22-23 学年数理统计期末 (回忆版)

使用班级: 2021 级强基 & 励耘班

1. (15 分) 设相互独立的随机变量 $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$, 令 $U = X + Y, F = \dfrac{X/m}{Y/n}$, 求 (U, F) 的联合分布.

2. (30 分) 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是总体 X 的简单随机样本, 其中 $X \sim IG(\mu, \lambda)$(Inverse Gaussian distribution) 的密度函数为
$$f(x;\mu,\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}x^{-3}}\exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2\right\},\ x > 0.$$
定义统计量
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad T = \frac{n}{\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{X_i} - \frac{1}{\overline{X}}\right)}.$$
(1) 证明 $(\overline{X}, T)$ 是充分完全统计量;

(2) 求 μ 的矩估计;

(3) 求 λ, μ 的极大似然估计;

(4) 求 μ 的 UMVUE.

3. (20 分) 对观测数据 $(x_i, y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 建立一元线性回归模型
$$y_j = a + bx_j + \varepsilon_j, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_j] = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_j) = \sigma^2.$$
(1) 求 a, b 的最小二乘估计 $\hat{a}, \hat{b}$;

(2) 证明: $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 不相关的充要条件是 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

4. (20 分) 设 $X_1, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n$ 分别是总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 且它们互相独立.

(1) 对于假设
$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2,$$
求显著水平为 α 的假设检验;

(2) 令
$$S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (X_i - \overline{X}_m)^2, S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)^2, S_W = \sqrt{\frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}}.$$

证明对于任意常数 $c \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\overline{X}_m - \mu_1 - c(\overline{Y}_n - \mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{c^2}{n}}} \sim t(m+n-2)$;

(3) 若 $m = 75, n = 80$, 且

$$s_X^2 = 1.02, s_Y^2 = 0.95, \overline{x}_m = 1.24, \overline{y}_n = 2.53,$$

作假设

$$H_0 : \mu_2 = 2\mu_1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_2 > 2\mu_1$$

写出检验统计量以及拒绝域.

5. (15 分) 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自指数分布族 $\text{Exp}(\lambda)$ 的简单随机样本, $h(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$.

(1) 证明它是 C-R 正则类;

(2) 求 $h(\lambda)$ 的无偏估计方差的 C-R 下界;

(3) 给出一个 $h(\lambda)$ 的方差达到 C-R 下界的无偏估计.