

# 24 秋- 泛函分析第二次小测（回忆版）

何家兴

hejiaxing202411@163.com

December 25, 2024

- 
1. (a) 叙述疏集、第一纲集、第二纲集的定义  
(b) 叙述开映射定理、Banach 逆算子定理  
(c) 叙述闭算子的定义、等价范数定理、闭图像定理
  2. (a) 叙述实 Hahn-Banach 定理、有界延拓的 Hahn-Banach 定理、几何形式的 Hahn-Banach 定理  
(b) 叙述超平面的定义，证明  $L$  是线性空间  $\mathcal{X}$  上的超平面，当且仅当存在非零线性泛函  $f$  及  $r \in \mathbb{R}$ ，使得  $L = H_f^r$   
(c) 叙述承托超平面的定义，证明若  $E$  是实  $B^*$  空间中含有内点的闭凸集，则过  $E$  的每个边界点都可以作出  $E$  的一个承托超平面
  3. (a)  $\mathcal{X}$  是  $B^*$  空间，证明  $\mathcal{X}$  可等距嵌入到  $\mathcal{X}^{**}$   
(b) 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是  $B^*$  空间， $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ，叙述  $T$  的共轭算子  $T^*$  的定义，并证明  $\|T\| = \|T^*\|$   
(c) 写出  $L^p[0, 1]$   $1 \leq p < \infty$ 、 $C[0, 1]$  的共轭空间
  4. (a) 叙述  $B^*$  空间  $\mathcal{X}$  上强极限、弱极限的定义，并给出弱极限存在而强极限不存在的例子  
(b) 叙述 Mazur 定理  
(c) 设  $\mathcal{X}$  是  $B^*$  空间，叙述  $\mathcal{X}^*$  上弱收敛、\* 弱收敛的定义  
(d) 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是  $B^*$  空间， $T_n, T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ，叙述一致收敛、强收敛、弱收敛的定义  
(e) 给出强收敛而一致收敛、弱收敛而不强收敛的例子