北京师范大学 2023~2024学年第二学期期末考试参考答案(A卷)

课程名称: 数学分析II　　**任课教师姓名**:

卷面总分: 100分　　**考试时长**: 120分钟　　**考试类别**: 闭卷

院(系): 数学科学学院　**专业**: 数学与应用数学(强基)　**年级**: 2023

---

1. (**20分**) (1) 计算积分$\int_{|x|\le 1,\ 0\le y\le 2}\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$.

证明.

$$
\begin{aligned}
K &= \iint_{|x|\le 1, 0\le y\le 2}\sqrt{|y-x^2|}dxdy\\
&= \iint_{|x|\le 1, x^2\le y\le 2}\sqrt{|y-x^2|}dxdy + \iint_{|x|\le 1, 0\le y\le x^2}\sqrt{|y-x^2|}dxdy\\
&= \int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}dy + \int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy\\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

□

(2) 计算曲线积分$\int_C \dfrac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中$C: x^2+4y^2=1$取逆时针方向。

证明. 因 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 原点在圆 C 内, 则 C 上沿逆时针方向的积分等于在椭圆 $L: x^2+4y^2=1$ 上沿逆时针方向的积分.

故,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_L (x-y)dx+(x+4y)dy\\
&= \iint_{x^2+4y^2\le 1} 2dxdy\\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

□

2. (**15分**) 已知平面$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$与椭圆柱面$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ $(A,B>0)$相交，用拉格朗日乘子法求相交所成椭圆的面积。

证明. 要计算椭圆的面积 $S=\pi ab$, 只需算出椭圆的半轴 a 与 b. 也就是要求 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在条件 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 及 $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ 之下的极值. 以 ρ^2 替换 ρ, 取

$$L=x^2+y^2+z^2+2\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z)-\mu\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1\right)$$

令 $L'_x=L'_y=L'_z=0$, 得

$$x\left(1-\mu\frac{1}{A^2}\right)+\lambda\alpha=0, \tag{1}$$

$$y\left(1-\mu\frac{1}{B^2}\right)+\lambda\beta=0, \tag{2}$$

$$z+\lambda\gamma=0, \tag{3}$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1. \tag{5}$$

则 (1), (2), (3) 中消去 λ 得 μ 的方程

$$\mu^2-(\frac{\beta^2}{\gamma^2}B^2+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}A^2+B^2+A^2)\mu+\frac{A^2B^2}{\gamma^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0. \tag{6}$$

(1), (2), (3) 分别乘以 x,y,z 相加, 得

$$x^2+y^2+z^2=\mu(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2})-\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\mu. \tag{7}$$

a,b 为所论椭圆的两个半轴, 则它们应是 ρ 的极值. 而 ρ 和 ρ^2 的极值点相同, (7) 表明 ρ^2 的极值等于 μ. μ 满足方程 (6), 设 (6) 的两个根为 μ_1,μ_2, 则 μ_1,μ_2 分别为 a^2,b^2. 因而

$$S=\pi ab=\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}.$$

根据韦达定理,

$$\mu_1\mu_2=\frac{A^2B^2}{\gamma^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

故

$$S=\pi\frac{AB}{|\gamma|}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

$\square$

3. (**15分**) 设

(1) $F(x,y,z)$在$\mathbb{R}^3$上连续, F是三次齐次函数, 即对任意$t\in\mathbb{R}$,

$$F(tx,ty,tz)=t^3F(x,y,z),\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \tag{8}$$

(2) F有连续偏导数, 且

$$F_z'(x,y,z)\neq 0,\quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{9}$$

(3) $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数, 且 f 可微.

试证：$z=f(x,y)$是一次齐次函数。

证明. 因 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数, 故 $(x,y,z)=(x,y,\ f(x,y))$ 必满足方程, 即有

$$F(x,y,f(x,y))=0. \tag{10}$$

因 F_z' 的介值性, 如果 F_z' 变号, 就会出现零点, 与 $F_z'\neq 0$ 矛盾, 故 $F_z'(x,y,z)\neq 0$, 从而 F_z' 不会变号, 可知 $F(x,y,z)$ 对 z 单调. 因此, $\mathbb{R}^2$ 上有隐函数 $z=f(x,y)$ 且必唯一.

