25 秋- 高等代数 1 期中（回忆版）

November 30, 2025

---

1. 判断题，每小题 5 分
   (a) 若两个有限维向量空间有相同的维数，则它们一定同构
   (b) 令 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 为所有次数不超过 2 的多项式全体，设 $T \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$, 且 $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + 2bx + (c+d)x^2$, 则 T 可逆。
   (c) $\{(2,0,2),\ (4,1,5),\ (0,2,2)\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的基。
   (d) 设 V, W 为向量空间 (不一定有限维)，I 代表 V 到 V 或 W 到 W 的恒同映射，$T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, 若 $TS = I$, 则 T 和 S 可逆。
2. 填空题, 每小题 6 分
   (a) 在复向量空间 $\mathbb{C}^2$ 中，向量组 $(1, i)$, $(i, -1)$ 是线性_____ (相关/无关) 的
   (b) 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 定义为 $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$, 则零空间 $\operatorname{null} T =$_____
   (c) 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 定义为 $T(x, y, z) = (4x + 2y + z, 2x + y, x + y + z)$, 则 T 在标准基下的矩阵为 _____
   (d) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, 定义从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性映射 T，使得 $T(X) = AX$ 对任意向量 X 成立，则 $\operatorname{range} T$ 的一组基为 _____
   (e) 设 V 是有限维向量空间，$\dim V = 2n$. 若 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 满足 $T^2 = 0$, 则 $\dim \operatorname{range} T$ 的最大可能值为 _____
3. 解答或证明，每题 10 分
   (a) 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 定义为 $T(x, y, z) = (x - 9y + 8z, x - 2y + z, 2x - y - z)$. 求所有 (x, y, z) 使得 $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
   (b) 设 U 和 W 是 $\mathbb{R}^8$ 的子空间使得 $\dim U = 3, \dim W = 5, U + W = \mathbb{R}^8$. 证明 $\mathbb{R}^8 = U \oplus W$
   (c) 设 v_1, v_2, v_3, v_4 是 V 的基，证明 $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$ 也是 V 的基。
   (d) 设 U 和 W 是 V 的子空间，使得 $V = U \oplus W$, 并设 $u_1, \ldots, u_m$ 是 U 的基，$w_1, \ldots, w_n$ 是 W 的基。证明 $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ 是 V 的基。
   (e) 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 定义为 $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y + 2z, z)$，求它的逆映射。