

北京师范大学数学科学学院《数学分析III》期中考试试题

2020-2021学年第一学期

共10题, 每题10分, 总分100分。

1. 设函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

求 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$, 或证明 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在.

2. 设函数 $f(x, y)$ 在开域 D 上对 x 连续, 对 y 满足利普希茨条件:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|,$$

其中 $(x, y'), (x, y'') \in D$, L 为常数. 证明: f 在 D 上连续.

3. 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明: f 在点 $(0, 0)$ 可微, 但偏导数 f_x, f_y 在点 $(0, 0)$ 不连续.

4. 设函数 $u = x y z e^{x+y+z}$, 求 $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$.

5. 设 $u(x, y), v(x, y)$ 是第一象限上的连续可微函数, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

若存在函数 $h(r)$, 使得 $u(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2})$, 求 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$.

6. 设 $u = xy, v = \frac{x}{y}$, 以 u, v 为新的自变量变换方程:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

7. 求函数

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 沿曲线

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4$$

在该点切线的 (参数 t 增加) 方向的方向导数.

8. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标面所成四面体的体积的最小值.

9. 求含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin xy)^2}{y^2} dy.$$

10. 北京师范大学数学科学学院与军事医学研究院微生物流行病学研究所的科研人员合作研究了新冠肺炎疫情早期的流行病学参数. 根据他们的研究成果, 新冠肺炎潜伏期的概率分布符合两个参数分别为 2.22 与 0.44 的伽马分布, 其概率密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{0.44^{2.22}}{\Gamma(2.22)} t^{1.22} e^{-0.44t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

(时间 t 的单位: 天). 试求新冠肺炎的潜伏期(期望值):

$$E = \int_0^{+\infty} t f(t) dt$$

(精确到小数点后1位).