北京师范大学 2020～2021 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：高等代数　　　　任课教师姓

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ✓　　开卷 ☐　　其他 ☐

院（系）：＿＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿＿　年级：＿＿＿＿

姓　名：＿＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿＿

装

订

线

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	第八题	第九题	总分
得分										

阅卷教师（签字）：＿＿＿＿＿＿

一．（10 分）给定向量空间$\mathbb{R}^4$中三个向量

$$\alpha_1=(1,-3,0,2),\alpha_2=(-2,1,1,1),\alpha_3=(-1,-2,1,3)$$

1) 判断这三个向量是否线性相关；

2) 计算由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的子空间的维数并给出一组基。

1) $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

2) α_1与α_2不成比例 $\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2$线性无关

故该子空间维数等于2 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$为一组基.

二．（10 分）假设$f_1(x),f_2(x),f_3(x)\in F[x]$是互素的多项式，且其中任意两个都不互素，证明$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$线性无关。

若 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)=0$

$\because$ $f_1(x)$与$f_2(x)$不互素.

$\therefore$ $\exists$最大公因式 $h(x)$ s.t. $f_1(x)=h(x)g_1(x)$, $f_2(x)=h(x)g_2(x)$

即 $h(x)(k_1g_1(x)+k_2g_2(x))+k_3f_3(x)=0$

$\because$ $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$互素 故$(h(x),f_3(x))=1$

$\therefore$ $k_3=0$

同理可证 $k_1=k_2=0$. 故 $f_1(x),f_2(x)$与$f_3(x)$线性无关.

三．（10 分）已知$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$，求 A^k。

$|xI-A|=(x-1)(x-5)(x+5)$

$x=1$ 时特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$x=5$ 时特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，$x=-5$ 时特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

即令 $T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 时，$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix} \Rightarrow A=T\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}T^{-1}$

$$\Rightarrow A^k=T\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k+1}) & 5^{k-1}\cdot(4+(-1)^k)-1\\ 0 & 5^{k-1}(1+4(-1)^k) & 2\cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k+1})\\ 0 & 2\cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k+1}) & 5^{k-1}(4+(-1)^k)\end{pmatrix}$$

四．（10 分）假如有限维向量空间V的一个线性变换σ关于任意基底的矩阵都相等，证明σ是零变换或者位似变换。

即对于任意可逆矩阵 B，$B^{-1}AB=A$

取 $B=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0,1)$，则 $B^{-1}AB=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & ka_{2i} & & \vdots\\ & & \vdots & & \\ k^{-1}a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & k^{-1}a_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_{ij}=a_{ji}=0\ (j\neq i)$

$\Rightarrow A$ 形如 $\begin{pmatrix}a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{pmatrix}$，取 $B=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}$ 知 $a_{11}=\cdots=a_{nn}$

故 A 形如 $\begin{pmatrix}k & & \\ & \ddots & \\ & & k\end{pmatrix} \Rightarrow \sigma$为零变换或位似.

五．（10分）向量空间V的线性变换σ是幂零的当且仅当其所有特征值都等于零。

$\Rightarrow$: $\sigma^k=0$ 故 x^k为零化多项式，故极小多项式形如 x^n.

~~由于~~极小多项式的根，故特征值只有零.

每一特征值都是

$\Leftarrow$: 特征值等于零，则特征多项式形如 x^n，由 Cayley-Hamilton 定理知 $\sigma^n=0$. 故幂零.

六．（10分）设二次型$q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+12x_2^2-12x_1x_2-8x_2x_3$，用非退化线性替换将$q$化为对角形。

q 对应矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-6&0\\-6&12&-4\\0&-4&0\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}3&-6&0\\-6&12&-4\\0&-4&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-8&-4\\0&-4&0\\\hline 1&2&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-8&0\\0&0&2\\\hline 1&2&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故令 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，有

$q'(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2-8y_2^2+2y_3^2$.

七．（10分）V是一个欧氏空间，V_1,V_2为V的子空间，证明$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$。

$\forall \xi\in(V_1+V_2)^\perp$，则对于$\forall \eta_1\in V_1$，$\eta_2\in V_2$ 有 $(\xi,\eta_1)=(\xi,\eta_2)=0 \Rightarrow \xi\in V_1^\perp$，$\xi\in V_2^\perp$

$\Rightarrow \xi\in V_1^\perp\cap V_2^\perp$.

