北京师范大学 2021 ～ 2022 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：____高等代数 II____ 任课老师姓名：________ ________

卷面总分：100 分 考试时长：120 分钟 考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

一、(15 分) 判断 5 是否为实系数多项式

$$f(x) = 3x^5 - 224x^3 + 742x^2 + 5x + 50$$

的根，如果是的话，是几重根？

二、(15 分)

(1) (8 分) 假设实系数多项式 $f(x), g(x)$ 互素，证明: 对任意正整数 n, $f(x^n)$ 与 $g(x^n)$ 互素。

(2) (7 分) 假设 $f(x)$ 是整系数多项式且 $f(1)$ 和 $f(2)$ 都是奇数。证明: $f(x)$ 没有整数根。

三、(15 分) 对于实二次型 $q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$, 求一个正交替换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

其中 U 是正交矩阵，使得 $q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ 为对角型。

四、(20 分) 令 $M_n(\boldsymbol{F})$ 表示数域 $\boldsymbol{F}$ 上一切 n 阶矩阵组成的向量空间, $\boldsymbol{A} \in M_n(\boldsymbol{F})$. 证明:

(1) (5 分) 映射 $\sigma_A : \boldsymbol{B} \mapsto \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$ 是 $M_n(\boldsymbol{F})$ 上的一个线性变换;

(2) (10 分) 若 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵, 则 σ_A 是一个幂零变换;

(3) (5 分) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵, 则 $\sigma_{\boldsymbol{A}}$ 是一个可对角化的变换.

五、(25 分) 假设 σ 是有限维实向量空间 V 上的线性变换。

(1) (5 分) 假设 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ 互素。证明: $\operatorname{Ker} g(\sigma) \subseteq \operatorname{Img} f(\sigma)$.

(2) (10 分) 证明: 如果 $\operatorname{Img} \sigma^n = \operatorname{Img} \sigma^{n+1}$, 那么 $\operatorname{Img} \sigma^k = \operatorname{Img} \sigma^n$ 对所有 $k \geq n$ 成立。

(3) (10 分) 令 $Z = \{z \in V \mid 存在正整数m使得\sigma^m(z) = 0\}$,

$$W = \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{Img} \sigma^i.$$

证明 Z 和 W 都是 V 的 σ 不变子空间且 $V = W \oplus Z$.

六、(10 分) 假设 A, B 为实对称矩阵且 A 正定。证明 AB 的特征值均为实数。