

北京师范大学 2015 ~ 2016 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 复变函数

任课老师姓名: XXXXXXXXXX

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院 (系): 数学科学学院

专业: 数学与应用数学

年级: 2014 级

姓名: _____ 学号: _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师 (签字): _____

一. (20 分) (1) 将函数 $\frac{z}{z^2-2z+26}$ 按 $z-1$ 的幂展出, 并指出其收敛半径; (2) 叙述罗朗 (Laurent) 定理并将下列函数在指定圆环内展为罗朗级数:

$$(a) \frac{1}{z^{10}(z^2-25)}, \quad 5 < |z| < +\infty; \quad (b) \sin\left(\frac{z}{z-2}\right), \quad 0 < |z-2| < +\infty.$$

二. (20 分) 计算下列积分: (1) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-5)}$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}$.

三 (20 分) (1) 求下列各函数在复平面 \mathbb{C} (不含 ∞ 点) 中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型 (极点要指明阶数).

$$(a) \frac{z^5-7}{z^2(z^2+1)}; \quad (b) \frac{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}{z^4 \sin z}; \quad (c) \frac{1}{z \sin\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

(2) 求 (a) 和 (b) 中函数在孤立奇点 0 点的留数.

四 (15 分) 叙述儒歇 (Rouché) 定理并求方程 $z^6 - 4z^2 + z + 1 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内根的个数.

五 (10 分) 求分式线性映射 $w = T(z)$, 它把单位圆盘 $D(0, 1): |z| < 1$ 保形映射为单位圆盘 $D(0, 1): |w| < 1$ 且满足 $T(\frac{1}{2}) = 0, T'(\frac{1}{2}) > 0$.

六 (15 分) (1) 说明多值函数 $\sqrt[3]{(1+z)^2(1-z)}$ 在割去线段 $[-1, 1]$ 的 z 平面上可以分出三个单值连续分支. 求出在 $[-1, 1]$ 的上沿取正值的那个单值连续分支 $g_0(z)$ 在点 $z=2$ 处的值 ($g_0(2)=?$). (2) 计算定积分:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)} dx}{(x-2)}.$$