22 秋- 概率论期末（回忆版）

何家兴

hejiaxing202411@163.com

December 7, 2024

Exercise 1.

设随机变量 ξ 有概率密度

$$p(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2-x, & 1 < x \leqslant 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

1. 求 ξ 的分布函数
2. 求 $\mathbb{P}(0.2 < \xi < 1.2)$

Exercise 2.

设随机变量 (X, Y) 有联合分布密度

$$p(x,y) = 3x,\ 0 < x < y < 1$$

求 X 和 Y 的相关系数

Exercise 3.

设 $r > 0$，ξ, ξ_n，η 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量，

1. 若 $\xi_n \xrightarrow{L^r} \xi$，证明 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$
2. 若 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$，且有 $\mathbb{E}(|\eta|^r) < \infty$，$|\xi_n| \leqslant |\eta|$，证明 $\xi_n \xrightarrow{L^r} \xi$

Exercise 4.

n 个人参加聚会，会前帽子混放在一起，会后没人随机取走一顶帽子，ξ_n 表示戴会自己原来帽子的人数，证明

$$\frac{\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Exercise 5.

设一列随机变量 $X_1, X_2, \cdots$, 相互独立

1. 设 X_j 有特征函数 $f_j(t)$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$S_n \xrightarrow{w} S$，证明 S 的特征函数是 $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(t)$
2. 若 X_j 服从参数为 1/2 的伯努利分布，求 $X = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2X_j}{3^j}$ 的特征函数