八. (6分) 设$\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$是Banach空间, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 且令

$$\gamma(T) := \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{d(x, N(T))} \right\},$$

其中$d(x, N(T)) := \inf_{z \in N(T)} \|x - z\|$. 求证$R(T)$在$\mathcal{Y}$中闭当且仅当$\gamma(T) > 0$.

证: 先证明T是单射的情形. 事实上, 若T是单射, 则$N(T) = \{\theta\}$从而$d(x, N(T)) = \|x\|$. 故

$$\gamma(T) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\}.$$

下面证明必要性. 若$R(T)$闭, 则由$\mathcal{Y}$为Banach空间知$R(T)$也为Banach空间, 从而T是$\mathcal{X} \to R(T)$的有界双射. 则由Banach逆算子定理知存在$T^{-1} \in \mathcal{L}(R(T), \mathcal{X})$. 故存在$C \in (0, \infty)$使得, 对任意$y \in R(T)$, $\|T^{-1}y\| \le C\|y\|$. 此即

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{\|Tx\|}{\|T^{-1}(Tx)\|} \ge \frac{1}{C},\ \forall\, x \in \mathcal{X},$$

从而

$$\gamma(T) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\} \ge \frac{1}{C} > 0,$$

故必要性得证.

下证充分性. 事实上, 若$\gamma(T) > 0$, 则对任意$x \in \mathcal{X}$, $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \gamma(T)$, 从而

$$\|x\| \le \frac{1}{\gamma(T)} \|Tx\|.$$

对于$y \in \overline{R(T)}$, 存在$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(T)$使得$\|y - y_n\| \to 0,\ n \to \infty$. 则$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$是$\mathcal{Y}$中基本列. 对任意$n \in \mathbb{N}$, 令$x_n := T^{-1}y_n$. 因

$$\|x_m - x_n\| \le \frac{1}{\gamma(T)} \|Tx_m - Tx_n\| = \frac{1}{\gamma(T)} \|y_m - y_n\|,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

故$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$是$\mathcal{X}$中的基本列. 由此及$\mathcal{X}$ 完备知存在$x \in \mathcal{X}$使得$\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$. 从而

$$Tx = \lim_{n \to \infty} Tx_n = \lim_{n \to \infty} y_n = y,$$

故$y \in R(T)$. 这表明$\overline{R(T)} = R(T)$, 从而$R(T)$闭, 故充分性得证. 至此, 在假设T是单射的前提下, 题目证毕.

一般地, 若T不是单射, 由$T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$知$N(T)$闭. 故商空间$\mathcal{X}/N(T)$在范数

$$\|[x]\| := \inf_{z \in [x]} \|z\|,\ \forall\, [x] \in \mathcal{X}/N(T)$$

下是Banach空间. 定义

$$\widetilde{T}:\ \mathcal{X}/N(T) \to \mathcal{Y},\ [x] \mapsto Tx.$$

则对任意$[x] \in \mathcal{X}/N(T)$及$x_1, x_2 \in [x]$, 有$x_1 - x_2 \in N(T)$, 从而$Tx_1 = Tx_2$. 故$\widetilde{T}$是良定义的. 又显然$\widetilde{T}$ 是线性的且

$$\widetilde{T}[x] = \theta \Longleftrightarrow x \in N(T) \Longleftrightarrow [x] = [\theta],$$

即$\widetilde{T}$为单射. 下证$\widetilde{T}$有界. 事实上, 对任意$[x] \in \mathcal{X}/N(T)$及$z \in [x]$,

$$\left\|\widetilde{T}[x]\right\| = \|Tz\| \leq \|T\|\|z\|,$$

从而

$$\left\|\widetilde{T}[x]\right\| \leq \inf_{z \in [x]} \|T\|\|z\| = \|T\|\|[x]\|.$$

故$\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}/N(T), \mathcal{Y})$且为单射. 又显然$R(T) = R(\widetilde{T})$. 则由已证知

$$R(T)\text{闭} \Longleftrightarrow R(\widetilde{T})\text{闭} \Longleftrightarrow \gamma(\widetilde{T}) > 0.$$

注意到

$$\begin{aligned}\gamma(\widetilde{T}) &= \inf_{[x] \in \mathcal{X}/N(T)} \left\{ \frac{\|\widetilde{T}[x]\|}{\|[x]\|} \right\} = \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\inf_{z \in [x]} \|z\|} \right\} \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\inf_{z \in N(T)} \|x - z\|} \right\} = \inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{d(x, N(T))} \right\} \\ &= \gamma(T).\end{aligned}$$

从而进一步

$$R(T)\text{闭} \Longleftrightarrow \gamma(T) > 0,$$

至此题目证毕.