

BNUZ 2023 春季学期高等代数 (II) 期末试题

命题人:

考试时间: 2023.6.12 10:20-12:20

整理人: Aut

一、判断多项式 $f(x) = 4x^5 + 9x^3 - 12x^2 - 6x + 12$ 在有理数域是否可约.

二、求多项式 $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 6x + 1$ 的所有有理根及其重数.

三、将对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum x_1^4 x_2$ 表示成初等对称多项式的多项式.

四、已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

求此向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量用这个极大无关组线性表出.

五、设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

判断 \mathbf{A} 是否可对角化, 如果可对角化, 求可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角阵.

六、已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2\lambda x_2x_3$ 是正定的, 求 λ 的取值范围.

七、设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 用非退化线性替换 $x = \mathbf{U}y$ (\mathbf{U} 为正交矩阵) 将这个实二次型化为对角形.

八、设 V 为 n 维欧式空间, σ 为 V 上的一个正交变换, 且属于特征值 1 的特征子空间维数为 $n-1$, 证明:

(i) σ 的行列式为 -1;

(ii) 存在一个单位向量 $\xi \in V$, 使得

$$\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \xi)\xi, \quad \forall \alpha \in V.$$