北京师范大学 2018~2019 学年第一学期期中考试试卷（A卷）

课程名称：　数学分析(3)　　任课教师姓名：[redacted]

卷面总分：　100分　　考试时长：　120分钟　　考试类别：　闭 卷

院（系）：数学科学学院　专业：数学与应用数学　年级：2017

姓 [redacted]

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	总分
得分								

阅卷教师（签字）：________________

一、计算题（共50分，前4题每题5分，后3题每题10分）

1. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.　$x=r\sin\theta$, $y=r\cos\theta$ $= \dfrac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r} = r\sin\theta$

2. 求 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在点$(0,0)$处的梯度.

3. 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值点.

4. 求 $z=2x^2+4y^2$在点$(2,1,12)$处的切平面方程.

5. 研究 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 在点$(0,0)$处的二重极限与累次极限.

6. 设 $sinz-xyz=0$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

7. 设 $f(x,y,z)=(x-z^2,2x^2-y,xyz)\in R^3$;　$(x,y,z)=g(s,t)=(t^2,st,s^3)\in R^3$. 记$F=f\circ g$, 求$F'(s,t)$.

二、证明题（共50分，每题10分）

8. 证明: 若$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$定义在$D_1=R^2\setminus\{(0,0)\}$上, 证明：$f$在$(0,0)$处不存在极限.

9. 证明: 若函数$f:R^n\to R^m$在R^n一致连续，如果$\{x_k\}$是R^n中的$Cauchy$列，求证：$\{f(x_k)\}$是R^m中的$Cauchy$列.

10. 证明: 设$f:R^n\to R^n$是开集G上的C^1类函数, 且$J_f(x_0)=0$; 记$y_0=f(x_0)$. 如果f在x_0邻域存在反函数f^{-1}, 求证：f^{-1}在y_0不可微.　$J_f(x_0)=0$

11. 证明: 设三元数值函数$w=f(x,y,z)$在原点O的邻域$U(O)$有定义. 如果$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$在$U(O)$连续且有界,且$f(x,y,z)$关于$z$是一元连续函数,求证：三元数值函数$f$在$U(O)$连续.

12. 证明：E是R^n中的有界闭集的充分必要条件是E是R^n中的紧集.