb{P}(X_j'+X_{j+1}+\cdots+X_{j+k-1}\leqslant t_{n+1}-t_n<X_j'+X_{j+1}+\cdots+X_{j+k})\\=\;&\frac{[\lambda(t_{n+1}-t_n)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_{n+1}-t_n}\end{aligned}$$

其中 X_j' 为 X_j 的剩余到达间隔时间，由无记忆性，其仍服从指数分布. 由归纳假设可以得到结论成立.

PS: 此题在例 6.3.11 的例 2 中有更详细的讨论

练习 5.3.13 设 $X_1,X_2,\ldots,Y_1,Y_2,\ldots,$ 是无穷多个独立的非负 $r.v.$, X_k 都服从以 $\lambda(>0)$ 为参数的指数分布, Y_k 服从集中在 $(0,\infty)$ 上的分布 μ, 令 $N(t)$ 为一 $r.v.$, 它满足：

$$|N(t)=n|=\{X_1+X_2+\cdots+X_n+Y_1+Y_2+\cdots+Y_n\leqslant\\ t,X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}+Y_1+Y_2+\cdots+Y_n>t\}$$

试证：

$$\mathbb{P}(\{N(t)=n\})=\int_{(0,x]}\frac{[\lambda(t-x)]^n}{n!}\mu^{*\ n}(dx),$$

其中

$$\mu^{*\ n}((0,x]):=\mathbb{P}(\{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n\leqslant x\}),$$

即 μ 的 n 重卷积.

解:

由题意知 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n\sim\mu^{*n}, X^n:=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\Gamma(\lambda,n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{N(t)=n\}) &= \mathbb{P}(\{X_1+\cdots+X_n+Y_1+\cdots+Y_n\leqslant t<X_1+\cdots+X_{n+1}+Y_1+\cdots+Y_n\}) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(\{X_1+\cdots+X_n\leqslant t-x<X_1+\cdots+X_{n+1}\})\mu^{*n}(dx) \\
\text{另一方面有}\quad & \mathbb{P}(\{X_1+\cdots+X_n\leqslant t-x<X_1+\cdots+X_{n+1}\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X^n\leqslant t-x, X_{n+1}>t-x-X^n\}) \\
&= \int_0^{t-x}\mathbb{P}(\{X_{n+1}>t-x-y\})\frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y}dy \\
&= \int_0^{t-x}e^{-\lambda(t-x-y)}\frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y}dy \\
&= e^{-\lambda(t-x)}\int_0^{t-x}\frac{\lambda(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}dy \\
&= \frac{[\lambda(t-x)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-x)}
\end{aligned}$$

综上即有:

$$\mathbb{P}(\{N(t)=n\})=\int_{(0,x]}\frac{[\lambda(t-x)]^n}{n!}\mu^{*\ n}(dx),$$

PS: 此题在例 *6.3.11* 的例 *3* 中有更详细的讨论

练习 5.3.14 设 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 是独立 $r.v.$ 且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布,试应用广义加法公式（或称逐步淘汰原则）及公式

$$\int \cdots \int_{\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant x, x_l \geqslant 0} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{x^n}{n!},$$

证明当 $x \in (0, n)$ 时,

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqslant x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k \frac{[(x-k) \bigvee 0]^n}{n!}$$

解:

$(X_1, \dots, X_n)$ 的联合分布密度为:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, i = 1, 2, ...n \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $x \in (0, n)$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x, 0 \leqslant X_i \leqslant, i = 1, \dots, n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x, x_i \geqslant 0, i = 1, \dots, n) \\ &- \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x, x_i \geqslant 0, \forall i, \text{且} \exists j, s.t. x_j \geqslant 1) \end{aligned}$$

令:

$$A_j = \{X_1 + \cdots + X_n \leqslant x, x_i \geqslant 0, \forall i \neq j, x_j \geqslant 1\}$$

A_j 两两不交, 则容易得到:

$$A = \{X_1 + \cdots + X_n \leqslant x, x_i \geqslant 0, \forall i, \text{且} \exists j, s.t. x_j \geqslant 1\} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

由概率的广义加法公式得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\mathbb{P}(A_1\bigcap\ldots\bigcap A_k)\\
\mathbb{P}(A_1) &= \int\limits_{A_1}\cdots\int p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\\
&= \int\limits_{\substack{\sum_{k=1}^n x_k\leqslant x\\ x_j\geqslant 0,j\geqslant 2\\ x_1\geqslant 1}}\cdots\int p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int\limits_{\substack{x_1'+\sum_{k=2}^n x_k\leqslant x-1\\ x_j\geqslant 0,j\geqslant 2\\ x_1'=x_1-x\geqslant 1}}\cdots\int p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\\
&= \frac{[(x-1)\vee 0]^n}{n!}
\end{aligned}$$

类似可以求得 $\mathbb{P}(A_1\bigcap\ldots\bigcap A_k) = \dfrac{[(x-k)\vee 0]^n}{n!}$, 同时注意到 $x\in(0,n)$ 时,$\mathbb{P}(A_1\bigcap\ldots\bigcap A_n) = \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\leqslant x,\forall i,x_i\geqslant 1) = 0$, 又因为:

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\leqslant x,\forall i,x_i\geqslant 0) = \int\limits_{\substack{\sum_{k=1}^n x_k\leqslant x\\ x_i\geqslant 0,\forall i}}\cdots\int p(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \frac{[x\vee 0]^n}{n!}$$

综上所述, 可得:

$$\mathbb{P}(X_1+X_2+\cdots+X_n\leqslant x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k\frac{[(x-k)\bigvee 0]^n}{n!}$$

5.4 积分收敛定理

练习 5.4.1 *(Fatou 引理的推广)* 设 U_n, V_n 可积, 且 $U_n\to U, a.e. V_n\to V, a.e. \int U_n\to\int U$ 有限,$\int V_n\to\int V$ 有限.

(1) 若 $U_n\leqslant X_n,\forall x\in\mathbb{N}$, 则 $\int\varliminf\limits_{n\to\infty} X_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\int X_n$.

(2) 若 $X_n\leqslant V_n,\forall x\in\mathbb{N}$, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int X_n\leqslant\int\varlimsup\limits_{n\to\infty} X_n$.

解:

由于证法是类似的, 仅需证明 *(1)*

令 $f_n = X_n - U_n$, 则 $f_n \geqslant 0$, 令 $g_n = \inf_{k\leqslant n} f_k, 0 \leqslant g_n \uparrow \sup_n \inf_{k\leqslant n} = \varliminf_{n\to\infty} f_n$, 由单调收敛定理:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int g_n &= \int \varliminf_{n\to\infty} f_n = \int (\varliminf_{n\to\infty} X_n - U) \\ &= \int \varliminf_{n\to\infty} X_n - \int U\end{aligned}$$

最后一式源于 $\varliminf_{n\to\infty} X_n$ 的可积性与积分的线性性, $\varliminf_{n\to\infty} X_n$ 的可积性可由 $U_n \leqslant X_n$ 于 U 的可积性得出.

又因为 $0 \leqslant g_n \leqslant f_n \Rightarrow \int g_n \leqslant \int f_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int g_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int f_n = \varliminf_{n\to\infty} X_n - U \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int g_n \leqslant \int \varliminf_{n\to\infty} X_n - \int U \Rightarrow \int \varliminf_{n\to\infty} X_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int X_n$

练习 5.4.2 *(控制收敛定理推广)* 设 $|X_n| \leqslant U_n$, 而 U_n 可积 $U_n \to U, a.e.$ 且 $\int U_n \to \int U$ 有限, 则当 $X_n \to X, a.e.$ 时, 有 $\int |X_n - X| \to 0$, 因而 $\int X_n \to \int X$.

解:

直接利用习题 *5.4.1* 的结论即可证明.

(1)$|X_n| \leqslant U_n \Rightarrow -U_n \leqslant X_n \leqslant U_n$, 因此满足习题 *5.4.1* 中的条件. 又因为 $X_n \to X, a.e. \Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} X_n = \varlimsup_{n\to\infty} X_n, a.e.$ 则由习题结论:

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\int X_n \leqslant \int \varlimsup_{n\to\infty} X_n &= \int \varliminf_{n\to\infty} X_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int X_n \\ \int X_n &\to \int X\end{aligned}$$

(2) $X_n \to X, a.e, |X_n| \leqslant U_n$ 故有 $|X_n - X| \leqslant 2U_n, |X_n - X| \to 0, a.e.$ 由上证得 $\int |X_n - X| \to 0$

练习 5.4.3 试证：给定具有有限期望的随机变量 X 及 $\varepsilon > 0$, 存在一个简单函数 X_ε, 使得 $\mathbb{E}|X - X_\varepsilon| < \varepsilon, |X_\varepsilon| \leqslant |X|$, 因而, 存在一个简单函数序列 $\{X_m\}$, 使得 $\forall m \in \mathbb{N}, |X_m| \leqslant |X|$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X - X_m|$

解:

由于 $\mathbb{E}X$ 是有限的, 故 $\mathbb{E}|X|$ 也是有限的, 故 $X < \infty, a.e. \Rightarrow \exists N, \mu(N) = 0, s.t. \{X = \infty\} \subset N, X\mathbb{1}_{N^c} < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, 定义：

$$X_n := \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{k+1}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leqslant X \leqslant \frac{k+1}{2^n}\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leqslant X \leqslant \frac{k+1}{2^n}\}} + 0 \times \mathbb{1}_N$$

则 $|X_n| \leqslant |X|, \forall \omega \in N^c, |X - X_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow E|X - X_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}.$
因此 $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, s.t. \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \exists X_\varepsilon . s.t. |X_\varepsilon| \leqslant |X|, |X - X_\varepsilon| < \varepsilon$

练习 5.4.4 对于 $\mathscr{F}$ 中的任意两个集 Λ_1 与 Λ_2 定义 $\rho(\Lambda_1, \Lambda_2) = \mathbb{P}(\Lambda_1 \Delta \Lambda_2)$, 则 ρ 是 $\mathscr{F}$ 中的集的空间中的伪度量 *(*即除了 $\rho(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0 \to \Lambda_1 = \Lambda_2$ 外, 距离的其他假设都满足*)*; 称引入 ρ 后的空间 $\mathscr{F}$ 为度量空间 $M(\mathscr{F}, \rho)$, 证明：对于每个可积的随机变量 X, 由 $\Lambda \to \int_\Lambda X d\mathbb{P}$ 给出的由 $M(\mathscr{F}, \rho)$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射是连续的. 类似地由 $(\Lambda_1, \Lambda_2) \to \Lambda_1 \bigcup \Lambda_2, \Lambda_1 \bigcap \Lambda_2, \Lambda_1 \backslash \Lambda_2, \Lambda_1 \Delta \Lambda_2$ 给出的由 $M(\mathscr{F}, \rho) \times M(\mathscr{F}, \rho)$ 到 $M(\mathscr{F}, \rho)$ 的映射都是连续的. 如果去掉一个零概率集后,$\overline{\lim\limits_n} \Lambda_n = \underline{\lim\limits_n} \Lambda_n$, 则我们用 $\lim\limits_n \Lambda_n$ 表示这两个集共同的等价类. 证明在这种情况下 $\{A_n\}$ 按度量 ρ 收敛于 $\lim\limits_n \Lambda_n$ 作为一个特殊情况, 试推出：

如果 $\mathbb{E}|X| < \infty$, 且 $\lim_n \mathbb{P}(\Lambda_n) = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda_n} Xd\mathbb{P} = 0$, 特别有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|X|>n\}} d\mathbb{P} = 0.$$

解:

(1) 证明 ρ 是 $\mathscr{F}$ 上的伪度量, 设 $A_1, A_2, A_3 \in \mathscr{F}$, 不难验证 $\rho(A_1, A_2) \geqslant 0; \rho(A_1, A_2) = \rho(A_2, A_1), \rho(A_1, A_2) = 0$, 下验证三角不等式, 注意到:

$$\begin{aligned}
A_1 \Delta A_2 &= (A_1 \Delta A_2) \bigcap \Omega = (A_1 \Delta A_2) \bigcap (A_3 \bigcup A_3^c) \\
&= [(A_1 \Delta A_2) \bigcap A_3] \bigcup [(A_1 \Delta A_2) \bigcap A_3^c] \\
&= \{[(A_1 \backslash A_2) \bigcup (A_2 \backslash A_1)] \bigcap A_3\} \bigcup \{[(A_1 \backslash A_2) \bigcup (A_2 \backslash A_1)] \bigcap A_3^c\} \\
&\subset \{[(A_3 \backslash A_2) \bigcup (A_3 \backslash A_1)]\} \bigcup \{[(A_1 \backslash A_3) \bigcup (A_2 \backslash A_3)]\} \\
&= [(A_3 \Delta A_2)] \bigcup [(A_1 \Delta A_3)]
\end{aligned}$$

故有*:*

$$\rho(A_1, A_2) = \rho(A_1 \Delta A_2) \leqslant \rho(A_3 \Delta A_2) + \rho(A_1 \Delta A_3) = \rho(A_1, A_3) + \rho(A_2, A_3)$$

(2) 证明 $F(A) = \int_A Xdp : M(\mathscr{F}, \rho) \to \mathbb{R}$ 是连续的. 即证 $\forall A_0 \in \mathscr{F}$, 当 $A \in \mathscr{F}, \rho(A, A_0) \to 0$ 时, 有 $F(A) \to F(A_0)$. 而因为有:

$$\begin{aligned}
|F(A) - F(A_0)| &= |\int_A Xdp - \int_{A_0} Xdp| - |\int_\Omega X(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_0})dp| \\
&\leqslant \int_\Omega |X||\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_0}|dp = \int_\Omega |X|\mathbb{1}_{A\Delta A_0} dp \\
&= \int_{A\Delta A_0} |X|dp
\end{aligned}$$

由推论 *5.4.6* 可知 $\rho(A, A_0) = \mathbb{P}(A\Delta A_0) \to 0 \Rightarrow |F(A) - F(A_0)| \leqslant \int_{A\Delta A_0} |X|dp \to 0$, 即证.

(3) 下证 $(A_1,A_2)\to A_1\bigcup A_2 : M(\mathscr{F},\rho)\times M(\mathscr{F},\rho)\to M(\mathscr{F},\rho)$ 是连续的, 其余的映射证明是类似的, 则不再赘述. 为此, 只需证明, 在 ρ 下, 当 $(A_1',A_2')\to(A_1,A_2)$ 时, 有 $A_1'\bigcup A_2'\to A_1\bigcup A_2$. 即证 $\rho(A_1',A_1)\to 0,\rho(A_2',A_2)\to 0\Rightarrow\rho(A_1'\bigcup A_2',A_1\bigcup A_2)to0$, 注意到:

$$\begin{aligned}
[(A_1'\bigcup A_2')\Delta(A_1\bigcup A_2)] &= [(A_1'\bigcup A_2')\backslash(A_1\bigcup A_2)]\bigcup[(A_1\bigcup A_2)\backslash(A_1'\bigcup A_2')]\\
&= [(A_1'\bigcup A_2')\bigcap(A_1^c\bigcap A_2^c)]\bigcup[(A_1\bigcup A_2)\bigcap(A_1'^c\bigcap A_2'^c)]\\
&\subset [(A_1'\backslash A_1)\bigcup(A_2'\backslash A_2)]\bigcup[(A_1\backslash A_1')\bigcup(A_2\backslash A_2')]\\
&= (A_1'\Delta A_1)\bigcup(A_2'\Delta A_2)
\end{aligned}$$

由此可得:

$$\begin{aligned}
\rho(A_1'\bigcup A_2',A_1\bigcup A_2) &= P[(A_1'\bigcup A_2')\Delta(A_1\bigcup A_2)]\leqslant\mathbb{P}(A_1'\Delta A_1)+\mathbb{P}(A_2'\Delta A_2)\\
&= \rho(A_1'\Delta A_1)+\rho(A_2'\Delta A_2)
\end{aligned}$$

由此即证结论.

(4) 下证 $A:=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$, 则有 $\rho(A_n,A)\to 0$. 由题设:

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n=A\\
\Rightarrow\ & k\to\infty,\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\downarrow A,\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\uparrow A\\
\Rightarrow\ & \begin{cases} A_k\backslash A\subset(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n)\backslash A\\ A\backslash A_k\subset A\backslash(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n)\end{cases}.
\end{aligned}$$

故由此可得:

$$\begin{aligned}\rho(A_k,A) &= \mathbb{P}(A_k\Delta A)=P[(A_k\backslash A)\bigcup(A\backslash A_k)]\\ &\leqslant P[(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n)\backslash A]+P[A\backslash(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n)]\\ &= \mathbb{P}(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n)-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n)\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$ 时, 上式趋于 0.

(5) 特别的, 如果 $\mathbb{E}|X|<\infty$, 且 $\lim\limits_{n}\mathbb{P}(\Lambda_n)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Lambda_n}Xd\mathbb{P}=0$, 特别有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\{|X|>n\}}d\mathbb{P}=0$.

由 (1) – (4) 所证, 若 $E|X|<\infty, \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=0\Rightarrow\mathbb{P}(A_n,\varnothing)=\mathbb{P}(A_n\Delta\varnothing \ =\mathbb{P}(A_n)\to 0$, 即得在 $M(\mathscr{F},\rho)$ 中有 $A\to\varnothing\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\int_{A_n}Xdp=\int_{\varnothing}Xdp=0$.

特别的, 当 $E|X|<\infty$, 则由 $\mathbb{P}(|X|>n)\to 0\ (n\to\infty)$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\{|X|>n\}}d\mathbb{P}=0$.

6 乘积测度与无穷乘积概率空间

6.1 乘积测度与转移测度

练习 6.1.1 设 Ω 是一不可数集 $\mathscr{F}$ 是包含 Ω 中一切单点集的最小 σ-代数, 则 $\Omega\times\Omega$ 的对角线 $\triangle:=\{(\omega,\ \omega):\omega\in\Omega\}\notin\mathscr{F}\times\mathscr{F}$, 但 $\forall\omega_i\in\Omega,i=1,2$

$$\triangle_{\omega_1}:=\{\omega_2:(\omega_1,\ \omega_2)\in\triangle\}\in\mathscr{F},$$

$$\triangle_{\omega_2} := \{\omega_1 : (\omega_1,\ \omega_2) \in \triangle\} \in \mathscr{F},$$

这个例子说明了什么？

解:

我们来证明 $\triangle \notin \mathscr{F} \times \mathscr{F}$.

首先由习题 3.1.9(i) 知道 $\mathscr{G} := \{F \in \Omega : F$ 或者 F^c 为有限集或可数集 $\}$ 为 Ω 上的 σ-代数, 易知 $\mathscr{G}$ 包含 Ω 中的所有单点集, 且是包含这些单点集的最小 σ-代数于是 $\mathscr{F} = \mathscr{G} = \{F \in \Omega : F$ 或者 F^c 有限集, 或可数集 $\}$.

设 $\mathscr{A} := \{A \in \Omega \times \Omega : A$ 具有形式 $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i \times y_i)) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_j \times B_j))$ 或者 $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{A_i\times y_i\})\cup(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{x_j\times B_j\})\cup(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(C_k\times D_k))$, 其中 $A_i, B_j, \in \mathscr{F}, (C_k)^c, (D_k)^c$ 为至多可数集 $x_j, y_i \in \Omega, i, j, k \geqslant 1$, 且 x_j 之间 ,y_i 之间互不相同 $\}$. 下证 $\mathscr{F} \times \mathscr{F} \subset \mathscr{A}$.

令 $\mathscr{C} := \{F \times H\ :\ F,\ H \in \mathscr{F}\}$, 则 $\mathscr{F} \times \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$. 注意到 $\mathscr{F}$ 中的形式及 $\mathscr{A}$ 的定义, 易得 $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, 下仅需说明 $\mathscr{A}$ 是一 σ-代数.

首先, 易得 $\varnothing, \Omega \in \mathscr{A}$

其次, 显然 $\mathscr{A}$ 对可列并运算封闭.

故仅需证 $\mathscr{A}$ 对余运算封闭.

设 $A = (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i \times y_i)) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_j \times B_j)) \cup (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(C_k \times D_k))$,
其中 $A_i, B_j, \in \mathscr{F}, (C_k)^c, (D_k)^c$ 为至多可数集 ,$x_j, y_i \in \Omega, i, j, k \geqslant 1$, 且 x_j 之

间 y_i 之间互不相同, 则:

$$\begin{aligned} A^c &= (\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\times y_i))^c\bigcap(\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j))^c\bigcap(\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\times D_k))^c \\ &= ((\Omega\times\{y_i:i\geqslant 1\}^c)\bigcup\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i^c\times y_i))\bigcap((\{x_j:j\geqslant 1\}^c\times\Omega)\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j^c)) \\ &\quad \bigcap\bigcap_{k=1}^{\infty}((C_k^c\times\Omega)(\Omega\times D_k^c) \end{aligned}$$

为了计算 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}$ *((*$C_k^c\times\Omega)$ 㑭 $(\Omega\times D_k^c)$*)*, 首先计算:

$$\begin{aligned} &((C_1^c\times\Omega)\bigcup(\Omega\times D_1^c))\bigcap((C_2^c\times\Omega)\bigcup(\Omega\times D_2^c)) \\ &=((C_1^c\bigcap C_2^c)\times\Omega)\bigcup C_1^c\times D_2^c)\bigcup(C_2^c\times D_1^c)\bigcup(\Omega\times(D_1^c\bigcap D_2^c)) \end{aligned}$$

注意到 $C_1^c\cap C_2^c, C_1^c$ 均为至多可数集, 不妨设 $C_1^c\cap C_2^c=\{w_i : i\geqslant 1\}, C_1^c=\{v_j : j\geqslant 1\}$, 于是 $(C_1^c\cap C_2^c\times\Omega)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(w_i\times\Omega)$, $(C_1^c\times D_2^c)=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(v_j\times D_2^c)$, 于是 $((C_1^c\cap C_2^c)\times\Omega)$ 㑭 $(C_1^c\times D_2^c)$ 具有形式 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j)$, 同理 $(C_2^c\times D_1^c)$ 㑭 $(\Omega\times(D_1^c\cap D_2^c))$ 是形如 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times y_i)$ 的集合, 于是 $\bigcap\limits_{k=1}^{2}$*((*$C_k^c\times\Omega)\bigcup(\Omega\times D_k^c)$*)* 形如 $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times y_i))\bigcup(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j))$, 依次让其与 $(C_k^c\times\Omega)\bigcup\Omega\times D_k^c)k=3,4,\ldots$ 做交运算可得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}((C_k^c\times\Omega)\bigcup(\Omega\times D_k^c))$ 仍然是一个形如 $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{A_i\times y_i\})\cup(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{x_j\times B_j\})$ 的集合.

PS: 此处实际上证得一列形如 $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{A_i\times y_i\})\bigcup(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{x_j\times B_j\})$ 集合的交集仍

然是形如 $(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{A_i\times y_i\})\bigcup(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x_j\times B_j\})$.)

易知 $(\Omega\times\{y_i:i\geqslant 1\}^c)\bigcup\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i^c\times y_i))$ 具有形式 $(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{A_i\times y_i\})\bigcup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{C_k\times D_k\})$, $(\{x_j\ :\ j\geqslant 1\}^c\times\Omega)\bigcup\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j^c)$ 具有形式 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x_j\times B_j\}\bigcup(\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\times D_k))$, 那么可得此时 A^c 具有形式 $(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\times y_i))\bigcup(\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j))$.

如果设 $A=(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\times y_i))\bigcup(\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j))$, 其中 $A_i,B_j,\in\mathscr{F},x_j,y_i\in\Omega,i,j,k\geqslant 1$, 且 x_j 之间,y_i 之间互不相同. 由上面的推导可得 A^c 具有形式,$(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\times y_i))\bigcup(\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_j\times B_j))\bigcup(\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k\times D_k))$. 故 $A^c\in\mathscr{A}$.

于是 $\mathscr{A}$ 是一 $\sigma-$ 代数, 从而的 $\mathscr{F}\times\mathscr{F}\subset\mathscr{A}$, 而集合 $\triangle$ 不具备 $\mathscr{A}$ 中集合的集合形式, 于是 $\triangle\notin\mathscr{F}\times\mathscr{F}$.

而对于任意 $\omega_1\in\Omega,\triangle_{\omega_1}=\{\omega_1\}\in\mathscr{F}$, 对于任意 $\omega_2\in\Omega,\triangle_{\omega_2}=\{\omega_2\}\in F$. 此例子说明命题”可测集的截口仍可测”的逆命题不成立, 即: 一个集合尽管它的任何截口都可测, 但是它本身可能不可测.

练习 6.1.2 试问: $\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}=\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$ 吗? 其中 $\overline{\mathscr{F}_i},i=1,2$ 表示 $\mathscr{F}_i$ 对 μ_i 的完全化,$\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$ 表示 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 对 $\mu_1\times\mu_2$ 的完全化, 这个问题对 *Lebesgue* 可测集说明了什么?

