概率论

时间：120 分钟; 教师：cxx

1. 基础题：叙述经典的中心极限定理
2. 设随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 独立同分布服从 $\mathcal{E}\mathrm{xp}(1), Y_n = \inf\{\frac{\xi_k}{k} : 1 \le k \le n\}$
   (1) 计算 $\mathbb{P}(Y_n > n^{-3/2})$
   (2) 证明：$\sum_{n\ge1} Y_n$ 几乎处处收敛
3. $\xi \sim \mathcal{U}[0,1], U := \min\{\xi, 1-\xi\}, V = 1-U$, 确定 $\dfrac{V}{U}$ 的分布
4. 设 X, Y 为整数取值的随机变量,$d_{TV}(X,Y) := \sup\limits_{B\in\mathscr{B}} |\mathbb{P}(X\in B) - \mathbb{P}(Y\in B)|$, 证明:

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X=x) - \mathbb{P}(Y=x)|$$

5. 设 $\{X_i\}$ 是一列独立的随机变量，$\mathbb{P}(X_1=1) = \mathbb{P}(X_1=-1) = \dfrac{1}{2}$；$\forall m \ge 2$,
   $\mathbb{P}(X_m=1) = \mathbb{P}(X_m=-1) = \dfrac{1-m^{-2}/2}{2}$,$\mathbb{P}(X_m=m) = \mathbb{P}(X_m=-m) = \dfrac{1}{4m^2}$
   (a) 令 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 计算 $\mathrm{Var}(S_n)$
   (b) 设独立同分布的随机变量序列 $\{Y_n\}$ 满足 $\mathbb{P}(Y_n=1) = \mathbb{P}(Y_n=-1) = \dfrac{1}{2}, \forall n \ge 1$。计算 $d_{TV}(X_n, Y_n)$
   (c) 设 (X_n, Y_n) 的最优耦合 (maximal coupling) 为 $(\hat{X}_n, \hat{Y}_n)$, $\{(\hat{X}_n, \hat{Y}_n)\}_{n\ge1}$ 独立，证明：

$$\sum_{n\ge1} \mathbb{1}_{\{\hat{X}_n \ne \hat{Y}_n\}} < \infty, \text{a.s.}$$

   (d) 令 $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^n \hat{X}_k, \hat{T}_n = \sum_{k=1}^n \hat{Y}_k$, 证明：

$$\lim_n \left|\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} - \frac{\hat{T}_n}{\sqrt{n}}\right| = 0, \text{a.s.}$$

   (e) 证明：$\dfrac{\hat{T}_n}{\sqrt{n}}$ 依分布收敛至标准正态分布
   (f) 证明：$\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ 依分布收敛至标准正态分布