反过来，$\forall \xi\in V_1^\perp\cap V_2^\perp$. 对于任意 $\eta\in(V_1+V_2)$，有 $\eta=\eta_1+\eta_2$，其中 $\eta_1\in V_1$, $\eta_2\in V_2$

故 $(\xi,\eta_1)=(\xi,\eta_2)=0 \Rightarrow (\xi,\eta_1+\eta_2)=(\xi,\eta)=0 \Rightarrow \xi\in(V_1+V_2)^\perp$

即 $(V_1+V_2)^\perp=V_1^\perp\cap V_2^\perp$.

八．（15 分）设V是一个n维向量空间，$V_1,\cdots,V_m$为V的m个真子空间，证明

1) V中存在向量α不属于$V_1,\cdots,V_m$；

2) 存在V的一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$使得这组基不在$V_1,\cdots,V_m$内。

1) $m=1$ 时，~~结论~~显然成立，$\because V_1$ 为真子空间.

设 $m-1$ 时，结论成立，考虑 m 个真子空间时，

对于 $V_1 \cdots V_{m-1}$，由归纳假设，$\exists \beta$ 不属于 $V_1,\cdots,V_{m-1}$.

若 $\beta \notin V_m$，则令 $\alpha=\beta$ 即可

若 $\beta \in V_m$，对于 V_m，$\exists \gamma \notin V_m$，若 γ 不属于 $V_1 \cdots V_{m-1}$，则令 $\alpha=\gamma$ 即可.

若 $\gamma \in V_1 \cdots V_{m-1}$ 之中某一个，考虑 $\gamma+\beta, \cdots, \gamma+m\beta$，显然，其均不属于 V_m

断言其中必有某个 $\gamma+k\beta$ 不属于 $V_1 \cdots V_{m-1}$.

若不然，由抽屉原则，有 $\gamma+k_1\beta$ 与 $\gamma+k_2\beta$ 同属于某个 V_i $(1\le i\le m-1)$

则 $(k_1-k_2)\beta \in V_i$，矛盾.

则令 $\alpha=\gamma+k\beta$ 即可.

2) 选取 $\alpha_1 \notin V_1,\cdots,V_m$

令 $V_{m+1} = \langle \alpha_1 \rangle$

选取 $\alpha_2 \notin V_1 \cdots V_m, V_{m+1}$，显然，$\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关

令 $V_{m+2} = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle$

……

一般时，选取 $\alpha_k \notin V_1, \cdots V_m V_{m+k-1}$，我们断言 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ 线性无关.

若不然，$\alpha_k \in V_{m+k-1}$. 矛盾

最后，选取 $\alpha_n \notin V_1 \cdots V_m, V_{m+n-1}$，则 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关，构成V的一组基.

九．（15 分）假设A是一个n阶实对称矩阵，证明

1） 如果A是正定的，那么存在n阶正定矩阵B，使得$A = B^2$；

2） 如果A是可逆的，那么存在n阶正定矩阵C和n阶正交矩阵D，使得$A = CD$。

1) A正定. 故∃正交矩阵U st $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 其中 $\lambda_i > 0$

故 $A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}U^{-1} = U\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}U^{-1}$

$= U\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}U^{-1}U\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}U^{-1}$

令 $B = U\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}U^{-1}$ 即可.

2) 考虑AA^T，由于A^{-1}存在 故 $((A^{-1})^T)^T AA^T ((A^{-1})^T) = I$

即AA^T正定，故∃正定矩阵B st. $AA^T = B^2$

即 $A = B^2(A^T)^{-1} = B(B(A^T)^{-1})$ 令$C = B$，$D = B(A^T)^{-1}$ 即可.

事实上，$C = B$ 为正定矩阵.

$DD^T = B(A^T)^{-1}A^{-1}B^T = B(AA^T)^{-1}B = B \cdot B^{-2} \cdot B = I$

⇒ D为正交矩阵.