

5. (20 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 一个非零矩阵, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ 是 A 的极小多项式. 令

$$W = \{g(A) \mid g(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

证明:

(1) W 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间.

(2) $\dim(W) = \deg p(x)$, 即 W 的维数等于多项式 $p(x)$ 的次数.

6. (20 分) 设 A 是一个 n 阶实矩阵且有 n 个两两不同的实特征值. 令

$$\sigma : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}),$$

$$B \longmapsto AB - BA,$$

是一个映射.

(1) 证明: σ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一个线性变换;

(2) 问: σ 是否可对角化? 并给出理由.