2022-2023 学年常微分方程期末 (回忆版)

1. **(10')** 求微分方程的通解

$$y' = \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1.$$

2. **(12')**(1) 写出 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 有仅依赖于 y 的积分因子 $\mu(y)$ 的充要条件, 并求出 $\mu(y)$.

(2) 求解

$$2xy\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^y + 3x^2)\mathrm{d}y = 0.$$

3. **(10')**(1) 将微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 用 $p = y'$ 和 y 写成一阶微分方程的形式.

(2). 求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = \frac{1}{2}.$$

4. **(13')** 解齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = -y_1 + 4y_2 + 2y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 + y_2 + y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x} = -2y_1 - y_3. \end{cases}$$

5. **(10')** 求解 Euler 方程

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \cdot \sin(\ln x).$$

6. **(10')** 求此微分方程的通解，并求奇解 (如果存在的话).

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2x^2 = 2y.$$

7. **(10')** 给定 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, 已知微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2 + y^2 + \sqrt{1+x^2})\sin(\pi y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

证明: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上该方程的解存在且唯一.

8. **(10')** 已知微分方程

$$y'' + 3y' + 2y = f(x).$$

这里函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

对方程的任一解 $y(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ 是否存在? 若存在, 求出 $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

9. **(15')**(1) 已知在 $\mathbb{R}^n$ 中的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z)$, $\quad z(t, t_0, z_0)$ 表示其在初值条件 $z(t_0) = z_0$ 下的解. 叙述零解在李雅普诺夫 (Lyapunov) 意义下稳定、不稳定的定义.

(2) 已知微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y(y^2+1), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y - x(x^2-1). \end{cases}$$

求其所有奇点, 研究每个奇点的稳定性以及对应的奇点类型.(常见的类型有鞍点, 退化结点, 临界结点, 单向结点, 焦点, 中心)