北京师范大学 2022 ～ 2023 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：概率论　　　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师（签字）：________

---

1. (1)　(5分) 叙述随机变量的定义.

   (2)　(5分) 叙述随机变量分布函数的定义和性质.

   (3)　(10分) 已知 $F(x)$, $G(x)$ 都是随机变量的分布函数. 下面的函数: $F(x)+G(x)$, $1-(1-F(x))^2$, $F(x^3)$, $\frac{1}{2}(F(x)+G(x))$, $F(x)G(x)$ 是否可以做某个随机变量的分布函数, 简要说明理由.

2. 设 ξ 是一个非负随机变量. 当 $\alpha>0$ 时,

   (1)　(5分) 证明：$\mathbb{E}\xi^\alpha=\int_0^{+\infty}\alpha x^{\alpha-1}P\{\xi>x\}dx$.

   (2)　(10分) 当 $x\to+\infty$, 有 $P\{\xi>x\}\sim C\frac{\ln x}{x^\beta}$ $(\beta>0)$, C 是正常数. 证明: $\mathbb{E}\xi^\alpha<+\infty$ 当且仅当 $\beta>\alpha$.

3. (1)　(10分) 叙述依概率收敛, 弱收敛的定义.

   (2)　(5分) 已知当 $n\to\infty$ 时, $\xi_n\xrightarrow{\mathrm{P}}0$, $\eta_n\xrightarrow{\mathrm{w}}\eta$, 证明: $\xi_n+\eta_n\xrightarrow{\mathrm{w}}\eta$.

4. $\{\xi_n\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 ξ_1 服从 参数为 1 的指数分布.

   (1)　(10分) 求 $X_n:=\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 的概率密度;

   (2)　(10分) 证明: $X_n\xrightarrow{\mathrm{a.s.}}0$. (仅证明出 $X_n\xrightarrow{\mathrm{P}}0$ 可得5分)

5. 随机变量 X_n 服从参数为 n 的Poisson 分布.

   (1)　(10分) 写出特征函数的定义，并求 X_n 的特征函数;

   (2)　(10分) 证明: 当 $n\to\infty$ 时, $\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}$ 依分布收敛于标准正态分布的随机变量.

6. 用 ξ 表示在一定时间内某种仪器发射出的粒子数, 假定发射出的每个粒子被记录下来的概率为 p $(0 < p < 1)$, 没有被记录的概率为 $q := 1 - p$, 且各个粒子是否被记录相互独立. 令被记录下的粒子数为 X, 未被记录下的粒子数为 Y. 假设 X 与 Y 相互独立, 且 ξ 的母函数 $G(s)$ 在 $s = 1$ 的某邻域有定义.

   (1) (5分) 证明: $X = \sum_{i=1}^{\xi} \eta_i$, $Y = \sum_{i=1}^{\xi}(1 - \eta_i)$, 这里 $\{\eta_i\}$ 是独立同分布的随机变量列, 且 $\eta_1 \sim B(1, p)$;

   (2) (5分) 证明: $G(p + qs)G(q + ps) = G(s)$;

   (3) (附加题：5分) 证明: ξ 服从 Poisson 分布.