25 春- 数学分析 2（回忆版）

July 23, 2025

---

1. 求定积分
   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \mathrm{d}x$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x (m, n \in \mathbb{N})$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^4+1} \mathrm{d}x$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) \mathrm{d}x$
2. 讨论积分敛散性
   (a) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2\sin^2 x} \mathrm{d}x$
   (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} \mathrm{d}x$
   (c) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} \mathrm{d}x$
3. 求极限 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n \mathrm{d}x$
4. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{n})} \right)$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)$
5. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 严格单调递减，证明：
   (a) $\exists \theta \in (0,1)$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \theta f(0) + (1-\theta) f(1)$
   (b) 取 $c > f(0)$, 则 $\exists \theta \in (0,1)$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \theta c + (1-\theta) f(1)$
6. f, g, h 是 $[a, +\infty)$ 上连续函数，$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，证明
   (a) $\int_a^{\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
   (b) $\int_a^{\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x = A$，则 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$
7. $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$

(a) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

(b) $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，证明

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F(\frac{\pi}{2})<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. $f(x)$ 的 Fourier 系数为 a_n, b_n，周期为 2π，

(a) 求 $f(x+t)$ 的 Fourier 系数

(b) 求 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 的 Fourier 系数

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$|f_0(x)|\leqslant M$，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}|f_i(x)-f_{i+1}(x)|\leqslant M$，且 $b_n>0$。证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nf_n(x)$ 一致收敛

10. $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 可积或绝对可积，对它作怎样的延拓才能使其在 $[-\pi,\pi]$ 上 Fourier 系数形式为 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$