23 秋- 测度与概率两次小测（回忆版）

何家兴
hejiaxing202411@163.com

December 7, 2024

---

1 第一次小测

Exercise 1.

判断，正确的给出证明，错误的给出反例

1. $\mathcal{F},\mathcal{A}\subset\mathcal{F}(\Omega)$(这里 $\mathcal{F}(\Omega)$ 表示 Ω 的幂集)；$\mathcal{F}$ 是 σ 代数，$\mathcal{A}$ 是集代数，则 $\overline{\overline{\mathcal{F}}}>\overline{\overline{\mathcal{A}}}$ (错误)
2. 映射 $f:\Omega\to E$，$A\subset\Omega$，则 $f^{-1}(f(A))=A$ (错误)
3. 设 $\mathcal{E}$ 是 Ω 的任意子集类，则有 $\mathcal{E}$ 的一个可列子集 $\mathcal{D}$ 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$ （正确）

Exercise 2.

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为概率空间，$\{A_n,\ n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{F}$，$B:=\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)<\infty$，证明 $\mathbb{P}(B)=0$
2. 若对任意 $n\in\mathbb{N}$，有 $\mathbb{P}(A_n)\geqslant\varepsilon>0$, 证明 $\mathbb{P}(B)\geqslant\varepsilon$.
3. 若 $\mathbb{P}(B)>0$, 证明存在子列 A_{n_k}，使得 $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{m}A_{n_k})>0$，对任意 $m\in\mathbb{N}$ 成立

Exercise 3.

叙述测度扩张定理，证明其中“唯一性”部分。

2 第二次小测

Exercise 1.

判断，正确的给出证明，错误的给出反例

1. 给定测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 若 $g\leqslant f_n\in\mathcal{F}, n=1,2,\cdots,\lim_{n\to\infty}f_n=f$, 则 $\int(\lim_{n\to\infty}f_n)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu$ （错误）
2. 给定测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，若 $0\leqslant f\in\mathcal{F}$，$\int f\mathrm{d}\mu=0$，则 $f=0$ (μ-a.e.) （正确）
3. 给定测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，f 可积，则 $\lim_{\mu(A)\to0}\int_A|f|\mathrm{d}\mu=0$（正确）

Exercise 2.

给定单调不减的右连续实函数 $F(x) = -2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,1)}(x) + x \cdot \mathbb{1}_{[1,2)}(x) + 4 \cdot \mathbb{1}_{[2,\infty)}(x)$

1. 写出 $F(x)$ 对应的 L-S 测度 μ_F。(这个记号的意思并不是 F 诱导的测度)
2. 计算积分 $\int_0^4 x\mu_F(\mathrm{d}x)$。(间断点处取 1/2(左极限-右极限),答案是 8.5)

Exercise 3.

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ 是随机变量

1. 证明 $\sigma[\sigma(X_1) \cup \sigma(X_2)] = \sigma(\Lambda_{1,2})$,其中 $\Lambda_{1,2} := \{A_1 \cap A_2 : A_i \in \sigma(X_i), i = 1, 2\}$。记 $\sigma(X_1, X_2) := \sigma[\sigma(X_1) \cup \sigma(X_2)]$
2. 若 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立,证明
   (a) $\sigma(X_1, X_2)$ 与 $\sigma(X_3, X_4)$ 相互独立
   (b) $\sin(X_1 + (X_2)^2)$ 与 $(X_3)^8 + \sqrt{|X_4|}$ 相互独立

Exercise 4.

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,$\mathcal{F}$ 具有如下性质:“$\forall\ A \in \mathcal{F}$,$\mathbb{P}(A) = 0$或$1$”。若 $X \in \mathcal{F}$,$\mathbb{P}$-a.s. 有限,证明:存在常数 C,使得 $X = C$, $\mathbb{P}$-a.s.