# 北京师范大学 2010～2011 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：复变函数　　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院（系）：数学科学学院　　专业：数学与应用数学　　年级：~~2009~~ 2006 级
2014

姓名：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

阅卷老师（签字）：＿＿＿＿＿＿

一. (13 分) 叙述函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在一点的 (复) 可微和解析的定义以及柯西－黎曼 (Cauchy-Riemann) 条件且讨论函数 $f(z) = y^3 + ix^3$ 在何处 (复) 可微，在何处解析.

二. (20 分) (1) 叙述泰勒 (Taylor) 定理并将函数

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 17}$$

按 $z - 1$ 的幂展出，并指出其收敛半径.

(2) 叙述罗朗 (Laurent) 定理并将下列函数在指定圆环内展为罗朗级数:

(a) $\dfrac{z^5+5}{z^{10}(z^2-16)}$, $4 < |z| < +\infty$;　(b) $\cos(\dfrac{z}{z-1})$, $0 < |z-1| < +\infty$.

三 (20 分) 叙述孤立奇点的的定义, (1) 求下列各函数在复平面 $\mathbb{C}$(不含 $\infty$ 点) 中的孤立奇点，孤立奇点各属于哪一种类型 (极点要指明阶数).

(a) $\dfrac{1}{z^2(z^2+1)}$;　(b) $\dfrac{\sin z - z + z^2}{\cos z - 1}$;　(c) $\dfrac{1}{z\sin(\frac{1}{z})}$.

64
128
256

(2) 求 (a) 和 (b) 中函数在孤立奇点 0 点的留数.

四 (20 分) (1) 叙述留数定理并用留数定理计算定积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{4 + x^2}.$$

$|z|=1$时　$|z^8+1| \le 2 < 5 = |5z^5|$　有5个根
$|z|=2$时　$|-5z^5+1| \le 159 < 2^8$　有8个根

(2) 叙述儒歇 (Rouché) 定理并求方程 $z^8 - 5z^5 + 1 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 中根的个数. 有3个根

五 (15 分) 叙述两点关于圆周对称的定义. 证明集合 $C = \{z : |z - i| = 2|z + i|\}$ 是一个圆周. $i$ 和 $-i$ 关于圆周 $C$ 对称. 求出圆周 $C$ 的圆心和半径.

六 ( 12 分) 说明多值函数 $\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}$ 在割去线段 $[0,1]$ 的 $z$ 平面上可以分出五个单值解析分支. 求出在 $[0,1]$ 的上沿取正值的那个单值解析分支 $g_0(z)$ 在点 $z = -1$ 处的值 ($g_0(-1) = ?$). 计算定积分:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}dx}{(1+x)^3}. = 1$$