1. 设 $A \in M_n(\mathbf{R}),\ T=\{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid AX=XA\}$.

(1) 证明：T 是 $M_n(\mathbf{R})$ 的一个子空间.

(2) 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$，计算子空间 T 的维数，并给出它的一组基.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 判断 A 是否可对角化，如果可对角化，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

3. 设 V 为域 F 上的 n 维向量空间，$\sigma \in L(V)$ 且 $\sigma^2=-2\sigma+3\iota$. 证明：

(1) σ 的特征值只可能是 1 或 -3.

(2) $V=\mathrm{Im}(\sigma-\iota)\oplus \mathrm{Im}(\sigma+3\iota)$.

4. 设 $\sigma \in L(\mathbf{R}^3)$，且 σ 关于 $\mathbf{R}^3$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明：$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=2\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

(2) 设 $\alpha=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$. 求 $\sigma(\alpha)$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 求 A 的极小多项式和若尔当标准形，并计算 $A^{100}-A^{98}$.