2024 秋季解析几何期中考试试题

一．（10 分）

已知三个向量 $\alpha = (1,2,1)$,$\beta = (-1,1,1)$,$\gamma = (1,1,1)$.

(1) 证明 α, β, γ 不共面.

(2) 若 $(0,2,4) = x(1,2,1) + y(-1,1,1) + z(1,1,1)$, 试求 x, y, z 的值.

$(-2,-4,-2)+(-2,2,2)+(4,4,4)$

二．（10 分）

$=(0,2,4)$.

设 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}$. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为如下给定的向量，求满足方程 $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的点 P 的轨迹:

(1)$\mathbf{a} = (2,3,1), \mathbf{b} = (1,-2,4)$. 飞的方向：

(2)$\mathbf{a} = (1,3,2), \mathbf{b} = (-2,2,1)$.

三．（10 分）

证明：在 $\mathbf{R}^3$ 中到三角形三个顶点距离相等的点的轨迹是一条直线.

四．（15 分）

(1) 已知直线的普通方程为 $\begin{cases} x + 4y + 19z + 1 = 0 \\ y + 5z - 3 = 0 \end{cases}$ ，试求该直线的标准方程.

(2) 算出 (1) 中直线与平面 $x - 2y + 2z - 3 = 0$ 的交点和夹角（计算出交角的余弦值即可）.

五．（10 分）

试求关于直线 $l := \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ 与点 $P := (2,0,-1)$ 对称的点.

$6\ 2\ 0 - 3\times 0 = 6$

$(-2,-1,0)$

$2-2=0$ √.

$(-1,0,2)\times(-3,2,0)$

~~2z~~ $-x+2z-2=0$.

$6-2-4=0$

$-1\ 0\ 2$

$-3\ 2\ 0$

$-4\ -6\ -2$

$(2,3,1)$.

$2y - \cancel{3x} = 4$.

$-3x+2y-4=0$

六. (25 分)

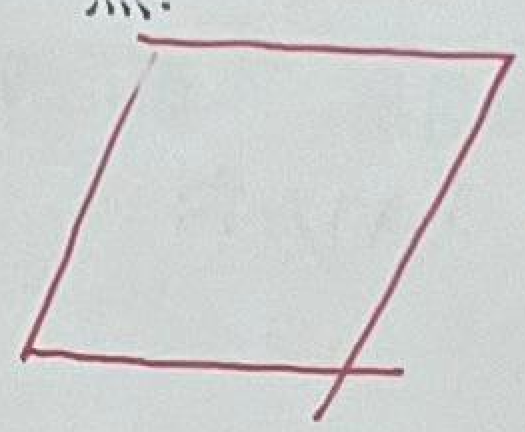
已知两直线 $l_1 := \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1}$ 和 $l_2 := \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$,
(1) 证明 l_1 和 l_2 异面;
(2) 求 l_1 和 l_2 的公垂线方程;
(3) 求连接 l_1 上任一点和 l_2 上任一点线段中点的轨迹的一般方程，并证明其是 l_1 和 l_2 公垂线段的垂直平分面（即以公垂线段为法向量且过公垂线段中点的平面）.

七. (10 分)

试求平面 $\pi_1 : 2x - y + 2z - 3 = 0$ 与平面 $\pi_2 : 3x + 2y - 6z - 1 = 0$ 构成的二面角的角平分面的方程.

八. (5 分)

设 $ABCD$ 是一个四面体，记 G_1, G_2, G_3, G_4 分别为 $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD, \Delta BCD$ 的重心，试证明：G_1D, G_2C, G_3B, G_4A 交于一点.



九. (5 分)

已知直线

$$l_1 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

和直线

$$l_2 : \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

试证明：L_1 和 l_2 共面当且仅当

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

提示：上述四阶行列式等于零当且仅当如下四元齐次线性方程组有非零解 (x, y, z, w):

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_iw = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

类似结果对于三阶行列式及三元齐次线性方程组（三个未知量三个方程）也成立.