北京师范大学 2024-2025 学年第 1 学期

《数学分析》课程期中考试试题

课程所在学院：数学科学学院　　考试形式：闭卷　考试时间：100 分钟

一、（每小题 7 分，共 14 分）用定义证明下列数列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；　　$\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$　$x\to 0$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

$e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$

二、（每小题 7 分，共 14 分）求下列数列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\ (x\neq 0)$；　　$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.　　$\pi(\sqrt{n^2+1}-2n)$

$x\to 0$

三、（每小题 7 分，共 21 分）求下列函数极限

$\frac{n^2+1-4n^2}{\sqrt{n^2+1}+2n}=\frac{-3n^2+1}{\sqrt{n^2+1}+2n}$

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；

$\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-e^x)\sin x}$.

四、（每题 5 分，共 10 分）设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明如下极限：

$x\to 0$

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$；　　$x_{n+1}-x_n$　　$\frac{x_n}{n}-\left(\frac{x_{n-1}}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n}\right)$.　　$\frac{x_n}{n}<\varepsilon$.

$\cancel{(x_{n-1}-x_n)-(x_n}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

五、（12 分）设函数 f 在有限开区间 (a,b) 上一致连续，证明：f 在 (a,b) 上有界.　　$x_n-x_{n-2}<\varepsilon$.

六、（13 分）证明开区间 $(0,1)$ 上的 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\text{ 为既约真分数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在有理点处不连续，在无理点处连续.

七、（第一小题 6 分，第二小题 10 分，共 16 分）设 $f(x)=(\arcsin x)^2$.　　$2t$.

（1）证明：$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$；　　$x=\sin y$.

（2）求 $f^{(n)}(0)$.　　$\frac{1}{\sin y}=\frac{1}{\cos y}$