解:

$\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}\subset\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$, 但 $\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}\subset\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}$ 不一定成立. 举例: $\Omega_1=\Omega_2=\mathbb{R},\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$ 均为 $\mathbb{R}$ 上 *Borel* 可测集的全体 μ_1,μ_2 均为 $\mathbb{R}$ 上的 *Lebesgue* 测度, 于是 $\overline{\mathscr{F}_1},\overline{\mathscr{F}_2}$ 均为 $\mathbb{R}$ 上 *Lebesgue* 可测集的全体, 取集合 $A\subset\mathbb{R}$, 但 A 不是 *Lebesgue* 可测的, 任取 $\omega_2\in\Omega_2$, 则 $A\times\omega_2\subset\Omega_1\times\omega_2$, 又

$\mu_1\times\mu_2(\Omega_1\times\omega_2)=0$, 于是 $A\times\omega_2$ 是 $\mu_1\times\mu_2$-零集, 于是 $A\times\omega_2\in\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$, 但是注意到 $(A\times\omega_2)_{\omega_2}=A\notin\overline{\mathscr{F}_1}$, 于是 $A\times\omega_2\notin\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}$.

下证：$\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}\subset\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$.

设 $\mathscr{C}:=\{A\times B:\ A\in\overline{\mathscr{F}_1},\ B\in\overline{\mathscr{F}_2}\}$, 则 $\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}=\sigma(\mathscr{C})$. 任取 $A\times B\in\mathscr{C}$, 则存在 $C\in\mathscr{F}_1, D\in\mathscr{F}_2$, 及 μ_1-零集 N_1,μ_2-零集,N_2, *s.t.* $A=C\bigcup N_1, B=D\bigcup N_2$. 于是 $A\times B=(C\cup N_1)\times(D\cup N_2)=(C\times D)\cup(C\times N_2)\bigcup(N_1\times D)\cup(N_1\times N_2)$, 注意到 $C\times N_2, N_1\times D, N_1\times N_2$ 均为 $\mu_1\times\mu_2$ -零集, 于是 $(C\times N_2)\cup(N_1\times D)\cup(N_1\times N_2)$ 为 $\mu_1\times\mu_2$-零集, 又 $C\times D\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$, 于是 $A\times B\in\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$, 于是得到 $\mathscr{C}\subset\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$, 又 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 是 σ-代数于是有 $\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}\subset\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$. 这个问题对 *Lebesgue* 可测集说明*:* 在低维空间中不是 *Lebesgue* 可测的集合, 放到高维空间中来看时有可能是高维空间中的 *Lebesgue* 可测集.

练习 6.1.3 设 X_1, X_2 是 n 维独立 $r.v., \mathbb{P}_i, F_i$ 分别是 X_i 的概率分布测度和分布函数 $i=1,2$.

(1) 试用乘积概率定理证明 X_1+X_2 的概率分布测度和分布函数分别为由

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1*\mathbb{P}_2(B): &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{P}_1(B-y)\mathbb{P}_2(dy), B\in\mathscr{B}^n,\\ F_1*F_2(x): &= \int_{\mathbb{R}^n}F_1(x-y)F_2(dy), x\in\mathscr{R}^n,\end{aligned}$$

定义的 $\mathbb{P}_1*\mathbb{P}_2, F_1*F_2$. 它们分别称为 $\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2$ 及 F_1,F_2 的卷积.

(2) 若 $X_i, i=1,2$ 还具有分布密度 p_i, 则由：

$$p_1*p_2(x):=\int_{\mathbb{R}^n}p_1(x-y)p_2(dy), x\in\mathscr{R}^n$$

定义的 p_1*p_2 是 X_1+X_2 的分布密度.p_1*p_2 也称为 p_1,p_2 的卷积.

(3) 试证：一切概率分布测度（相应地, 分布函数）对卷积运算作成一个可

交换半群.

解:

(1):

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2\in B) &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}(X_1\in B-y,\ X_2\in dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}(X_1\in B-y)\mathrm{P}(X_2\in dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_1(B-y)\mathrm{P}_2(dy)\end{aligned}$$

第二等号用到了 X_1, X_2 的相互独立性.

于是 X_1+X_2 的概率分布测度是 $\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2$.

由上面的推导知 $\mathrm{P}(X_1+X_2\leqslant x)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_1((-\infty,\ x-y])\mathrm{P}_2(dy)=\int_{\mathbb{R}^n}F_1(x-y)dF_2(y)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 于是 X_1+X_2 的分布函数是 F_1*F_2.

(2) 因为 x_1, X_2 的密度函数分别为 p_1, p_2, 于是结合 *(1)*, 得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2\leqslant x) &= \int_{\mathbb{R}^n}F_1(x-y)dF_2(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{(-\infty,x-y]}p_1(z)dzp_2(y)dy\\ &= \int_{(-\infty,x]}\int_{\mathbb{R}^n}p_1(z'+y)p_2(y)dydz'\end{aligned}$$

最后一个等号是因为积分变换 $z=z_{\acute{y}}$ 后, 再交换积分顺序得来, 于是可得 X_1+X_2 的分布密度函数为 p_1*p_2.

(3) 以分布函数为例, 即证一切概率分布测度对卷积运算作成一个可交换半群.

(i) 任取概率分布测度 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$, 下证 $(\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2)*\mathrm{P}_3=\mathrm{P}_1*(\mathrm{P}_2*\mathrm{P}_3)$,

即满足结合律.

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2)*\mathrm{P}_3(B) &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2(B-y)\mathrm{P}_3(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_1(B-y-z)\mathrm{P}_2(dz)\mathrm{P}_3(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_1(B-z')\mathrm{P}_2(dz'-y)\mathrm{P}_3(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_1(B-z')\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_2(dz'-y)\mathrm{P}_3(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{P}_1(B-z')\mathrm{P}_2*\mathrm{P}_3(dz')\\ &= \mathrm{P}_1*(\mathrm{P}_2*\mathrm{P}_3)(B)\end{aligned}$$

于是证得一切概率分布测度对卷积运算作成一个半群. *(ii)* 可交换性, 这可由 $\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_2*\mathrm{P}_1$ 的概率含义直接得出, 由 *(1)* 知 $\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2$ 是 X_1+X_2 的概率分布测度; $\mathrm{P}_2*\mathrm{P}_1$ 是 X_2+X_1 的概率分布测度, 于是 $\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_2*\mathrm{P}_1$.

这样证得一切概率分布测度对卷积运算作成一个可交换半群.

练习 6.1.4 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 是概率空间,$f(t,\omega)$ 作为 $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$ 的函数是 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 可测的, 若 $\forall t\in\mathbb{R},\mathbb{P}\{\omega\in\Omega: f(t,\omega)=\infty\})=0$, 试证 $\lambda(\{t\in\mathbb{R}: f(t,\omega)=\infty\})=0, a.e.\omega(\mathbb{P})$, 其中 λ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 *Lbesgue* 测度.

解:

令 $A:=\{(t,\omega): f(t,\omega)=\infty\}, A_t:=\{\omega: f(t,\omega)=\infty\}, \forall t\in\mathbb{R}, A_\omega:=\{t : f(t,\omega)=\infty\}, \forall\omega\in\Omega$.

由题意知 $\mathrm{P}(A_t)=0,\forall t\in\mathbb{R}$, 于是 $(\lambda\times\mathrm{P})(A)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{P}(A_t)d\lambda=0$. 所以 $\int_\Omega\lambda(A_\omega)d\mathrm{P}=(\lambda\times\mathrm{P})(A)=0$. 追忆到 $\lambda(A_\omega)\geqslant 0,\forall\omega\in\Omega$, 于是 $\lambda(A_\omega)=0, a.e.\omega(\mathrm{P})$, 即 $\lambda(\{t : f(t,\ \omega)=\infty\})=0, a.e.\omega(\mathrm{P})$.

练习 6.1.5 设 f 是 $(\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\cdots\times\mathscr{F}_n)$ 上的（实或复）数值可测函数, 设 $(i_1,i_2,\ldots,i_k,j_1,j_2,\ldots,j_{n-k})$ 是 $(1,2,\ldots,n)$ 的一个置换,$j_1<j_2<\cdots<j_{n-k}$, 试证 $\forall(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\ldots,\omega_{i_k})\in\Omega_{i_1}\times\Omega_{i_2}\times\cdots\times\Omega_{i_k}$, f 在 $(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\ldots,\omega_{i_k})$ 的截函数 $f_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\ldots,\omega_{i_k})}$ 是 $\mathscr{F}_{i_1}\times\mathscr{F}_{i_2}\times\cdots\times\mathscr{F}_{i_k}$ 可测的.

解:

先证任意 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\times\mathscr{F}_n$ 可测的集合 A 在 $(\omega_{i_1},\ \omega_{i_2},\ ,\ \omega_{i_k})$ 处的截集是 $\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\cdots\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$ 可测的.

设 $\Lambda=\{A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\cdots\times\mathscr{F}_n: A$ 在 $(\omega_{i_1},\ \omega_{i_2},\ \cdots\ ,\ \omega_{i_k})$ 处的截集是 $\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\cdots\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$ 可测的.

取 $A=A_1\times A_2\times\times A_n$, 这里 $A_i\in\mathscr{F}_i, i=1\ldots n$, 则 $A_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}=A_{j_1}\times A_{j_2}\cdots\times A_{j_{n-k}}\in\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\cdots\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$, 于是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\cdots\times\mathscr{F}_n$ 中所有柱集都属于 Λ

下证 Λ 是一个 $\sigma-$ 代数.

(i) 显然有 $\varnothing,\Omega\in\Lambda$.

(ii) 任取 $A\in\Lambda$, 则 $A_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}\in\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$, 于是 $A^c_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}=(A_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})})^c\in\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\cdots\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$, 于是 $A^c\in\Lambda$.

(iii) 任取一列集合 $A_n\in\Lambda, n\geqslant 1$, 则 $(A_n)_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}\in\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\times\mathscr{F}_{j_{n-k}},\forall n\geqslant 1$, 于是 $(\bigcup\limits_{n\geqslant1}A_n)_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}=\bigcup\limits_{n\geqslant1}(A_n)_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}\in\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\cdots\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$.

于是证得 $\Lambda=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\cdots\times\mathscr{F}_n$.

f 是一 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\cdots\times\mathscr{F}_n$ 可测的函数, 任取可测集 B(实或者复 *Borel*

可测集)，则 $\{(\omega_{j_1},\ \omega_{j_2},\ \cdots\ \omega_{j_{n-k}})\ :\ f_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}(\omega_{j_1},\ \omega_{j_2},\ \cdots\ \omega_{j_{n-k}})\in B\}=(\{(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n):\ f(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\ ,\ \omega_n)\in B\})_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}\in\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$，最后一步由前面证明的结论得知.

于是 $f_{(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k})}$ 是 $\mathscr{F}_{j_1}\times\mathscr{F}_{j_2}\times\times\mathscr{F}_{j_{n-k}}$ 可测的.

练习 6.1.6 试证定理 *6.1.16*

解:

(1) 先证对任意的可测柱集 $A=A_1\times A_2$,

$$g(w_1):=\int_{\Omega_2}1_A(w_1,\ w_2)\lambda(w_1,\ dw_2)\ (*)$$

是非负 F_1- 可测的, 其中 $A_1\in\mathscr{F}_1$ 且 $A_2\in\mathscr{F}_2$. 事实上, 由于 $\lambda\sigma$ 有限转移测度, 故由定义, 对 $i=1,2$, 存在互不相交的 $\mathscr{F}_i$ 可测集 $\{B_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得:

$$\Omega_i=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_{i,n}$$

且对任意的 $m,n\in\mathbb{N}$:

$$\sup_{w_1\in B_{2m}},\lambda(w_1,\ B_{2,n})<\infty.$$

注意到

$$g(w_1)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{B_{2,n}}1_A(w_1,\ w_2)\lambda(w_1,\ dw_2)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(w_1,\ B_{2,n}\bigcap A_2)\ .$$

又由转移测度的定义知 $\lambda(w_1,\ B_{2,n}\cap A_2)$ 是非负有限 $\mathscr{F}_1$ 可测的, 从而 g 是非负 $\mathscr{F}_1$ 可测的.

记 $\mathscr{C}$ 为所有的可测柱集.

(2) 再证对任意的 $A \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$, *(*)* 定义的函数 g 也是 $\mathscr{F}_1$ 可测的, 为此我们利用 $\lambda - \pi$ 系方法, 记:

$$\mathscr{M} := \{A \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2\text{: } \forall n \geqslant 1, \int_{B_{2,n}} 1_A(w_1,\ w_2)\lambda(w_1, dw_2) \text{ 是 } \mathscr{F}_1\text{-可测的 }\}$$

由 *(1)* 可知 $\mathscr{C} \subset M$. 注意到 $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$. 如果能证明 $\mathscr{M}$ 是 λ 系, 则有 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{M}$, 从而 $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 = M$. 事实上, 容易得到 $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathscr{C} \subset M$. 如果 $A, B \in \mathscr{M}$ 且 $B \subset A$, 则:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} 1_{A\backslash B}(w_1, w_2)\lambda(w_1,\ dw_2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_{2,n}} 1_{A\backslash B}(w_1, w_2)\lambda(w_1, dw_2) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{B_{2,n}} 1_A(w_1, w_2)\lambda(w_1, dw_2) - \int_{B_{2,n}} 1_B(w_1, w_2)\lambda(w_1, dw_2))
\end{aligned}$$

由此可得 $A\backslash B \in M$. 又设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{F}_1$, 且 $A_n \uparrow$, 由积分的单调收敛定理可知:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{\bigcup\limits_n \in\mathbb{N} An}(w_1,\ w_2)\lambda(w_1, dw_2) &= \int_{\Omega_2} \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(w_1, w_2)\lambda(w_1, dw_2) \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_n}(w_1,\ w_2)\lambda(w_1,\ dw_2)
\end{aligned}$$

从而可知 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} An \in \mathscr{M}$. 这就证明了 $\mathscr{M}$ 是 λ 系.

(3) 对于任意的简单非负 $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ 可测函数 f 由 (1), (2) 可知函数

$$\int_{\Omega_2} f(w_1,\ w_2)\lambda(w_1,\ dw_2) \qquad (**)$$

为非负 $\mathscr{F}_1-$ 可测的. 再利用积分的单调收敛定理进一步可知对任意的非负 $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ 可测的 f,$(**)$ 定义的函数也是非负 $\mathscr{F}_1-$ 可测的.

练习 6.1.7 试证定理 *6.1.17* 及定理 *6.1.18*

解:

定理 6.1.17:

由定理 6.1.16 知 $\int_{\Omega_2} f(\cdot,\omega_2)\lambda_2(\omega_1,d\omega_2)$ 是非负 $\mathscr{F}_1$ 可测的, 故 $\lambda(B),\forall B\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 是有意义的, 仅需证明其有 σ 有限性与可加性.

由于 $\lambda_i, i=1,2$ 是 σ 有限的, 故 $\exists\Omega_i^{(n)}, n\in\mathbb{N}$ 两两不交, 且 $\lambda_1(\Omega_1^{(n)})<\infty$, $\sup\limits_{\omega\in\Omega_1^{(n)}}\lambda_2(\cdot,\Omega_2^{(n)})<\infty$. 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_i^{(n)}=\Omega_i^{(n)}, i=1,2$, 于是 $\Omega_1^{(m)}\times\Omega_2^{(n)},\forall m,n\in\mathbb{N}$ 两两不交, $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty}\Omega_1^{(m)}\times\Omega_2^{(n)}=\Omega_1\times\Omega_2$, 且

$$\lambda(\Omega_1^{(m)}\times\Omega_2^{(n)})=\lambda_1(\Omega_1^{(m)})\lambda_2(\cdot,\Omega_2^{(n)})<\infty.$$

故 λ 是 σ 有限的, 再证其可加性.

设 $A_n\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2, n\in\mathbb{N}$ 两两不交, 则 $\forall\omega_1\in\Omega_1, A_n(\omega_1)\in\mathscr{F}_2$, 也两两不交. 故由 λ_i 的 σ 可加性:

$$\begin{aligned}
\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n(\omega_1)\lambda(\omega_1,d\omega_2)\lambda_1(d\omega_1)\\
&= \int_{\Omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_2}A_n(\omega_1)\lambda(\omega_1,d\omega_2)\lambda_1(d\omega_1)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}A_n(\omega_1)\lambda(\omega_1,d\omega_2)\lambda_1(d\omega_1)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)
\end{aligned}$$

故 λ 是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 上的 σ 有限测度.

定理 6.1.18:

先用数学归纳法证明 $\lambda^{(n)}$ 的存在性, 作归纳假设, 由定理 6.1.17 可知存在 $(\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\cdots\times\mathscr{F}_{n-1})\times\mathscr{F}_n$ 的 σ 有限测度, 满足:

$$\lambda^{(n)}=\int_{\Omega^{(n-1)}}\int_{\Omega_n}\mathbb{1}_B((\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}),\omega_n)\lambda_n(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1},d\omega_n)\lambda^{(n-1)}$$

由定义 6.1.4 的约定以及归纳假设, 即证.

练习 6.1.8 设 $f(x,y)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的非负有界可测函数,$\forall B\in\mathscr{B}[0,1]$, 令

$$\lambda(x,B)=\int_B f(x,y)dy,$$

其中 dy 表示对 *Lebesgue* 测度的积分, 则 λ 是 $[0,1]\times\mathscr{B}[0,1]$ 上的转移测度.

解:

(1) 对于任意的 $B\in\mathscr{B}([0,1])$, 因为 $f(x,y)$ 与 $\mathbb{1}_B(y)$ 非负, 棹惀 $f(x,y)\mathbb{1}_B(y)$, 非负, 由定理 6.1.9, 可知 $\lambda(;B)=\int_B fy)dy=\int \mathbb{1}_B(y)f(\cdot,\ y)dy$ 是 $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ 上的测度

(2) 固定 $x\in[0,1], f(x,\cdot)$ 是 $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ 上非负可测函数, 而 dy 是 $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ 上的有限测度, 由定理 5.3.15 可知 $\lambda(x,\ B)=\int_B f(x,\ y)dy$ 是 $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ 上的概率测度.

于是由 (1)(2) 知 $\lambda(x,\ B)$ 是 $[0,1]\times\mathscr{B}([0,1])$ 上的转移测度.

练习 6.1.9 设 $(\Omega,\mathscr{F}_i), i=1,2$ 是可测空间,λ_1 是 $\mathscr{F}$ 上的 σ 有限测度,λ_2 是 $\Omega\times\mathscr{F}_2$ 上的 σ 有限转移测度,

$$\nu(B):=\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\mathbb{1}_B(\omega_1,\omega_2)\lambda_2(\omega_1,d\omega_2)\lambda_1(d\omega_1), B\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,$$

$A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$, 则 $\nu(A)=0$ 的充分与必要条件是存在一个 λ_1 零测集 N, 使 $\forall\omega_1\in\mathbb{N}^c, \lambda_2(\omega_1,A(\omega_1))=0$.

解:

由定义:

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(\omega_1,\omega_2)\lambda_2(\omega_1,d\omega_2)\lambda_1(d\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_1}\lambda_2(\omega_1,A_{\omega_1})\lambda_1(d\omega_1)\end{aligned}$$

此处 $A_{\omega_1}=\{\omega_2:(\omega_1,\omega_2)\in A\}$. 注意到 $\lambda_2(\omega_1,A_{\omega_1})$ 是关于 ω_1 的非负函数, 于是由引理 5.2.3(3) 知,$\int_{\Omega_1}\lambda_2(\omega_1,\ A_{\omega_1})\lambda_1(d\omega_1)=0$ 当且仅当 $\lambda_2(\omega_1,\ A_{\omega_1})=0,\text{a.s.}\omega_1-\lambda_1$.

于是 $\nu(A)=0$ 当且仅当存在 $N\in\Omega_1,s.t.\lambda_1(N)=0$, 且当 $\omega_1\in N^c$, 时 $\lambda_2(\omega_1,\ A_{\omega_1})=0$

练习 6.1.10 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i),i=1,2,3$ 是可测空间,λ 是 $\Omega_2\times\mathscr{F}_3$ 上的 σ 有限转移测度,f 是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$ 可测函数, 若积分

$$g(\omega_1,\omega_2):=\int_{\Omega_3} f(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,d\omega_3),\omega_i\in\Omega_i,i=1,2,$$

$\forall\omega_i,i=1,2$ 存在, 则 g 是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 可测的.

解:

(1) 首先证明对任意的柱集 $A=A_1\times A_3$, 其中 $A_1\in\mathscr{F}_1$ 且 $A_3\in\mathscr{F}_3$, 函数:

$$g(w_1,w_3)=\int_{\Omega_3} 1_A(w_1,w_3)\lambda(w_2,dw_3 \qquad (*)$$

是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测的, 事实上:

$$g(w_1,w_2)=1_{A_1}(w_1)\int_{\Omega_3} 1_{A_3}(w_3)\lambda(w_2,dw_3)=1_{A_1}(w_1)\lambda(w_2,A_3)\ ,$$

是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测的, 记 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$ 所有柱集.

(2) 再证对任意的 $A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$,$(*)$ 中定义的函数也是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测的, 为此运用 $\lambda-\pi$ 系方法, 记:

$\mathscr{M}:=\{A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3:\forall n\geqslant 1,\int_{B_{3,n}}1_A(w_1,\ w_3)\lambda(w_2,\ dw_3)\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 可测 $\}$

由于 λ 是 σ 有限转移测度, 故由定义, 对 $i=2,3$, 存在互不相交的 $\mathscr{F}_i$ 可测集 $\{B_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得:

$$\Omega_i=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_{i,n}$$

且对任意的 $m,n\in\mathbb{N}$

$$\sup_{w_2\in B_{3m}},\lambda(w_2,B_{3,n})<\infty.$$

由 *(1)* 知 $\mathscr{C}\subset M$. 注意到 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$. 如果能证明 $\mathscr{M}$ 是 λ 系, 则有 $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{M}$, 从而 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3=M$. 事实上, 易得 $\Omega_1\times\Omega_3\in\mathscr{C}\subset M$. 若 $A,B\in\mathscr{M}$ -且 $B\subset A$, 则:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_3}1_{A\backslash B}(w_1,w_3)\lambda(w_2,dw_3) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_{3,n}}1_{A\backslash B}(w_1,w_3)\lambda(w_2,dw_3)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{B_{3,n}}1_A(w_1,w_3)\lambda(w_2,dw_3)-\int_{B_{3,n}}1_B(w_1,w_3)\lambda(w_2,dw_3))\ ,\end{aligned}$$

可得 $A\backslash B\in M$. 又设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{M}\subset\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$, 且 $A_n\uparrow$, 由积分的单调收敛定理可知:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}An(w_1,\ w_3)\lambda(w_2,\ dw_3) &= \int_{\Omega_2}\lim_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{A_n}(w_1,\ w_3)\lambda(w_2,\ dw_3)\\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}}\int_{\Omega_2}\mathbb{1}_{A_n}(w_1,\ w_3)\lambda(w_2,\ dw_3)\end{aligned}$$

从而可知 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}An\in\mathscr{M}$. 故 $\mathscr{M}$ 是 λ. 系

(3) 对于任意的简单非负 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3$ 可测函数 f, 由 (1)(2) 函数:

$$\int_{\Omega_2} f(w_1,\ w_3)\lambda(w_2,\ dw_3) \qquad (**)$$

为非负 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2-$ 可测的, 再利用积分的单调收敛定理进一步可知对任意的非负 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_3-$ 可测函数 $f,(**)$ 定义的函数也是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2-$ 可测的.

练习 6.1.11 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i), i=1,2,3,4$ 是可测空间,λ_1,λ_2 分别是 $\Omega_1\times\mathscr{F}_2,\Omega_2\times\mathscr{F}_3$ 上的转移概率, 则由 $\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,B):=\int\lambda_2(\omega_2,B)\lambda_1(\omega,d\omega_2),\omega\in\Omega_1,B\in\mathscr{F}_3$ 定义的 $\lambda_1\circ\lambda_2$ 是 $\Omega_1\times\mathscr{F}_3$ 上的转移概率, 若 λ_3 是 $\Omega_3\times\mathscr{F}_4$ 的转移概率, 则 $(\lambda_1\circ\lambda_2)\circ\lambda_3=\lambda_1\circ(\lambda_2\circ\lambda_3)$

解:

一一验证转移概率的定义即可:

①$\forall B\in\mathscr{F}_3$, 由定理 *6.1.16*,$\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,B)$ 是 $\mathscr{F}_1$ 可测函数.

②$\forall\omega\in\Omega_1$, 由定理 *6.1.17*,$\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,B)$ 是 $\mathscr{F}_3$ 上的测度.

③ 由于 λ_1,λ_2 分别是 $\Omega_1\times\mathscr{F}_2,\Omega_2\times\mathscr{F}_3$ 上的转移概率, 故 $\forall\omega\in\Omega_1,\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,\Omega_3)=\int\lambda_2(\omega_2,\Omega_3)\lambda_1(\omega,d\omega_2)=\int\lambda_1(\omega,d\omega_2)=1.$

综上所述 $\lambda_1\circ\lambda_2$ 是 $\Omega_1\times\mathscr{F}_3$ 上的转移概率.

