北京师范大学 2009 ~ 2010 学年第二学期期末考试试卷

课程名称: 复变函数　　任课老师姓名: ______

卷面总分: 100 分　　考试时长: 120 分钟　　考试类别: 闭卷☒ 开卷☐ 其他☐

院（系）: 数学科学学院　　专业: 数学专业　　年级: 08 级非师范班

姓名: ______　　学号: ______

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师（签字）: ______

一.(15 分) 下列函数在何处可微? 在何处解析?

$$(1)\ f(z) = xy^2 + ix^2y; \qquad (2)\ f(z) = |z|^4.$$

二.(15 分)求解析函数 $f(z) = e^{iz}\cos(z-2)$ 在 $z=-2$ 处的泰勒 (Taylor) 展式, 并指出其收敛范围.

三.(25 分) 下列函数有哪些奇点, 哪些奇点是孤立奇点? 这些孤立奇点属于哪一种类型?

$$(1)\ \frac{\sin z}{\cos z}; \quad (2)\ (z-1)\cos\left(\frac{\pi}{z-1}\right); \quad (3)\ \frac{\mathrm{Ln}\, z}{z^2-1}\ \text{的每个解析分支.}$$

四.(25 分) 计算积分:

$$(1)\ \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}dz; \quad (2)\ \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz; \quad (3)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{4+x^2}.$$

五. (10 分) 设 $P(z) = z(1-z)$. 验证 $\sqrt[2]{P(z)}$ 在区域 $D = \mathbb{C}\setminus[0,1]$ 内可以分解成解析分支; 求出 $\sqrt[2]{P(z)}$ 在 $(0,1)$ 的上沿取正实值的一个分支 $f_0(z)$ 在 $z=-1$ 处的值及函数 $f_0(z)$ 在 $(0,1)$ 的下沿的值.

六 (10 分) 设 $\Omega = \{z : -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$ 是带形. 找一个从 Ω 到单位圆盘 $U = \{w : |w| < 1\}$, 且满足 $f(0) = 0$ 和 $f'(0) > 0$ 的保形映射 $f(z)$, 并计算 $f'(0)$.