

课程名称: 复变函数任课老师姓名: 卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐院(系): 数学科学学院专业: 数学与应用数学年级: 07 级姓名: 学号:

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

阅卷老师(签字):

一. (10 分) 叙述函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在一点(复)可导和解析的定义以及柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 条件且讨论函数 $f(z) = x^2 + iy^3$ 在何处(复)可导和解析.

二. (25 分) (1) 叙述泰勒 (Taylor) 定理并将函数

$$\frac{z+2}{z^2-2z+5}$$

按 $z-1$ 的幂展出, 并指出其收敛半径.

(2) 叙述罗朗 (Laurent) 定理并将下列函数在指定圆环内展为罗朗级数:

$$\frac{z+1}{z^{10}(z^3-8)}, \quad 2 < |z| < +\infty$$

设函数 $f(z)$ 在 a 点的某邻域内 $D(a, r) = \{z | |z-a| < r\}$ 内解析.

三. (20 分) 叙述孤立奇点和本性奇点的定义并求下列各函数在复平面 \mathbb{C} (不含 ∞ 点) 中的孤立奇点. 孤立奇点各属于哪一种类型 (极点要指明阶数).

(a) $\frac{z-1}{z^4(z^2+1)}$

(b) $\frac{\cos z}{z^4 \sin z}$

(2) 求 (a) 和 (b) 中函数在孤立奇点 0 点的留数.

四. (20 分) 叙述留数定理并用留数定理计算定积分:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{4+x^2}$

(2) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2} \quad (0 < a < 1)$