本试卷 120 分. 60 分及格, 100 分满分.

1. 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间.
   (a) 请陈述 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上一般随机变量的定义和其等价刻画.
   (b) 请证明 ξ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 离散型随机变量当且仅当 ξ 有至多可列个取值 $\{x_i\}_{i=1}^N, N \le +\infty$ 给定, 且 $\{\xi = x_i\} \in \mathscr{F}$, $\forall 1 \le i \le N$.
   (c) 给定 $A, B \in \mathscr{F}$ 满足
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \quad \text{且} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}.$$
   定义映射 $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 $\xi(\omega) = 1_A(\omega) + 1_B(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$.
      i. 证明 ξ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的随机变量.
      ii. 求 ξ 的分布列和分布函数 F(注意 $\xi = 0, 1, 2$ 时的概率).
      iii. 定义 $\eta := F^{-1}(\xi)$. 求 η 的分布列.

2. 设有编号为 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 的盒子且编号为 $k\,(k \ge 1)$ 的盒子中有 1 个白球和 $k-1$ 个黑球. 用 $\{\xi = k\}$ 表示抽到第 k 盒子且 $\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{c}{(k+1)(k+2)}$, $k \ge 1$. 现随机抽取一球, 设所得白球数目为 η
   (a) 求 c 的值;
   (b) 求 $\mathbb{P}(\eta = 1)$ 和 $\mathbb{P}(\xi = k | \eta = 1)$;

3. 可列重 Bernoulli 实验, 每次成功的概率为 1/2 ξ 表示首次连续三次成功所需的次数. 定义 $a_n = \mathbb{P}(\xi = n)$.
   (a) 求 a_3, a_4 和 a_5.
   (b) 求证: $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2} + \frac{1}{8}a_{n-3}, n \ge 6$.

4. 设随机向量 (ξ, η) 的联合概率密度函数为
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xe^{-x}, & 0 < y < x; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$
   (a) 求 ξ 和 η 的边缘密度函数 f_ξ 和 f_η 并由此判定二者是否独立.
   (b) 求给定 $\eta = y > 0$ 时, ξ 的条件密度函数 $f(x | \eta = y)$.
   (c) 求 $\mathbb{P}(\xi + \eta \le 1)$.

5. 设 $\{\xi_n\}_{n \ge 1}$ 为独立同分布的随机变量序列, 且 ξ_1 的分布函数为 F. 定义 $\eta := \inf\{n \ge 1 : \xi_n > x\}$.
   (a) 请证明 η 是一个离散型随机变量.

(b) 求 η 的分布列.

(c) 证明 $\mathbb{P}(\eta > m+n | \eta > m) = \mathbb{P}(\eta > n), \quad \forall\, m, n \geq 1$.

6. 理解 Possion 粒子流 (参数 λ) 和 Gamma 分布 $\Gamma(n, \lambda)$ 之间的关系.

(a) 设 $(\xi_t)_{t\geq 0}$ 为强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 粒子流. 定义

$$S_n := \inf\{t > 0 : \ \xi_t \geq n\}, \quad n \geq 1.$$

求证: 任给 $n \geq 1$, S_n 的密度函数为 $p_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}, x > 0$.

(b) 设 $\{X_k\}_{k\geq 1}$ 为独立同分布的参数为 1 的指数分布. $S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k, n \geq 1$.

i. 利用独立和的密度函数公式证明 S_n 的密度函数为上述的 p_n.

ii. 定义

$$\xi_t := \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

请证明 ξ_t 服从参数为 λt 的 Poisson 分布.