

24 微分几何期末回忆版

2024 年 11 月 17 日

此为近半年后的回忆版，仅供参考

1. 设 e_1, e_2 是曲面的一组正交标架, $\bar{e}_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, $\bar{e}_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ 是曲面的另一组正交标架, 求联络形式 ω_{ij} 和 $\bar{\omega}_{ij}$ 的关系.
2. 计算曲线 $\mathbf{r}(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$ 的曲率和挠率, 并利用曲线论基本定理说明它的类型
3. 请计算下述曲面的主曲率、高斯曲率、平均曲率, 以及 $\gamma(u) = \mathbf{r}(u, v_0)$ 的曲率、法曲率、测地曲率.

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \cosh \frac{u}{a} \sin v, u), \quad -\infty < u < +\infty, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

4. 以下是两个曲面的第一基本形式, 判断它们之间是否存在等距变换.

$$I = \frac{1}{v^2}(du du + dv dv) \quad \tilde{I} = \frac{4}{1 + u^2 + v^2}(du du + dv dv)$$

5. 计算上半平面上 Poincaré 度量的所有测地线.

$$\text{区域为 } U = \{(x, y) | y > 0\}, \quad \text{度量为 } ds^2 = \frac{dx dx + dy dy}{y^2}.$$

6. 给出单位球面上测地二三角形的内角和的取值范围.