北京师范大学 2019~2020 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：　数学分析 (2)　　任课教师姓名：

卷面总分：　100 分　　考试时长：　120 分钟　　考试类别：　闭 卷

院（系）：______________ 专业：______________ 年级：____________

姓　名：______________ 学号：______________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
成绩																

一、计算题（共 50 分，每题 5 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$.

2. 判断 $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n} \quad (n\in\mathbb{N}_+) \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上的可积性, 并说明理由.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{2n}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

4. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的敛散性.

5. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

6. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$ 的敛散性 (如果收敛, 是条件收敛还是绝对收敛).

7. 求函数 $f(x)=x+|x|$ 在区间 $x\in[-l,l]$ 上的 Fourier 级数.

8. 判断含参量积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-tx}\cos x\,\mathrm{d}x$ 在区间 $t\in[t_0,+\infty)$ 上的一致收敛

性, 其中 $t_0 > 0, \alpha \geqslant 0$.

9. 利用 Euler 积分计算 $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

二、证明题（共 50 分，每题 10 分）

11. 设 $f \in C[a,b]$, 且 $f(a) < 0, f(b) > 0$. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 且 $\forall x \in (a,\xi)$, 有 $f(x) < 0$, 即 ξ 是 f 在 (a,b) 上的最小零点.

12. 设函数 f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 二阶导数连续. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

13. 设 f 是以 2π 为周期的连续函数且导函数 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上常义可积. 证明: f 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上一致且绝对收敛于 $f(x)$.

14. 设 $u_n(x) = \frac{1}{n^3}\ln\left(1+n^2x^2\right), n = 1, 2, \cdots$. 记 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

    (a) 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

    (b) 讨论其和函数 $s(x)$ 在 $[0,1]$ 上的连续性、可积性和可微性.

15. 设 $\{a_n\}$ 为正的单调增数列. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 有界.