概率论: 期中考试

1. 满分200分, 60分及格; 2. 假设你卷面成绩是 ξ, 则你的期中成绩是 $\xi \wedge 100$

Nov. 23, 2022

(Ω, F, P) 对 $\forall A \in F$; 若 $P(A)>0$

$P_A(\cdot) = P(\cdot|A) = P(\cdot \cap A)/P(A)$

(Ω, F, P_A) $E[\xi|A] = \int_\Omega \xi \, dP_A$ (条件本质为更换概率空间)

1. (10')

   (1) 复述并证明全概率公式. (分别于实分析测度论的核心)

   (2) 复述离散型随机变量的条件期望的定义.

2. (20') 设 ξ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, 证明 (课上的定理记好!)

   (1) 若 $E[\xi^2]=0$, 则 $\xi \overset{a.s.}{=} 0$. $var[\xi]=0$ 仅可推出 $\xi \overset{a.s.}{=} C$ (常数)

   (2) $\forall A \in \mathcal{F}$, $E[\xi \mathbf{1}_A]=0$ 当且仅当 $\xi \overset{a.s.}{=} 0$. ($\xi \overset{a.s.}{=} 0$; $\Rightarrow \forall A \in F$; $\xi 1_A \overset{a.s.}{=} 0$)
   (扔去一个0测集其他均为0)

条件期望

3. (10') 设 X, Y 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的离散型随机变量且方差存在, 已知 $E[X|Y=b]=b$, $\forall b \in Y(\Omega)$ 且 $E[Y|X=a]=a$, $\forall a \in X(\Omega)$. 求证: $E[X|Y]=g(Y)$; $(L^2(\Omega), E[\cdot,\cdot])$ $X \in L^2, Y \in L^2$

   $(X, Y) := E[XY]$; $\sigma(Y) = \{g(Y): g$ 为 R 上可测函数$\}$

   $E[X|Y] \Rightarrow X$ 在 Y 的投影的积分

   (1) $E[XY]=E[X^2]$; (全期望公式)

   (2) $X \overset{a.s.}{=} Y$.

   → 用不了3的结论

4. (25') 设 X, Y 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的离散型随机变量且期望存在, 已知 $E[X|Y=b]=b, \forall b \in Y(\Omega)$, $E[Y|X=a]=a, \forall a \in X(\Omega)$.

   (1) 证明 $E\left[Y \mathbf{1}_{\{X=a\}}\right] = E\left[X \mathbf{1}_{\{X=a\}}\right], \forall a \in X(\Omega)$.

   (2) 证明 $E\left[Y \mathbf{1}_{\{X \leq a\}}\right] = E\left[X \mathbf{1}_{\{X \leq a\}}\right], \forall a \in \mathbb{R}$.

   $1_{\{X \leq a\}} + 1_{\{X>a\}} = 1$ 且 $1_{\{Y \geq a\}} + 1_{\{Y<a\}} = 1$

   (3) 证明 $E\left[(Y-X)\mathbf{1}_{\{X \leq a\}}\mathbf{1}_{\{Y \geq a\}}\right] = E\left[(Y-X)\mathbf{1}_{\{X>a\}}\mathbf{1}_{\{Y<a\}}\right], \forall a \in \mathbb{R}$.

   (4) 证明 $(Y-X)\underbrace{\mathbf{1}_{\{X \leq a\}}}_{A}\underbrace{\mathbf{1}_{\{Y \geq a\}}}_{B} \overset{a.s.}{=} (Y-X)\mathbf{1}_{\{X>a\}}\mathbf{1}_{\{Y<a\}} \overset{a.s.}{=} 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

   $1_A \cdot 1_B = 1_{A \cap B} \overset{a.e.}{=} 0$; $1_{A^c} 1_{B^c} = 1_{A^c \cap B^c} \overset{a.e.}{=} 0$

   (5) 证明 $X \overset{a.s.}{=} Y$.

5. (10') 设 ξ, η 是两个随机变量, 且存在函数 F 使得

$$P(\xi \leq x, \eta \leq y) = F(x \wedge y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   求证:

   (1) F 是一个分布函数; $P(\xi \leq x) = \lim_{y \to +\infty} P(\xi \leq x, \eta \leq y) = F(x)$; 故为分布函数

   (2) $P(\xi = \eta) = 1$. (回顾经典题)

6. (15') 设 X, Y 是取非负整数值的独立[redacted]随机变量, 且

$$P(X=k|X+Y=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \geq 0, 0 \leq k \leq n,$$

   其中 $0<p<1$ 为参数.

此时 $G_X(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)s^k$; $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k|X+Y=n)P(X+Y=n)$

(a) 设 G_X, G_{X+Y} 分别是 $X, X+Y$ 的母函数, 证明: $G_X(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}s^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}P(X+Y=n)$

$$G_X(s) = G_{X+Y}(ps+1-p), \quad 0 \le s \le 1.$$ $= G_{X+Y}(ps+1-p)$

(b) 若$p=1/2$, 证明$G_{X+Y}(s) = G_{X+Y}\left(\frac{1+s}{2}\right)^2$.

(c) 若$p=1/2$, 求证 $X, X+Y$ 都服从泊松分布.