$\forall\omega_1 \in \Omega_1, B \in \mathscr{F}_4$, 可以计算得到：

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 \circ \lambda_2) \circ \lambda_3(\omega, B) &= \int \lambda_3(\omega_3, B)\lambda_1 \circ \lambda_2(\omega, d\omega_3) \\
&= \int \lambda_3(\omega_3, B) \int \lambda_2(\omega_2, d\omega_3)\lambda_1(\omega, d\omega_2) \\
&= \int\int \lambda_3(\omega_3, B)\lambda_2(\omega_2, d\omega_3)\lambda_1(\omega, d\omega_2) \\
\lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ \lambda_3) &= \int \lambda_2 \circ \lambda_3(\omega_2, B)\lambda_1(\omega, d\omega_2) \\
&= \int \left(\int \lambda_3(\omega_3, B)\lambda_2(\omega_2, d\omega_3)\right) \lambda_1(\omega, d\omega_2) \\
&= \int\int \lambda_3(\omega_3, B)\lambda_2(\omega_2, d\omega_3)\lambda_1(\omega, d\omega_2)
\end{aligned}$$

故有 $(\lambda_1 \circ \lambda_2) \circ \lambda_3 = \lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ \lambda_3)$

练习 6.1.12 设 $\lambda_i, i = 1, 2$ 是由转移概率矩阵 $\mathbb{P}_i$ 确定的 $\mathbb{N} \times \mathscr{N}, \mathscr{N} := \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ 上的转移概率, 则 $\lambda_1 \circ \lambda_2$ 是由 $\mathbb{P}_1 \bullet \mathbb{P}_2$(矩阵 $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ 的乘积) 确定的.

解:

由练习 *6.1.11* 可知,$\lambda_1 \circ \lambda_2$ 仍然为 $\mathbb{N} \times \mathscr{N}$ 上的转移概率,$\lambda_k(i, B) = \sum\limits_{j\in B}^{p_{ij}^{(k)}}$ $i \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{N}, k = 1, 2, p_{ij}^{(k)}$ 为矩阵 $\mathbb{P}_k$ 对应的第 i 行、第 j 列. 且由练习 *6.1.11* 的定义可知：

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \circ \lambda_2(i, B) &= \int \lambda_2(\omega_2, B)\lambda_1(i, d\omega_2), \omega_2 \in \mathbb{N} \\
&= \sum_{j\in B}\sum_{k\in N} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(2)}
\end{aligned}$$

而 $\sum_{k\in N} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(2)}$ 恰好为 $\mathbb{P}_1 \bullet \mathbb{P}_2$ 对应的第 i 行, 第 j 列, 故 $\lambda_1 \circ \lambda_2$ 是由 $\mathbb{P}_1 \bullet \mathbb{P}_2$ 确定的.

练习 6.1.13 设 $p(t;x,A),(t;x,A)\in[0,\infty)\mathbb{R}^3\times\mathscr{B}^3$ 是定义 *6.1.15* 所定义的, 试证: $\forall t,s\in[0,\infty), x\in\mathbb{R}^3, A\in\mathscr{B}$,

$$p(t+s;x,A)=\int_{\mathbb{R}^3} p(t;x,dy)p(s;y,A).$$

解:

PS: 题中所述的定义 *6.1.15* 给出因为定义 *6.1.15* 下的例 *5* 给出.

由定义 *6.1.15* 知:

$$p(t+s;x,A)=(2\pi(t+s))^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}\exp(-\frac{(y-x)^2}{2(t+s)})dy$$

则由定理 *5.3.15* 知:

$$\begin{aligned}
& p(t+s;x,A)\\
= & \int_{\mathbb{R}^3} p(t;x,dy)p(s;y,A)\\
= & \int_{\mathbb{R}^3}\int_A (2\pi s)^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{(z-y)^2}{2s})(2\pi t)^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{(y-x)^2}{2t})dzdy\\
= & (4\pi^2 ts)^{-\frac{3}{2}}\int_A\left(\int_{\mathbb{R}^3}\exp(-\frac{(z-y)^2}{2s})\exp(-\frac{(y-x)^2}{2t})dy\right)dz\\
= & (4\pi^2 ts)^{-\frac{3}{2}}\int_A \exp(-(\frac{z^2}{2s}+\frac{x^2}{2t}+\frac{(tz+sx)^2}{2ts(t+s)}))\left(\int_{\mathbb{R}^3}\exp(-\frac{y^2-2\frac{tz+sx}{t+s}+\frac{(tz+sx)^2}{(t+s)^2}}{\frac{2st}{t+s}})dy\right)dz\\
= & (2\pi(t+s))^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}\exp(-\frac{(z-x)^2}{2(t+s)})dz
\end{aligned}$$

即证.

练习 6.1.14 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间,$\mathcal{C}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数, 称 $\pi(x, A), x \in \Omega, A \in \mathscr{F}$ 为一概率核, 若它对每一 $A \in \mathscr{F}, \pi(\cdot, A)$ 为 $\mathcal{C}$ 可测函数, 对每一 $x \in \Omega, \pi(x, \cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率, 设 ν 是 $\mathscr{F}$ 上的任一概率, 试证

$$\nu\pi(\cdot) = \int \pi(x, \cdot)\nu(dx)$$

为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度.

解:

(1) 对于任意的 $A \in \mathscr{F}$, 注意到 $\pi(x, A) \geqslant 0$, 于是 $\nu\pi(A) = \displaystyle\int \pi(x,\ A)\nu(dx) \geqslant 0$. 且 $\nu\pi(\Omega) = \displaystyle\int \pi(x,\ \Omega)\nu(dx) = 1$.

(2) 任取可列集 $A_n \in \mathscr{F}, \forall n \geqslant 1$, 且两两不交, 对于任意的 $x \in \Omega, \pi(x, \cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度, 于是由测度的可列可加性知,$\pi(x, \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \pi(x,\ A_n)$

于是 $\nu\pi(\displaystyle\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) = \int \pi(x, \bigcup_{n\geqslant 1} A_n)\nu(dx) = \int \sum_{n\geqslant 1} \pi(x,\ A_n)\nu(dx) = \sum_{n\geqslant 1} \int \pi(x,\ A_n)\nu(dx) = \sum_{n\geqslant 1} \pi\nu(A_n)$.

综合 (1)(2) 知 $\pi\nu(\cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度.

6.2 Fubini 定理及其应用

练习 6.2.1 应用 *Fubini* 定理证明: 若 $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\xi^n$ 存在, 则:

$$\mathbb{E}\xi^n = n\int_0^\infty t^{n-1}[1 - F(t)]dt - n\int_{-\infty}^0 t^{n-1}F(t)dt.$$

解:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi^n &= \int_{\mathbb{R}} x^n F(dx)\\
&= \int_0^\infty \int_0^x nt^{n-1}dtF(dx) - \int_{-\infty}^0 \int_x^0 nt^{n-1}dtF(dx)\\
&= \int_0^\infty \int_t^\infty nt^{n-1}F(dx)dt - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t nt^{n-1}F(dx)dt\\
&= \int_0^\infty nt^{n-1}[1-F(t)]dt - \int_{-\infty}^0 nt^{n-1}F(t)dt
\end{aligned}$$

上面第三个等号运用了 *Fubini* 定理.

练习 6.2.2 设 c 为固定常数,$c>0$, 则 $\mathbb{E}|X|<\infty$ 的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|\geqslant cn)<\infty$. 特别是, 如果对于 c 的某个值上面的级数收敛, 则它对 c 的所有值也都收敛.

解:

对于任意固定常数 $c>0, \mathbb{E}|X|<\infty \Leftrightarrow \mathbb{E}\dfrac{|X|}{c}<\infty$

由习题 *6.2.1* 的结论可知:

$$\mathbb{E}\frac{|X|}{c} = \int_0^\infty P(|X|\geqslant\ ct)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}\mathbb{P}(|X|\leqslant ct)dt(*)$$

注意到当 $t\in[k,\ k+1]$, 时 $\mathbb{P}(|X|\geqslant c(n+1))\leqslant\mathbb{P}(|X|\geqslant\ ct)\geqslant\mathbb{P}(|X|\geqslant cn)$, 结合 $(*)$ 式 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(|X|\geqslant c(n+1))\leqslant\mathbb{E}\dfrac{|X|}{c}\leqslant\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(|X|\geqslant cn)$, 于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|\geqslant cn)\leqslant\mathbb{E}\dfrac{|X|}{c}\leqslant 1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|\geqslant cn)$, 于是 $\mathbb{E}\dfrac{|X|}{c}<\infty\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|\geqslant\ cn)<\infty$. 所以 $\mathbb{E}|X|<\infty\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(|X|\geqslant\ cn)<\infty$.

由上面的讨论, 如果对于某个 $c>0, \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geqslant cn)<\infty, \mathbb{E}|X|<\infty$, 则对任意的 $c>0, \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geqslant cn)<\infty$.

练习 6.2.3 $\forall r>0, E|X|^r<\infty$ 的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant n)<\infty$.

解:

由第习题 *6.2.1* 结论知

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|X|^r & =\int_0^{\infty} r t^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant t) d t \\
& =\sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} r t^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant t) d t .
\end{aligned}
$$

注意到 $\int_0^1 r t^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant t) d t \leqslant \mathbb{P}(\Omega) \leqslant 1$, 所以

$$
\mathbb{E}|X|^r<\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} r t^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant t) d t<\infty
$$

若 $r \geqslant 1$,

$$
\sum_{k=0}^{\infty} r k^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant k+1) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} r t^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant t) d t \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} r(k+1)^{r-1} \mathbb{P}(|X| \geqslant k) .
$$

又若 $r \geqslant 1, k \geqslant 1$,

$$
k^{r-1} \leqslant(k+1)^{r-1}=\frac{(k+1)^{r-1}}{k^{r-1}} k^{r-1} \leqslant 2^{r-1} k^{r-1},
$$

所以此时:

$$\sum^{\infty}\frac{1}{2^{r-1}}r(k+1)^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant(k+1))\leqslant\sum^{\infty}\int_k^{k+1}rt^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant t)dt\leqslant\sum 2^{r-1}rk^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k)\,.$$

于是

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{r-1}}rk^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}rt^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant t)dt\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{r-1}rk^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k)$$

若 $0<r<1$,

$$\sum^{\infty}r(k+1)^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k+1)\leqslant\sum^{\infty}\int_k^{k+1}rt^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant t)dt\leqslant\sum rk^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k)$$

所以

$$\sum_{k=2}^{\infty}rk^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}rt^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant t)dt\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}rk^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k)\,.$$

综上 $\forall r>0, \mathbb{E}|X|^r<\infty\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}rk^{r-1}\mathbb{P}(|X|\geqslant k)<\infty.$

练习 6.2.4 (分部积分公式)设 $g_i, i=1,2$ 为 $\mathscr{B}[a,b]$ 上的可测函数, 而 F_i 为 $[a,b]$ 上的分布函数,$G_i(x)=\displaystyle\int_a^x g_i(u)dF_i(u), x\in[a,b]$, 且 $\displaystyle\int_a^b|g_i(x)|dF_i(x)<\infty, i=1,2.$ 则

$$\int_a^b G_1(x)g_2(x)dF_2(x)=G_1(b)G_2(b)-\int_a^b g_1(x)G_2(x-)dF_1(x),$$

其中 $\displaystyle\int_a^x$ 理解为 $\displaystyle\int_{(a,x]}$.

解:

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b G_1(x)g_2(x)dF_2(x) \\
= & \int_a^b \left(\int_a^x g_1(u)dF_1(u)\right) g_2(x)dF_2(x) \\
= & \int_a^b \left(\int_a^x g_1(u)g_2(x)dF_2(x)\right) dF_1(u) \\
= & \int_a^b g_1(u)(G_2(b) - G(u-))dF_1(u) \\
= & G_1(b)G_2(b) - \int_a^b g_1(x)G_2(x-)dF_1(x)
\end{aligned}
$$

练习 6.2.5 试证定理 *6.2.9.*

解:

$f\mathbb{1}_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}$ 的积分存在, 由定理 *6.2.5* 可得:

$$
\begin{aligned}
& \int_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n} fd(\mu_1\times\mu_2\times\cdots\times\mu_n) \\
= & \int_{\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n} f\mathbb{1}_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}d(\mu_1\times\mu_2\times\cdots\times\mu_n) \\
= & \int_{\Omega_{i_n}}\left(\cdots\left(\int_{\Omega_{i_1}} f\mathbb{1}_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\mu_{i_1}(d\omega_{i_1})\right)\cdots\right)\mu_{i_n}(d\omega_{i_n}) \\
= & \int_{A_{i_n}}\left(\cdots\left(\int_{A_{i_1}} f(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\mu_{i_1}(d\omega_{i_1})\right)\cdots\right)\mu_{i_n}(d\omega_{i_n})
\end{aligned}
$$

练习 6.2.6 试证定理 *6.2.10.*

解:

由定理 6.2.9

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n} fd(\mu_1\times\mu_2\times\cdots\times\mu_n)\\
=\ &\int_{A_{i_n}}\left(\cdots\left(\int_{A_{i_1}} f(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\mu_{i_1}(d\omega_{i_1})\right)\cdots\right)\mu_{i_n}(d\omega_{i_n})\\
=\ &\prod_{k=1}^{n}\int_{A_k} f_k d\mu_k
\end{aligned}
$$

其中 $(i_1,\ldots,i_n)$ 是 $(1,\ldots,n)$ 的任意一个置换.

6.3 无穷维乘积概率

练习 6.3.1 证明定理 *6.3.3* 中定义的 $\mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ 在 $\varnothing$ 处连续.

解:

假定存在 $A_n\in\mathcal{C}, n\in\mathbb{N}, A_n\downarrow\varnothing$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}P^{\mathbb{N}}(A_n)>0$, 必要时可以在序列 A_n 首项前添加若干项 Ω, 且在两个集 A_n 和 A_{n+1} 之间适当重复若干项 A_n, 我们可以进一步假定 $A_n\in\mathscr{F}^{(n)}$, 因此有 $A_n=B^n\times\prod\limits_{j=n+1}^{\infty}\Omega_j$, 由于 $A_{n+1}\subset A_n$, 我们有 $B^{n+1}\subset B^n$. 此外, 对每个 $n>1$,

$$\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(A_n)=\int_{\Omega_1} g_n^{(1)}(\omega_1)\mathbb{P}_1 d(\omega_1),$$

其中

$$g_n^{(1)}(\omega_1)=\int_{\Omega_2}\mathbb{P}_2(\omega_1,d\omega_2)\ldots\int_{\Omega_n}\mathbb{1}_{B^n}(\omega_1,\ldots,\omega_n)\mathbb{P}_n(\omega_1,\ldots,d\omega_n)$$

由于 $\mathbb{1}_{B^{n+1}}(\omega_1,\ldots,\omega_{n+1})\leqslant\mathbb{1}_{B^n}(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, 故对固定的 $\omega_1, g_n^{(1)}$ 单调下降趋于某极限 $h_1(\omega)$. 由控制收敛定理, 我们有

$$\int_{\Omega_1} h_1(\omega_1)\mathbb{P}_1(d\omega_1)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(A_n)>0.$$

于是存在 $\omega_1' \in \Omega_1$, 使 $h_1(\omega_1') > 0$. 实际上, 必有 $\omega_1' \in B^1$. 否则, 对一切 $n > 1$ 有 $\mathbb{1}_{B^n}(\omega_1', \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0$, 从而 $g_n^{(1)}(\omega_1') = 0$, 这导致 $h_1(\omega_1') = 0.$, 现设 $n > 2$, 则

$$g_n^{(1)}(\omega_1') \quad = \quad \int_{\Omega_2} g_n^{(2)}(\omega_2)\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(\omega_1', d\omega_2),$$

其中

$$\begin{aligned} & g_n^{(2)}(\omega_2) \\ = \quad & \int_{\Omega_3} \mathbb{P}_3(\omega_1', \omega_2, d\omega_3) \ldots \int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{B^n}(\omega_1', \omega_2, \ldots, \omega_n)\mathbb{P}_n(\omega_1', \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n). \end{aligned}$$

如上所证, 可知 $g_n^{(2)}(\omega_2) \downarrow h_2(\omega_2)$. 由于 $g_n^{(1)} \to h(\omega_1') > 0$, 故存在 $\omega_2' \in \Omega_2$, 使得 $h_2(\omega_2') > 0$. 如上所证, 可知 $(\omega_1', \omega_2') \in B^2$.

最后, 由归纳法可得到一点列 $\{\omega_1', \omega_2', \ldots\}$, 使得 $\omega_j' \in \Omega_j$ 且 $(\omega_1', \ldots, \omega_n') \in B^n$. 因此最终由 $(\omega_1', \omega_2', \ldots) \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, 这导致矛盾. 故 $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ 在 $\varnothing$ 连续.

PS: 这样, 我们证明了 $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ 为集代数 $\mathcal{C}$ 上的概率测度, 由测度扩张定理即可得 *Tulcea* 定理.

7 不定积分与条件期望

7.1 符号测度的分解

练习 7.1.1 设 φ, μ_1, μ_2 分别是可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的符号测度与测度, 且 $\varphi = \mu_1 - \mu_2$, 则必有 $\varphi^+ \leqslant \mu_1, \varphi^- \leqslant \mu_2$, 其中 φ^+, φ^- 如定理 *7.1.5* 所定义 (这叫做 *hahn* 分解的最小性).

解:

设 $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ 为 φ 的 *Hahn* 分解. 由于 $\varphi = \mu_1 - \mu_2$, 其中 μ_1, μ_2 为测度, 则对于 $\forall A \in \mathscr{F}$:

$$\varphi^+(A) = \sup_{B \in A \bigcap \mathscr{F}} \varphi(B) \leqslant \sup_{B \in A \bigcap \mathscr{F}} \mu_1(B) = \mu_1(A)$$

故有 $\varphi^+ \leqslant \mu_1$, 注意到 $\varphi^+ - \varphi^- = \mu_1 - \mu_2$, 则有 $\varphi^- \leqslant \mu_2$, 即证.

练习 7.1.2 设 φ, μ 分别是可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的有限可加集函数和有限测度, 若 $\forall A_n : n \in \mathbb{N}$, 当 $\mu(A_n) \to 0$ 时, 有 $\varphi(A_n) \to 0$, 则 φ 是符号测度.

解:

$\Rightarrow$: 取 $A_n = \varnothing, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(\varnothing) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = 0$.

$\Leftarrow$: 任取 $\{B_n\} \subset \mathscr{F}$ 且 B_n 两两不交,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset \mathscr{F}$ 存在, 不妨记为 B. 则令 $A_n = B \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_l \downarrow \varnothing$. 故有:$\mu(A) = \mu(B) - \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k) \to 0, \varphi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(B_n) + \varphi(A_n)$. 由题意,$n \to \infty$ 时, 后一项趋于 *0*, 则有 $\varphi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

练习 7.1.3 试证定理 *7.1.9* 中的

$$\begin{aligned}
F^+(x) : &= \sup_{\substack{t_0 < \cdots < t_n \\ t_n = x, n \in \mathbb{N}}} \{\sum_{k=1}^{n} [F(t_k) - F(t_{k-1}]^+ + \frac{F(t_0)}{2}\} \\
F^-(x) : &= \sup_{\substack{t_0 < \cdots < t_n \\ t_n = x, n \in \mathbb{N}}} \{\sum_{k=1}^{n} [F(t_k) - F(t_{k-1}]^- - \frac{F(t_0)}{2}\}
\end{aligned}$$

其中

$$[b-a]^+ := \begin{cases} b-a, & b \geqslant a \\ 0, & b < a. \end{cases}, [b-a]^- := \begin{cases} 0, & b \geqslant a \\ a-b, & b < a. \end{cases},$$

解:

注意到 $\forall x, F(x) = F(t_n) - F(t_{n-1}) + F(t_{n-1} - \cdots - F(t_1) + F(t_1) - F(t_0) + F(t_0) = F(t_0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(F_{t_k} - F(t_{k-1}), t_0 < \cdots < t_n = x, n \in \mathbb{N}$. 故:

$$\begin{aligned} F^+ &= \frac{V_F + F}{2} = \frac{1}{2}(\sup_{\substack{t_0 < \cdots < t_n \\ t_n = x, n \in \mathbb{N}}} \{\sum_{k=1}^{\infty} |F_{t_k} - F(t_{k-1})|\} + F(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty}(F_{t_k} - F(t_{k-1})) \\ &= \sup_{\substack{t_0 < \cdots < t_n \\ t_n = x, n \in \mathbb{N}}} \{\sum_{k=1}^{n} [F(t_k) - F(t_{k-1}]^+ + \frac{F(t_0)}{2}\} \\ F^- &= \frac{V_F + F}{2} = \frac{1}{2}(\sup_{\substack{t_0 < \cdots < t_n \\ t_n = x, n \in \mathbb{N}}} \{\sum_{k=1}^{\infty} |F_{t_k} - F(t_{k-1})|\} - F(t_0) - \sum_{k=1}^{\infty}(F_{t_k} - F(t_{k-1})) \\ &= \sup_{\substack{t_0 < \cdots < t_n \\ t_n = x, n \in \mathbb{N}}} \{\sum_{k=1}^{n} [F(t_k) - F(t_{k-1}]^- - \frac{F(t_0)}{2}\} \end{aligned}$$

即证.

练习 7.1.4 试证下列各函数在其定义域上具有有限变差（以下设 $a < b, a, b \in \mathbb{R}$）:

(1)$[a, b]$ 上的单调函数 F;

(2)$[a, b]$ 上的 *Lipschitz* 函数 F;

(3)F 在 $[a, b]$ 上有有界导数.

解:

(1) 任取 $[a,\ b]$ 的分割 $\triangle_n : a = t_0 < t_1 . < t_n = b$,

$$V_F([a,\ b]) = \lim_{||\triangle_n||\to 0}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k) - F(t_{k-1})| = |F(b) - F(a)| \leqslant \infty.$$

故 F 具有有限方差

(2) 因为存在常数 $K > 0$, *s.t.* $\forall x, y \in [a,\ b], |F(x) - F(y)| \leqslant K|x - y|$, 所以 $V_F([a,b]) = \lim_{||\triangle_n||\to 0}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k) - F(t_{k-1})| \leqslant K \lim_{||\triangle_n||\to 0}\sum_{k=1}^{n}|t_k - t_{k-1}| = K(b-a) \leqslant \infty$. 故 F 具有有限方差

(3) 已知 F 在 $[a,b]$ 上有有界导数不妨设 $|F'(x)| < K, \forall x \in [a,\ b]$. 那么由微分中值定理 $|F(x) - F(y)| = |F(\xi)||x-y|(\xi$ 介于 x, y 之间 $\leqslant K|x-y|$, 则由 *(2)* 可知 F 具有有限变差.

练习 7.1.5 试证有限变差函数有界, 并举一反例说明逆命题不真.

解:

设 F 为 $[a,b](a,b \in [-\infty,\infty])$ 上的有界变差函数, 任意取定 $x_0 \in [a,\ b], \forall x \in [a,\ b]$, 则 $|F(x) - F(x_0)| \leqslant V_F([a,\ b])$, 于是 $|F(x)| \leqslant V_F([a,\ b]) + |F(x_0)| =: M < \infty, \forall x \in [a,\ b]$.

反例: 设 $F(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x},\ x \in [-\frac{2}{\pi},\ 0)\ ; \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$.

取 $[-\frac{2}{\pi},\ 0]$ 的分割 $1 \leqslant k \leqslant n, t_k = -\dfrac{2}{\pi k}, t_{n+1} = 0 \sum_{k=1}^{n}|F(t_{k+1}) - F(t_k)| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}|\sin(-\dfrac{\pi(k+1)}{2}) - \sin(-\dfrac{\pi k}{2})| = n - 1 \to \infty$. 所以 $|F(x)| \leqslant 1$, 在 $[a,\ b]$ 上有界但不是有界变差的.

练习 7.1.6 设 F, G 是 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的有限变差函数, 则它们的和差积仍然具有有限变差, 若还有 $\inf_{a<x<b}|G(x)| > 0$, 则 $\dfrac{F}{G}$ 亦然.

解:

由于 F, G 是 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的有限变差函数, 对已 $[a,b]$ 上的任意一分割 $\mathscr{J} = \{\{t_k : 0 \leqslant k \leqslant n\} : a = t_0 < \cdots < t)n = b, n \in \mathbb{N}\}, V_F[a,b] := \sup\{\sum\limits_k |F(t_k) - F(t_{k-1})| : \{t_k\} \in \mathscr{J}\} < \infty, V_G[a,b] < \infty$. 而对于任意一分割:

$$\sum_k |F(t_k) \pm G(t_k) - F(t_{k-1}) \mp G(t_{k-1})| \leqslant \sum_k |F(t_k) - F(t_{k-1})| + \sum_k |G(t_k) - G(t_{k-1})|$$

故可得 $V_{F\pm G}[a,b] \leqslant V_F[a,b] + V_G[a,b]$, 即得有界变差函数的和差均为有界变差函数.

