北京师范大学 2021–2022 学年第一学期近世代数期末考试试题(A卷)

课程名称： 近世代数　　　　**任课老师姓名：**

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷

院（系）：　　　　专 业：　　　　年 级：

姓 名：　　　　学 号：

一、 (18分) 给定正整数 n, $R=\mathbb{Z}_n$.

(1) 若 $n=n_1n_2$, $(n_1,n_2)=1$ 且 $n_1,n_2\geqslant 2$, 证明存在 R 的两个非平凡理想 I, J 使得 $R=I\oplus J$;

(2) 若 $n=p^k$, p 为素数, $k\in\mathbb{Z}^+$, 是否存在 R 的两个非平凡理想 I, J 使得 $R=I\oplus J$? 请给出判断并证明你的结论.

二、 (18分) 给定正整数 $m\geqslant 2$, 令 $R_m=\{a+bmi \mid a,b\in\mathbb{Z},\ i=\sqrt{-1}\}$.

(1) 证明 R_m 是高斯整环 $R=\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z},\ i=\sqrt{-1}\}$ 的子环;

(2) 判断 R_m 是否是 R 的理想, 并证明你的结论;

(3) 对于不同的素数 p, q, 判断 R_p 是否与 R_q 同构, 并证明你的结论.

三、 (16分) 设 $R=M_n(F)$ 是数域 F 上的全体 n 阶矩阵环, $\overline{R}$ 是一个非零环. 若 φ 是 R 到 $\overline{R}$ 的一个满同态, 证明 R 与 $\overline{R}$ 同构.

四、 (16分) 设 R 是一个交换环, M 是 R 的一个极大理想. 若对于任意 $a\notin M$, 都存在 $b\notin M$ 使得 $ab\notin M$, 证明 R/M 是域.

五、 (16分) 给定 s 个不同的素数 $p_1,\ldots,p_s$. 令

$$T=\{\sqrt[p_i]{p_i} \mid i=1,\ldots,s\},\quad \alpha=\prod_{i=1}^{s}\sqrt[p_i]{p_i}.$$

证明 $\mathbb{Q}(T)=\mathbb{Q}(\alpha)$, 并求出 $[\mathbb{Q}(T):\mathbb{Q}]$.

六、 (16分) 设 E 是域 F 的一个扩张, α,β 为 E 中的两个不同的元素且均为 F 上的代数元.

(1) 证明 $F(\alpha)=F(\beta)\Longleftrightarrow\alpha$ 可被 $F(\beta)$ 的一组基线性表出, β 可被 $F(\alpha)$ 的一组基线性表出;

(2) 设 $F(\alpha)=F(\beta)$,

(i) 若 $\mathrm{ch}\,F=p$, p 是一个素数, 证明 $F(\alpha^p)=F(\beta^p)$;

(ii) 若 $\mathrm{ch}\,F=0$, 判断是否有 $F(\alpha^2)=F(\beta^2)$, 并证明你的结论.