25 春- 伽罗瓦理论（回忆版）

July 23, 2025

---

1. 设 ζ_3 是 3 次本原单位根，求 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$.
2. 设 α 是域 F 上的代数元，证明 $|\mathrm{Gal}(F(\alpha)/F)|$ 等于 α 在 F 上的极小多项式在 $F(\alpha)$ 中互不相同的根的个数，从而 $F(\alpha)/F$ 是 Galois 扩张当且仅当 $\min(\alpha, F)$ 可分，并且在 $F(\alpha)$ 上完全可约。
3. 设 G 是域 K 的有限自同构群，$\alpha \in K$，记 $F = K^G$，证明存在 F 上的不可约多项式 $g(x)$，使得 $\prod\limits_{\sigma \in G}(x - \sigma(\alpha)) = g(x)^d$，其中 $d = |\{\sigma \in G : \sigma(\alpha) = \alpha\}|$
4. 证明 $x^5 - 9x + 3$ 无根式解
5. 设 ζ_n 是 F 上的 n 次本原单位根，并且 $\zeta_n \in F$，若 K/F 是 n 次循环 Galois 扩张，证明存在 $a \in F$ 使得 K 是 $x^n - a$ 在 F 上的分裂域。
6. 设 K 是 $x^4 - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域，$G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$，给出
   (a) 群 G
   (b) G 的所有子群
   (c) K/F 的 Galois 对应