数学分析 II 期末考试试题及答案

大类班

2024 年 1 月 5 日

一、计算题（共 50 分，，每题 5 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \ln(n\sin\frac{1}{n})$.

2. 判断 $f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} (n\in\mathbb{N}_+) \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上的可积性，并说明理由.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

4. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的敛散性.

5. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

6. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x} \mathrm{d}x$ 的敛散性（如果收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛）.

7. 求函数 $f(x) = x + |x|$ 在区间 $x \in [-l, l]$ 上的 *Fourier* 级数.

8. 判断含参量积分 $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-tx} \cos x \mathrm{d}x$ 在区间 $t \in [t_0, +\infty)$ 上的一致连续性，其中 $t_0 > 0, \alpha \ge 0$.

9. 利用 *Euler* 积分计算 $\int_0^1 \sqrt{x - x^2} \mathrm{d}x$

10. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}]$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

二、证明题（共 50 分，每题 10 分）

11. 设 $f \in C[a,b]$, 且 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 求证:$\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 且 $\forall x \in (a,\xi)$, 有 $f(x) < 0$, 即 ξ 是 f 在 (a,b) 上的最小零点.

12. 函数 f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 二阶导数连续. 求证:$\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4} f"(\xi)$$

.

13. 设 f 是以 2π 为周期的连续函数且导函数 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上常义可积, 证明:f 的 $Fouurier$ 级数在 $\mathbb{R}$ 上一致且绝对收敛于 $f(x)$.

14. 设 $u_n(x) = \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2), n \in \mathbb{N}_+$, 记 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

(a) 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛.

(b) 讨论其和函数 $s(x)$ 在 $(0,1)$ 上的连续性、可积性和可微性.