25 春- 代数学基础 2（回忆版）

July 23, 2025

---

1. (15pts) 对欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $(1,1,1)$, $(1,0,2)$ 和 $(-1,5,-1)$ 做 Schmidt 正交化，得到三个正交的向量，并以此计算开始给定的三个向量张成的平行六面体的体积

2. (30pts) 给定二次型 $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz$

   (a) 写出该二次型的矩阵 A，并计算 A 的特征值

   (b) 求一正交矩阵 U，使得 U^TAU 为对角矩阵

   (c) 写出 A 的极小多项式

   (d) 判定 A 是否正定

3. (15pts) 设 V 是实数上的向量空间，σ 是 V 的一个线性变换，且满足 $\sigma^2=\sigma$

   (a) 请证明 $\xi-\sigma(\xi)\in\mathrm{Ker}(\sigma)$

   (b) 若 σ 不是单射也不是零映射，证明 1 和 0 都是 σ 的特征值

   (c) 证明 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$

4. (15pts) 设 V 是实数上的 n 维向量空间，σ 和 τ 是 V 的线性变换，且 $\sigma\tau=\tau\sigma$

   (a) 请证明: σ 的每个特征子空间都在 τ 下不变

   (b) 若 σ 有 n 个互不相同的特征值，请证明 σ 和 τ 可同时对角化

5. (15pts)

   (a) 设 A 是一个 n 阶正定矩阵，请证明对任意的维数 $m\geqslant 2$，存在 n 阶正定矩阵 B，使得 $A=B^m$

   (b) 当 $m=2$ 时，将 B 简记为 $\sqrt{A}$。对任意的可逆实矩阵 C，证明 CC^T 正定，并利用 $\sqrt{CC^T}$ 和 C^T 构造出一个正交矩阵。

   (c) 证明一个可逆实矩阵可以写成一个正定矩阵和一个正交矩阵之积

6. (10pts) 设 A 是一个实矩阵，借助线性方程解空间理论证明 $r(A^TA)=r(A)$