期末考试答案

2021 年 6 月 28 日

一、 解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

二、 解：方法一：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x&=\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-3x+2\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{Re}\frac{1}{-3+2\mathrm{i}}=\frac{3}{13}\end{aligned}$$

方法二：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\frac{1}{2}e^{-3x}\mathrm{d}\sin 2x\\&=\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x\Big|_{x=0}^{\infty}-\int_0^\infty\frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{d}e^{-3x}\\&=\int_0^\infty\frac{3}{2}e^{-3x}\sin 2x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x&=\int_0^\infty-\frac{1}{3}\cos 2x\mathrm{d}e^{-3x}\\&=-\frac{1}{3}\cos 2xe^{-3x}\Big|_{x=0}^{\infty}-\int_0^\infty-\frac{1}{3}e^{-3x}\mathrm{d}\cos 2x\\&=\frac{1}{3}-\int_0^\infty\frac{2}{3}e^{-3x}\sin 2x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结合两式可得

$$\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{3}{13}$$

三、　用 Dirichlet 判别法。$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}$关于n有界，数列$\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$单调收敛到0，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$$

收敛。

另一方面

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (n \geq 3)$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$条件收敛。

四、　解：方法一：注意到$n \geq 4$时，$\frac{\ln^2 n}{n^n} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$，所以正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}$收敛。从而当$|x| \leq 1$时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$$

收敛。而当$|x| \geq 1$时，$|\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}| = e^{n^2\ln|x|-n\ln n}\ln^2 n \to +\infty$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$不收敛。综上所述，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$$

的收敛半径为1，收敛域为$[-1,1]$。

方法二：

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{n^n}\right)^{1/n^2} = 1$$

所以$R = \frac{1}{A} = 1$，收敛半径为1。$x = \pm 1$时同方法一。

五、　解：

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2}\end{aligned}$$

六、 解：当$(x,y)\to(0,0)$时，

$$|f(x,y)|\le\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to 0=f(0,0)$$

所以f在$(0,0)$处连续。

$\forall v_\theta=(\cos\theta,\sin\theta)$,

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2\cos\theta\sin\theta}{t^2\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

所以方向倒数存在。

注意到$f(x,0)=f(0,y)=0$，所以f在$(0,0)$处有偏导数：

$$f_x(0,0):=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

同理$f_y(0,0)=0$。

$$\begin{aligned}&\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf_x(x,y)-yf_y(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\=&\frac{xy}{x^2+y^2}\ne o(\sqrt{x^2+y^2})\end{aligned}$$

实际上，当$y=x\to0$时，$\frac{xy}{x^2+y^2}\to\frac{1}{2}\ne0$。由可微的定义，$f$在$(0,0)$处不可微。

七、 解：f连续，所以$\exists\xi\in[a.b]$,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$$

从而$\forall x\in[a,b]$，要么$[x,\xi]\subset[a,b]$，要么$[\xi,x]\subset[a,b]$，所以

$$\begin{aligned}|f(x)|&\le|f(\xi)|+\left|\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\\&\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

八、　解：(1) $t \in [0,1)$时，$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin \pi t = \frac{\sin \pi t}{1-t}$，要证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t} \mathrm{d}t \qquad (0 \le x < 1)$$

只需证明$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin \pi t$在$[0,x]$ $(0 \le x < 1)$上一致收敛。事实上，$t \in [0,x]$ $(0 \le x < 1)$时

$$0 \le t^n \sin \pi t \le x^n$$

而$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$收敛$(0 \le x < 1)$，所以$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin \pi t$在$[0,x]$ $(0 \le x < 1)$上一致收敛。

(2)$x \in [0,1]$时

$$0 \le \int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t \le \int_0^1 \pi t^n (1-t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}$$

从而由$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}$收敛知$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t$关于$x \in [0,1]$一致收敛。

(3)由(2)知$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t$在$x \in [0,1]$上连续，所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 t^n \sin \pi t \mathrm{d}t &= \lim_{x \to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t \\ &= \lim_{x \to 1-} \int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{1-t} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

九、　解：方法一：当λ为整数时，

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x) \sin \lambda x \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \sin t \mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{2\lambda} \left(\int_0^{2\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \sin t \mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\lambda\pi+\pi} f\left(\frac{t-\pi}{\lambda}\right) \sin t \mathrm{d}t \right) \\ =& \frac{1}{2\lambda} \left(\int_0^{\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \sin t \mathrm{d}t - \int_{2\lambda\pi}^{2\lambda\pi+\pi} f\left(\frac{t-\pi}{\lambda}\right) \sin t \mathrm{d}t \right) \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^{2\lambda-1} \int_0^{\pi} \left(f\left(\frac{t+k\pi}{\lambda}\right) - f\left(\frac{t+(k-1)\pi}{\lambda}\right) \right) \sin t \mathrm{d}t\end{aligned}$$

记$M := |f(0)| + |f(2\pi)|$，由于f单调，所以$\forall [x_1, x_2] \subset [0, 2\pi]$，$|f(x_1) - f(x_2)| \le M$，并且

$$\sum_{k=1}^{2\lambda-1} \left| f\left(\frac{t+k\pi}{\lambda}\right) - f\left(\frac{t+(k-1)\pi}{\lambda}\right) \right| = \left| f\left(\frac{t+(2\lambda-1)\pi}{\lambda}\right) - f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right|$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin\lambda x \mathrm{d}x\right| \\
\le& \frac{1}{2\lambda}\int_0^{\pi}\left|\left(f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\sin t\mathrm{d}t - f\left(\frac{t+(2\lambda-1)\pi}{\lambda}\right)\right)\right||\sin t|\mathrm{d}t \\
&+\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{2\lambda-1}\int_0^{\pi}\left|f\left(\frac{t+k\pi}{\lambda}\right) - f\left(\frac{t+(k-1)\pi}{\lambda}\right)\right||\sin t|\mathrm{d}t \\
\le& \frac{M\pi}{2\lambda} + \frac{M\pi}{2\lambda} \\
=& \frac{M\pi}{\lambda} \to 0 \qquad (\lambda \to \infty)
\end{aligned}$$

当λ不是整数时，

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{2\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\sin t\mathrm{d}t = \frac{[\lambda]}{\lambda}\cdot\frac{1}{[\lambda]}\int_0^{2[\lambda]\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\sin t\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_{2[\lambda]\pi}^{2\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\sin t\mathrm{d}t$$

由之前的证明，只需证明

$$\frac{1}{\lambda}\int_{2[\lambda]\pi}^{2\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\sin t\mathrm{d}t \to 0$$

而$\lambda \to +\infty$时，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\lambda}\int_{2[\lambda]\pi}^{2\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\sin t\mathrm{d}t\right| &\le \frac{2\pi(\lambda-[\lambda])}{\lambda}\cdot\max\{|f(0)|, |f(2\pi)|\} \\
&\le \frac{2\pi M}{\lambda} \to 0
\end{aligned}$$

方法二：用积分第二中值定理。$\exists \xi_\lambda \in [0, 2\pi]$，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^{2\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\sin t\mathrm{d}t\right| &= \frac{1}{\lambda}\left|f(0)\int_0^{\xi_\lambda}\sin t\mathrm{d}t + f(2\pi)\int_{\xi_\lambda}^{2\lambda\pi}\sin t\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{\lambda}(|f(0)||\cos 0 - \cos\xi_\lambda| + |f(2\pi)||\cos\xi_\lambda - \cos 2\pi|) \\
&\le \frac{2M}{\lambda}
\end{aligned}$$