数学分析 III 期中试卷

姓名：　　　　　　　　学号：

题号	一	二	三	四	总分
得分					

本试卷 **110** 分，得分上限 **100** 分

一、判断题（每题 2 分，共 10 分）

1. 设二元函数 f 的重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$，且对 b 某邻域的任何 y, $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\psi(y)$ 存在，那么极限 $\lim\limits_{y\to b}\psi(y)$ 存在且等于 A, 即累次极限 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=A$.

2. 若二元函数 f 在某点的两个偏导数存在，则它在该点连续.

3. 设 n 元函数 F 的所有偏导数连续, 在点 $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ 满足

$$F(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})=\sum_{i=1}^{n}F_{x_i}(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})=1.$$

那么存在 j 和 $n-1$ 元可微函数 $f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1}\ldots,x_n)$ 满足：在点 $(x_1^{(0)},\ldots,x_{j-1}^{(0)},x_{j+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ 的某邻域上恒成立

$$F(x_1,\ldots,x_{j-1},f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1}\ldots,x_n),x_{j+1},\ldots,x_n)=1.$$

4. 若可微函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$（$\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$）下的极值点为 P_0, 则在点 P_0,处，曲线 $\varphi(x,y)=0$ 的切线与梯度 $\mathbf{grad}\,f(P_0)$ 平行.

5. 含参无穷积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\ (x\in I)$ 在 I 上一致收敛的充要条件是，对任意给定满足 $c\le A_1<A_2\cdots<A_n\to\infty$ 的数列 $\{A_n\}$, 函数列 $\{\int_c^{A_n} f(x,y)dy\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛.

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1. 下列集合中，_________是开集，_________是闭集，_________是区域.

(1)$[a,b]\times[c,d]$, (2)$\{(x,y)|xy\neq 0\}$, (3)$\{(x,y)|xy=0\}$, (4)$\{(x,y)|y>x^2,x\in\mathbb{R}\}$.

2. 二元函数 $f(x,y)$ 满足“对固定 x, 它是 y 的连续函数”，若还满足

____，

则 $f(x,y)$ 是连续函数.

3. 若 $x=\phi(s,t),y=\psi(s,t)$ 可导，$f(x,y)$______________，那么复合函数 $f(\phi(s,t),\psi(s,t))$ 可导（在“连续”，“可导”，“可微”中选择）.

4. 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续，则两个累次积分 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$, $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$ ________________，（在“存在”，“不一定存在”中选择）________________．“它们相等”，“它们不一定相等”中选择）

5. $f(x)$在$[0,1]$连续，则

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx= \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

三、计算题 （每题 12 分，共 48 分）

1. 求函数$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}$ $(y\neq0)$, 在原点的重极限和累次极限（若存在的话）；如何补充f在原点定义，使它在原点连续？

2. 求函数$u=f(xy,y/x)$的全微分，偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

3. 设$z=f(x,y)$是由方程$z=F(x+z,x+y)$确定的隐函数，求偏导数f_x,f_{xy}.

4 利用$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$， 计算下述无穷积分的值（说明计算步骤的必要理由）

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx,\qquad ab>0.$$

四、证明题 （每题 12 分，共 36 分）

1. 叙述一条平面点集完备性定理，并用它证明有界闭集上连续函数的某个性质.

2. 给定$\mathbb{R}^p$上n个点$X_i,i=1,2,\ldots,n$, 定义函数$f(\alpha)=\sum_{i=1}^n\langle X_i,\alpha\rangle^2$，$\alpha\in\mathbb{R}^p$.

证明：（1）$f(\alpha)$的梯度$\mathbf{grad}\,f(\alpha)=2A\alpha$（其中$p$ 阶矩阵$A=\sum_{i=1}^n X_iX_i'$）；

（2）函数$g(\alpha)=\|\alpha\|^2$ 的梯度$\mathbf{grad}\,g(\alpha)=2\alpha$;

（3）在约束条件$g(\alpha)=1$下，函数$f(\alpha)$的最大值μ等于矩阵A的最大特征值μ，而且$f(\alpha)$在对应于μ的单位特征向量上取到最大值μ.

（提示：利用$\langle X_i,\alpha\rangle=\alpha'X_i=X_i'\alpha$, 建立$f(\alpha)$与二次型$\alpha'A\alpha$的关系）

3. 若f_x,f_y,f_{yx}在点(x_0,y_0)某邻域存在，f_{yx}在(x_0,y_0)连续，则$f_{xy}(x_0,,y_0)$也存在，而且$f_{xy}(x_0,,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ ．（可以利用前面判断题中你认为正确的结论）