24 秋- 测度与概率期末（回忆版）

January 10, 2025

---

1. (a) 证明 $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

   (b) 若 f 可积，则
   $$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_{\mu(A)} |f| = 0$$

   (c) $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)_{i\in I}$，$I$ 为不可数指标，
   $$\mathcal{C} = \{B_{I_c} \times \Omega_{I\setminus I_c} \big| B_{I_c} \in \prod_{i\in I_c} \mathcal{F}_i, I_c\text{是可数指标}\}$$
   则 $\mathcal{C}$ 是 σ 代数

2. 叙述 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 到 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 的转移概率 $\lambda : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \to [0, 1]$ 的定义，并证明 $\forall A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$，$\lambda(\omega_1, A_{\omega_1}$ 是 $\mathcal{F}_1$ 的随机变量

3. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，证明 $\mathcal{G} = \{A \big| \mathbb{P}(A) = 0\text{或}\mathbb{P}(A) = 1\}$ 是 σ 代数，若 $f \in \mathcal{G}$ 为实值函数，则 f 应该是何种形式?

4. Ω 为不可数集，$\mathcal{F}$ 为包含 Ω 中单点集的最小 σ 代数

   (a) 证明 $\mathcal{F} = \{A \big| A\text{可数或}A^c\text{可数}\}$

   (b) $\forall A \in \mathcal{F}$，$\mu(A) = \begin{cases} 0, A\text{可数} \\ 1, A^c\text{可数} \end{cases}$ 则 μ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的测度

   (c) 在 $\Omega \times \Omega$ 上，令 $\mathcal{C} = \{A \times B \big| A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}\}$，$\nu(A \times B) := \mu(A)\mu(B)$, 则 ν 是 $\mathcal{C}$ 上的测度。

   (d) 叙述 ν 导出的外测度的定义，并求 $\Delta := \{(\omega, \omega) \big| \omega \in \Omega\}$ 的外测度

   (e) 叙述如何将 $\mathcal{C}$ 上的 ν 扩张到 $\sigma(\mathcal{C})$ 上

   (f) 证明 $\Delta \notin \mathcal{F} \times \mathcal{F}$

5. 设 φ 是符号测度

   (a) 证明 $\exists P \in \mathcal{F}, \varphi(P) = \sup_{A\in\mathcal{F}} \varphi(A)$

   (b) 证明 $\varphi(A \cap P) = \sup_{B\in A\cap\mathcal{F}} \varphi(B)$