

北京师范大学 2025 ~ 2026 学年第一学期期中考试试卷

课程名称: 数学分析I

任课老师姓名: 唐晗力

卷面总分: 100 分 考试时长: 100 分钟 考试类别: 闭卷 开卷 其他

院(系): _____ 专业: _____ 年级: _____

姓名: _____ 学号: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

(注: 计算或推导每一步都必须有依据, 但不得直接引用书中的习题及课外书.)

一. (10分) (1) 利用 $\varepsilon - N$ 语言证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+2} = \frac{2}{3}$.

二. (30分) 计算以下极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos x - \frac{x^2}{2}\right]^{1/x^2}$.

三. (10分) 设 E 是非空有上界的实数集, $\sup E = a \notin E$. 证明在 E 中可取出严格单调增加的数列 $\{x_k\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

四. (15分) (1) 设 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}$, 判断数列 $\{a_n\}$ 的敛散性, 说明理由.

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, 判断 $\{x_n\}$ 是否是基本列, 如果是请给出证明, 如果不是请给出反例.

五. (15分) (1) 叙述数列上极限的 $\varepsilon - N$ 定义.

(2) 证明: 设非负数列 $\{a_n\}$ 有界且不收敛到 0, 证明 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

六. (10分) 设 \mathbb{R} 上的函数 f 满足 $f(2x+1) = f(x)$ 且在 $x = -1$ 处连续, 证明 f 是常值函数.

七. (10分) 阐述有限覆盖定理和闭区间套定理的内容并利用其中一个证明另外一个.