北京师范大学 2023--2024 学年第二学期高等代数期中考试试题

课程名称：高等代数 II　　　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷

院 (系)：＿＿＿＿＿＿　　专　业：＿＿＿＿＿＿　　年　级：＿＿＿＿＿＿

姓　名：＿＿＿＿＿＿　　学　号：＿＿＿＿＿＿

1. (15 分) 设 V 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 3 维向量空间, α_1, α_2, α_3 是 V 的一组基. 令 σ 是 V 上的线性变换且 σ 关于基 α_1, α_2, α_3 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

设 $\beta_1=-\alpha_1+\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_3=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ 是 V 的另一组基.

(1) 求 σ 关于基 β_1, β_2, β_3 的矩阵;

(2) 设 $\xi=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 求 $\sigma(\xi)$ 关于基 β_1, β_2, β_3 的坐标.

2. (13 分) 设 σ 是域 F 上向量空间 V 的一个线性变换. 如果 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$, 并且 $V_1,V_2,\ldots,V_k$ 都是 V 的 σ-不变子空间. 证明: $\sigma(V)=\sigma(V_1)\oplus\sigma(V_2)\oplus\cdots\oplus\sigma(V_k)$.

3. (15 分) 设 σ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维向量空间 V 的一个线性变换, 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\&1&0&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&0\end{pmatrix}.$$

(1) 设 $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, 分别求 $\operatorname{Ker}(\sigma^i)$ 和 $\operatorname{Im}(\sigma^i)$;

(2) 证明 A 和 A^{T} 相似.

4. (17 分) 设实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}.$$

求实可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵; 并写出该对角矩阵.

5. (20 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 一个非零矩阵, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ 是 A 的极小多项式. 令

$$W = \{g(A) \mid g(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

证明:

(1) W 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间.

(2) $\dim(W) = \deg p(x)$, 即 W 的维数等于多项式 $p(x)$ 的次数.

6. (20 分) 设 A 是一个 n 阶实矩阵且有 n 个两两不同的实特征值. 令

$$\begin{aligned} \sigma \ : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \\ B &\longmapsto AB - BA, \end{aligned}$$

是一个映射.

(1) 证明: σ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一个线性变换;

(2) 问: σ 是否可对角化? 并给出理由.