而有界变差函数必为有界函数, 故 $\exists M, s.t. |F| \leqslant M, |G| \leqslant M, \forall x \in [a,b]$. 故由:

$$\begin{aligned}
& \sum_k |F(t_k)G(t_k) - F(t_{k-1})G(t_{k-1})| \\
= & \sum_k |F(t_k)G(t_k) - F(t_{k-1})G(t_k) + F(t_{k-1})G(t_k) - F(t_{k-1})G(t_{k-1})| \\
\leqslant & \sum_k |F(t_k)G(t_k) - F(t_{k-1})G(t_k)| + \sum_k |F(t_{k-1})G(t_k) - F(t_{k-1})G(t_{k-1})| \\
\leqslant & M(\sum_k |F(t_k) - F(t_{k-1})| + \sum_k |G(t_k) - G(t_{k-1})|)
\end{aligned}$$

故可得 $V_{FG}[a,b] \leqslant M(V_F[a,b] + V_G[a,b])$, 即有界变差函数的积也为有界变差函数.

假设 $\inf_{a<x<b}|G(x)| > 0$, 则仅需证明 $\dfrac{1}{G}$ 也为有界变差函数即可, 因为

$0<|G|\leqslant M$, 故 $\exists K, s.t|\dfrac{1}{G}|\leqslant K$

$$\begin{aligned}\sum_k\left|\frac{1}{G(t_k)}-\frac{1}{G(t_{k-1}}\right| &= \sum_k\left|\frac{G(t_k)-G(t_{k-1})}{G_(t_k)G(t_{k-1})}\right| \\ &\leqslant K^2\sum_k|G(t_k)-G(t_{k-1})|\end{aligned}$$

故可得 $V_{\frac{1}{G}}[a,b]\leqslant K^2V_G[a,b]$, 即可得 $\dfrac{F}{G}$ 也为有界变差函数.

7.2 Lebsgue 分解定理与 Radon-Nikodym 定理

在下面各题中, 除特殊声明外,φ 表示可测空间 $(\Omega,\mathscr{F}$ 上的符号测度（7.2.6 除外）,$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$ 表示 Hahn 分解,$|\varphi|=\varphi^++\varphi^-$,$\mu$ 表示测度,$A,B,\dots$ 表示 $\mathscr{F}$ 可测集.

练习 7.2.1 *若 $\mu(A_n)\to 0,(n\to\infty),A_n\in\mathscr{F}$ 时 $\varphi(A_n)\to 0(n\to\infty)$, 则 φ 是 μ 连续的; 若 φ 是有限的, 则反之亦真.*

解:

(1) 若 $A\in\mathscr{F}$, *s.t.* $\mu(A)=0$, 则 $A_n=A,\forall n\in\mathbb{N},A_n\in\mathscr{F}$, 且 $\mu(A_n)\to 0(n\to\infty)$. 所以由已知有 $\varphi(A)=\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=0$, 故 $\varphi\ll\mu$.

(2) φ 有限时, 假设命题不真, 于是存在 $\epsilon>0$, $\forall n\in\mathbb{N},A_n\in\mathscr{F}$, *s.t.* $\mu(A_n)<\dfrac{1}{2^n}$, 且 $|\varphi(A_n)|\geqslant\epsilon$. 令 $B:=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$,

$$\mu(B)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{k\geqslant n}A_k)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geqslant n}\mu(A_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{2^n}=0.$$

而

$$|\varphi|(B)=|\varphi|(\varlimsup_{n\to\infty}A_n)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}|\varphi|(A_n)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}|\varphi(A_n)|\geqslant\epsilon.$$

其中上式第一个不等号用到 *Fatou* 引理 *(*因为 φ 有限, 进而 $|\varphi|$ 有限, 所以这里 *Fatou* 引理可用*)*. 因为 $|\varphi|(B)=\varphi^+(B)+\varphi^-(B)\geqslant\epsilon$, 不妨设 $\varphi^+(B)>0,\varphi(B\cap P)=\varphi^+(B)>0$ *(*其中 P 的定义同 *7.1.5)* , 而 $\mu(B\cap P)\leqslant\mu(B)=0$, 这与 $\varphi\ll\mu$ 矛盾, 故 φ 有限时, 逆命题亦真

练习 7.2.2 若 $\{\mu_n\}$ 是测度序列, 试证: $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\mu_n\ll\mu:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\mu_k.$$

μ_n 能否换成 φ_n*?*

解:

(1) 当 $\{\mu_n : n\geqslant1\}$ 是测度序列时, $\mu_n\ll\mu:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\mu_k$, 这是因为, 若 $A\in\mathscr{F}$, *s.t.* $\mu(A)=0,\mu_n(A)\leqslant2^n\mu(A)=0$.

(2) 当 μ_n 换成 φ_n 时,φ_n 关于 $\varphi:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\varphi_k$ 不一定连续

反例*:* 设 φ_1,φ_2 为非零符号测度, 且满足 $\varphi_1=-\frac{1}{2}\varphi_2$. 令 $\varphi_k=0,\forall k\geqslant3$. 则对 $\forall A\in\mathscr{F},\varphi(A)=\varphi_1(A)+\dfrac{1}{2}\varphi_2(A)=0$, 但存在 $A\in\mathscr{F}$, *s.t.* $\varphi_1(A)\neq0,\varphi_2(A)\neq0$, 即 φ_1,φ_2 均不是关于 φ 连续的.

练习 7.2.3 *R-N* 导数的微分公式, 设 $\varphi\ll\nu$, 且 $\nu,\varphi,\varphi'\ll\mu$, 则:

$$\begin{aligned}\frac{d(\varphi+\varphi')}{d\mu}&=\frac{d\varphi}{d\mu}+\frac{d\varphi'}{d\mu}\qquad\mu\ a.e.\\ \frac{\varphi}{\mu}&=\frac{\varphi}{\nu}\frac{\nu}{\mu}\qquad\mu\ a.e.\end{aligned}$$

PS: 书中第一小问存在打印错误, 已改正.

解:

$\forall A\in\mathscr{F},\exists f,f',g\in\mathscr{F},\ s.t.$

$$\varphi(A)=\int_A fd\mu,\ \varphi'(A)=\int_A f'd\mu,\ \nu(A)=\int_A gd\mu,$$

且 $f,f',g,\mu-a.e.$ 唯一

(1) $\forall A\in\mathscr{F},(\varphi+\varphi')(A)=\int_A fd\mu+\int_A f'd\mu=\int_A(f+f')d\mu$, 因此 $\frac{d\varphi}{d\mu}+\frac{d\varphi'}{d\mu},\mu-a.e..$

(2) $\forall A\in\mathscr{F},\exists h\in\mathscr{F},\text{s.t.}\varphi(A)=\int_A hd\nu.$

$\nu\ll\mu$, 由推论 *7.2.7* 知, 当积分存在时,$\int_A hd\nu=\int_A h\dfrac{d\nu}{d\mu}d\mu.\int_A fd\mu$, 又 $\int_A fd\mu=\int_A h\dfrac{d\nu}{d\mu}d\mu$, 从而 $f=h\dfrac{d\nu}{d\mu}\mu-a.e.,$

练习 7.2.4 设 $\overline{\mu}_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k\to\overline{\mu},\overline{\nu}_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}\nu_n\to\overline{\nu}$, 其中带有附标的 μ,ν 都是有限的,$\overline{\mu},\overline{\nu}$ 是有限的, 并且 $\overline{\nu}_n\ll\overline{\mu}_n,\forall n\in\mathbb{N}$, 则

(1)$\dfrac{d\mu_1}{d\overline{\mu}_n}\to\dfrac{d\mu_1}{d\overline{\mu}}\qquad\overline{\mu}\ a.e.$

(2) 若 $\overline{\mu}_n\ll\overline{\nu},\forall n\in\mathbb{N}$, 则 $\dfrac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{\nu}}\to\dfrac{d\overline{\mu}}{d\overline{\nu}}\qquad\overline{\nu}\ a.e.$

(3)$\overline{\nu}\ll\overline{\mu}$, 且 $\dfrac{d\overline{\nu}_n}{d\overline{\mu}_n}\to\dfrac{d\overline{\nu}}{d\overline{\mu}}\qquad\overline{\mu}\ a.e.$

解:

(1)$\mu_n\ll\overline{\mu}$, 由 $R-N$ 定理, 存在 f_n 使得 $\mu_n=\int f_nd\overline{\mu}$ 成立, 令 $g_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f_n,\overline{\mu}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_n=\int\sum\limits_{k=1}^{n}f_kd\overline{\mu}=\int g_nd\overline{\mu}$, 由 $R-N$ 导数的唯一性知 $\dfrac{d\overline{\mu}_n}{\overline{\mu}}=g_n,\overline{\mu}-a.e.$ 又由 $\overline{\mu}_n\to\overline{\mu}\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}f_k$ 的极限存在, 且容易验证 1 即为极限. 由 $\mu_1\ll\overline{\mu}_n\ll\overline{\mu}$ 可得 $\dfrac{d\mu_1}{d\overline{\mu}}=\dfrac{d\mu_1}{d\overline{\mu}_n}\dfrac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{\mu}}$. 因为 $\dfrac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{\mu}}=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k\to1,\overline{\mu}-a.e$

得 $\frac{d\mu_1}{d\overline{\mu}_n} \to \frac{d\mu_1}{d\overline{\mu}}, \overline{\mu} - a.e$

(2) 类似 (1) 的证明, 仅需证明 $\overline{\mu} \ll \overline{\nu}$ 即有 $\frac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{\nu}} = \frac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{\mu}}\frac{d\overline{\mu}}{d\overline{\nu}}$, 由 (1) 知 $\frac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{\mu}} = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \to 1, \overline{\mu} - a.e$, 可得 $\frac{d\overline{\mu}_n}{d\overline{\nu}} \to \frac{d\overline{\mu}}{d\overline{\nu}}, \overline{\nu} - a.e.$

(3) 令 $f_k := \frac{d\nu_k}{d\overline{\mu}}, g_k := \frac{d\mu_k}{d\overline{\mu}}$, 同时注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = \frac{d\overline{\nu}}{d\overline{\mu}}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n = 1, \overline{\mu}\ a.e$, 同时:

$$\frac{d\overline{\nu_n}}{\overline{\mu_n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k}{\sum_{k=1}^{n} g_k}$$

故有 $\frac{\sum_{k=1}^{n} f_k}{\sum_{k=1}^{n} g_k} \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = \frac{d\overline{\nu}}{d\overline{\mu}}$

练习 7.2.5 试证: 要想 $\mathscr{F}$ 上的集函数 φ 是某一 $\mathscr{F}$ 可测函数 f 对 μ 的不定积分, 必须且只需 φ 为 σ 可加, 且对于每一集 $A := \{a \leqslant f \leqslant b\} \bigcap B, B \in \mathscr{F}$, 总有 $a\mu(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant b\mu(A)$.

解:

(充分性) 设 $\varphi(A) = \int_A f d\mu$. 由推论 *5.4.5* 知 φ 满足 σ-可加性 $\forall A := \{a \leqslant f \leqslant b\} \cap B, B \in \mathscr{F}$, 故 $a\int_A d\mu \leqslant \varphi(A) \leqslant b\mu(A)$.

(必要性) 先证 $\varphi \ll \mu$.

任取 $B \in \mathscr{F}$, 且 $\mu(B) = 0, \forall n \geqslant 1$, 令 $A_n := \{-n \leqslant f \leqslant n\} \cap B, A_n \uparrow B$. 由条件知 $0 = -n\mu(A_n) \leqslant \varphi(A_n) \leqslant n\mu(A_n) = 0$. 由符号测度 φ 下连续性知,$\varphi(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = 0$. 故 $\varphi \ll \mu$.

设 $\frac{d\varphi}{d\mu} := g$, 下证 $g = f, \text{a.s.} - \mu$.

如若不然, 即 $\mu(f \neq g) > 0$. 而

$$\mu(f \neq g) = \mu(\bigcup_{r_1, r_2 \in \mathbb{Q}} \{(f > r_1 > r_2 > g) \cup (f < r_1 < r_2 < g)\})$$

故 $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $s.t.$ $\mu\{(f > r_1 > r_2 > g) \cup (f < r_1 < r_2 < g)\} > 0$, 于是 $\mu(f > r_1 > r_2 > g) > 0$, 或者 $\mu(f < r_1 < r_2 < g) > 0$. 不妨设 $\mu(f > r_1 > r_2 > g) > 0$, 则 $A := \{f > r_1\}, \mu(A) > \mu(f > r_1 > r_2 > g) > 0$. 由条件知 $\varphi(A) \geqslant r_1\mu(A)$, 而由 $\varphi(A) = \int_A g d\mu$, 但 $\varphi(A) \leqslant r_2\mu(A) < r_1\mu(A)$, 得到矛盾, 故而 $\mu(f \neq g) = 0$.

练习 7.2.6 设 f 对 μ 的积分存在, 令 φ 是 f 关于 μ 的不定积分, 试证:

$$\varphi^+(A) = \int_A f^+ d\mu, \varphi^-(A) = \int_A f^- d\mu, |\varphi|(A) = \int_A |f| d\mu.$$

解:

PS:φ^- 应为测度, 故 $\varphi^- := \varphi^-(A) = -\int_A f^- d\mu$, 以下解答基于更正后的题目.

显然 φ 是 $\mathscr{F}$ 的符号测度, 由 *Hahn* 分解定理, 存在 $\varphi^+, \varphi^-, s.t. \varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, 且 $\forall A \in \mathscr{F}, \varphi(A) = \sup\limits_{B \in \mathscr{F} \bigcap A} \varphi(B), \varphi(A) = -\inf\limits_{B \in \mathscr{F} \bigcap A} \varphi(B)$. 记 $\mu_1 = \int_A f^+ d\mu, \mu_2 = \int_A f^- d\mu$, 则 $\varphi = \mu_1 - \mu_2$, 即 μ_1, μ_2 也为 φ 的一个分解, 由练习 *7.1.1* 中所证 *Hahn* 分解的最小性, 则由 $\varphi^+ \leqslant \mu_1, \varphi^- \leqslant \mu_2$. 同时 $\exists N \in \mathscr{F}, s.t. \Omega = N \bigcap N^c$ 且 $\forall x \in N f(x) \geqslant 0, x \in N^c, f(x) \leqslant 0$. 但注意到

$\forall A \in \mathscr{F}$, 有:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \int_A f^+ d\mu = \int_{A\bigcap N} f d\mu \\
&\leqslant \sup_{B\in\mathscr{F}\bigcap A} \int_B f d\mu = \varphi^+(A) \\
\mu_2 &= -\int_A f^- d\mu = -\int_{A\bigcap N^c} f d\mu \\
&\leqslant -\inf_{B\in\mathscr{F}\bigcap A} \int_B f d\mu = \varphi^-(A)
\end{aligned}$$

综上可得,$\varphi^+(A) = \mu_1 = \int_A f^+ d\mu, \varphi^-(A) = \mu_2 = \int_A f^- d\mu$, 而 $|\varphi|(A) = \varphi^+ + \varphi^- = \int_A f^+ + f^- d\mu = \int_A |f| d\mu$.

练习 7.2.7 设 f 为 $\mathscr{F}$ 可测函数, 且使得下式右边有意义, 则定义

$$\int f d\varphi := \int f d\varphi^+ - \int f d\varphi^-$$

称为 f 对 φ 的积分, 试证: 这种积分具有可测函数对测度积分的主要性质.

解:

性质:

(1) 若 $\int f, \int g$ 存在, 且 $\int f + \int g$ 有意义, 则 $f+g$ 有意义, 可测,$\int f+g$ 存在, 且 $\int f+g = \int f + \int g$.

证明*:* 因 $\int f, \int g$ 存在, 所以 $\int g d\varphi^+, \int g d\varphi^-$ 有意义, 因为 $\int f + \int g = \int f d\varphi^+ - \int f d\varphi^- + \int g d\varphi^+ - \int g d\varphi^- = \int f d\varphi^+ + \int g d\varphi^+ - (\int f d\varphi^- + \int g d\varphi^-)$ 有意义故 $\int f d\varphi^+ + \int g d\varphi^+, \int f d\varphi^- + \int g d\varphi^-$ 有意义, 由引理 *5.2.1 (1)* 又

$f+g$ 存在, 可测, 且 $\int fd\varphi^+ + \int gd\varphi^+ = \int(f+g)d\varphi^+, \int fd\varphi^- + \int gd\varphi^- = \int(f+g)d\varphi-$, 于是 $\int f + \int g = \int(f+g)d\varphi^+ - \int(f+g)d\varphi^- = \int f+g$.

(2) 若 $\int f$ 存在, 则 $\forall A \in \mathscr{F}, \int_A f$ 存在, 且当 $A \cap B = \varnothing, \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

证明: 因

$$
\begin{aligned}
\int f &= \int fd\varphi^+ - \int fd\varphi^- \\
&= \int f^+d\varphi^+ - \int f^-d\varphi^+ - \int f^+d\varphi^- + \int f^-d\varphi^- \\
&= \int f^+d\varphi^+ + \int f^-d\varphi^- - (\int f^-d\varphi^+ + \int f^+d\varphi^-)
\end{aligned}
$$

存在, 故 $\int f^+d\varphi^+ + \int f^-d\varphi^-, \int f^-d\varphi^+ + \int f^+d\varphi^-$ 不同时为 ∞, 于是 $\int_A f$ 存在, 而且 $\int_A fd\varphi^+, \int_A fd\varphi^-$ 存在, 当 $A \cap B = \varnothing$, 时,

$$
\begin{aligned}
\int_{A\cap B} f &= \int_{A\cap B} fd\varphi^+ - \int_{A\cap B} fd\varphi^- \\
&= \int_A fd\varphi^+ + \int_B fd\mu^+ - \int_A fd\varphi^- - \int_B fd\varphi^- \\
&= \int_A fd\varphi + \int_B fd\varphi.
\end{aligned}
$$

上式第二个等号由引理 *5.2.1 (2)* 可得

(3) 若 C 为有限复数,f 为实函数. 且 $\int f$ 存在或位可积复函数, 则 $\int(cf) = c\int f$.

证明:

$$\begin{aligned}\int(cf) &= \int(cf)d\varphi^+ - \int(cf)d\varphi^- \\ &= c\int fd\varphi^+ - c\int fd\varphi^- \\ &= c\int fd\varphi.\end{aligned}$$

上式第二个等号由引理 *5.2.1 (3)* 可得

(4) (控制收敛定理) 若 $f_n, n\in\mathbb{N}$ 为实可测函数列 g,h 可积. 当 $g\leqslant f_n\leqslant h$, $ae\ \forall n\in\mathbb{N}, f_n\to f$, ae 时, 有 $\int f_n\to\int f$

证明: 由定理 *5.4.3* 知:

$$\lim_{n\to\infty} f_n d\varphi^+ \to \int fd\varphi^+; \lim_{n\to\infty} f_n d\varphi^- \to \int fd\varphi^-$$

注意到 g,h, 可积, 有 $\int gd\varphi^+, \int gd\varphi^-, \int hd\varphi^+, \int hd\varphi^-$ 均有限. 故而 $\int fd\varphi^+, \int fd\varphi^-$ 为有限值, 因而 $\int f_n d\varphi\to\int fd\varphi$.

练习 7.2.8 集代数 $\mathscr{A}$ 上的 σ 可加集函数 φ 可以扩张为 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的符号测度的充分与必要条件是 φ 有下界或有上界, 若 φ 为 σ 有限, 则扩张唯一且 σ 有限.

解:

若 φ 可以扩张为 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的符号测度, 首先则为 $\mathscr{A}$ 上的符号测度, 故必然 φ 有上下界之一.

反之由定理 *7.1.6*, 在集代数 $\mathscr{A}$ 上 φ 存在 *Hahn* 分解: $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$, 且 φ^+,φ^- 为测度, 则有测度扩张定理可知,φ^+,φ^- 可以扩张为 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的

测度, 而其中任何一个有界则表示 φ 上有上界或下界, 且 $\varphi' = \varphi^+ - \varphi^-$ 在 $\sigma(\mathscr{A})$ 上成立, 且为符号测度, 故 φ' 是 φ 的扩张.

由测度扩张定理的唯一性的条件可知结论显然.

练习 7.2.9 若 μ 不是 σ 有限, 即使 φ 有限, 则 $Radon - Nikodym$ 定理也不一定成立.

解:

反例: $\Omega := [0,\ 1], \mathscr{F} := \{A : A \subset [0,\ 1], A$ 或者 A^C 可数$\}$, $\mu(A) := |A|$(A 的元素).

$\varphi(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ 可数} \\ 1, & A^C \text{ 可数} \end{cases}$

$\forall A \in \mathscr{F}$, 若 $\mu(A) = 0$, 则必有 $A = \varnothing$, 此时 $\varphi(A) = 0$, 故 $\varphi \ll \mu$.

易知 φ 是 $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上的有限测度,μ 是 $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上的测度, 但不是 σ-有限的, 假设 $\exists f \in \mathscr{F}$, $s.t.$

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu$$

$\forall x \in [0,\ 1]$, 有 $0 = \varphi(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = f(x)$. 即 $f(x) = 0, \forall x \in [0,\ 1]$. 若取 $A \in \mathscr{F}$, 且 A^C 则由上式有 $\varphi(A) = \int_A f d\mu = 0$, 而由 φ 的定义知 $\varphi(A) = 1$, 得到矛盾, 故不存在满足上式的 f.

7.3 条件期望的概念

练习 7.3.1 设随机变量 $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$(意指 X 服从具有参数 λ 的 $Poisson$ 分布), 随机变量 Y 在给定事件 $X = n$ 下的条件分布为:

$$\mathbb{P}(Y = m | X = n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = 1, 2, \ldots, n.$$

试证 $Y \sim \mathscr{P}(p\lambda)$.

解:

由推论 7.3.6 知 $\mathbb{P}(Y=m|X)=\sum_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(Y=m|X=n)1_{X=n}$, 所以:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=m) &= \mathbb{E}[P[Y=m|X]]=\mathbb{E}[\sum_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(Y=m|X=n)1_{X=n}] \\
&= \sum_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(Y=m|X=n)\mathbb{E}[1_{X=n}] \\
&= \sum_{n=m}^{\infty}\mathscr{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}(p\lambda)^m\frac{1}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= e^{-p\lambda}(p\lambda)^m
\end{aligned}$$

练习 7.3.2 用户在单位时间内向电话局要求通话的总时间平均值称为该电话局的话务量, 设单位时间内用户向电话局呼唤的次数 $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$(意指 N 服从具有参数 λ 的 *Poisson* 分布), 而每一用户的通话时间 $X_k \sim \mathscr{E}(\beta)$(表示 X_k 服从参数 β 的指数分布),$k \in \mathbb{N}$, 则该电话局的话务量是 $\frac{\lambda}{\beta}$.

解:

该电话局的话务量为:

$$\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{N}X_k)=\mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X_1.$$

而:

$$\mathbb{E}N=\sum_{n=0}^{+\infty}n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\lambda,\ \mathbb{E}X_1=\int_0^{+\infty}x\beta e^{-\beta x}dx=\frac{1}{\beta},$$

因此 $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{N} X_k) = \frac{\lambda}{\beta}$.

练习 7.3.3 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率分布密度 $p(x, y)$, 且 X 是可积随机变量, 则 $\mathbb{E}[X|X+Y=z]$ 可有下式给出:

$$\frac{\displaystyle\int xp(x, z-x)dx}{\displaystyle\int p(x, z-x)dx}.$$

解:

设 $g(z) = \dfrac{\displaystyle\int xp(x, z-x)dx}{\displaystyle\int p(x, z-x)dx}$ 则 $g(X+Y)$ 关于 $X+Y$ 可测是显然的, 欲证 $\mathbb{E}(X|X+Y=z) = g(z)$, 只需证 $\forall B \in \mathscr{B}$

$$\int_{X+Y\in B} XdP = \int_{X+Y\in B} g(X+Y)dP$$

成立.

$$\begin{aligned}
\int_{X+Y\in B} XdP &= \int\int_{x+y\in B} xp(x,\ y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{z\in B} xp(x,\ z-x)dxdz \\
\int_{X+Y\in B} g(X+Y)dP &= \int\int_{x+y\in B} g(x+y)p(x,\ y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{z\in B} g(z)p(x,\ z-x)dxdz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{z\in B} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, z-x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)dx} p(x,\ z-x)dxdz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{z\in B} xp(x,\ z-x)dxdz.
\end{aligned}$$

即证.

练习 7.3.4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布密度

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

其中 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,\rho\in(0,1)$, 试求 $\mathbb{E}[Y|X=x]$.

