

北京师范大学 2017 ~ 2018 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 复变函数

任课老师姓名:

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院 (系): 数学科学学院

专业: 数学与应用数学

年级: 2016级

姓名: 学号:

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. (20分) (1) 函数 $f(z) = xy^2 - iyx^2$ 在何处(复)可微和解析? (2) 计算积分

$$(a) \int_{|z|=4} \frac{z}{z^2 + 4} dz; \quad (b) \int_{|z|=1} \frac{z-1}{(2z+1)(z+2)} dz;$$

二. (20分) (1) 将函数 $\frac{z}{z^2-4z+5}$ 按 z 的幂展成 Taylor 级数, 并指出其收敛半径. (2) 将下列函数在指定圆环内展为罗朗级数:

$$(a) \frac{5}{z^2(z^2-1)}, \quad 1 < |z| < +\infty; \quad (b) \sin\left(\frac{z}{z-1}\right), \quad 0 < |z-1| < +\infty.$$

三 (30分) (1) 求下列各函数在复平面 \mathbb{C} (不含 ∞ 点) 中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型(极点要指明阶数).

$$(a) \frac{1}{z(z^2+1)}; \quad (b) \frac{1}{z \sin z}; \quad (c) \frac{e^z - e^{-z} - 2z}{z^2 \sin z}.$$

(2) 求如上(a), (b)和(c)中函数在孤立奇点0点的留数.

四 (13分) (10分) (1) 设 $w_0 \in \mathbb{C}, R > 0$, 求将上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{z : \text{Im} z > 0\}$ 保形映射成圆盘 $D(w_0, R) = \{w : |w - w_0| < R\}$ 的分式线性变换 $w = T(z)$, 使得 $T(i) = w_0, T'(i) > 0$.

五 (10分) 计算积分

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)(x+2)} dx \quad (-1 < \alpha < 1).$$

六 (7分) 设 f 在区域 $D(0, 2) = \{z : |z| < 2\}$ 中解析, $f(0) = 0, 0$ 是 $f(z)$ 的4阶零点且 $f(z)$ 和 $f'(z)$ 在 $D(0, 2)$ 中除0外, 没有其它零点. 对任意 $R > 0, R < 2$, 设 $\delta(R) = \min\{|f(z)| : |z| = R\}$, 证明(1) $\delta(R) > 0$; (2) 对满足 $0 < |b| < \delta(R)$ 的每一个值 b , 函数 $f(z) - b$ 在圆盘 $D(0, R) = \{z : |z| < R\}$ 内恰好有4个不同的一阶零点.