下面证明 $z=f(x,y)$ 是一次齐次函数, 即对任意 $t\in\mathbb{R}$,

$$f(tx,ty)=tf(x,y).$$

根据式 (8) 和 (10):

$$F(tx,ty,tf(x,y))=t^3F(x,y,f(x,y))=0.$$

在式 (10) 里: 对任意 $t\in\mathbb{R}$, 用 (tx,ty) 替代 (x,y), 则得

$$F(tx,ty,f(tx,ty))=0.$$

综上可得

$$F(tx,ty,tf(x,y))-F(tx,ty,f(tx,ty))=0,$$

对此式左端应用 Lagrange 定理:

$$F'_z(tx,ty,\xi)[tf(x,y)-f(tx,ty)]=0,$$

其中 ξ 在 $z_1=tf(x,y),z_2=f(tx,ty)$ 之间, 且据式 (9) 可知 $F'_2(tx,ty,\xi)\neq 0$. 故

$$tf(x,y)=f(tx,ty)\ (\forall t\in\mathbf{R}).$$

即 $z=f(x,y)$ 是一次齐次函数. □

4. (**13分**) 设椭球面$\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$，用高–奥公式求曲面积分

$$\int_\Sigma\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS.$$

证明. 任取Σ上的一条光滑曲线$(x(t),y(t),z(t))$，对$\dfrac{x(t)^2}{a^2}+\dfrac{y(t)^2}{b^2}+\dfrac{z(t)^2}{c^2}\equiv 1$两边求导得$\dfrac{x(t)x'(t)}{a^2}+\dfrac{y(t)y'(t)}{b^2}+\dfrac{z(t)z'(t)}{c^2}\equiv 0$，这说明$\Sigma$在$(x,y,z)$处得单位外法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right).$$

这样，由Gauss定理知所求积分为

$$\begin{aligned}\int_\Sigma\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS&=\int_\Sigma\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)\cdot\boldsymbol{n}\,dS\\&=\int_\Omega\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)dV\\&=\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),\end{aligned}$$

其中$\Omega=\{(x,y,z):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\}$. □

5. (**13分**) 熟知连续函数将紧集映成紧集。反过来，设K为$\mathbb{R}^n$的非空子集且任何连续函数$f: K \to \mathbb{R}$均将K映成有界集，则K为紧集。

证明. 令$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $f(K)$有界说明存在$R>0$使得$\sqrt{x^2+y^2} \le R$，对于任何的$(x,y) \in K$，此即K有界。

若K不闭，则存在$(x_0,y_0) \notin K$, $(x_n,y_n) \in K$满足$(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$。这样，再令$f(x,y) = ((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{-1/2}$，可知$f(x_n,y_n) \to +\infty$，从而$f(K)$无界，矛盾。可见$K$为闭集。 □

6. (**12分**) 设向量场$\boldsymbol{F} = (x^2-2yz, y^2-2xz, z^2-2xy)$，求证$\boldsymbol{F}$是有势场并求出一个势函数。

证明. 令$P = x^2-2yz$, $Q = y^2-2xz$, $R = z^2-2xy$，验算得

$$R_y = Q_z, \quad P_z = R_x, \quad Q_x = P_y,$$

因而$\nabla \times F = 0$，即F无旋。$\mathbb{R}^3$单连通得到F有势。

取有向折线段$L: (0,0,0) \to (0,0,z) \to (0,y,z) \to (x,y,z)$则有势函数

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^x t^2 dt + \int_0^y t^2\, dt + \int_0^x (t^2-2yz)\, dt \\ &= \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - 2xyz.\end{aligned}$$

□

7. (**12分**) 在$\mathbb{R}^3$中，微分形式$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

(1) 在球坐标变换$x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$下，给出ω在(r,φ,θ)的坐标表示；

(2) 分别在(x,y,z)坐标和(r,φ,θ)坐标下计算$d\omega$并验证两者相等。

证明. (1) 由

$$
\begin{aligned}
dx &= \sin\varphi\cos\theta\,dr + r\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi - r\sin\varphi\sin\theta\,d\theta,\\
dy &= \sin\varphi\sin\theta\,dr + r\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta\,d\theta,\\
dz &= \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi
\end{aligned}
$$

知

$$
\begin{aligned}
dx\wedge dy &= -r\sin^2\varphi\,d\theta\wedge dr + r^2\sin\varphi\cos\varphi\,dr\wedge d\theta,\\
dy\wedge dz &= -r\sin\theta\,dr\wedge d\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\,d\theta\wedge d\varphi + r^2\sin^2\varphi\cos\theta\,d\varphi\wedge d\theta,\\
dz\wedge dx &= r\cos\theta\,dr\wedge d\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\,d\theta\wedge d\varphi + r^2\sin^2\varphi\sin\theta\,d\varphi\wedge d\theta.
\end{aligned}
$$

从而$\omega = r^3\sin\varphi\,d\varphi\wedge d\theta$.

(2) 在(x,y,z)坐标下$d\omega = 3\,dx\wedge dy\wedge dz$，在$(r,\varphi,\theta)$坐标下，$d\omega = 3r^2\sin\varphi\,dr\wedge d\varphi\wedge d\theta$. 注意到

$$
\begin{aligned}
dx\wedge dy\wedge dz &= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} dr\wedge d\varphi\wedge d\theta\\
&= r^2\sin\varphi\,dr\wedge d\varphi\wedge d\theta.
\end{aligned}
$$

□