解:

带入前例得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|X=x) &= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2})\}dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2})\}dy} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y}{\sigma 2}-\rho\frac{x}{\sigma 1})^2-\frac{x^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\}dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y}{\sigma_2}-\rho\frac{x}{\sigma_1})^2-\frac{x^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}dy\}} \\
&= \frac{\rho\frac{x\sigma 2}{\sigma_1^{2\sqrt{2\pi}}}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\}}{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\}} \\
&= \frac{\rho x\sigma_2}{\sigma_1}
\end{aligned}$$

7.4 条件期望的性质

练习 7.4.1 在条件期望的控制收敛性（VI）中, 其他条件均成立, 将 $X_n\to X,\mathbb{P}\ a.e.$ 换成 $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$, 结果如何?

解:

练习 7.4.2 (1) 若 $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数,$\mathcal{C}\subset\mathcal{C}'$ 且 X' 是 $\mathcal{C}'$ 可测的,$\mathbb{E}XX',\mathbb{E}X$ 有限则

$$\mathbb{E}[XX'|\mathcal{C}]]=\mathbb{E}[X'\mathbb{E}[X|\mathcal{C}']|\mathcal{C}],\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\ a.e.$$

(2) 若 (1) 成立, 则定理 *7.4.3* 及定理 *7.4.5* 成立.

解:

(1)

法一*: (*利用了定理 *7.4.5.)* $\mathbb{E}[XX'|\mathcal{C}]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[XX'|\mathcal{C}']|\mathcal{C}]=\mathbb{E}[X'\mathbb{E}[X|\mathcal{C}']|\mathcal{C}]$.

法二*:* 由于 $\mathbb{E}(XX'|\mathcal{C})\in\mathcal{C}$, 因此即证 $\forall A\in\mathcal{C}$

$$\int_A\mathbb{E}(XX'|\mathcal{C})dP=\int_A X'\mathbb{E}(X|\mathcal{C}')dP,$$

又 $\int_A\mathbb{E}(XX'|\mathcal{C})dP=\int_A XX'dP$, 转化为证明 $\forall A\in\mathcal{C}\subset\mathcal{C}',\int_A XX'dP=\int_A X'\mathbb{E}(X|\mathcal{C}')dP$.

1. 若 X' 为示性函数 $\mathbb{1}_B,\forall B\in\mathcal{C}'$,

$$\int_A\mathbb{1}_B\mathbb{E}(X|\mathcal{C}')dP=\int_{A\cap B}\mathbb{E}(X|\mathcal{C}')dP=\int_{A\cap B}XdP=\int_A XI_BdP$$

知等式成立

2. 若 X' 为非负简单函数, 利用积分的线性性质可证.

3. 若 X' 为非负可测函数, 由单调收敛定理知成立

4. 若 X 为一般可测函数, 可分解为正部与负部, 由 *3* 立得.

法三: 即证 $\forall A \in \mathcal{C}$

$$\int_A \mathbb{E}(X'\mathbb{E}(X|\mathcal{C}')|\mathcal{C})dP = \int_A XX'dP.$$

又 $\int_A \mathbb{E}(X'\mathbb{E}(X|\mathcal{C}')|\mathcal{C})dP = \int_A X'\mathbb{E}(X|\mathcal{C}')dP = \int_A \mathbb{E}(XX'|\mathcal{C}')dP = \int_A XX'dP,$ 得证.

(2) 令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}', \mathbb{E}[XX'|\mathcal{C}] = \mathbb{E}[X'\mathbb{E}[X|\mathcal{C}]|\mathcal{C}] = X'\mathbb{E}[X|\mathcal{C}]$, 即得定理 7.4.3.

令 $X' = 1$, a.s., $\mathbb{E}[X|\mathcal{C}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{C}']|\mathcal{C}]$, 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{C}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{C}]|\mathcal{C}']$. 即得定理 7.4.5.

练习 7.4.3 设 $\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数列, 且 $\mathscr{F}_n \uparrow, X_n$ 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的,$n \in \mathbb{N}$, 若 $\forall n, m(m > n)$, 有

$$\mathbb{E}[X_m|\mathscr{F}_n] = X_n(\geqslant X_n, \leqslant X_n), \qquad a.e.,$$

则称 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为一 $\mathscr{F}_n$ 鞅（相应的, 下鞅, 上鞅）,$\sigma(X_1, \dots, X_n)$ 鞅（下鞅, 上鞅）简称为鞅（相应的, 下鞅, 上鞅）, 是证明:

(1)$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为 $\mathscr{F}_n$ 鞅（下鞅, 上鞅）的充分与必要条件是

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n(\text{相应的：} \geqslant X_n, \leqslant X_n);$$

(2) 设 $Y_n, n \in \mathbb{N}$ 为独立随机变量序列, 若 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\mathbb{E}Y_n = 0$（相应的 $\geqslant 0, \leqslant 0$）, 则 $\{X_n := \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k : n \in \mathbb{N}\}$ 为鞅（相应地：下鞅, 上鞅）.

解:

(1) 必要性显然. (充分性) 利用数学归纳法证明: $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n \Rightarrow \mathbb{E}[X_m|\mathscr{F}_n] = X_n, \forall m > n$.

(i) 当 $m = n + 1$, 时, 为已知结论.

(ii) 假设当 m 时成立, 那么

$$\mathbb{E}[X_{m+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{m+1}|\mathscr{F}_m]|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X_m|\mathscr{F}_n] = X_n.$$

上式第二个等号是由第 *(i)* 条得出, 第三个等号是由归纳假设得出.

下鞅, 上鞅证法类似, 只需利用条件期望的单调性即可.

(2) 由 $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n, \forall n \geqslant 1$, 可知 $\mathscr{F}_n = \{X_1, \cdots, X_n\} = \{Y_1, \cdots, Y_n\}, \forall n \geqslant 1$, 则 Y_{n+1} 与 $\mathscr{F}_n$ 独立, 由定理 *7.4.2* 知 $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}] = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n+1} Y_k|\mathscr{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n} Y_k|\mathscr{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\
&= \sum_{k=1}^{n} Y_k + \mathbb{E}[Y_{n+1}] = X_n.
\end{aligned}$$

练习 7.4.4 随机变量序列 $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 称为马尔科夫过程, 如果 $\forall n \in \mathbb{Z}_+, B \in \mathscr{B}$, 有

(1) $$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_1, X_2, \ldots, X_n = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_n) \qquad a.e$$

试证: (1) 与下列各命题等价 *(*都是指对任何 $n \in \mathbb{Z}_+$ 而言*)*:

(2)$\mathbb{E}[Y|X_1, X_2, \ldots, X_n] = \mathbb{E}[Y|X_n], \forall Y \in \sigma(X_{n+1})$.

(3)$\mathbb{E}[Y_1, Y_2, \ldots, Y_m|X_1, X_2, \ldots, X_n] = \mathbb{E}[Y_1, Y_2 \ldots, Y_m|X_n], \forall Y_k \in \sigma(X_{n+k}), k = 1, 2, \ldots, m$.

(4)$\mathbb{E}[Y|X_1, X_2, \ldots, X_n] = \mathbb{E}[Y|X_n], \forall Y \in \sigma(\{X_m : m > n\})$.
(5)$\mathbb{P}(FB|X_n) = \mathbb{P}(F|X_n)\mathbb{P}(B|X_n), \forall B \in \sigma(X_1, X_2 \ldots, X_n), F \in \sigma(\{X_m : m > n\})$.

解:

$(1) \Rightarrow (2)$

因为 $Y \in \sigma(X_{n+1}) \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{B}\ s.t.\ Y = f(X_{n+1})$. 故欲证 (2) , 只需证

$$\forall f \in \mathscr{B},\ \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_1,\ \cdots,\ X_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n]\ (*)\ .$$

(i) 当 f 为示性函数时, 由 *(1)* 可得 *(*)* 式成立于是当 f 为非负简单函数时, 利用条件期望的线性性质, 可得 *(*)* 成立.

(ii) 对于任意非负可测函数 f,$\exists$ 非负简单函数列 $f_n \uparrow f$, 这样由条件期望的单调收敛定理, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_1,\ \cdots,\ X_n] &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_1,\ \cdots,\ X_n] \\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n].\end{aligned}$$

(iii) 对于一般可测函数 f, 可以分解为正部与分布, 利用上面的 *(ii)* 及条件期望的线性性质, 可得 f 满足 $(*)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ 用数学归纳法证明.

(i) 当 $m = 1$, 由 *(2)* 知 $\mathbb{E}[Y_1|X_1,\ \cdots,\ X_n] = \mathbb{E}[Y_1|X_n], \forall Y_1 \in \sigma(X_{n+1})$ 成立

(ii) 假设结论对 m 成立. 即:

$$\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_m|X_1,\ \cdots,\ X_n]=\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_m|X_n],\forall Y_1\in\sigma(X_{n+1}),\cdots,Y_m\in\sigma(X_{n+m})$$

$\forall Y_1\in\sigma(X_{n+1})$, , $Y_{m+1}\in\sigma(X_{n+m+1})$, 则有:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_{m+1}|X_1,\ \cdots,\ X_n]\\
\xRightarrow{\text{定理7.4.5}}\ &\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_{m+1}|X_1,\ \cdots,\ X_{n+m}]|X_1,\ \cdots,\ X_n]\\
\xRightarrow{\text{定理7.4.3}}\ &\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_m\mathbb{E}[Y_{m+1}|X_1,\ \cdots,\ X_{n+m}]|X_1,\ \cdots,\ X_n]\\
\xRightarrow{\text{由(2)}}\ &\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_m\mathbb{E}[Y_{m+1}|X_{n+m}]|X_1,\ \cdots,\ X_n]\\
\xRightarrow{\text{归纳假设}}\ &\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_m\mathbb{E}[Y_{m+1}|X_{n+m}]|X_n]\\
\xRightarrow{\text{由(2)}}\ &\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_m\mathbb{E}[Y_{m+1}|X_1,\ \cdots,\ X_{n+m}]|X_n]\\
\xRightarrow{\text{定理7.4.3}}\ &\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_mY_{m+1}|X_1,\ \cdots,\ X_{n+m}]|X_n]\\
\xRightarrow{\text{定理7.4.5}}\ &\mathbb{E}[Y_1,\ \cdots,\ Y_mY_{m+1}|X_n].
\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) 我们先用 $\lambda-\pi$ 系方法证明:

$$\forall A\in\sigma\ (\{X_m\ :\ m>n\})\ ,\ \mathbb{E}[1_A|X_1,\ \cdots,\ X_n]=\mathbb{E}[1_A|X_n].$$

令 $\Lambda:=\{A\in\sigma\ (\{X_m\ :\ m>n\})\ :\ \mathbb{E}[1_A|X_1,\ \cdots,\ X_n]=\mathbb{E}[1_A|X_n]\}$.
令 $\mathcal{A}:=\{\{\bigcap_{i=1}^m X_{n+i}\in\bigcap_{i=1}^m C_i\}:C_i\in\mathscr{B},\ i=1,\ \cdots,\ m,\ m\geqslant 1\},\mathcal{A}$ 为 π 系,
且 $\sigma(\mathscr{B})=\sigma(\{X_m:m>n\})$.
由 *(3)* 知, 对于 $\forall n,m\geqslant 1,\forall B_k\in\sigma(X_{n+k})$, $k=1,\cdots,m$,

$$\mathbb{E}[1_{B_1}\times\cdots\times 1_{B_m}|X_1,\ \cdots,\ X_n]=\mathbb{E}[1_{B_1}\times\cdots\times 1_{B_m}|X_n].$$

于是 $\mathcal{A} \in \Lambda$.

下证 Λ 是一 λ 系.

(i) 显然有 $\emptyset, \Omega \in \Lambda$

(ii) 如果 $A, B \in \Lambda$, 且 $A \subset B$, 则:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1_{B\setminus A}|X_1,\ \cdots,\ X_n] &= \mathbb{E}[1_B|X_1,\ \cdots,\ X_n] - \mathbb{E}[1_A|X_1,\ \cdots,\ X_n] \\ &= \mathbb{E}[1_B|X_n] - \mathbb{E}[1_A|X_n] = \mathbb{E}[1_{B\setminus A}|X_n]. \end{aligned}$$

故 Λ 对真差封闭. *(iii)* 设 $A_n \in \Lambda$, 且 $A_n \uparrow$, 则:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} A_n|X_1,\ \cdots,\ X_n] &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[A_k|X_1,\ \cdots,\ X_n] \\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[A_k|X_n] \\ &= \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} A_n|X_n] \end{aligned}$$

故 Λ 对不降并封闭.

于是 Λ 是 λ 系. 所以 $\sigma(\{X_m:\ m > n\}) \in \Lambda$. 类似 (1) $\Rightarrow$ (2) 的方法容易得到 (4) 对所有的 $f \in \sigma(\{X_m : m > n\})$ 成立

(4) $\Rightarrow$ (5)

$$\begin{aligned} P[FB|X_n] &= \mathbb{E}[P[FB|X_1,\ \cdots,\ X_n]|X_n] \\ &= \mathbb{E}[1_B P[F|X_1,\ \cdots,\ X_n]|X_n] \\ &= \mathbb{E}[1_B P[F|X_n]|X_n] \\ &= P[F|X_n]|\mathbb{E}[1_B|X_n]. \end{aligned}$$

(5) $\Rightarrow$ (1)*: 令 $B = \Omega$, 及 $F = \mathbb{1}_{X_{n+1}\in B}$, 即可得 (1).*

练习 7.4.5

解:

由 $\mathbb{E}[Y|\mathcal{C}]=X,\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{C}]=X^2$ 可得 $X,X^2\in\mathcal{C}$.

所以有:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-Y)^2|\mathcal{C}] &= \mathbb{E}[X^2-2XY+Y^2|\mathcal{C}]=X^2-2X\mathbb{E}[Y|\mathcal{C}]+\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{C}]\\ &= X^2-2X^2+X^2=0\end{aligned}$$

所以 $\mathbb{E}[(X-Y)^2]=0,\ \rightarrow (X-Y)^2\geqslant 0\text{a.s.}$, 即得 $X=Y\ \ a.s.$

7.5 条件概率分布

练习 7.5.1 设 X_T 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 到 $(\mathbb{R}^T,\mathscr{B}^T)$ 上的可测映射,$\mathcal{C}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数, 则 $\mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\omega,B),(\omega,B)\in\Omega\times\mathscr{B}^T$ 是 X_T 在 $\mathcal{C}$ 之下的条件概率分布的充分必要条件是下述二条件同时成立:

(1)$\mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\omega,B)$ 是 $(\Omega,\mathcal{C})$ 到 $(\mathbb{R}^T,\mathscr{B}^T)$ 的转移概率*;*

(2)$\forall B^T\in\mathscr{B}^T,C\in\mathcal{C}$,

$$\int_C \mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\cdot,B^T)d\mathbb{P}=\mathbb{P}(C\bigcap\{X_T\in B^T\}).$$

解:

(必要性) 如果 $\mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\omega,\ B)$ 是 X_T 在 $\mathcal{C}$ 之下的条件概率分布, 则:

(1) 固定 $B\in\mathscr{B}^T,\mathbb{P}^{\mathcal{C}}B)$ 是 $\mathcal{C}$ 可测函数; 固定 $\omega,\mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\omega,\ \cdot)$ 是 $(\Omega,\ \mathcal{C})$ 上的概率分布

(2) 由条件期望的定义 $\forall C \in \mathcal{C}$,

$$\mathbb{P}(C \cap \{X_T \in B\}) = \int_C 1_{\{X_T \in B\}} dP = \int_C \mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\cdot, B^T)\mathbb{P}(d\omega) \ .$$

故 $\mathbb{P}(C \cap \{X_T \in B\}) = \int_C \mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\omega,\ B)\mathbb{P}(d\omega)$

(充分性) 由 *(1)* 知, 对任意固定的,$B^T \in \mathscr{B}^T$, 有 $\mathbb{P}^{\mathcal{C}}B) \in \mathcal{C}$, 且

$$\int_C 1_{\{X_T \in B\}} dP = \mathbb{P}(C \cap \{X_T \in B\}) \overset{(2)}{=} \int_C \mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\cdot, B^T)\mathbb{P}(d\omega) \ ,$$

由条件期望的定义得, $\mathbb{P}(X^T \in \mathscr{B}^T|\mathcal{C}) = \mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\omega,\ B)$. 由定义 7.5.4 知 $\mathbb{P}^{\mathcal{C}}(\omega,\ B)$ 为 X^T 在 $\mathcal{C}$ 条件概率分布.

练习 7.5.2 设 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mathbb{P})$ 上的样本函数, 具有 n 维正态分布 $N(0, D)$, 令 $Y(x) = xD^{-1}x', x \in \mathbb{R}^n$, 试求 X 在 $\sigma(Y)$ 之下的条件概率分布.

解:

即要计算 $\mathbb{P}(X = x|Y = y), x \in \mathbb{R}^n, y > 0.$, 而 Y 的概率分布为自由度 n 的卡方分布, 注意到当 $Y = y = x'D^{-1}x$ 时, 所得到的 x 的概率是 n 维正态分布上的等高线, 故由古典概率论条件概率的定义可得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x|Y = y) &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \\
&= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|D|^{-\frac{1}{2}}}{\frac{y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}|D|^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

注意到最后一式正好为 n 维椭球面 $Y=x'D^{-1}x$ 的表面积, 即:

$$\int_{x'D^{-1}x=y}\mathbb{P}(X=x|Y=y)=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}|D|^{\frac{1}{2}}}\int_{x'D^{-1}x=y}=1$$

故得到的概率分布为 n 维椭球面上的均匀分布.

练习 7.5.3 称随机变量序列 $X_n, n\in\mathbb{N}$ 为一马尔科夫序列, 如果对任意的 $B\in\mathscr{B},(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},n=2,3,\ldots,$ 有

$$\mathbb{P}(X_n\in B|X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1})=\mathbb{P}(X_n\in B|X_{n-1}=x_{n-1}),a.e.$$

若给定一组转移概率序列 $\mathbb{P}_1(B_1),B_1\in\mathscr{B},\ldots,\mathbb{P}_n(x_{n-1},B_n),B_n\in\mathscr{B},x_{n-1}\in\mathbb{R},n=2,3,\ldots,$ 则有一定义在概率空间 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathscr{B}^{\mathbb{N}},\mathbb{P}^{\mathbb{N}})$ 上的马尔科夫序列 $X_n,n\in\mathbb{N}$, 使得 X_n 在 X_{n-1} 之下的条件概率 $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(X_n\in B|X_{n-1}=x_{n-1})=\mathbb{P}_n(x_{n-1},B),a.e.,B\in\mathscr{B},x_{n-1}\in\mathbb{R},n=2,3,\ldots;$ 而

$$\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(X_1\in B)=\mathbb{P}_1(B),B\in\mathscr{B}.$$

解:

定义 $P(x_1,\ ,\ x_{n-1},\ B):=\mathbb{P}_n(x_{n-1},\ B)$. 由 $\mathbb{P}_n(x_{n-1},\ B)$ 是 *(*$\mathbb{R}$*, B)* 到 *(*$\mathbb{R}$*, B)* 上的转移概率知 $P(x_1,\ \cdots\ ,\ x_{n-1},\ B)$ 是 $(\mathbb{R}^{n-1},\ \mathscr{B}^{n-1})$ 到 $(\mathbb{R},\ \mathscr{B})$ 的转移概率. 由 *Tulcea* 定理知存在 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathscr{B}^{\mathbb{N}})$ 上的概率测度 $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$, 使得对于任意的 $B^n\in\mathscr{B}^n$, 有:

$$\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(B^n\times\Pi_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{R})=\int\cdots\int_{B^n}\mathbb{P}_n(x_{n-1},\ dx_n)\cdots\mathbb{P}_2(x_1,\ dx_2)\mathbb{P}_1(dx_1)\ ,$$

从而对任意的 $f\in\mathscr{B}^n$,

$$\int f(x_1,\ \cdots\ ,\ x_n)d\mathbb{P}^{\mathbb{N}}=\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\ \cdots\ ,\ x_n)\mathbb{P}_n(x_{n-1},\ dx_n)\cdots\mathbb{P}_2(x_1,\ dx_2)\mathbb{P}_1(dx_l)$$

.

定义空间 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathscr{B}^{\mathbb{N}})$ 上的一列随机变量 $X_n(x) := x_n, \forall x = (x_1,\ x_2,\ \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \geqslant 1$. 下证：对于任意的 $B \in \mathscr{B}$, *(1)* $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(X_n \in B | X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}_n(x_{n-1},\ B)$, a.e.

(2) $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(X_n \in B | X_1 = x_1,\ \cdots,\ X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}_n(x_{n-1},\ B)$, a.e. 从而 $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ 是马尔科夫序列.

对于 (1) : 对于任意的 $A \in \mathrm{B}$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{X_{n-1} \in A} 1_{X_n \in B} d\mathbb{P}^{\mathbb{N}} \\
=& \int \cdots \int_{x_{n-1} \in A, x_n \in B} \mathbb{P}_n(x_{n-1},\ dx_n) \cdots \mathbb{P}_2(x_1,\ dx_2) \mathbb{P}_1(dx_1) \\
=& \int \cdots \int_{x_{n-1} \in A} \mathbb{P}_n(x_{n-1},\ B) \mathbb{P}_{n-1}(x_{n-2},\ dx_{n-1})\ \cdots\ \mathbb{P}_2(x_1,\ dx_2) \mathbb{P}_1(dx_1) \\
=& \int_{X_{n-1} \in A} \mathbb{P}_n(X_{n-1},\ B) d\mathbb{P}^{\mathbb{N}},
\end{aligned}
$$

又因为 $\mathbb{P}_n(X_{n-1},\ B)$ 关于 $(\mathbb{R},\ \mathrm{B})$ 可测, 于是 *(1)* 得证

(2) : 对于任意的 $A_1, \cdots, A_{n-1} \in \mathrm{B}$,:

$$
\begin{aligned}
&\int_{X_1 \in A_1} x_{n-1 \in A_{n-1}} 1_{X_n \in B} d\mathbb{P}^{\mathbb{N}} \\
=& \int \cdots \int_{x_1 \in A_1, \cdots, x_{n-1} \in A_{n-1}, x_n \in B} \mathbb{P}_n(x_{n-1},\ dx_n)\ \cdots\ \mathbb{P}_2(x_1,\ dx_2) \mathbb{P}_1(dx_1) \\
=& \int \cdots \int_{x_1 \in A_1, \cdots, x_{n-1} \in A} \mathbb{P}_n(x_{n-1},\ B) \mathbb{P}_{n-1}(x_{n-2},\ dx_{n-1}) \cdots \mathbb{P}_2(x_1,\ dx_2) \mathbb{P}_1(dx_1) \\
=& \int_{X_1 \in A_1, \ldots, x_{n-1} \in A} \mathbb{P}_n(X_{n-1}, B) d\mathbb{P}^{\mathbb{N}}
\end{aligned}
$$

又因为 $\mathbb{P}_n(X_{n-1},\ B)$ 关于 $(\mathbb{R}^{n-1},\ \mathrm{B}^{n-1})$, 可测, 于是 *(2)* 得证. 初始分布为：

$$\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(X_1 \in B) = \int_{x_1 \in B} \mathbb{P}_1(dx_1) = \mathbb{P}_1(B)\ ,\ B \in \mathscr{B}.$$

8　收敛概念

8.1　几乎处处收敛

练习 8.1.1 证明 *8.1.6*

解:

任取 $\varepsilon > 0$, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_k < \infty$, 故 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $\forall n \geqslant n_0, \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k < \varepsilon$, 下证 $\forall n \geqslant n_0$ 有

$$\bigcup_{v=1}^{\infty} \{d(f_{n+v},\ f_n) \geqslant \} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} \{d(f_{k+1},\ f_k) \geqslant \delta_k\}$$

任取 $\omega \in \bigcup_{v=1}^{\infty} \{d(f_{n+v},\ f_n) \geqslant \varepsilon\}$, 则存在 $v \geqslant 1, s.t. d(f_{n+v},\ f_n) \geqslant \varepsilon$. 若 $\omega \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} \{d\ (f_{k+1},\ fk) \geqslant \delta_k\}, \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=n}^{\infty} \{d(f_{k+1},\ f_k) < \delta_k\}$, 即 $d(f_{k+1},\ f_k) < \delta_k, \forall k \geqslant n. \Rightarrow d(f_{n+v},\ f_n) \leq \sum_{k=n}^{n+v-1} d(f_{k+1},\ f_k) < \sum_{k=n}^{n+v-1} \delta_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k < \varepsilon$, 矛盾, 故 $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} \{d(f_{k+1},\ f_k) \geqslant \delta_k\}$, 所以 $\forall n \geqslant n_0$,

$$\mu(\bigcup_{v=1}^{\infty} \{d(f_{n+v},\ f_n) \geqslant \leqslant \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{d(f_{k+1},\ f_k) \geqslant \delta_k\}) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(\{d(f_{k+1},\ f_k) \geqslant \delta_k\})\ .$$

因为上述右端在 $n \to \infty$ 时, 收敛到 *0*, 故 $\mu(\bigcup_{v=1}^{\infty} \{d(f_{n+v},\ f_n) \geqslant \to 0.$

因为 $f_n, n \in \mathbb{N}$ *a.e.* 相互收敛, 则存在 $N \in \Omega$, *s.t.* $\mu(N) = 0$. $\forall \omega \in N^C$,$\{f_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{E}$ 中基本列 $(\mathbb{E},\ d)\pi$, $\lim\limits_{n\to 1} f_n(\omega)$ 存在, 记 $f(\omega) := \lim\limits_{n\to 1} f_n(\omega)$, 则 $f_n \to f$ *a.e.*

练习 8.1.2 若 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为测度空间,μ 有限,$\{B_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{F}$, 且 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(B_n) \geqslant \delta$, 试证在 Ω 中至少存在一个点 ω 属于无穷多个 B_n.

