北京师范大学 2022～2023 学年第 一 学期期末考试试卷（B 卷）

课程名称： 拓扑学　　**任课教师姓名：**

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 √　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：　　专 业：　　年级：

姓 名：　　学 号：

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	第八题	第九题	第十题	总分
得分											

阅卷教师（签字）：

装

订

线

一（10 分）定义$f: S^2 \longrightarrow E^4$为 $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. 证明：$f(S^2) \cong P^2$，$f$是射影空间到四维欧氏空间中的嵌入。

二（10 分）构造某个空间（例如$\mathbb{R}$）上两个不可比较的拓扑。

三（10 分）设X是 Hausdorff 空间，$f: \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ 为连续映射，证明：f的不动点集 $Fix(f) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) = x\}$是$X$的闭子集。

四（10 分）举例说明：可分空间未必是 C2（第二可数）的。

五（10 分）设G是一个群，乘法记为$*$，单位元记为e。称G是一个拓扑群，若赋予G一个拓扑，使得以下两个映射

$$\sigma: G \times G \longrightarrow G, \quad g_1, g_2 \mapsto \sigma(g_1, g_2) = g_1 * g_2$$

$$\tau: G \longrightarrow G, \quad g \mapsto \tau(g) = g^{-1}$$

都是连续的。证明：（1）若e 是G的闭子集，则G是 Hausdorff 的；

（2）证明：$\pi_1(G)$是交换群。

六（10 分）设M是$M\ddot{o}bius$带，∂M为它的边界，证明：$M/\partial M \cong P^2$.

七（10 分）证明：如果连续映射$f: S^1 \longrightarrow S^1$与恒同映射不同伦，则$f$有不动点。

八（10 分）证明：（1）$P^2 \# P^2 \cong \mathrm{K}$，这里 K 为 Klein 瓶。

（2）$T^2 \# P^2 \cong K \# P^2 \cong 2P^2 \# P^2 = 3P^2$

九（10 分）证明：$n > 2$时，E^n去掉有限个点后仍是单连通的。

十（10 分）假设 $n \geq 2$。证明：S^n到S^1只有一个映射类，即任意两个连续映射$f, \mathrm{g}: S^{\mathrm{n}} \longrightarrow S^1$一定是同伦的。