7. (40') 设 $\xi \perp \eta$, $\xi \sim \mathcal{E}(\lambda), \eta \sim \mathcal{E}(\mu)$.

(1) 求 $\xi \wedge \eta$ 的分布函数. $P(\xi\wedge\eta\le x)=1-P(\xi\wedge\eta>x)=1-e^{-(\lambda+\mu)x}$

(2) 求 $P(\xi < \eta)$. $E[P(\xi<\eta|\eta)]=E[F(\eta)]=\int_0^{+\infty}(1-e^{-\lambda x})\cdot\mu e^{-\mu x}dx=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

(3) 证明: 事件 $\{\xi \wedge \eta \le x\}$ 与事件 $\{\xi < \eta\}$ 独立. 此时 $P(\xi\wedge\eta\le x,\xi<\eta)=P(\xi\le x,\xi<\eta)=E[P(\xi\le x|\eta)]$

(4) 分别求出$W = (\xi - \eta)^+, V = \xi \vee \eta - \xi \wedge \eta$的分布. $=E[\int_0^{(x\wedge\eta)}\lambda e^{-\lambda x}dx]=E[1-e^{-\lambda(x\wedge\eta)}]$

$=\int_0^{+\infty}(1-e^{-\lambda(x\wedge y)})\mu e^{-\mu y}dy$

$=\int_0^{x}(1-e^{-\lambda y})\mu e^{-\mu y}dy+\int_x^{+\infty}(1-e^{-\lambda x})\mu e^{-\mu y}dy$

$=\frac{1}{2}(1-e^{-(\lambda+\mu)y})$ 故独立!

8. (20') 设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ i.i.d., 且分布函数F 连续, 令

(n-1个时 ξ_1 为最大的)

$$N = \inf\{n \ge 2 : \xi_n > \xi_1\}.$$

此时有 $P(N=k)=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$

求 N 的分布以及概率 $\mathbb{P}(\xi_1 > \xi_2 < \xi_3 < \xi_4)$, 并证明 ξ_N 的分布函数是 $F + (1 - F)\log(1 - F)$.

且 $P(\xi_1>\xi_2<\xi_3<\xi_4)=\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}=\frac{1}{8}$; 且 $P(\xi_N\le x)=\sum_{k=2}^{+\infty}P(\xi_k\le x|N=k)P(N=k)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{F^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{F^k}{k!}$

分部积分; ☆

9. (10') 设 $\alpha > 0, \beta \ge 0$ 且 ξ 具有连续的密度函数. 证明: "⇐": $x^\alpha E[|\xi|^\beta 1_{\{\xi>x\}}]=x^\alpha\int_x^{+\infty}y^\beta f(y)dy$

$\lim_{x\to+\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \mathbb{E}\left[|\xi|^\beta \mathbf{1}_{\{\xi > x\}}\right] = 0$$

$=-x^\alpha\int_x^{+\infty}y^\beta d(1-F(y))$

$=-x^\alpha y^\beta(1-F(x))\Big|_x^{+\infty}+x^\alpha\int_x^{+\infty}(1-F(y))dy^\beta$

的充分必要条件是

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha+\beta} \mathbb{P}(\xi > x) = 0.$$

$x^{\alpha+\beta}P(\xi>x)\to0\to0$ 故 $x^\beta(1-F(x))\to0$

举反例说明, 若 $\alpha = 0$, 则充分性不成立(下面推不出上面.)

因此 $\lim_{x\to+\infty}-x^\alpha y^\beta(1-F(y))\Big|_x^{\infty}=0$

$x^\alpha\int_x^{+\infty}(1-F(y))y^{\beta-1}dy=x^\alpha\int_x^{+\infty}(1-F(y))y^{\alpha+\beta}y^{-1-\alpha}dy$

$<\varepsilon x^\alpha\int_x^{+\infty}y^{-1-\alpha}dy=\frac{\varepsilon}{\alpha}$ 故趋近于0!

10. (40') 判断对错. (注: 无需说明理由)

(1) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是两个 σ-域, 则 $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ 还是一个 σ-域. [ ] (还是HH的反例)

(2) 两个分布函数的乘积还是一个分布函数. [√] (密度函数不是)

(3) 若 ξ 的分布函数连续, 则 ξ 是连续型随机变量. [ ] (不一定有密度函数)

(4) 若$E[\xi\eta] = E[\xi]E[\eta]$, 则 ξ, η 相互独立. [ ]

(5) 若 $\text{Var}[\xi] = 0$, 则 $\xi \overset{a.s.}{=} \cancel{0}$ $E[\xi]$. [ ]

(6) 设 ξ, η 的期望都存在, 则 $E[\xi + \eta] = E[\xi] + E[\eta]$. [ ]

(7) 设 ξ, η 的方差都存在, 则 $\text{Var}[\xi + \eta] = \text{Var}[\xi] + \text{Var}[\eta]$. [ ]

(8) 若 $\xi_n \overset{a.s.}{\to} \xi$ 且 ξ_n, ξ 的期望都存在, 则 $E[\xi_n] \to E[\xi]$. [ ]

(Lebesgue控收)