北京师范大学 2024 ～ 2025 学年第一学期期中考试试卷

课程名称：数学分析III　　　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

考试要求:

1. 写清答题根据, 无支持的结论将被扣除分数;
2. 雷同答题所得分数为应得分数除以雷同卷子数.

1. (20分) 设$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$，$f(1,0)=0$. 点$p:(x,y,z)=(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$.

(1) 求在p点附近由方程$f(x-z,yz)=0$ 可以确定一个曲面的充分条件；并求该曲面在p 点的切平面方程和法线方程.

(2) 求在p点附近由方程组$f(x-z,yz)=0$，$x^2-y^2=1$ 可以确定一条曲线的充分条件；并求该曲线在p点的切线方程和法平面方程.

2. (10分) 求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在有界闭区域 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 内的最大最小值点.

3. (30分) 计算下列积分

(1) $\displaystyle\iint_E \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $E=\{(x,y):\, x^2+y^2\le 1,\, y\ge |x|\}$.

(2) $\displaystyle\iint_E (x+y)\cos(x-y)dxdy$，其中 $E=\{(x,y):-\frac{\pi}{2}\le x+y\le\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\le x-y\le\frac{\pi}{2}\}$.

(3) $\displaystyle\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} \exp\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\right) dxdydz.$

4. (15分)设非空集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，函数$f:\Omega\to\mathbb{R}$.

$c\varepsilon$　Ω　$R\ R$

(1) 叙述函数f在若当可测集Ω 上黎曼可积的一个充要条件.

(2) 如果函数f在若当可测集Ω 上非负且$\displaystyle\int_\Omega f=0$，证明集合$\{x\in\Omega;\, f(x)\ne 0\}$为零测度集（此时称$f$在$\Omega$上几乎处处为零）.

(3) 如果函数列 $\{f_k\}$ 在若当可测集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于函数 f. 且 $\forall k$, $f_k\in\mathcal{R}(\Omega)$, 证明 $f\in\mathcal{R}(\Omega)$, 且 $\displaystyle\int_\Omega f=\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega f_k$.

$f(x, g(x))$

$f'_x(x, g(x)) + f'_y(x, g(x)) g'(x) = 0$

5. (5分) 设无界集合$E \subset \mathbb{R}^2$.

(1) 如果∂E为零测度集, 证明: $\{E_k = E \cap B_k(0)\}$ 为E的一个单增可测集列, 因此 E为广义若当可测集.

$-2p \le 2$

(2) 设 $\Omega := \{(x,y);\ \sqrt{x^2+y^2} > 1,\ \alpha < \arctan\frac{y}{x} < \beta\} \subset E$，其中 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$，函数 $f(x,y)$ 在E上连续且满足

$-p \ge 1$ $\quad -2p-1 \le 1$

$$f(x,y) \ge c(x^2+y^2)^p,\ \ c > 0,\ \ p \ge -1.$$

$\frac{c}{(x^2+y^2)^{-p}}$

证明：广义积分$\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$发散.

ρ^{-2p} $\quad \frac{1}{k}$

6. (5 分) 设f是一元连续函数，$z = \int_{\sin x}^{z} (f(t)+yt)\,\mathrm{d}t$. 计算$z'_x$，$z'_y$.

$\frac{\rho^{-2p}}{-2p}$

7. (15 分)

(1) 叙述广义积分$\int_0^{+\infty} f(x,y)dy$ 关于参变量~~$x \in D \subset \mathbb{R}$ 一致收敛~~的M判别法.

ρ^2

(2) 确定函数 $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{5+y^x}$ 的定义域，并讨论其连续性和可微性.

ρ^{2p+1} $\quad \rho^{\frac{3}{2}}$

(3) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{5+y^x}$.

$\frac{1}{5+y^x} \le \frac{1}{5+y^{1+\delta}}$ $\quad \frac{\rho^{2p+2}}{2p+2}$

附加题1 (5 分) 设 $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. 求由方程组 $u = f(x-ut, y-ut, z-ut)$, $g(x,y,z) = 0$, 确定的隐函数的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. 此时 t 是自变量还是因变量?

附加题2 (5 分) 设$E \subset \mathbb{R}^n$是有界集合，分别称

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^n |I_k|;\ E \subset \bigcup_{k=1}^n I_k,\ n \in \mathbb{N},\ \{I_k\}\text{是开区间集}\right\},$$

$$m_*(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^n |I_k|;\ \mathring{E} \supset \bigcup_{k=1}^n I_k,\ n \in \mathbb{N},\ \{I_k\}\text{是两两内部互不相交的闭区间集}\right\},$$

为E的外容度和内容度.

证明E是若当可测，当且仅当E的外容度等于内容度$m^*(E) = m_*(E)$. 此时E的若当测度为$|E| = m^*(E) = m_*(E)$.

$m(\partial E) = 0$

$m(\mathring{E} \cup \partial E) = m(\mathring{E}) + m(\partial E)$