2023 春季学期微分几何期末考试

命题人：　　　　整理人：Aut

一、(12 分) 已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u,u^2-2uv,u^3-3uv)$, 讨论其正则性, 并在点 $P:(1,-1,-2)$ 处, 求其单位法向和切平面方程.

二、(15 分) 已知直纹面 S 的准线是弧长参数化的挠曲线 $C:\boldsymbol{r}(s)$, 直母线的单位方向向量 $\boldsymbol{l}(s)$ 连续可微并且在 C 的密切面上, 证明 S 是可展曲面当且仅当 S 是 C 的切线面.

三、(18 分) 已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+4)\mathrm{d}v^2$, 试求该曲面上三条曲线 $C_1:u=v^2$, $C_2:u=-v^2$ 与 $C_3:v=1$ 所围成的曲边三角形的边长和各个内角.

四、(24 分) 设曲面 $S:\boldsymbol{r}=(u,v,uv)$, 试求
(1) S 在区域 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上的面积;
(2) S 的 Weingarten 矩阵 ω;
(3) S 的曲率线.

五、(15 分) 在曲面 $S:\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,u^2),u>0$ 上建立正交标架场 $\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|},\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$, 求正交标架场 $\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的运动公式.

六、(16 分) 已知曲面的第一基本形式 $\mathrm{I}=e^{-2v}\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$, 试求其弧长参数化的测地线.

一、(12 分)

已知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u,u^2-2uv,u^3-3uv)$, 讨论其正则性, 并在点 $P:(1,-1,-2)$ 处, 求其单位法向和切平面方程.

证明. 书 §3.1 习题. □

二、(15 分)

已知直纹面 S 的准线是弧长参数化的挠曲线 $C:\boldsymbol{r}(s)$, 直母线的单位方向向量 $\boldsymbol{l}(s)$ 连续可微并且在 C 的密切面上, 证明 S 是可展曲面当且仅当 S 是 C 的切线面.

证明. 设直纹面 $S:\boldsymbol{p}(s,t)=\boldsymbol{r}(s)+t\boldsymbol{l}(s)$. 由 $\boldsymbol{l}(s)$ 落在 C 的密切面上, 可设

$$\boldsymbol{l}=\lambda\boldsymbol{T}+\mu\boldsymbol{N}.$$

则

$$\boldsymbol{l}'=-\mu\kappa\boldsymbol{T}+\lambda\kappa\boldsymbol{N}+\mu\tau\boldsymbol{B}.$$

又 C 为挠曲线, 有 $\tau\neq 0$, 于是

$$\begin{aligned}
S\text{是可展曲面} &\Leftrightarrow (r',\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}')=0\\
&\Leftrightarrow (\boldsymbol{T},\lambda\boldsymbol{T}+\mu\boldsymbol{N},-\mu\kappa\boldsymbol{T}+\lambda\kappa\boldsymbol{N}+\mu\tau\boldsymbol{B})=0\\
&\Leftrightarrow \mu^2\tau(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})=0\\
&\Leftrightarrow \mu=0\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{l}=\boldsymbol{T},\boldsymbol{p}(s,t)=\boldsymbol{r}(s)+t\boldsymbol{T}(s)\\
&\Leftrightarrow S\text{是}C\text{的切线面}.
\end{aligned}$$

□

三、(18 分)

已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+4)\mathrm{d}v^2$, 试求该曲面上三条曲线 $C_1:u=v^2$, $C_2:u=-v^2$ 与 $C_3:v=1$ 所围成的曲边三角形的边长和各个内角.

证明. 书 §3.3 习题. □

四、(24 分)

设曲面 $S:\boldsymbol{r}=(u,v,uv)$, 试求

(1) S 在区域 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上的面积;

(2) S 的 Weingarten 矩阵 ω;

(3) S 的曲率线.

证明. (1) 计算第一基本形式系数

$$\mathbf{r}_u=(1,0,v),\quad \mathbf{r}_v=(0,1,u)$$

$$E=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u=1+v^2,\quad F=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v=uv,\quad G=\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v=1+u^2.$$

曲面面积为:

$$A=\iint_{u^2+v^2\leq 1}\sqrt{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(2) 计算第二基本形式系数

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}=\frac{(1,0,v)\times(0,1,u)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}=\frac{(-v,-u,1)}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$L=\mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}=0,\quad N=\mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n}=0, M=\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}=(0,0,1)\cdot\frac{(-v,-u,1)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

第二基本形式矩阵

$$\Omega=\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

第一基本形式矩阵

$$g=\begin{pmatrix}1+v^2&uv\\uv&1+u^2\end{pmatrix},\quad g^{-1}=\frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix}1+u^2&-uv\\-uv&1+v^2\end{pmatrix}.$$

因此，Weingarten 矩阵为

$$\omega=\Omega g^{-1}=\frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}-uv&1+v^2\\1+u^2&-uv\end{pmatrix}.$$

(3) 计算 Weingarten 矩阵的特征值和特征向量：

$$\det(\omega-\lambda I)=\det\left(\frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}-uv&1+v^2\\1+u^2&-uv\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=0$$

解得特征值为：

$$\lambda_1=\frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}},\quad \lambda_2=-\frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

对应特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

从而对应的主方向为

$$\mathrm{d}u=-\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}u=\mathrm{d}v.$$

即

$$v=-u+C_1,\quad v=u+C_2.$$

C_1,C_2 为常数. 代入曲面方程, 得曲率线方程为

$$\boldsymbol{r}(u)=(u,-u+C_1,-u^2+C_1u),\quad \boldsymbol{r}(u)=(u,u+C_2,u^2+C_2u).$$

□

五、(15 分)

在曲面 $S:\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,u^2),u>0$ 上建立正交标架场 $\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|},\mathbf{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|},\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$, 求正交标架场 $\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的运动公式.

证明. 硬算微分即可. □

六、(16 分)

已知曲面的第一基本形式 $\mathrm{I} = e^{-2v}\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$, 试求其弧长参数化的测地线.

证明. 由正交网下的 Liouville 公式, 有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = -\mathrm{e}^{-v}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{v}\cos\psi, \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \sin\psi \end{cases}$$

解得

$$\mathrm{d}u = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2\mathrm{e}^{-2v}}}\mathrm{d}v.$$

$\square$