

# 北京师范大学 2005 ~ 2006 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 复变函数 任课教师姓名:            考试时间: 2005.6.20 10:00-12:00

数学科学学院 院(系) 数学与应用数学 专业 04 级本科生 考试地点: 数学楼 307

姓名            班级            学号            分数           

(所有答案必须写在答题纸上, 做在试题纸或草稿纸上的一律无效)

一. (8 分) 讨论函数  $f(z) = y^4 + ix^4$  的可微性和解析性 (在何处可微和解析)

二. (12 分) 将函数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+i}{(4i)^{n+1}} (z-i)^n$$

$$\frac{z+4}{z^2-2z+17} = \frac{z+4}{(z-1-4i)(z-1+4i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1-4i} + \frac{1}{z-1+4i} \right)$$

按  $z-i$  的幂展开, 并指出其收敛范围.

三. (20 分) 将下列函数在指定圆环内展为洛朗 (Laurent) 级数:

(1)  $\frac{z+1}{z^4(z^2-1)}$ ,  $1 < |z| < +\infty$ ; (2)  $\cos\left(\frac{z}{z-1}\right)$ ,  $0 < |z-1| < +\infty$ .

四. (22 分) 用留数定理计算定积分:

(1)  $\int_{|z|=2} \frac{z-2}{z^2(z-1)} dz$ ; (2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x^2)(4+x^2)}$ ; (3)  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(1-x)^3(1+x)} dx}{1+x^2}$

五. (18 分) 求下列各函数的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型, 并求这些函数在孤立奇点的留数:

(1)  $\frac{z-1}{z^4(z^2+1)}$ ; (2)  $\frac{\sin z}{\cos z}$

六. (10 分) 设  $f(z)$  在单位圆盘  $D(0,1) = \{z: |z| < 1\}$  中解析, 在闭单位圆盘  $\overline{D(0,1)} = \{z: |z| \leq 1\}$  上连续, 在单位圆周  $\partial D(0,1) = \{z: |z| = 1\}$  上有  $|f(z)| > 1$ , 并且  $|f(0)| < 1$ . 证明  $f(z)$  在单位圆盘  $D(0,1)$  中至少有一个零点.

七. (10 分) 设  $f(z)$  在单位圆盘  $D(0,1) = \{z: |z| < 1\}$  中解析, 且当  $z \in D(0,1)$  时, 有  $|f(z)| \leq 1$ .

则 i)

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)} \right| \leq |z|$$

对所有  $z \in D(0,1)$  都成立, 且

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$$

ii) 如果

$$|f'(0)| = 1 - |f(0)|^2$$

则  $w = f(z)$  是分式线性映射.