解:

否则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n = \varnothing, 0 = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_n) \geqslant \mu(B_n) \geqslant \delta$. 矛盾.

练习 8.1.3 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量列 $X_n \xrightarrow{a.e.} X$ 有限, 试证:$\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\mathbb{P}(\sup |X_n| \leqslant M(\varepsilon)) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

解:

由于 X 有限, 则 $\lim\limits_{n\to 1} \mathbb{P}(|X| > n) = 0$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, s.t.

$$\mathbb{P}(|X| > N_1) < \tfrac{\varepsilon}{4})$$

因为 $X_n \to X - a.e$, 则

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} |X_n - X| > 1) < \frac{\varepsilon}{4}$$

于是存在 $N_2>0, \text{s.t.}\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2}^{\infty}|X_n-X|>1)<\frac{\varepsilon}{4}$, 可得:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2}^{\infty}|X_n|>1+N_1)\\
\leqslant\ &\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2}^{\infty}|X_n|>1+N_1,\ |X|\leqslant N_\infty)+\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2}^{\infty}|X_n|>1+N_1,\ |X|>N_1)\\
\leqslant\ &\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2}^{\infty}|X_n-X|>1)+\mathbb{P}(|X|>N_1)<\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

对于 $\forall k\leqslant N_2$,$\exists M_k s.t\ \mathbb{P}(|X_k|>M_k)<\frac{\varepsilon}{2N_2}$. 于是若取 $M:=\max\{N_1+1,\ M_1,\ \cdots,\ M_{N_2}\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup|X_n|\leqslant M(\varepsilon)) &= \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X_n|\leqslant M(\varepsilon)\})\\
&= 1-\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X_n|\leqslant M(\varepsilon)\})\\
&\geqslant 1-\sum_{k=1}^{N_2}\mathbb{P}(\{|X_k|>M()\})-\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2}^{\infty}\{|X_n|\leqslant M(\varepsilon)\})\\
&\geqslant 1-\frac{\varepsilon}{2N_2}\times N_2-\frac{\varepsilon}{2}=1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

练习 8.1.4 对概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上的任何随机变量列 $\{X_n:n\in\mathbb{N}\}$, 存在常数序列 $\{A_n,n\in\mathbb{N}\}$, 使得

$$\frac{X_n}{A_n}\xrightarrow{a.e.}0.$$

解:

令 $A_n=\max\{2^n,X_n\mathbb{1}_{[-n,n]}\}$, 由于 X_n 均为随机变量, 故 $|X_n|<\infty$. 而 $X_n\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]}\to 0$. 故可得:

$$\frac{X_n}{A_n} \xrightarrow{a.e.} 0.$$

练习 8.1.5 举例说明, 当 μ 不是有限测度时,*Egorov* 定理不成立.

解:

取 $\Omega = (0,\ \infty)$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}((0,\infty))\mu$ 为 $(0,\infty)$ 上的 *Lebesgue* 测度.$f_n(x) = (x+\dfrac{1}{n})^2, f(x) = x^2$, 则 $f_n(x) \to f(x)$a.s. 取 $\delta = 1, \forall A_\delta \in \mathcal{F}, \text{s.t.}\mu(A_\delta^C) < 1. \Rightarrow \mu(A_\delta) = \infty$. 所以

$$\sup_{x\in A_\delta} d(f_n(x),\ f(x)) = \sup_{x\in A_\delta}(\frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n}) = \infty.$$

8.2 依测度收敛

练习 8.2.1 如果 $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$, 那么 $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$.

解:

因为 $x_n \xrightarrow{P} X$ 和 $Y_n \xrightarrow{P} Y$, 所以 X, Y 几乎处处有限. 于是对任意的 $\eta > 0$, 存在 $M_1 > 0$ 使得 $\mathbb{P}(|X| > M_1) < \eta$ 和 $\mathbb{P}(|Y| > M_1) < \eta$. 于是对任意的 $M_2 > M_1, \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|X_nY_n - XY| > \varepsilon)\\
\leqslant\ &\mathbb{P}(|X_n||Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|X_n - X||Y| > \frac{\varepsilon}{2})\\
\leqslant\ &\mathbb{P}(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2M_2}) + \mathbb{P}(|X_n| > M_2) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2M_1}) + \mathbb{P}(|Y| > M_1)\\
\leqslant\ &\mathbb{P}(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2M_2}) + \mathbb{P}(|X_n| > M_2,\ |X| > M_1)\\
&+\mathbb{P}(|X_n - X| > M_2 - M_1) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2M_1}) + \mathbb{P}(|Y| > M_1)\\
\leqslant\ &2\eta + \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2M_2}) + \mathbb{P}(|X_n - X| > M_2 - M_1) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2M_1})
\end{aligned}$$

因为 $x_n \xrightarrow{P} X$ 和 $Y_n \xrightarrow{P} Y$, 所以同时令 $n \to \infty$, 则得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbb{P}(|X_nY_n - XY| >) \leqslant 2\eta$, 由 η 的任意性, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_nY_n - XY| >) = 0$, 即 $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$

练习 8.2.2 若 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, f$ 为有界一致连续函数, 试证 $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$.

解:

因为 $f(x)$ 一致连续, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x_1, x_2, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 所以

$$\{|f(X_n(\omega)) - f(X(\omega))| \geqslant \varepsilon\} \subset \{|X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \delta\}.$$

因为 $X_n \xrightarrow{P} X$, 所以当 $n \to \infty$, 上式右端收敛到 0. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\{|f(X_n) - f(X(\omega))| \geqslant \varepsilon\} = 0$. 即 $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. 又因为 f 是有界变量, 由推论 8.2.6 得到 $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$

练习 8.2.3 $X_n \downarrow X$ *a.e.* 每一 X_n 可积, 且 $\inf_n EX_n > -\infty$, 试证 $EX_n \to EX$.

解:

于是由单调收敛定理 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_1 - X_n) = \mathbb{E}(X_1 - X)$, 因为 X_1, 可积, 所以 $\mathbb{E}X_1$ 有限, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

PS: 单是对本题的结论, 条件 $\inf\limits_n \mathbb{E}X_n > -\infty$ 多余, 如果用控制收敛定理证明本题的话, 需要此条件.

8.3 L^r 收敛

练习 8.3.1 证明 *Holder* 不等式及 *Minkowski* 不等式.

解:

(1) 由习题 2.1.1

$$\frac{|X|}{[\mathbb{E}|X|^p]^{\frac{1}{p}}}\frac{|Y|}{[\mathbb{E}|Y|^q]^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{|X|^p}{p\mathbb{E}|X|p}+\frac{|Y|^q}{q\mathbb{E}|Y|q},$$

两边取期望可得 $\dfrac{\mathbb{E}|XY|}{[\mathbb{E}|X|^p]^{\frac{1}{p}}[\mathbb{E}|Y|^p]^{\frac{1}{p}}}\leqslant 1$, 即证.

(2)$r=1$ 时显然,$r\geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X+Y|^r &\leqslant \mathbb{E}|X+Y|^{r-1}|X|+\mathbb{E}|X+Y|^{r-1}|Y|\\ &\leqslant [\mathbb{E}|X+Y|^r]^{\frac{r-1}{r}}[\mathbb{E}|X|^r]^{\frac{1}{r}}+[\mathbb{E}|X+Y|^r]^{\frac{r-1}{r}}[\mathbb{E}|Y|^r]^{\frac{1}{r}}\\ &\leqslant [\mathbb{E}|X+Y|^r]^{\frac{r-1}{r}}([\mathbb{E}|X|^r]^{\frac{1}{r}}+[\mathbb{E}|Y|^r]^{\frac{1}{r}})\end{aligned}$$

所以得到 $[\mathbb{E}|X+Y|^r]^{\frac{1}{r}}\leqslant[\mathbb{E}|X|^r]^{\frac{1}{r}}+[\mathbb{E}|Y|^r]^{\frac{1}{r}}$.

练习 8.3.2 试完成定理 *8.3.18* 中的 $(2)\Rightarrow(1)$

解:

先证明

$$|a+b|^r\leqslant(2^{r-1}\bigvee 1)(|a|^r+|b|^r)\qquad(*)$$

当 $0<r<1$, 是考察函数 $x^r+(1-x)^r$, 在 $[0,1]$ 上的最小值在 $x=0,1$ 上去的, 于是有 $x^r+(1-x)^r\geqslant 1$.

用 $\dfrac{|a|}{|a+b|}$ 代替上式的 a, 即可得 $(*)$.

当 $r\geqslant 1$ 时, 函数 x^r 是凸函数, 故有 $1_{a^r+\frac{1}{2}(1-a)^r}2\geqslant(1_{a+\frac{1}{2}(1-a))^r}2=(\dfrac{1}{2})^r$,

用 $\dfrac{|a|}{|a+b|}$ 代替上式中的 a, 即得 $(*)$.

因为 $\mathbb{E}|X|^r \leqslant (2^{r-1}\bigvee 1)(\mathbb{E}|X_n-X|^r+\mathbb{E}|X_n|^r)<\infty$. 因为 $X_n \xrightarrow{L^r} X$, 即是 $\mathbb{E}|X_n-X|^r\to 0$, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N, \mathbb{E}|X_n-X|^r<\varepsilon$. 于是当 $n>N, \mathbb{E}|X_n|^r \leqslant (2^{r-1}\bigvee 1)(\mathbb{E}|X_n-X|^r+\mathbb{E}|X|^r) \leqslant (2^{r-1}\bigvee 1)(\varepsilon+\mathbb{E}|X|^r)$, 所以 $\sup\limits_n \mathbb{E}|X_n|^r \leqslant \max\{\{\mathbb{E}|X_k|^r : 1\leqslant k\leqslant N\},\ (2^{r-1}\bigvee 1)(\varepsilon+\mathbb{E}|X|^r)\}<\infty$.

因为 $\mathbb{E}|X_k|^r<\infty, k=1,N, \mathbb{E}|X|^r<\infty$, 所以由可积函数的绝对连续性, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得可测集 A, 只要 $\mathbb{P}(A)<\delta$, 就有 $\mathbb{E}[|X_k|^r,\ A]<\varepsilon, k=1,N, \mathbb{E}[|X|^r, A]<$. 当 $n>N, \mathbb{E}[|X|^r,\ A] \leqslant (2^{r-1}\bigvee 1)(\mathbb{E}[|X_n-X|^r, A]+\mathbb{E}[|X|^r,\ A]) < (2^{r-1}\bigvee 1)(\varepsilon+\varepsilon)$ 所以 $\sup\limits_n \mathbb{E}[|X_n|^r,\ A] < 2(2^{r-1}\bigvee 1)\varepsilon$ 所以 $\{|X_n|^r\}_{n\geqslant 1}$, 积分一致绝对联系, 所以由引理 8.3.16 可得 $\{|X_n|^r\}_{n\geqslant 1}$ 一致可积.

练习 8.3.3 设 $r\in(0,\infty)$, 则 $X_n \xrightarrow{r} X$ 当且仅当 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 及下列两条之一成立:

(1)$\mathbb{E}|X_n|^r \to \mathbb{E}|X|^r<\infty$;

(2)$|X_n|^r$ 一致可积.

解:

本题与定理 *8.3.18* 完全重复, 故不再赘述.

练习 8.3.4 若 $\sup_n |X_n|\in L^r(\mathbb{P})$, 且 $X_n \xrightarrow{a.e.} X$, 则 $X\in L^r(\mathbb{P})$, 且 $X_n \xrightarrow{r} X$.

解:

由 $Fatou$ 引理可知 $\mathbb{E}X=\mathbb{E}\varliminf\limits_{n\to\infty} X_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{X} \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\sup\limits_n X_n<\infty$. 故 $X\in L^r(\mathbb{P})$. 由控制收敛定理,$\mathbb{E}|X_n-X|^r \leqslant \mathbb{E}|X_n|^r+\mathbb{E}|X|^r$, 而后者为可积函数, 故控制收敛定理得 $\mathbb{E}|X_n-X|^r\to 0$, 即 $X_n \xrightarrow{r} X$.

练习 8.3.5 证明引理 *8.3.17* 的 *(II)*.

解:

首先存在子列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 使得

$$\overline{\lim_{n\to 1}}\int|X_n-X|=\lim_{k\to 1}\int|X_{n_k}-X|.$$

因为 $U_n\xrightarrow{\mu}U, X_n\xrightarrow{\mu}X$, 所以分别存在 $\{U_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ 和 $\{X_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ 的子列 $\{U_{n_{k_i}}\}_{i\geqslant 1}, \{x_{n_{k_i}}\}_{i\geqslant 1}$ 当 $i\to\infty$ 时,$U_{n_{k_i}}\to U, X_{n_{k_i}}\to X$ *a.s.*, 由习题 5.4.2 知当 $i\to\infty\int|X_{n_{k_i}}-X|\to 0$, 于是 $\overline{\lim_{n\to 1}}\int|X_n-X|=\lim_{k\to 1}\int|X_{n_k}-X|=\lim_{i\to 1}\int|X_{n_{k_i}}-X|=0$. 所以 $\lim_{n\to 1}\int|X_n-X|=0$.

8.4 条件期望的进一步性质

8.5 概率测度的收敛

练习 8.5.1 证明淡收敛的极限是唯一的.

解:

设 $F_n\xrightarrow{V}F$, 且 $F_n\xrightarrow{V}G$. 则由淡收敛的定义知:

$$F_n(x)\to F(x)\ ,\ \forall x\in C(F)\ ,$$

$$F_n(x)\to G(x)\ ,\ \forall x\in C(G)\ .$$

于是由数列极限的唯一性有 $F(x)=G(x)\ ;\forall x\in C(F)\cap C(G)$. 由单调函数的不连续点为一至多可数集, 得 $(C(F)\cap C(G))^C$ 至多可数, 于是对任意的 $x\in(C(F)\cap C(G))^C$, 存在 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}\in C(F)\cap C(G)$, 使得 $x_n\downarrow x$,

由分布函数的右连续性知,$F(x) = \lim_{n\to 1} F(x_n) = \lim_{n\to 1} G(x_n) = G(x)$. 可得 $F(x) \equiv G(x)$ 即淡收敛的极限是唯一的.

练习 8.5.2 证明定义 *8.5.1* 所定义的 $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ 上的概率测度的弱收敛与定义 *8.5.5* 一致.

解:

定义 8.5.1 $\Rightarrow$ 定义 8.5.5 : 由定义对任意的 $f \in C_b$, 有 $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ 于是对于任意的 $f \in C_0$, 有 $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ 这样由定理 8.5.4 可知,μ_n 淡收敛于 μ. 特别地, 取 $f = 1$, 则由定义 8.5.5 知 $\mu_n(\mathbb{R}) \to \mu(\mathbb{R})$. 即证.

定义 8.5.5 $\Rightarrow$ 定义 8.5.1 : 设 F_n 是 μ_n 的分布函数,F 是 μ 的分布函数, 因为 F 的不连续点至多可数, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $L > 0$, 使得 $F(-L) < \varepsilon, 1 - F(L) < \varepsilon$. 对于上述的 $\varepsilon > 0$ 因为 $F_n(L) \to F(L)$, $F_n(-L) \to F(-L)$, 所以存在 $N > 0$, 使得 $F_n(-L) < 2\varepsilon, 1 - F(L) < 2\varepsilon$. 任取 $f \in C_b$, 设 $|f| \leqslant M$, 有:

$$
\begin{aligned}
& |\int f d\mu_n - \int f d\mu| \\
\leqslant \ & |\int_{(-oo,-L]\cup(L_1)} f dF_n| + |\int_{(-oo,-L]\cup(L_1)} f dF| + |\int_{(-L,L]} f dF_n - \int_{(-L,L]} f dF| \\
\leqslant \ & 4M + |\int_{(-L,L]} f dF_n - \int_{(-L,L]} f dF|
\end{aligned}
$$

用定理 8.5.4(1) 可得当 $n \to \infty$, 上式最后一部分也收敛到 0, 即 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |\int f d\mu_n - \int f d\mu| \leqslant 4M\varepsilon$, 由 ε 的任意性可得,$\int f d\mu_n \to \int f d\mu$.

练习 8.5.3 证明定理 *8.5.14*

解:

$\Rightarrow$: $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, 则自然 $\{\mu_n\}$ 相对紧, 在完备可分空间中, 由定理 *8.5.12*,$\{\mu_n\}$ 胎紧. 同时自然有 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

$\Leftarrow$: 由定理 *8.5.12*,$\{\mu_n\}$ 胎紧则有相对紧, 故 $\{\mu_n\}$ 任何子列都存在弱收敛的子列, 而由于 $\{\mu_n\}$ 已经淡收敛,$\{\mu_n(\mathbb{R}^k)\}$ 为常数序列, 故 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, 而由推论 *8.5.13*,$\{\mu_n\}$ 的任意子列都有子列收敛到同一概率测度. 故 $\{\mu_n\}$ 弱收敛.

练习 8.5.4 证明: $\mathbb{R}$ 上的概率分布函数族 $\{F_\alpha\}$ 所对应的概率测度族相对紧的充分必要条件是当 $x \to -\infty$ 和 $x \to \infty$ 时,$\{F_\alpha\}$ 对 α 一致收敛.

解:

设 F_α 对应的概率测度是 μ_α. 因为 $\mathbb{R}$ 是完备可分的, 所以由定理 8.5.12 知 $\{\mu_\alpha\}$ 相对紧等价于胎紧, 下面证明: $\{\mu_\alpha\}$ 胎紧的充要条件是 $\{F_\alpha\}$ 对 α 一致收敛.

必要性: 因为 $\{\mu_\alpha\}$ 胎紧, 所以对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 K 使得对于任意的 $\alpha, \mu_\alpha(K^C) < \varepsilon$. 因为 K 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集, 故而有界, 所以存在 $M > 0$ 使得 $K \subset [-M,\ M]$. 于是 $\mu_\alpha([-M,\ M]^C) < \varepsilon$. 所以对于任意的 $x > M, \alpha, F_\alpha(-x) < \varepsilon, 1 - F_\alpha(x) < \varepsilon$. 即当 $x \to -\infty$ 和 $x \to \infty$ 时 F_α 对 α 一致收敛.

充分性: 因为 $\{F_\alpha\}$ 对 α 一致收敛, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} F_\alpha(x) = 1, \lim\limits_{x\to-\infty} F_\alpha(x) = 0$, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时, 对于任意的 $\alpha, F_\alpha(-x) < \varepsilon, 1 - F_\alpha(x) < \varepsilon$. 取 $K = [-M,\ M]$, 则 K 是紧集, 且对于任意的 $\alpha, F_\alpha(K^C) < \varepsilon$.

即证 $\{F_\alpha\}$ 胎紧

练习 8.5.5 设与随机变量族 $\{X_\alpha\}$ 相应的概率分布族 $\{\mu_\alpha\}$, 如果对某个实数 $r>0, \mathbb{E}|X_\alpha|^r$ 对 α 有界, 则 μ_α 相对紧.

解:

即可说明 $\exists M>0, \sup \mathbb{E}|X|^r<M \Rightarrow \mu_\alpha(|X|>A)\}<\dfrac{\mathbb{E}|X|^r}{A^r}$, 由此可得 μ_α 是胎紧的，由定理 *8.5.12*，可得 μ_α 相对紧。

8.6 几个收敛之间的关系注记

9 大数定律、随机级数

9.1 简单的极限定理及其应用

练习 9.1.1 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\theta)$, 为一族概率空间,$\Theta$ 为一有限或无限区间,$X_n, n\in \mathbb{N}$ 为 *r.v.* 列, 且

$$\mathbb{E}_\theta X_n=\theta, \sigma_n^2(\theta)=\mathbb{E}_\theta(X_n-\theta)^2=\sigma_\theta^2(X_n)$$

设 $u\in C_n(\Theta)$(Θ 上的一切有界连续函数组成的集）, 且 $\forall\theta\in\Theta, \sigma_n^2(\theta)\to 0(n\to\infty)$, 试证:

$$\mathbb{E}_\theta u(X_n)\to u(\theta)(n\to\infty), \qquad \theta\in\Theta.$$

而且在 $\sigma_n^2(\theta)\to 0$ 一致成立的每个闭区域上, 上述收敛是一致的.

试应用上述结论于下列各种情形, 并得出相应结论:

(1) 设 $\mathbb{P}_\theta(X_n=\dfrac{k}{n})=C_n^k\theta^k(1-\theta)^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n;$

(2) 设 $\mathbb{P}_\theta(X_n=\dfrac{k}{n})=e^{-n\theta}\dfrac{(n\theta)^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots,n,\ldots;$

(3) 设 X_n 在 $\mathbb{P}_\theta$ 之下服从参数为 n 和 $\dfrac{n}{\theta}$ 的 Γ 分布, 即

$$\mathbb{P}_\theta(X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (\frac{n}{\theta})(\frac{nt}{\theta})^{n-1}e^{-\frac{nt}{\theta}}, & x > 0. \end{cases}$$

对于 (2)(3) 两种情形,n 为正实数时亦有相应结论, 不过在 (3) 中 $(n-1)!$ 应用 $\Gamma(n)$ 代替.

解:

由题意已经有 $X_n \xrightarrow{2} \theta$, 故有 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta, u$ 是连续函数, 由连续变换定理可知,$u(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} u(\theta), u$ 有界, 在概率测度下, 则依概率收敛与 r 阶收敛等价, 故 $u(X_n) \xrightarrow{1} u(\theta)$, 自然有

$$\mathbb{E}_\theta u(X_n) \to u(\theta)(n \to \infty), \qquad \theta \in \Theta.$$

若 $X_n \xrightarrow{2} \theta$, 关于 θ 是一致的, 则后续的操作皆关于关于 θ 是一致的, 自然有上述收敛关于 θ 是一致的.

(1)$\mathbb{E}X_n = \theta, DX_n = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n} \to 0.$

(2)$\mathbb{E}X_n = \theta, DX_n = \dfrac{\theta}{n} \to 0.$

(3)$\mathbb{E}X_n = \theta, DX_n = \dfrac{\theta^2}{n} \to 0.$

练习 9.1.2 设 $f \in C[0,1], 0 \leqslant f \leqslant 1, \xi_n, n \in \mathbb{N}$ 为独立 $r.v.$, 且 $\xi_n \sim U(0,1), \forall \varepsilon > 0$, 令 $\eta_\varepsilon(n) := \mathbb{1}_{\{\xi_n \leqslant f(\varepsilon n)\}}, n \in [0, \dfrac{1}{\varepsilon}]$, 试证:

$$\varepsilon \sum_{0 \leqslant \varepsilon n \leqslant 1} \eta_\varepsilon(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^1 f(r)dr(n \to \infty).$$

解:

则 $\eta_\varepsilon(n)$ 仍然是独立序列.$\sup \sigma(\eta_\varepsilon(n)) = 0, \mathbb{E}\sum\limits_{0 \leqslant \varepsilon n \leqslant 1}(\eta_\varepsilon(n)) = \sum\limits_{0 \leqslant \varepsilon n \leqslant 1}\mathbb{E}(\eta_\varepsilon(n)) = \sum\limits_{0 \leqslant \varepsilon n \leqslant 1}\mathbb{P}(\xi_n \leqslant f(\varepsilon n)) = \sum\limits_{0 \leqslant \varepsilon n \leqslant 1} f(\varepsilon n)$ 而由黎曼积分的定义可知:

$$\varepsilon \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1} f(\varepsilon n) \to \int_0^1 f(r)dr(n\to\infty)$$

故由定理 *9.1.5* 可知有：

$$\varepsilon \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1} \eta_\varepsilon(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^1 f(r)dr(n\to\infty).$$

练习 9.1.3 f 的假设同上题, 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 为 *i.i.d.*, 且 $X_n \sim U(0,1)^2$, 设 $X_n = (X_{n1}, X_{n2})$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{n2}\leqslant f(X_{n1})\}} \xrightarrow{a.s.\text{或}\mathbb{P}} \int_0^1 f(r)dr(n\to\infty).$$

解:

不难验证 X_{n1}, X_{n2} 独立且同 $(0,1)$ 上的均匀分布, 类似练习 *9.1.2*, 可得 $\mathbb{1}_{\{X_{n2}\leqslant f(X_{n1})\}}$ 仍然是独立序列.$\sup\sigma(\mathbb{1}_{\{X_{n2}\leqslant f(X_{n1})\}}) = 0$, 而 $\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_{n2}\leqslant f(X_{n1})\}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{n2})$. 同时注意到 $\sup\sigma(f(X_{n2})) \leqslant 1 < \infty$. 故 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{n2}) \to \mathbb{E}f(X_{n2}) = \int_0^1 f(r)dr$. 综上所述, 由定理 *9.1.5* 可知：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{n2}\leqslant f(X_{n1})\}} \xrightarrow{a.s.\text{或}\mathbb{P}} \int_0^1 f(r)dr(n\to\infty).$$

练习 9.1.4 $f, \xi_n, \eta_\varepsilon(n)$ 的假设同练习 *9.1.2*, 设 $\varphi \in C[0,1]$, 则

$$\varepsilon \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1} \varphi(\varepsilon n)\eta_\varepsilon(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^1 \varphi(r)f(r)dr(n\to\infty).$$

解:

则 $\varphi(\varepsilon n)\eta_\varepsilon(n)$ 仍然是独立序列.$\sup\sigma(\varphi(\varepsilon n)\eta_\varepsilon(n)) = \varphi(\varepsilon n)^2\sigma(\eta_\varepsilon(n)) = 0, \mathbb{E}\sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1}(\varphi(\varepsilon n)\eta_\varepsilon(n)) = \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1}\varphi(\varepsilon n)\mathbb{E}(\eta_\varepsilon(n)) = \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1}\varphi(\varepsilon n)\mathbb{P}(\xi_n \leqslant f(\varepsilon n)) = \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1}\varphi(\varepsilon n)f(\varepsilon n)$ 而由黎曼积分的定义可知：

$$\varepsilon \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1} \varphi(\varepsilon n) f(\varepsilon n) \to \int_0^1 \varphi(r) f(r) dr (n\to\infty)$$

故由定理 *9.1.5* 可知有:

$$\varepsilon \sum_{0\leqslant \varepsilon n\leqslant 1} \varphi(\varepsilon n) \eta_\varepsilon(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^1 \varphi(r) f(r) dr (n\to\infty).$$

练习 9.1.5 将定理 *9.1.8* 和定理 *9.1.9* 推广到 $f\in C[0,1]^d$ 的情形.

