

## 24 秋- 数学分析 1 (回忆版)

February 10, 2025

---

1. (7 分) 求含参形式的函数导数 
$$\begin{cases} y(t) = t - \arctan t \\ x(t) = \ln(t^4 + 1) \end{cases}$$
2. (7 分) 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\tan(\sin \frac{1}{x})} - \frac{1}{\sin(\sin \frac{1}{x})} \right]$
3. (7 分)  $m \in \mathbb{N}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m) - \sin^m x}{x^{m+2}}$
4. (21 分, 每题 7 分) 求不定积分
  - (a)  $\int \frac{1}{\cos 2x} dx$
  - (b)  $\int (\frac{\ln x}{x})^2 dx$
  - (c)  $\int \frac{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x^2 + x}}{x(\sqrt[3]{x+1})} dx$
5. (10 分) 绘制  $y = x - \ln(x + 1)$  的函数图像
6. (14 分)
  - (a) 叙述至少三个实数定理
  - (b) 叙述紧集的定义, 判断  $\{\sin \frac{1}{n} | n = 1, 2, 3 \dots\}$  是否为紧集
  - (c) 证明紧集上的连续函数有界
7. (14 分)
  - (a)  $n \geq 8$ , 用微分的知识证明  $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$
  - (b) 求  $y = \frac{1}{x^{2025}}$  图像上的点到原点的最小距离
8. (10 分) 已知  $f(x)$  为  $(-\infty, +\infty)$  的凹函数, 若  $f(x)$  在  $\pm\infty$  处有渐近线且渐近线平行于  $x$  轴, 则  $f$  为常值函数
9. (10 分)
  - (a) 证明  $x^n(x - 1) = 1$  在  $(0, +\infty)$  中仅有一个解
  - (b) 设解为  $x_n$ , 证明  $x_n$  收敛并求其极限
10. (10 分) 附加题:  $f$  在  $(0, +\infty)$  中有无穷多个零点, 且  $f$  在这些零点处可导, 且导数不为 0, 任取  $f$  的零点列  $\{x_n\}$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$