北京师范大学2025～2026学年第一学期期中考试试卷

课程名称：____数学分析III____　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

阅卷老师（签字）：________

一、（10分）求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数.

二、（10分）证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

三、（22分）(1) 求积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$.

(2) 求 $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+...+x_n)^2dx_1dx_2...dx_n$，其中 $\Omega=\{(x_1,x_2,...,x_n):0\le x_i\le 1; i=1,...,n\}$.

(3) 求 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(4) 求 $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分，取上侧.

四、（10分）讨论下面反常积分的敛散性：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

五、（10分）设函数 $f(x)=x^2+2x$，区域 D 由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 围成. 计算积分

$$\iint\limits_{D}[1+xyf(x^2+y^2)]dxdy$$

六、（20分）(1) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 确定 $(a>0)$，求函数 $y=f(x)$ 的极值.

(2) 求 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在条件 $x+y=a$ 下的最小值，其中 $x\ge 0, y\ge 0$，a 为常数，并证明不等式 $\frac{x^4+y^4}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^4$

七、（10分）已知平面区域 $D=\{(x,y):0\le x\le\pi;0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2$.

八、（8分）设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为一凸集，即一切 $x^1,x^2\in U$ 及及实数 $\lambda\in(0,1)$，都有

$$\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in U.$$

如果函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 对一切 $x^1,x^2\in U$ 及 $\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\le\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2),$$

那么称函数 $f(x)$ 为凸集 U 上的一个凸函数.

(1) 设函数 $f(x)$ 在凸区域 U 上可微, 证明：$f(x)$ 为凸集 U 上的凸函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)-f(x^0)\ge\nabla f(x^0)(x-x^0)$

(2) 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为一凸区域，如果函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 具有连续的二阶偏导数，证明函数 $f(x)$ 为 U 的凸函数当且仅当 f 的Hessian矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ 在 U 上为半正定的.