解:

推广的定理 *9.1.8*:

设 $f\in C[0,1]^d$, 令

$$B_n^d = \sum_{m=0}^{n} \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_d=m} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_d!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d} f(\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_d}{n}),$$

为 d 维 n 阶 *Bernstein* 多项式, 其中 $x\in[0,1]^d, n_i, n\in\mathbb{N}, i=1,2,\dots,d$ 且有 $x_1+x_2+\cdots+x_d=1$ 则有:

$$\sup_{x\in[0,1]^d, x_1+x_2+\cdots+x_d=1} |f(x)-B_n^d(x)| \to 0$$

证明: $\forall x\in[0,1]^d x_1+x_2+\cdots+x_d=1$, 存在 d 维 *i.i.d* 序列 X_n 使得 $\mathbb{P}(X_{nk}=1)=x_k, \sum_{k=1}^{d} X_{nk}=1, X_{nk}=\{0,1\}\ k=1,2,\dots,d$, 则有 $\mathbb{E}X_n=(x_1,x_2,\dots,x_d), \sigma(X_n)=diag(x_1(1-x_1),\dots,x_d(1-x_1))$. 令 $S_n=(\sum_{i=1}^n X_{i1}, \sum_{i=1}^n X_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n X_{id})$. 则:

$$\mathbb{P}(S_n=(n_1,n_2,\dots,n_d)) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_d!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}$$

故有 $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n})=B_n^d(x)$, 则后续证明过程与定理 *9.1.8* 一致, 则不再重复.

推广的定理 *9.1.9*: 此处定理无 f, 暂时作废.

9.2 弱大数定律

练习 9.2.1 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 为 *i.i.d.* 序列, 且 X_1 服从 *Cauchy* 分布, 即

$$\mathbb{P}(X_1 \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

试证 $x\mathbb{P}(|X_1| > x) \to \frac{2}{\pi} \neq 0$, 因而由定理知, 不存在 a_n 使

$$\frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

解:
$x\mathbb{P}(|X_1| > x) = x2\int_{x}^{\infty} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = 2x(\frac{\pi - 2\arctan x}{2\pi})$, 由洛必达法则容易得到极限为 $\frac{2}{\pi} \neq 0$, 故不存在 a_n 使

$$\frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

练习 9.2.2 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 为 *i.i.d.* 序列, 且

$$\mathbb{P}(X_n = (-1)^{k-1}k) = \frac{c}{k^2 \ln k}, \qquad k \geqslant 3.$$

其中 c 满足 $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{c}{k^2 \ln k} = 1.$, 试证 $\mathbb{E}|X_1| = \infty$, 但有一常数 a, 使 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

解:

$$E|X_1| = \sum_{k=3}^{\infty} k\frac{c}{k^2 \ln k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c}{k \ln k} > \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c}{k} = \infty.$$

下证 $k\mathbb{P}(|X_1|>k)\to 0(k\to\infty)$.

$$\begin{aligned}
k\mathbb{P}(|X_1|>k) &= k\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{c}{n^2\ln n}\leqslant k\sum_{n=k}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{c}{x^2\ln x}dx\\
&= k\int_k^{\infty}\frac{c}{x^2\ln x}dx = k\int_k^{\infty}\frac{cd(\ln\ln x)}{x}\\
&= k(0+c\int_k^{\infty}\frac{\ln\ln x}{x^2}dx)\\
&\leqslant \frac{\ln\ln k}{k}\to 0
\end{aligned}$$

故由定理 *9.2.4* 可知, 存在 a_n 使

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}} a_n.$$

练习 9.2.3 令 $p_k=\frac{1}{2^k}k(k+1), k\in\mathbb{N}, p_0=1-(p_1+p_2+\dots)$, 设 $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$ 为 *i.i.d.* 序列.

$$\mathbb{P}(X_n=-1)=p_0,\qquad \mathbb{P}(X_n=2^k-1)=p_k,\qquad k\in\mathbb{N},$$

则 $\mathbb{E}X_n=0$, 令 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$, 试应用定理 *9.2.5* 证明

$$\frac{S_n}{\frac{n}{\log_2 n}}\xrightarrow{\mathbb{P}} -1.$$

解:

PS: 此处 p_k 应为 $\frac{1}{2^k k(k+1)}$, 否则期望不存在, 则无后续结论. 以下题解为更正后的题解.

先证 $\mathbb{E}X_n = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_n &= -p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-)}{2^k k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2^k k(k+1)} \\
&= -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= -1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

其次, 令 $m(n) := \inf\{m : 2^{-m} m^{-\frac{3}{2}} \leqslant n^{-1}\}, b_n = 2^{m(n)}$, 逐一验证定理 *9.2.5* 中的条件. 首先:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i > 2^m) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k k(k+1)} \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k m(m+1)} = \frac{2^{-m}}{m(m+1)} \\
n\mathbb{P}(X_i > b_n) &\leqslant \frac{n 2^{-m(n)}}{m(n)(m(n)+1)} \leqslant (m(n)+1)^{-\frac{1}{2}} \to 0
\end{aligned}$$

第二式源于定义中 $2^{-m(n)} \leqslant n^{-1} m(n)^{-\frac{3}{2}}$, 由此验证定理 *9.2.5* 中的第一个条件, 为了验证第二个条件, 令 $X' = X\mathbb{1}_{\{|X| \leqslant b_n\}} = X\mathbb{1}_{\{|X| \leqslant 2^{m(n)}\}}$, 先估计

$\mathbb{E}X'^2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X'^2 &= p_0 + \sum_{k=1}^{m(n)} (2^k-1)^2 \frac{1}{2^k k(k+1)} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{m(n)} \frac{2^k}{k(k+1)} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\frac{m(n)}{2}} \frac{2^k}{k(k+1)} + \sum_{k=\frac{m(n)}{2}}^{m(n)} \frac{2^k}{k(k+1)} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\frac{m(n)}{2}} 2^k + \frac{4}{m(n)^2} \sum_{k=\frac{m(n)}{2}}^{m(n)} 2^k \\
&\leqslant 1 + 2 \times 2^{\frac{m(n)}{2}} + \frac{8}{m(n)^2} \times 2^{m(n)} \\
&\leqslant C \frac{2^{m(n)}}{m(n)^2}
\end{aligned}$$

其中 C 为一与 n 无关的常数, 故可得:

$$\frac{n\mathbb{E}X'^2}{b_n^2} \leqslant \frac{C2^{m(n)}}{m(n)^2} \times \frac{n}{2^{2m(n)}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{m(n)}} \to 0$$

故定理 *9.2.5* 的条件均满足, 只需计算 a_n 的表达式即可.

$$\begin{aligned}
a_n &= \mathbb{E}X' = -\mathbb{E}X\mathbb{1}_{|X|\geqslant b_n} \\
&= -\sum_{m(n)+1}^{\infty}\frac{(2^k-1)}{2^k k(k+1)} \\
&= = -\sum_{k=m(n)+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}+\sum_{k=m(n)+1}^{\infty}\frac{1}{2^k k(k+1)} \\
&= -\frac{1}{m(n)+1}+\sum_{k=m(n)+1}^{\infty}\frac{1}{2^k k(k+1)}\sim-\frac{1}{m(n)}\sim-\frac{1}{\log_2 n}
\end{aligned}$$

从 b_n 的定义中可以得出 $2^{m(n)-1}\leqslant\dfrac{n}{m(n)^{\frac{3}{2}}}\sim\dfrac{n}{(\log_2 n)^{\frac{3}{2}}}$, 故由定理 *9.2.5* 可知:

$$\frac{S_n+\frac{n}{\log_2 n}}{\frac{n}{(\log_2 n)^{\frac{3}{2}}}}\to 0$$

即有

$$\frac{S_n}{\frac{n}{\log_2 n}}\xrightarrow{\mathbb{P}}-1.$$

练习 9.2.4 证明: 定理 *9.2.4* 的证明中的引理 (3) 中的 $(L,M),(L,-M),(-L,M),(-L,-M)$ 同分布.

解:

仅需证明对于 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为对称 *i.i.d.r.v.* 则对任何的 *Borel* 可测函数 f, 则 $f(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\ldots,\tilde{X}_n)$ 与 $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 同分布, 其中 $\tilde{X}_1=X_1$ 或 $-X_1$.

$n=1$ 时,$\mathbb{P}(f(X_1)\in B)=\mathbb{P}(X_1\in f^{-1}(B))=\mathbb{P}(-X_1\in f^{-1}(B))=\mathbb{P}(f(-X_1)\in B),\forall B\in\mathscr{B}$. 故当 $n=1$ 时结论成立.

不妨设 $n \leqslant k$ 时该结论成立,$n = k+1$ 时, 令 $g(X_1, X_2, \ldots, X_k) = f(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}), h(X_{k+1}) = f(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1})$. 则由归纳假设 $g(\tilde{X_1}, \tilde{X_2}, \ldots, \tilde{X_k}), g(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ 同分布,$h(\tilde{X_{k+1}}), h(X_{k+1})$ 同分布, 其中 $\tilde{X_1} = X_1$ 或 $-X_1$. 故 $f(\tilde{X_1}, \tilde{X_2}, \ldots, \tilde{X_k}, \tilde{X_{k+1}})$ 与 $f(X_1, X_2, \ldots, X_k, \tilde{X_{k+1}})$ 同分布, 再与 $f(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1})$ 同分布. 即证.

故 L, M 为独立对称随机变量, 由上述结论,$(L, M), (L, -M), (-L, M), (-L, -M)$ 同分布.

9.3 随机级数的收敛

练习 9.3.1 设 $X_n, n \in \mathbb{N}$ 为 $i.i.d.$ 序列, 且

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2},$$

则级数 $\sum\limits_n \frac{X_n}{n^\theta}$ 当 $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时 $a.s.$ 收敛; 当 $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ 时 $a.s.$ 发散.

解:

$\mathbb{E}X_n = 0, D_n = 1, |X_n| \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}. \to \sum\limits_n \frac{X_n}{n^\theta}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma(\frac{X_n}{n^\theta})$ 同敛散. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma(\frac{X_n}{n^\theta}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\theta}}$, 由 $p-$ 级数的理论知, 当 $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时 $a.s.$ 收敛; 当 $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ 时 $a.s.$ 发散.

练习 9.3.2 证明推广的科尔莫格罗夫不等式: 若 $X_n, n \in \mathbb{N}$ 独立,$r \geqslant 1, \mathbb{E}X_n = 0$, 对 $c > 0$, 记 $C = |\max_{l \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant c|$, 则

$$c^r \mathbb{P}(C) \leqslant \mathbb{E}(|S_n|^r \mathbb{1}_C) \leqslant \mathbb{E}(|S_n|^r),$$

应用此不等式证明: 若 $S_n \xrightarrow{r} S$ 有限, 则 $S_n \xrightarrow{a.s.} S$.

解:

记 $\Lambda_k=\{\omega:\nu(\omega)=l\}=\{\omega:\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}|S_j(\omega)|<c|,S_k(\omega)\geqslant c\},k=1,2,\ldots,n$, 其中 $\nu(\omega):=\min\{k:1\leqslant k\leqslant n,|S_k(\omega)|\geqslant c\}$. 则由前例知 $C=\bigcup\limits_{k=1}^{n}$. 且 Λ_k 两两不交, 故有:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(|S_n|^r) &= \int|S_n|^r d\mathbb{P} \\
&\geqslant \int_C|S_n|^r d\mathbb{P}=\mathbb{E}(|S_n|^r\mathbb{1}_C) \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{\Lambda_k}|S_k|^r d\mathbb{P} \\
&\geqslant c^r\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\Lambda_k)=c^r\mathbb{P}(C)
\end{aligned}
$$

故由此知 $S_n\xrightarrow{r}S$ 有限, 则 $S_n\xrightarrow{a.s.}S$.

9.4 强大数律

练习 9.4.1 若 $\{X_n\}$ 为 *i.i.d.* 序列,$\mathbb{E}X_1^+=\infty,EX_1^-<\infty$, 则 $\dfrac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\infty$, 进一步, 只要 $\mathbb{E}X_1$ 存在, 就有

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\mathbb{E}X_1.$$

解:

证一:

令 $S_n^+=X_1^++X_2^++\cdots+X_n^+,S_n^-=X_1^-+X_2^-+\cdots+X_n^-$, 则 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_n^+}{n}-\dfrac{S_n^-}{n}$.,$X_n^+,X_n^-$ 也为独立同分布序列, 由于 $\mathbb{E}X_1^-<\infty$, 由定理 *9.4.4*,$\dfrac{S_n^-}{n}\xrightarrow{a.s.}$

$\mathbb{E}X_1^-$, 类似由于 $\mathbb{E}X_1^+=\infty$, 得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{S_n^+}{n}=\infty\ \ a.s.$ 若证得 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{S_n^+}{n}=\infty\ \ a.s.$, 则由上述分解, 可得 $\dfrac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\infty$.

若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{S_n^+}{n}=c<\infty\ \ a.s.$ 则存在子列 $\{k_n\}, s.t.\dfrac{S_{k_n}^+}{k_n}\xrightarrow{a.s.}c$, 则 $\exists N, n>N$ 时 $\dfrac{S_{k_n}^+}{k_n}<c+1\to E(\dfrac{S_{k_n}^+}{k_n})=\mathbb{E}X_1^+<c+1$, 与假设矛盾, 故 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{S_n^+}{n}=\infty\ \ a.s., \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}>\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{S_n^+}{n}=\infty\ \ a.s.$.

故 $\mathbb{E}X_1$ 存在时,$\mathbb{E}X_1=\mathbb{E}X_1^+-\mathbb{E}X_1^-$, 且 $\mathbb{E}X_1^+,\mathbb{E}X_1^-$ 其中之一必定有限. 若都有限, 则由定理 *9.4.4* 的结果立得, 否则, 不妨设 $\mathbb{E}X_1^+=\infty, EX_1^-<\infty$, 则由上证 $\dfrac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\infty$. 综上, 只要 $\mathbb{E}X_1$ 存在, 就有

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\mathbb{E}X_1.$$

证二:

令 $Y_n=X_n\mathbb{1}_{|X|\leqslant N}, N\in\mathbb{N}$, 则 $\mathbb{E}Y_n<\infty$, 由强大数定律知 $\dfrac{S_n'}{n}:=\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}\to EY_1$, 而因为 $X\geqslant Y$, 故有:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{n}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{S_n'}{n}=\mathbb{E}Y_1$$

而由单调收敛定理知 $\mathbb{E}Y_1\uparrow\mathbb{E}X_1=\mathbb{E}X_1^+-\mathbb{E}X_1^-=\infty, N\to\infty$. 由上式即证.

练习 9.4.2 应用注 *9.4.3* 证明: 若 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列,

(1) 设存在 $p\in[1,2]$, 使 $\sum\limits_n\dfrac{1}{n^p}\mathbb{E}(|X_n|^p)<\infty$, 则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n X_j\xrightarrow{a.s.}0$.

(2) 若对某个 $\delta\in(0,1]$ 和 $M<\infty$, 使 $\forall n$ 有 $\mathbb{E}|X_n|^{1+\delta}\leqslant M$, 则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n X_j\xrightarrow{a.s.}0$.

解:

(1) 取 $\varphi(x)=|x|^p, p\in[1,2]$, 则 $\varphi(x)=\varphi(-x), |x|\uparrow, \dfrac{\varphi(x)}{|x|}=|x|^{p-1}\uparrow$, $\dfrac{\varphi(x)}{|x|^2}=|x|^{p-2}\downarrow$. 则由注 *9.4.3*:$\sum\limits_n \dfrac{\mathbb{E}\varphi(X_n)}{\varphi(n)}=\sum\limits_n \dfrac{\mathbb{E}|X_n|^p}{n^p}<\infty$, 则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n X_j \xrightarrow{a.s.} 0$.

(2) 类似 (1), $\varphi(x)=|x|^{1+\delta}, \sum\limits_n \dfrac{\mathbb{E}\varphi(X_n)}{\varphi(n)}=\sum\limits_n \dfrac{\mathbb{E}|X_n|^{1+\delta}}{n^{1+\delta}}<\sum\limits_n \dfrac{M}{n^{1+\delta}}<\infty.h$ 故有 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n X_j \xrightarrow{a.s.} 0.$.

PS: 按照注 *9.4.3*, 此处应有 $\mathbb{E}X_n=0$ 的条件.

练习 9.4.3 若 $\{X_n\}$ 为 *i.i.d.* 序列, 且 $\mathbb{E}X_1=0, \{c_n\}$ 是一个有界实数序列, 则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n c_jX_j \xrightarrow{a.s.} 0$.

解:

不妨设 $m\leqslant c_n\leqslant M$, 则由强大数定律:$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n X_j \xrightarrow{a.s.} 0.$, 故 $\dfrac{m}{n}\sum\limits_{j=1}^n X_j\leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n c_jX_j\leqslant \dfrac{M}{n}\sum\limits_{j=1}^n X_j$, 由夹逼定理,$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n c_jX_j \xrightarrow{a.s.} 0$.

9.5 应用

10 特征函数和中心极限定理

10.1 特征函数的定义及简单性质

练习 10.1.1 试求均值为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布的特征函数.

解:

密度函数为：$X \sim p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0$, 则：

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itx}) = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it} \end{aligned}$$

练习 10.1.2 试求在 $[-a,a]$ 上分布的三角分布，即分布密度为 $p(x) = \dfrac{a-[x]}{a^2}$ 的特征函数.

解:

$\forall k-1 \leqslant x < k, p(x) = \dfrac{a-k+1}{a^2}, \forall k \in Z\bigcap[-a,a]$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{E}(e^{itx}) = \sum_{k=[-a]+1}^{[a]} \int_{k-1}^{k} e^{itx}p(x)dx + \int_{-a}^{[-a]+1} e^{itx}p(x)dx + \int_{[a]}^{a} e^{itx}p(x)dx \\ &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} e^{itx}dx - \frac{1}{a^2}\left(\sum_{k=[-a]+1}^{[a]}\int_{k-1}^{k}(k-1)e^{itx}dx + \int_{-a}^{[-a]+1} e^{itx}[-a]dx + \int_{[a]}^{a} e^{itx}[a]dx\right) \\ &= \frac{2\sin a}{a^2} - \frac{1}{a^2}\left(\sum_{k=[-a]+1}^{[a]}(k-1)\frac{e^{itk}-e^{it(k-1)}}{it} + [-a]\frac{e^{it([-a]+1)}-e^{it(-a)}}{it} + [a]\frac{e^{ita}-e^{it[a]}}{it}\right) \\ &= \frac{2\sin a}{a^2} - \frac{1}{a^2}(\sum_{k=[-a]+1}^{[a]}\frac{-e^{it(k-1)}}{it} + ([a]-1)\frac{e^{it([a]-1)}}{it} - [-a]\frac{e^{it[-a]}}{it} \\ &+ [-a]\frac{e^{it([-a]+1)}-e^{it(-a)}}{it} + [a]\frac{e^{ita}-e^{it[a]}}{it}) \\ &= \frac{2\sin a}{a^2} - \frac{1}{a^2}(\frac{e^{it[a]}-e^{it[-a]}}{1-e^{it}} + ([a]-1)\frac{e^{it([a]-1)}}{it} - [-a]\frac{e^{it[-a]}}{it} \\ &+ [-a]\frac{e^{it([-a]+1)}-e^{it(-a)}}{it} + [a]\frac{e^{ita}-e^{it[a]}}{it}) \end{aligned}$$

练习 10.1.3 如果 $f_k, k=1,2,\ldots,n$ 是特征函数,$\lambda_k > 0, k=1,2,\ldots,n, \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ 也是特征函数.

解:

此题需要 $Bochner - Khinchine$ 定理, 现简单叙述如下:

定理 *(Bochner-Khinchine)*

$f(t)$ 为特征函数的充要条件是,f 连续,$f(0)=1$, 且 f 非负定, 即 $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j} \geqslant 0$$

故一一验证 *Bochner-Khinchine* 定理的条件即可, 由于 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 为特征函数, 故 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 连续, 非负定, 且 $f_k(0)=1, \forall k=1,2,\ldots,n$. 故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ 为连续函数的线性和, 也为连续函数, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(0) = \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = 1.$, 设即 $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(t_i - t_j)\pi_i\overline{\pi_j} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f_k(t_i - t_j)\pi_i\overline{\pi_j} \geqslant 0$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ 非负定, 由 *Bochner-Khinchine* 定理,$\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f_k$ 为特征函数.

练习 10.1.4 试由特征函数的定义, 用视察法找出随机变量的分布律, 使它的特征函数是下述相应的函数:

$(i) e^{iau}$;

$(ii) \cos u$;

$(iii) \cos^2 u$;

$(iv) \sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k e^{ia_k u}, \lambda_k \geqslant 0, \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k = 1$;

$(v)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\cos ku, \lambda_k\geqslant 0, \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=1;$
$(vi)\frac{1}{1+iu}.$

解:

$(i):\mathbb{P}(X=a)=1;$

$(ii):\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2};$

$(iii):\cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}, \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}, \mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=-2)=\frac{1}{4};$

$(iv):\mathbb{P}(X=a_k)=\lambda_k, k\in\mathbb{N};$

$(v):\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=-k)=\frac{\lambda_k}{2}, k\in\mathbb{N};$

$(vi):$ 由练习 *10.1.2* 可知,$\frac{1}{1-iu}$ 为 $\lambda=1$ 的指数分布, 故可知 $\frac{1}{1+iu}$ 对应的分布为 $-X$ 为 $\lambda=1$ 的指数分布.

练习 10.1.5 试证: 若 f 是特征函数, 则 $|f|^2$ 也是特征函数.

