BNUZ 2022 秋季学期常微分方程期末考试 (回忆 ^{2} 版)

命题人: **整理人:*Aut***

一、求解方程 $(x^2+y^2+x)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$.

二、方程 $y^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=1$ 是否存在奇解?

三、(1) 初值问题 $(t-2)\mathrm{d}x+(x-1)\mathrm{d}t=0, x(2)=1$ 的解是否存在唯一?

(2) 是否能用 Picard 存在唯一性定理研究上面的初值问题?

四、求解初值问题 $y'''-3y''+2y'=x+\mathrm{e}^x, y(0)=1, y'(0)=-2, y''(0)=-3$.

五、研究方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1-y^2}{1+x^2+y^2}$ 过任意点 $(x_0,y_0), -1<y_0<1$ 的最大存在区间.

六、求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.$$

七、考虑微分方程

$$y''+6y'+5y=f(x),$$

连续函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)|\leqslant m$.

(1) 求出该方程的通解;

(2) 求出该方程的有界解, 并证明该方程的其他解当 $x\longrightarrow+\infty$ 时趋向有界解;

(3) 证明如果 $f(x)$ 是 ω-周期函数, 则该方程的有界解也是 ω-周期的.

八、设 $\Phi(x)$ 为方程组 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Ay$ (A 为 $n\times n$常数矩阵) 的标准基解矩阵 (即 $\Phi(0)=I$). 证明:

$$\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)=\Phi(x-x_0),$$

其中 x_0 为某一值.

一、

求解方程 $(x^2+y^2+x)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$.

解. $P(x,y)=x^2+y^2+x, Q(x,y)=y$, 注意到

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{2y-0}{y}=2,$$

所以 $\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x}$ 是一个积分因子, 同时乘于原方程两边, 得

$$\mathrm{e}^{2x}(x^2+y^2+x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{2x}y\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+y^2)\right)=0.$$

所以原方程的解为 $\dfrac{1}{2}e^{2x}(x^2+y^2)=C$, C 为任意常数. □

二、

方程 $y^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=1$ 是否存在奇解?

证明. 存在,$y=\pm 1$.

因为不考奇解就不证了. □

三、

(1) 初值问题 $(t-2)\mathrm{d}x+(x-1)\mathrm{d}t=0, x(2)=1$ 的解是否存在唯一?

(2) 是否能用 Picard 存在唯一性定理研究上面的初值问题?

证明. □

四、

求解初值问题 $y''' - 3y'' + 2y' = x + \mathrm{e}^x, y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = -3$.

证明. □

五、

研究方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1-y^2}{1+x^2+y^2}$ 过任意点 $(x_0, y_0), -1 < y_0 < 1$ 的最大存在区间.

证明. □

六、

求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

证明. □

七、

考虑微分方程

$$y'' + 6y' + 5y = f(x),$$

连续函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)| \leqslant m$.

(1) 求出该方程的通解;

(2) 求出该方程的有界解, 并证明该方程的其他解当 $x \longrightarrow +\infty$ 时趋向有界解;

(3) 证明如果 $f(x)$ 是 ω-周期函数, 则该方程的有界解也是 ω-周期的.

证明. □

八、

设 $\Phi(x)$ 为方程组 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Ay$ (A 为 $n \times n$常数矩阵) 的标准基解矩阵 (即 $\Phi(0) = I$). 证明:

$$\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0) = \Phi(x - x_0),$$

其中 x_0 为某一值.

证明. □