北京师范大学 2024～2025 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：代数学基础　　任课教师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ✓　　开卷 ☐　　其他 ☐

院（系）：＿＿＿＿＿＿　　专　业：＿＿＿＿＿＿　　年级：＿＿＿＿＿＿

姓　名：＿＿＿＿＿＿　　学　号：＿＿＿＿＿＿

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	第八题	总分
得分									

阅卷教师（签字）：＿＿＿＿＿＿

装

订

线

一．（20 分）判断下列$\mathbb{R}^n$中的子集哪些是子空间并说明理由：

1) $\{(a_1, 0, \cdots, 0, a_n) | a_1, a_n \in \mathbb{R}\}$;

$k_1(a_1, 0, \cdots, 0, a_n)+k_2(b_1, \cdots, b_n)=(k_1a_1+k_2b_1, \cdots, k_1a_n+k_2b_n)\in\{(a_1, \cdots, a_n)|a_1, a_n\in\mathbb{R}\}$

是子空间

2) $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | \sum_{i=1}^n a_i = 0\}$;

若 $\sum_{i=1}^n a_i=0$，$\sum_{i=1}^n b_i=0$，则 $k_1(a_1\cdots a_n)+k_2(b_1\cdots b_n)=(k_1a_1+k_2b_1, \cdots, k_1a_n+k_2b_n)$

且 $\sum_{i=1}^n(k_1a_i+k_2b_i)=0$，是子空间

3) $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$;

$\frac{1}{2}(a_1\cdots a_n)\notin\{(a_1\cdots a_n)|\sum_{i=1}^n a_i=1\}$，不是子空间

4) $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le n\}$;

$\frac{1}{2}(a_1\cdots a_n)\notin\{(a_1\cdots a_n)|a_i\in\mathbb{Z}\}$，不是子空间

二.（10分）记实向量空间$H=\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} | z_1, z_2 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2\}$，证明$H$同构于$\mathbb{R}^4$。

令 $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$.

则 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ -a_2+ib_2 & a_1-ib_1 \end{pmatrix}$

$$= a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ -\bar{z}_2' & \bar{z}_1' \end{pmatrix} \Leftrightarrow z_1 = z_1', z_2 = z_2'$

故 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 在$\mathbb{R}$上线性无关.

$\Rightarrow$ H 与由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 生成的$\mathbb{R}$上向量空间同构.

$\Rightarrow H \cong \mathbb{R}^4$.

三.（10分）假设A, B都是n阶方阵，证明AB和BA有相同的特征值。

设AB有特征值λ.

1) $\lambda = 0$. 则 $0 = |0\cdot I - AB| = |AB| = |BA| = |0 \cdot I - BA|$

故BA也有特征值0

2) $\lambda \neq 0$. 则 $ABX = \lambda X$, 其中 $X \neq 0$.

故 $BABX = B\lambda X = \lambda BX$, 其中 $BX \neq 0$. 否则与 $\lambda \neq 0$ 矛盾

即 BX为BA属于特征值λ的特征向量

四．（10 分）证明若$A \in SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) | AA^T = I_3, |A| = 1\}$，则$A$有特征值 1。

$$|I-A| = |AA^T - A| = |A||A^T - I| = |A - I| = (-1)^3 |I-A| = -|I-A|$$

$\Rightarrow$ $|I-A| = 0$，即 1 为 A 的特征值

五．（10 分）设矩阵$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵$U$，使得$U^T AU$为对角矩阵。

$|xI-A| = (x-2)^2(x-8)$，故 A 特征值为 2、2、8

对于 2，$(2I-A)X=0$ 有解 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，正交单位化．$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，$\gamma_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

对于 8，$(8I-A)X=0$ 有解 $\gamma_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

令 $U = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$，则 U 为正交矩阵，且

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

六.（10 分）证明n阶实对称矩阵正定当且仅当其所有$k(1 \le k \le n)$阶主子式都是正实数。

充分性由西尔维斯特准则推出.

下列证明必要性. $\forall\ 1 \le m \le n$

$$A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_m \\ i_1 \cdots i_m \end{pmatrix} = P^T P \begin{pmatrix} i_1 \cdots i_m \\ i_1 \cdots i_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} P^T \begin{pmatrix} i_1 \cdots i_m \\ j_1 \cdots j_m \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} j_1 \cdots j_m \\ i_1 \cdots i_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} P^2 \begin{pmatrix} j_1 \cdots j_m \\ i_1 \cdots i_m \end{pmatrix}$$

由于 $P\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_m \\ i_1 \cdots i_m \end{pmatrix}$ 不全为零，否则与P可逆矛盾

故 $A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_m \\ i_1 \cdots i_m \end{pmatrix} > 0$.