解:

设 X 对应的特征函数为 f, 则令 Y 与 X 独立同分布, 则 $X-Y$ 的特征函数为 $f(t)f(-t)=f(t)\overline{f(t)}=|f|^2$,$|f|^2$ 也是特征函数

练习 10.1.6 设 X 的 n 阶绝对矩有限, 试证

$$\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^n=i^{-n}\frac{d^n}{du^n}[e^{-iu(\mathbb{E}x)}f_X(u)]_{u=0}.$$

解:

令 $Y=X-E(X)$ 则由命题 *10.1.4*: $E(Y^n)=i^{-n}\frac{d^n}{du^n}[f_Y(u)]_{u=0}$, 而由命题 *10.1.2(4)*: $f_Y(u)=e^{-iu(\mathbb{E}x)}f_X(u)$. 综上即有:

$$\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^n = i^{-n}\frac{d^n}{du^n}[e^{-iu(\mathbb{E}x)}f_X(u)]_{u=0}.$$

练习 10.1.7 试证：如果 $\{f_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的特征函数序列,$\forall u \in \mathbb{R}, f_n(u) \to g(u)$, 且 g 在零点连续, 则 g 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

解:

由于 g 在 0 点连续, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. |u| < \delta$, 时 $|1-g(u)| < \varepsilon$. 同时设 $\{f_n\}$ 对应的概率测度序列为 $\{\mu_n\}$, 由 *Fubini* 定理, 当 $u > 0$ 时：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-f_n(t))dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-e^{itx})dt\mu_n(dx) \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty}(1-\frac{\sin(ux)}{ux})\mu_n(dx) \\
&\geqslant 2\int_{|x|\geqslant \frac{2}{n}}(1-\frac{1}{|ux|})\mu_n(dx) \\
&\geqslant \mu_n(\{x : |x| > \frac{2}{u}\}).
\end{aligned}$$

故 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(\{x : |x| > \frac{2}{u}\}) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-f_n(t))dt = \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-f_n(t))dt < 2\varepsilon.$

由引理 *8.5.11* 知,$(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ 上的每一个概率测度都是胎紧的, 对于 $n < n_0$, 存在紧集 K_n, 使得 $\mu_n(K_n^c) < \varepsilon$, 令

$$K = \left(\bigcup_{n=1}^{n_0-1} K_n\right)\bigcup[-\tfrac{2}{u}, \tfrac{2}{u}],$$

则有限紧集的并仍为紧集,K 为紧集, 且 $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(K^c) < \varepsilon$, 故 $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是胎紧的, 由定理 *8.5.12* 知 $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在完备距离空间 $\mathbb{R}$ 中也为相对紧的, 故其任一子列均存在弱受敛子列. 不妨设 $\{\mu_{n_k}, n \in \mathbb{N}\}$ 为 $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的任一弱受敛的子列, 则 $\mu_{n_k} \xrightarrow{w} \mu$, 而 $f_{nk} \to g$. 故特征函数列的极限等于测度列极限的特征函数. 故 g 是特征函数, 由命题 *10.1.2*,g 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

10.2 逆转公式及连续性定理

练习 10.2.1 试证：$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}e^{-iux_0}f(u)du=\mu(\{x_0\})$.

解:

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-iux_0}f(u)du &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu(y-x_0)}d\mu(y-x_0)du\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}e^{iu(y-x_0)}dud\mu(y-x_0)\\
&= \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[(y-x_0)T]}{(y-x_0)T}d\mu(y)\\
&= \lim_{T\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{x_0}+\int_{\{x_0\}}+\int_{x_0}^{\infty}\right)\frac{\sin[(y-x_0)T]}{(y-x_0)T}d\mu(y)\\
&= 0+\int\mathbb{1}(\{x_0\})d\mu(y)+0\\
&= \mu(\{x_0\})
\end{aligned}
$$

倒数第三式源于内部为有界函数，利用控制收敛定理可得.

练习 10.2.2 试证：$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}|f(u)|^2du=\sum_{x\in\mathbb{R}}\mu(\{x\})^2$.

解:

首先上式右端的求和有意义，因为其被上界 1 控制. 不妨设 X 对应的概率测度为 μ, 对应的特征函数为 f, 由练习 *10.1.5*, 存在与 X 独立的随机变量 Y, 使得 $X-Y$ 的特征函数为 $|f|^2$, 对应的概率测度为

$\mu * \mu', \mu'(B) = \mu(-B), \forall B \in \mathscr{B}$. 由练习 *10.2.1*, 可知, 对于 $x_0 = 0$, 有:

$$\begin{aligned} & \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-iux_0} |f(u)|^2 du \\ = & \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(u)|^2 du \\ = & \mu * \mu'(\{0\}) \end{aligned}$$

而由概率测度的卷积公式, 上式可进一步化简为:

$$\begin{aligned} \mu * \mu'(\{0\}) &= \int_{\mathbb{R}} \mu(-y)\mu(dy) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})^2 \end{aligned}$$

即证.

练习 10.2.3 若 X 的特征函数为 f, 概率分布为 μ, 则

$$f \text{ 是实函数} \Leftrightarrow X \text{ 与 } -X \text{ 同分布} \Leftrightarrow \mu(B) = \mu(-B), \forall B \in \mathscr{B}$$

其中 $-B := \{-x : x \in B\}$.

解:

设随机变量 X 对应的特征函数为 f, 则 $f_X(u) = \mathbb{E}(e^{iux}) = i\mathbb{E}(\sin(ux)) + \mathbb{E}(\cos(ux))$,$f$ 为实函数, 则 $i\mathbb{E}(\cos(ux)) = 0, f_{-X}(u) = \mathbb{E}(e^{iux}) = \mathbb{E}(\sin(ux)) = \overline{f_X(u)}$. 反之, 若 X 与 $-X$ 同分布, 则 $\overline{f_X(u)} = f_{-X}(u) = f_X(-u) = -i\mathbb{E}(\sin(ux)) + \mathbb{E}(\cos(ux)) \to i\mathbb{E}(\sin(ux)) = 0, f$ 是实函数.

X 与 $-X$ 同分布 $\Leftrightarrow \mu(B) = \mu(-B), \forall B \in \mathscr{B}$ 是显然成立的, 即证.

练习 10.2.4 证明唯一性定理对于 $(\mathbb{R},\mathscr{B})$ 上的有限符号测度也成立, 即若 μ,ν 为有限符号测度, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\mu(dx)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\nu(dx)=,\forall u\in\mathbb{R}$$

则 $\mu=\nu$.

解:

令 μ^+,μ^-,ν^+,ν^- 为有限符号测度 μ,ν 的 *Hahn* 分解, 则 $\mu=\mu^++\mu^-,\nu=\nu^++\nu^-$, 由习题 *7.1.7* 可知,$\forall u\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\mu(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\mu^+(dx)+\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\mu^-(dx)\\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\nu(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\nu^+(dx)+\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\nu^-(dx)
\end{aligned}$$

故由逆转公式,$\forall x_1,x_2:x_1<x_2$,

$$\begin{aligned}
& \mu((x_1,x_2))+\frac{1}{2}\mu(\{x_1\})+\frac{1}{2}\mu\{x_2\}\\
= & \mu^+((x_1,x_2))+\frac{1}{2}\mu^+(\{x_1\})+\frac{1}{2}\mu^+\{x_2\}-\mu^-((x_1,x_2))+\frac{1}{2}\mu^-(\{x_1\})+\frac{1}{2}\mu^-\{x_2\}\\
= & \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iux_1}-e^{-iux_2}}{iu}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\mu^+(dx)+\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\mu^-(dx)\right)du\\
= & \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iux_1}-e^{-iux_2}}{iu}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\nu^+(dx)+\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\nu^-(dx)\right)du\\
= & \nu^+((x_1,x_2))+\frac{1}{2}\nu^+(\{x_1\})+\frac{1}{2}\nu^+\{x_2\}-\nu^-((x_1,x_2))+\frac{1}{2}\nu^-(\{x_1\})+\frac{1}{2}\nu^-\{x_2\}\\
= & \nu((x_1,x_2))+\frac{1}{2}\nu(\{x_1\})+\frac{1}{2}\nu\{x_2\}
\end{aligned}$$

所以当:

$$x_1,x_2\in\Lambda:=\{y:\mu(\{y\})=\nu(\{y\})=0\}$$

时,$\mu((x_1,x_2)) = \nu((x_1,x_2)) \to \mu^+((x_1,x_2)) = \nu^+((x_1,x_2)), \mu^-((x_1,x_2)) = \nu^-((x_1,x_2))$. 令 x_1 沿 Λ 趋于 $-\infty$, 记得 μ^+,ν^+, 的分布函数以及 μ^-,ν^- 的分布函数在它们共同的连续点上相同, 而这样的不连续点至多可数, 故 μ^+,ν^+, 和 μ^-,ν^- 是相同的, 则 μ,ν 是相同的. 即特征函数也唯一决定有限符号测度.

练习 10.2.5 设概率测度 $\mu_n(\{0\}) = \dfrac{1}{2}\mu_n(\{n\}), \forall n \in \mathbb{N}$ 成立, 试讨论 $\{\mu_n\}$ 及其特征函数的收敛性.

解:

记 μ_n 对应的特征函数为 f_n, 则由定义可得 $f_n(u) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{inu}$,可见 $\forall u \neq 0, f_n(u)$ 均不收敛,故 μ_n 也没有弱收敛的极限。

练习 10.2.6 设 X_λ 是均值为 λ 的服从 *Poisson* 分布的随机变量, 试证: 当 $\lambda \to \infty$ 时,$\dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 按分布律收敛向标准正态分布.

解:

则记 X_λ 的特征函数为 f_λ, 则容易计算 $f_\lambda(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$, 由命题 *10.1.2*,$\dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 的特征函数为 $e^{i(-\sqrt{\lambda})u} f_\lambda(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}) = \exp(\lambda(e^{i\frac{u}{\sqrt{\lambda}}} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{\lambda}}))$, 而由泰勒展示易得*:*

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(e^{i\frac{u}{\sqrt{\lambda}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 + i\frac{u}{\sqrt{\lambda}} - \frac{u^2}{2\lambda} + o((i\frac{u}{\sqrt{\lambda}})^2) - 1 - \frac{iu}{\sqrt{\lambda}}) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(-\frac{u^2}{2\lambda} + o((i\frac{u}{\sqrt{\lambda}})^2)) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} -\frac{u^2}{2} + o(1) \\
&= -\frac{u^2}{2}
\end{aligned}
$$

而 $e^{-\frac{u^2}{2}}$ 显然在 0 点连续, 故由推论 *10.2.5*,$\dfrac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 的极限的特征函数即为 $e^{-\frac{u^2}{2}}$, 是标准正态分布, 故 $\dfrac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 按分布律收敛向标准正态分布.

10.3 中心极限定理

练习 10.3.1 证明推论 *10.3.13* 和 *10.3.14*.

解:

推论 *10.3.13:*

退化分布 $X=a$ 的特征函数为 $f(t)=e^{ita}$., 设 X_{nk} 对应的特征函数为 $f_{nk}(t), X_{nk}-\mathbb{E}X_{nk}$ 对应的特征函数为 $g_{nk}(t), n=1,2,\ldots,k=1,2,\ldots,k_n$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{k_n} &= \prod_{k=1}^{k_n} e^{i\mathbb{E}X_{nk}t} g_{nk}(t) \\
&= \exp\{\sum_{k=1}^{k_n} i\mathbb{E}X_{nk}t + \sum_{k=1}^{k_n} \ln g_{nk}(t)\} \\
(\text{定理}10.3.2) &= \exp\{\sum_{k=1}^{k_n} i\mathbb{E}X_{nk}t + \sum_{k=1}^{k_n} \int \frac{e^{iux}-1-iux}{x^2}\mu_n(dx)\}
\end{aligned}$$

其中 $\mu_n(B)=\displaystyle\int_B x^2 \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{P}_{X_{nk}-\mathbb{E}X_{nk}}(dx),\ \forall B \in \mathscr{B}$.

由连续性定理,$\sum X_{nk} \xrightarrow{d} a$ 的充要条件为 $\displaystyle\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \to f(t)$, 而由定理 *10.3.9*,$f(t)$ 必有如下形式:

$$f(t)=\exp\{iat+\int \frac{e^{itx-1-itx}}{x^2}\mu(dx)\}$$

其中 $\mu(B)=\int_B x^2\mathbb{P}(dx),\ \forall B\in\mathscr{B}$, 此处的 μ 对应为 $\mu(\mathbb{R})=0.$, 故 $\sum X_{nk}\xrightarrow{d} a$ 的充要条件转为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$, 且 $\sum\mathbb{E}X_{nk}\to a$.

前者即对一切 $\mathbb{R}$ 中的连续区间 I, 均有 $\mu_n(I)\to\mu(I)$, 即有:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}x^2\mathbb{P}_{X_{nk}-\mathbb{E}X_{nk}}(dx)=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x-a_{nk}|\geqslant\varepsilon}|x-a_{nk}|^2\mathbb{P}_{X_{nk}}(dx)\to 0.$$

定理 *10.3.14*:

Poisson 分布 $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$ 的特征函数为

$$f(t)=\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}=\exp\{it\lambda+\lambda(e^{it}-it-1)\},$$

设 X_{nk} 对应的特征函数为 $f_{nk}(t), X_{nk}-\mathbb{E}X_{nk}$ 对应的特征函数为 $g_{nk}(t), n=1,2,\ldots,k=1,2,\ldots,k_n$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{k_n} &= \prod_{k=1}^{k_n}e^{i\mathbb{E}X_{nk}t}g_{nk}(t)\\
&= \exp\{\sum_{k=1}^{k_n}i\mathbb{E}X_{nk}t+\sum_{k=1}^{k_n}\ln g_{nk}(t)\}\\
(\text{定理}10.3.2)\quad &= \exp\{\sum_{k=1}^{k_n}i\mathbb{E}X_{nk}t+\sum_{k=1}^{k_n}\int\frac{e^{iux}-1-iux}{x^2}\mu_n(dx)\}
\end{aligned}$$

其中 $\mu_n(B)=\int_B x^2\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{P}_{X_{nk}-\mathbb{E}X_{nk}}(dx),\ \forall B\in\mathscr{B}$.

由连续性定理,$\sum X_{nk}\xrightarrow{d}\mathscr{P}(\lambda)$ 的充要条件为 $\prod_{k=1}^{k_n}f_{nk}(t)\to f(t)$, 而由定理 *10.3.9*,$f(t)$ 必有如下形式:

$$f(t)=\exp\{iat+\int\frac{e^{itx-1-itx}}{x^2}\mu(dx)\}$$

其中 $\mu(B)=\int_B x^2\mathbb{P}(dx)$, $\forall B\in\mathscr{B}$, 此处的 μ 对应为 $\mu(\{1\})=\lambda,\mu(\mathbb{R}-\{1\})=0.$, 而 $\mu_n(\mathbb{R})=\sum\limits_{k=1}^{k_n}\sigma_{nk}^2\to\lambda=\mu(\mathbb{R})$ 故 $\sum X_{nk}\xrightarrow{d}\mathscr{P}(\lambda)$ 的充要条件转为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$, 且 $\sum\mathbb{E}X_{nk}\to\lambda$.

前者即对一切 $\mathbb{R}$ 中不以 1 为端点的连续区间 I, 均有 $\mu_n(I)\to\mu(I)$,

即有: $\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\int_{|x-1|\leqslant\varepsilon}x^2\mathbb{P}_{X_{nk}-\mathbb{E}X_{nk}}(dx) & \to 1.\ \forall\varepsilon>0\\ \sum\limits_{k=1}^{k_n}\int_{\varepsilon_1\leqslant|x-1|\leqslant\varepsilon_2}x^2\mathbb{P}_{X_{nk}-\mathbb{E}X_{nk}}(dx) & \to 0.\ \forall 0<\varepsilon_1<\varepsilon_2.\end{cases}$

练习 10.3.2 若 X_n 在 $[-n,n]$ 上均匀分布,$n\in\mathbb{N}$, 试证 $\{X_n\}$ 满足 *Lindeberg* 条件.

解:

$\mathbb{E}X_n=0,DX_n=\dfrac{n^2}{3},s_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}DX_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{3}$, 下验证 *Lindeberg* 条件, 即 $\forall\varepsilon>0$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$g_n(\varepsilon)=\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-\mathbb{E}X_k|\geqslant\varepsilon s_n}|x-\mathbb{E}X_k|^2d\mathbb{P}_{X_k}\to 0$$

而对于本题:

$$
\begin{aligned}
g_n(\varepsilon) &= \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-\mathbb{E}X_k|\geqslant\varepsilon s_n}|x-\mathbb{E}X_k|^2 d\mathbb{P}_{X_k}\\
&= \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon s_n}|x|^2 d\mathbb{P}_{X_k}\\
&= \frac{2}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon s_n}^{n}x^2dx\\
&= \frac{2}{s_n^2}\times\sum_{k=1}^{n}\max\{\frac{k^3-(\varepsilon s_n)^3}{3},0\}
\end{aligned}
$$

由于 $s_n^2\to\infty, n\to\infty$, 故 $\forall\varepsilon>0,(\varepsilon s_n)^3>n^3, n\to\infty$. 故上式仅有有限项非零项, 而分母趋于无穷大, 故总体趋于 *0,Lindeberg* 条件成立.

练习 10.3.3 设 $X_1, X_2, \ldots$ 是独立随机变量序列,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k, s_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k$, 判断在下述哪种情况下

$$\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{s_n}\xrightarrow{\mathscr{D}}N.$$

$(i)\mathbb{P}(X_k=-2^k)=\mathbb{P}(X_k=2^k)=\frac{1}{2}, k=1,2,\ldots;$
$(ii)\mathbb{P}(X_k=-2^k)=\mathbb{P}(X_k=2^k)=2^{-(k+1)}, \mathbb{P}(X_k=0)=1-2^{-k}, k=1,2,\ldots;$
$(iii)\mathbb{P}(X_k=k)=\mathbb{P}(X_k=-k)=\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}, \mathbb{P}(X_k=0)=1-k^{-\frac{1}{2}}, k=1,2,\ldots.$

解:

$(i)\mathbb{E}X_k=0, DX_k=2^{2k}, \max\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{s_n}=\sqrt{3}\frac{2^{n+1}-2}{\sqrt{4^{n+1}-4}}=\sqrt{3}\frac{2^n-1}{\sqrt{4^n-1}}\leqslant\sqrt{3}$. 与标准正态分布的性质矛盾, 故此条件下,$\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{s_n}$ 不弱收敛到标准正态.

$(ii)\mathbb{E}X_k = 0, DX_k = 2^k, \max\dfrac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n} = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-2} = 1$, 与标准正态分布的性质矛盾, 故此条件下, $\dfrac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n}$ 不弱收敛到标准正态.

$(iii)\mathbb{E}X_k = 0, DX_k = k^{\frac{3}{2}}, s_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{2} DX_k$, 验证 *Lindeberg* 条件成立:

$$\begin{aligned}
g_n(\varepsilon) &= \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-\mathbb{E}X_k|\geqslant\varepsilon s_n}|x-\mathbb{E}X_k|^2 d\mathbb{P}_{X_k} \\
&= \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon s_n}|x|^2 d\mathbb{P}_{X_k} \\
&= \frac{2}{s_n^2}\times\sum_{k=1}^{n}\max\{\frac{k^{\frac{3}{2}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(k-(\varepsilon s_n)}{3}, 0\}
\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{n}{s_n} \sim O(n^{-\frac{1}{4}})$, 故求和项中至多只有有限项, 故上式趋于 *0,Lindeberg* 条件成立, $\dfrac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathscr{D}} N$.

练习 10.3.4 设 $X_k, k = 1, 2, \ldots$ 为 *i.i.d.* 序列, X_1 是参数为 1 的 *Poisson* 随机变量, 应用李雅普诺夫定理到这一序列, 证明

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

解:

$\mathbb{E}X_n = 1 = DX_n, \forall n, \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^3 = 1, \mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|^3 = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^3 + 2\mathbb{P}(X_k = 0) = 1 + 2e^{-1}$. 故当 $\delta = 1$ 时:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|^3 &= \frac{n(1+2e^{-1})}{n^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(1+2e^{-1})}{n^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

上式趋于 *0*, 故由李雅普诺夫定理,$\dfrac{S_n-\mathbb{E}S_n}{s_n}\xrightarrow{\mathscr{D}}N$. 而 $\sum\limits_{k=1}^{n}X_n\sim\mathscr{P}(n)$. 故:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{s_n}\leqslant 0) &= \mathbb{P}(\sum_{k=1}^{n}X_n\leqslant n)\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}
\end{aligned}
$$

即证:$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!}=\dfrac{1}{2}$.

练习 10.3.5 证明形如 $e^{\psi(u)}$*(*其中 $\psi(u)$ 为 $(*)$ 所示*)* 的特征函数是无穷可分的.

解:

为证明此题, 需要下述定理:

定理 特征函数 f 是无穷可分的当且仅当它是有限多个 $Poisson$ 型特征函数乘积的极限. 即:

$$
f(u)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\exp\left(ia_ku+\lambda_k(e^{iub_k}-1)\right)
$$

记 $g(u,x)=(e^{iux}-1-\dfrac{iux}{1+x^2})\dfrac{1+x^2}{x^2}$, 补充定义 $g(u,0)=\lim\limits_{x\to 0}g(u,x)=-\dfrac{u^2}{2}$. 则不难验证 $g(u,x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界且连续. 由于 $\psi(u)$ 的定义中,μ 为有限 $L-S$ 测度, 不妨记其对应的有界不减左连续函数为 $G(x)$, 则其定义可重新写为:

$$
\psi(u)=iau+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)
$$

$\forall 0<\varepsilon<1$, 由积分中值定理:

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)\\
=&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{iu\xi_k}-1-\frac{iu\xi_k}{1+\xi_k^2}\right)\frac{1+\xi_k^2}{\xi_k^2}[G(x_{k+1})-G(x_k)]
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=x_0<x_1<\cdots<x_n=\frac{1}{\varepsilon}, x_k\leqslant\xi_k<x_{k+1}(k=0,1,\ldots,n-1)$ 且 $\max\limits_k(x_{k+1}-x_k)\to 0$, 而上述和式中的每一项都有 $ia_ku+\lambda_k(e^{iub_k}-1$ 的形式, 其中:

$$\lambda_k=\frac{1+\xi_k^2}{\xi_k^2}[G(x_{k+1})-G(x_k)], b_k=\xi_k, a_k=-\frac{\lambda_k\xi_k}{1+\xi_k^2}$$

因此上式为有限 $Poisson$ 型特征函数的乘积的对数的极限, 则由前述定理, 其为无穷可分特征函数的对数, 令 $\varepsilon\to 0$, 知:

$$I_1=\int_{x>0}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)$$

是无穷可分特征函数的对数, 同理:

$$I_2=\int_{x<0}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)$$

也是无穷可分特征函数的对数, 而 ψ 可重新写成:

$$\psi(u)=I_1+I_2+iau-\frac{u^2}{2}[G(0+)-G(0-)]$$

后两项分别是退化分布和正态分布的特征函数的对数, 容易验证退化分布和正态分布的特征函数是无穷可分的, 且有限无穷可分的特征函数的积仍是无穷可分的. 故 $e^{\psi(u)}$ 是无穷可分的特征函数.

练习 10.3.6 设特征函数 f 是无穷可分的, 试证:$\forall u, f(u) \neq 0$.

解:

由于 f 是无穷可分的, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists f_n, s.t. f = f_n^n$. 令 $g = |f|^2, g_n = |f_n|^2$, 则 g, g_n 均为实特征函数, 且 g 是无穷可分的, 则 g 存在唯一一个 n 次方根 $g^{\frac{1}{n}} = g_n$, 而因为 $0 \leqslant g \leqslant 1$, 令:

$$h(u) := \lim_{n\to\infty} g_n(u) = \begin{cases} 1, & g(u) > 0 \\ 0, & g(u) = 0 \end{cases}$$

由于 $g(0) = 1$, 故 $h(0) = 1$, 而由于 $g(u)$ 连续, 故存在 $u = 0$ 的领域中,$g(u) > 0$,, 则 $h(u) = 1$. 故 h 在 *0* 点连续, 由推论 *10.2.5*,h 是特征函数, 而由 h 的连续性可得,$h \equiv 1, \forall u$. 故 $g \neq 0, \forall u$, 进而得到 $f \neq 0, \forall u$.

更新记录

2018.5.3 大工程开始构建, 将 tex 底板打好

2018.5.8 框架搭建完毕, 开始写主体部分.

2018.6.22 课内作业全部写完, 开始写未布置的作业

2018.7.25 假期第三天, 将所有习题的题干补完.

2018.8.14 拖拖拉拉总算一周目完成, 开始补文献题和难题.

2018.8.28 二周目完成, 剩余 10 题.

2018.9.2 第一版正式完成.

2018.9.22 补充了部分不完整的证明，修改了不少错别字。

参考文献

[1] 张喜堂. 实变函数论的典型问题与方法 [M]. 华中师范大学出版社, 2002.

[2] 那汤松. 实变函数论. 第 3 版 [M]. 高等教育出版社, 2010.

[3] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义. 上册 [M]. 北京大学出版社, 2005.

[4] Friedman A. Foundations of Modern Analysis[M]. ACADEMIC, 1960.

[5] Stein E M, Shakarchi R. Real analysis : measure theory, integration, and Hilbert spaces [M]. 世界图书出版公司, 2007.

[6] Stein E M, Shakarchi R. Functional Analysis [M]. 世界图书出版公司,2007

[7] 严加安. 测度论讲义 [M]. 科学出版社, 2004.

[8] 胡迪鹤. 高等概率论及其应用 [M]. 高等教育出版社, 2008.

[9] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础 [M]. 高等教育出版社, 2015.

[10] KaiLaiChung, 钟开莱. 概率论教程 [M]. 机械工业出版社, 2010.

[11] Na M. Review of probability: theory and examples, 4th edition by Rick Durrett[M]. ACM, 2011.

[12] 严士健, 王隽骧, 刘秀芳. 概率论基础 [M]. 科学出版社, 2009.

[13] 严士健等. 测度与概率 [M]. 北京师范大学出版社, 1994.

[14] Halmos P R. Measure Theory[M]. 世界图书出版公司, 2007.