

北京师范大学 2016 ~ 2017 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 复变函数 任课老师姓名:

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系): 数学科学学院 专业: 数学与应用数学 年级: 2015级

姓名: 学号:

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师(签字):

一. (15分) 叙述函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在一点的(复)可微和解析的定义且讨论函数 $f(z) = x^3y + iy^3x$ 的(复)可微性和解析性(在何处(复)可微和解析).

二. (25分) 将下列函数在指定圆环内展为罗朗级数:

(1) $\frac{1}{z^2(z^2-9)}$, $3 < |z| < +\infty$; (2) $\cos(\frac{1}{z-1})$, $0 < |z-1| < +\infty$,

(3) $\frac{f(z)}{z^5}$, $0 < |z| < 1$, $f(z)$ 为 $\text{Ln}(1-z)$ 在 $|z| < 1$ 中满足 $f(0) = 0$ 的解析分支.

三 (25分) (1)求函数(a) $\frac{z^2-4}{z(z^2-1)^2}$ 和(b) $\frac{1}{z^4 \sin z}$ 在复平面 \mathbb{C} (不含 ∞ 点) 中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型(极点要指明阶数). (2)求函数 $\frac{1}{\sin z}$, $\frac{1}{z^2 \sin z}$ 和 $\frac{1}{z^4 \sin z}$ 在0处的留数($\text{Res}(\frac{1}{\sin z}, 0) = ?$, $\text{Res}(\frac{1}{z^2 \sin z}, 0) = ?$, $\text{Res}(\frac{1}{z^4 \sin z}, 0) = ?$) . \checkmark

四 (10分) 分式线性 $w = T(z) = \frac{z+i}{z-i}$ 将指定区域 $\Omega = \{z : \text{Re } z < 0, \text{Im } z < 0\}$ 映射为什么区域? ($T(\Omega) = ?$ 作草图标明原像区域和像区域, 并说明理由.)

五 (15分) 计算积分

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 1} dx$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{4 + x^2}$ ($-1 < \alpha < 1$).

六 (10分) 说明多值函数 $(z^2(1+z)^3)^{\frac{1}{5}}$ 在割去线段 $[-1, 0]$ 的 z 平面上可以分出五个单值连续分支. 求出在 $[-1, 0]$ 的上沿取正值的那个单值解析分支 $g_0(z)$ 在点 $z = 1$ 处的值($g_0(1) = ?$) 和在点 $z = i$ 处的值($g_0(i) = ?$).

