数学分析补充习题

唐

1.设$f(x)$在$[a,b]$上递增.若$f(x)$在$[a,b]$上有原函数,证明$f\in C([a,b])$.

2.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)=0$. 证明对在$[a,b]$上连续的函数$\phi(x)$,存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)+\phi(\xi)f(\xi)=0$.

3.求不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^n+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int e^x\sin^3 x\,dx$

(7) $\displaystyle\int x^2e^{2x}\sin^2 x\,dx$　　(8) $\displaystyle\int\sin^m x\cos nx\,dx$

4.设a_n单调递减趋于0.证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛当且仅当$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$收敛.

5.(Kummer)设$\sum a_n$, $\sum b_n$是正项级数, 如果n充分大时
(1)$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\geq\lambda>0$, 则$\sum a_n$收敛.
(2)$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\leq 0$且$\sum b_n$发散, 则$\sum a_n$发散. (注:$b_n=1$回到d'Alembert)

6.判断$\sum\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^s\frac{1}{2n+1}$的敛散性.

7.研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$的条件收敛和绝对收敛.

8.尝试将级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$重排后使其发散到正,负无穷.

9.是否存在通项趋于0的发散的交错级数,说明理由.

10.设$f,g\in R[a,b]$.证明:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\triangle x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

其中$\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$是对应于同一分割$P:\ a=x_0\le x_1\le\cdots\le x_n=b$的任意两个取法, $\lambda=\max\{\triangle x_i\}$.

11.讨论$[a,b]$上的函数$f^2(x)$,$f(x)$两者间可积性的关系.

12.设$f\in R[a,b]$, 证明$e^{f(x)}\in R[a,b]$.

13.设$p>1$. 证明Minkowski不等式

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p}\le\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

14. 设$f\in R[0,1]$, 且$f(x)\ge a>0$. 求证:

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\ge\frac{1}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

15.设$f\in R[a,b]$.证明:若f在$c\in[a,b]$处连续, 则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在c点可导(端点是单侧导数),且

$$F'(c)=f(c).$$

16.若$f\in R[a,b]$, F是f的一个原函数, 则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

17.求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{1+x}dx.$$

18.求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^4 x dx.$$

19.求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin(\frac{k\pi}{n^2}).$$

20.设$f'(x)$在$[0,1]$上连续.求证:

$$\int_0^1 |f(x)|dx\le\max\{\int_0^1 |f'(x)|dx,|\int_0^1 f(x)dx|\}.$$

21.设$f(x)\geq 0$在$[0,1]$上连续,$f(1)=0$.求证:存在$\xi\in(0,1)$,使得

$$f(\xi)=\int_0^\xi f(x)dx.$$

22.设$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加,求证:

$$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

23.比较$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$与$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$的大小.

24.(Riemann-Lebesgue)设$f\in R[a,b]$, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0.$$

25.设$f_1(x),\cdots,f_n(x)$在$[a,b]$上连续, 记

$$a_{i,j}=\int_a^b f_i(x)f_j(x)dx\quad(i,j=1,\cdots,n).$$

证明:函数$f_1(x),\cdots,f_n(x)$在$[a,b]$上线性相关的充要条件是行列式

$$Det(a_{i,j})=0.$$

26.设$f''(x)\geq 0$, 求证$\int_0^1 f(x^\lambda)dx\geq f(\frac{1}{\lambda+1})$, 其中$\lambda\in\mathbb{R}$.

27.求曲线$(\frac{x}{a})^{2/3}+(\frac{y}{b})^{2/3}=1\ (a>0,b>0)$的全长.

28.设$f(x)\in C[0,+\infty]$且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A.$$

29.求$\int_0^1 t^n(\ln t)^m dt$, 其中m,n是自然数.

30.讨论$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$的收敛性和绝对收敛性.

31.设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续, $f(x)>0$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$.讨论$\int_1^{+\infty}f(x)dx$的敛散性.

32.讨论$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$当$\alpha>\beta>1$的敛散性(提示:可用书上例9.3.10类似的方法讨论).

33.研究函数列$\{\frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}\}$的一致收敛性.

34.证明黎曼ζ函数$\zeta(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上连续可微.

35. 证明：$\sum_{n=0}^\infty\int_0^x t^n\sin\pi t dt=\int_0^x\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$ $(0\le x<1)$.

36. 证明：$\sum_{n=0}^\infty\int_0^1 t^n\sin\pi t dt=\int_0^1\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$.(注意与上一题的区别)

37. 设$A\subset\mathbb{R}^n, B\subset\mathbb{R}^n$. 证明:

$$(1)(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ;\quad(2)\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

38. 设$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. 定义

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,\quad d_p(x,y)=(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p)^{1/p}(1<p<+\infty).$$

证明：d_∞, d_p都是$\mathbb{R}^n$中的距离(也叫度量).

39. 求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

40. 设$E\subset\mathbb{R}^n$是紧集，证明存在$x,y\in E$使得

$$diam(E)=|x-y|.$$

41. 设$f(x)$及$g(y)$分别在区间$[a,b]$和$[c,d]$上连续. 令

$$F(x,y)=\int_a^x f(t)dt\int_c^y g(t)dt,$$

用"ε"语言证明$F(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上连续.

42. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当}x^2+y^2\ne0\text{时},\\ 0, & \text{当}x^2+y^2=0\text{时}.\end{cases}$$

求$f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$? $f(x,y)$在$(0,0)$点是否可微?

43. 上题中的偏导函数$f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$在点$(0,0)$点是否连续.

44. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为区域. 在Ω内$f_x'(x,y)\equiv 0$, $f_y'(x,y)\equiv 0$. 求证：$f(x,y)$在Ω内为常数.

45.设$f(x)=|x|, x\in\mathbb{R}^n$, 用定义求$f$在$a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$点的偏导数和对$v=(v_1,\cdots,v_n)$的方向导数.

46.求向量值函数$g(x)=\frac{x}{|x|}$ $x\in\mathbb{R}^n$在$a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$点的导数.

47. 设$u=u(x,y)$在$x^2+y^2>0$上可微, 令$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 在(x,y)点作单位向量$\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$. 向量$\vec{e_r}$表示θ固定沿r增加的方向, 向量$\vec{e_\theta}$表示r固定沿θ增加的方向. 证明

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e_r}}=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \frac{\partial u}{\partial \vec{e_\theta}}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

48.设$u=f(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 若u满足调和方程

$$\Delta u:=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

试求出函数u.

49.设$u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 求$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

50.试将方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$化为极坐标下的表达式.
(答案为$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$)

51. 证明:(1)设f在凸区域$D\subset\mathbb{R}^n$上有连续一阶偏导数, 则f为凸函数$\Leftrightarrow$

$$f(y)\geq f(x)+\nabla f(x)\cdot(y-x),\quad \forall x,y\in D.$$

(2)如果f有连续二阶偏导数, 则f为凸函数$\Leftrightarrow$ $Hess(f)\geq 0$(半正定).

52. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$有连续二阶偏导数, 且

$$Hess(f)(x)\geq I_n,\forall x\in\mathbb{R}^n,$$

其中I_n是n阶单位方阵. 证明f有唯一的最小值.