七．（10 分）证明在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中，不存在$n+2$个向量使得这其中任意两个向量的夹角都是钝角。

$n=1$时 结论显然成立

假设结论对于$\mathbb{R}^n$成立，考虑$\mathbb{R}^{n+1}$，设其中存在$n+3$个向量$\alpha_1 \cdots \alpha_{n+3}$

s.t. $(\alpha_1, \alpha_j)<0$， $1\le i<j\le n+3$

记$W=\langle\alpha_1\rangle$，则$\mathbb{R}^{n+1}=W\oplus W^{\perp}$． $\forall\ i\ge 2$

$\alpha_i=k_i\alpha_1+\beta_i$，其中$\beta_i\in W^{\perp}$

$0>(\alpha_1, \alpha_i)=k_i(\alpha_1, \alpha_1)\Rightarrow k_i<0$

对于$2\le i<j$，

$0>(\alpha_i, \alpha_j)=k_ik_j(\alpha_1, \alpha_1)+(\beta_i, \beta_j)\Rightarrow(\beta_i, \beta_j)<0$

故$W^{\perp}$中存在$\beta_2 \cdots \beta_{n+3}$ s.t. 两两夹角为钝角，这与假设矛盾．

八.（20 分）设σ为域 F 上向量空间V上的一个线性变换，$f(x), g(x) \in F[x]$且首项系数均为 1，令$d(x) = (f(x), g(x)), m(x) = [f(x), g(x)]$，证明：

1) $\mathrm{Ker}d(\sigma) = \mathrm{Ker}f(\sigma) \cap \mathrm{Ker}g(\sigma)$；

2) $\mathrm{Ker}m(\sigma) = \mathrm{Ker}f(\sigma) + \mathrm{Ker}g(\sigma)$。

1) 令 $f(x)=f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$，则 $f(\sigma)=f_1(\sigma)d(\sigma)$，$g(\sigma)=g_1(\sigma)d(\sigma)$

$\Rightarrow \ker d(\sigma) \subseteq \ker f(\sigma)$，$\ker d(\sigma) \subseteq \ker g(\sigma) \Rightarrow \ker d(\sigma) \subseteq \ker f(\sigma) \cap \ker g(\sigma)$

又 $\exists\, u(x), v(x) \in F[x]$ s.t. $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，故 $u(\sigma)f(\sigma)+v(\sigma)g(\sigma)=d(\sigma)$

若 $f(\sigma)v=g(\sigma)v=0 \Rightarrow d(\sigma)v=0 \Rightarrow \ker f(\sigma) \cap \ker g(\sigma) \subseteq \ker d(\sigma)$

综上 $\ker d(\sigma) = \ker f(\sigma) \cap \ker g(\sigma)$.

2) 由于 $f(x)g(x)=d(x)m(x)$，故设 $m(x)=f(x)g_1(x)=f_1(x)g(x)$，其中 $(f_1(x), g_1(x))=1$.

由于 $m(\sigma)=f(\sigma)g_1(\sigma)=f_1(\sigma)g(\sigma) \Rightarrow \ker m(\sigma) \supseteq \ker f(\sigma)+\ker g(\sigma)$.

由于 $(f_1(x), g_1(x))=1$，$\exists\, u_1, v_1 \in F[x]$ s.t.

$u_1(x)f_1(x)+v_1(x)g_1(x)=1$

则 $u_1(\sigma)f_1(\sigma)+v_1(\sigma)g_1(\sigma)=1$

$\forall\, v \in \ker m(\sigma)$，则 $v=u_1(\sigma)f_1(\sigma)v+v_1(\sigma)g_1(\sigma)v$

令 $u_1(\sigma)f_1(\sigma)v=v_1$，$v_1(\sigma)g_1(\sigma)v=v_2$，则

$g(\sigma)v_1=u_1(\sigma)g(\sigma)f_1(\sigma)v=u_1(\sigma)m(\sigma)v=0$

$f(\sigma)v_2=v_1(\sigma)f(\sigma)g_1(\sigma)v=v_1(\sigma)m(\sigma)v=0$

$\Rightarrow v_1 \in \ker g(\sigma)$，$v_2 \in \ker f(\sigma)$

$\Rightarrow \ker m(\sigma) \subseteq \ker f(\sigma)+\ker g(\sigma)$

综上 $\ker m(\sigma) = \ker f(\sigma)+\ker g(\sigma)$.