

一 (25分)

(1) (15分) 请写出  $\mathbb{Z}_{18}$  的所有正规子群 (不需要说明理由), 以及四阶置换群  $S_4$  的一个非平凡的正规子群 (需要说明理由).

(2) (10分) 请为域  $\mathbb{Z}_7$  的非零元素在其乘法下生成的群求出一个生成元 (需要验证过程).

二 (25分)

(1) (15分) 请证明:  $h: G \times G \rightarrow G, (g, x) \mapsto gxg^{-1}$  为  $G$  在  $G$  上的一个作用.

(2) (10分) 请证明: 35 阶群是循环群.

三 (20分) 设  $I, J$  为环  $R$  的两个理想, 请证明:  $I - J \triangleq \{a - b \mid a \in I, b \in J\}$  也是  $R$  的理想.

四 (10分) 设  $R_1$  为环  $R$  的理想, 如果存在  $R$  到  $R_1$  的满同态限制在  $R_1$  上为自同构, 请证明: 存在  $R$  的理想  $R_2$  使得  $R = R_1 \oplus R_2$ .

五 (10分) 请说明  $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ ; 再请为其作为  $\mathbb{Q}$  上的向量空间找两组分别包含  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  和  $\{\sqrt{3}, \sqrt{5}\}$  的基且说明理由, 并利用它们线性表示  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ .

六 (10分) 请说明  $\mathbb{Z}_7[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$  是 49 阶域; 并为  $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$  赋予一种域结构 (请写出具体的运算表达式, 并说明理由).