

北京师范大学 2023 ~ 2024 学年第一学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 解析几何

任课教师姓名:

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系): 专业: 年级:

姓名: 学号:

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	总分
得分							

阅卷教师(签字):

一. 填空题(每题 5 分, 共 20 分)

1. 空间向量 $(7, 3, 1)$ 在基向量 $e_1 = (1, 3, 5)$, $e_2 = (6, 3, 2)$, $e_3 = (3, 1, 0)$ 下的坐标为 。

2. 双曲抛物面 $z = xy$ 的上夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的异族直母线的交点轨迹的一般式方程为 。

3. 设二次曲线 C 的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

若它是两条平行直线, 这两条直线的距离 d 用二次曲线的不变量表达的公式为 。

4. 设平面仿射变换 f 将仿射平面上的三点 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ 变换成 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, 则此变换的坐标表示为 。

二. 简答题(每题 6 分, 共 12 分)

1. 设 l_1 和 l_2 是空间两条互不垂直的相异直线, 则 l_1 绕 l_2 旋转得到的旋转二次曲面都可能有哪些类型? 给出结论并说明理由。

2. 举出与二次曲线有关的 6 个仿射概念(仿射性质或仿射不变量亦可)。

三(16 分) 已知在仿射坐标系下, 一般的空间仿射变换具有形式

$$(x', y', z') = (x, y, z)A + (a, b, c),$$

这里 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, (a, b, c) 为空间向量。

1. (4 分) 证明: 空间仿射变换把空间直线变成直线;

1. (4分) 证明: 直纹面这一概念是仿射几何概念;
2. (8分) 利用上述结论, 证明: 双曲抛物面两条不同的同族直母线必异面, 两条异族直母线必相交。

四 (18分) 对二次曲线

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 3y + 4 = 0,$$

1. (4分) 求它的对称中心;
2. (6分) 求它的渐近线;
3. (8分) 求它的对称轴。

五 (20分) 利用直角坐标变换将二次曲面方程

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$$

化简为标准形式, 并判断它表示什么类型的曲面 (要求写出详细过程, 如给出特征多项式、特征值和特征向量的计算结果及所用的直角坐标变换等)。

六 (14分) 设 ABC 为平面三角形,

1. (8分) 证明: 存在平面上的椭圆与三角形相切于三边的中点;
2. (6分) 判断上述椭圆是否唯一? 若唯一, 请给出证明; 若不唯一, 请举出反例。