期中考试参考答案

1. (10 分) 试证明 $(0,1) \sim [0,1]$.
   Proof: 由 $\overline{\overline{(0,1)}} \sim \overline{\overline{(-\infty,\infty)}}$ 以及 $(0,1) \subset [0,1] \subset (-\infty,\infty)$ 可知 $\overline{\overline{(0,1)}} \leq \overline{\overline{[0,1]}} \leq \overline{\overline{(-\infty,\infty)}}$ 从而有 $(0,1) \sim [0,1]$.(或者取出 (0,1) 与 [0,1] 中有理点做对等)(10')

2. (10 分) 试写出标准 Cantor 三分集的聚点, 孤立点, 边界点与内点集.
   首先记 Cantor 集合为 C. 聚点：C, 孤立点: $\emptyset$, 边界点: C, 内点: $\emptyset$.(写对一个 3', 两个 5', 三个 8', 四个 10')

3. (12 分) 请对 Dirichlet 函数构造 $[0,1]$ 上的闭集 F, 使其满足 Lusin 定理结论.
   Proof: 记 [0,1] 上全体有理点为 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\forall \delta > 0$, 取开集 $E_n = (r_n - \frac{\delta}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\delta}{2^{n+2}})$, 令 $F := [0,1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 F 为闭集，且
   $$m([0,1] \setminus F) \leq m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{n+1}} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$
   不难发现 Dirichlet 函数于 F 上连续.(12')

4. (10 分) 设 $f(x)$ 于两两不交集合 F_i 上连续, 那么 $f(x)$ 在 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ 上是否连续? 若不连续, 请举出反例.
   Proof: 不一定(3'), e.g. Dirichlet 函数, 其在 $F_1 := Q \cap [0,1]$ 与 $F_2 := Q^c \cap [0,1]$ 上分别连续, 但是 Dirichlet 函数在 [0,1] 上处处不连续.(7')

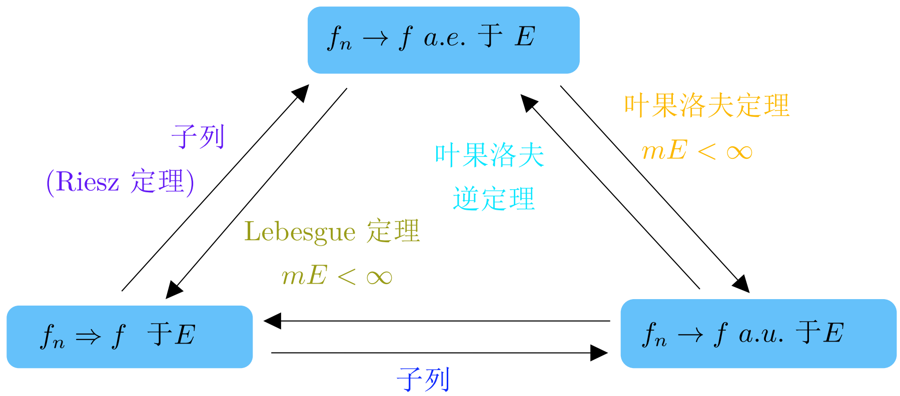
5. (12 分) 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集, N 是某自然数, $m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n\right) < \infty$, 证明: $m\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n\right) \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} m\left(E_n\right)$.
   Proof: 由于 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$, 记 $F_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$, 这样的 $\{F_n\}$ 是单减集列, 且 $F_n \supset E_n$. 由题设条件知, $n \geqslant N$ 时, $mF_n < \infty$, 所以
   $$m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} mF_n = \varlimsup_{n\to\infty} mF_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} mE_n.\text{(12')}$$

6. (10 分) 设 $f(x)$ 为 E 上的可测函数, 则 $|f(x)|$ 也是可测函数. 反之如何?
   Proof: 由
   $$E_{\{|f|>a\}} = \begin{cases} E_{\{f>a\}} \cup E_{\{f<-a\}} & a \geq 0 \\ \emptyset & a < 0 \end{cases}$$
   可知 $|f|$ 可测(5'). 反之不一定, e.g. 设 W 为 $\mathbb{R}$ 上的一不可测集, 则
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in W \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus W \end{cases}$$
   为不可测函数, 但 $|f(x)|$ 可测.(5')

7. (12 分) $[a,b]$ 上的可测函数是否一定几乎处处等于一个连续函数? 如果是, 给出证明. 如果不是, 请举出反例.
   Proof: 不一定(4'), e.g. $f(x) = \chi_{[\frac{b-a}{2},b]}$. 若存在这样的连续函数 $g(x)$, 满足 $f = g$ $a.e.$ $x \in [a,b]$, 那么 $g(x)$ 在 $\frac{b-a}{2}$ 处不可能连续.(8')

8. (24 分) 设 $\{f_n\}$ 为可测集 E 上的可测函数列, 请说明如下三种收敛关系, 并在要求 $m(E) < \infty$ 处说明其必要性.

(每个箭头 2', 两个反例各 6')



叶果洛夫定理中 $m(E) < \infty$ 必要性：设 $E = [0, +\infty)$, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[n, n+\frac{1}{n}\right] \\ 0, & x \in E \backslash \left[n, n+\frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

易见, $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于 $f \equiv 0$. 但是, 它在 E 上并不近一致收敛于 0 . 如若不然, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $e \subset E$, 使 $me < \varepsilon$, 而 $\{f_n\}$ 在 $E \backslash e$ 上一致收敛于 0 , 那么就有正整数 N 存在, 当 $n \geqslant N$ 时, 对一切 $x \in E \backslash e$, 都有 $|f_n(x)| < 1$.

令 $A_n = \left[n, n+\frac{1}{n}\right]$, 在 A_n 上, 恒有 $f_n(x) = 1$. 由此可见

$$(E \backslash e) \cap \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) = \varnothing$$

于是得到 $\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \subset e$, 因而

$$me \geqslant \sum_{k=N}^{\infty} mA_k = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

这与 $me < \varepsilon$ 发生矛盾.

Lebesgue 定理中 $m(E) < \infty$ 必要性：取 $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}$, 则 $f_n(x) \to 0$ $a.e.$ $x \in \mathbb{R}$. 但 $f \not\Rightarrow 0$