

北京师范大学 2012 ~ 2013 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 复变函数 任课老师姓名:
卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐
院 (系): 数学科学学院 专业: 数学与应用数学 (师范和非师范)
地点: 教二楼 201 (非师范), 教一 203 (非师范) 教二 301 (师范)
时间: 6 月 28 日上午 10:00-12:00 年级: 2011 级
姓名: 李永强 学号: 110111011

一. (15 分) 叙述函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在一点的 (复) 可微和解析的定义以及柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 条件且讨论函数 $f(z) = xy^2 + ix^2y$ 的 (复) 可微性和解析性 (在何处 (复) 可微和解析).

二. (20 分) (1) 叙述泰勒 (Taylor) 定理并将函数 $\frac{1}{z^2 - 8z + 17}$ 按 $z - 4$ 的幂展出, 并指出其收敛半径.

(2) 叙述罗朗 (Laurent) 定理并将函数 $\sin\left(\frac{z+2}{z-1}\right)$ 在圆环 $0 < |z-1| < +\infty$ 内展为罗朗级数.

三 (20 分) (1) 求下列各函数在复平面 \mathbb{C} (不含 ∞ 点) 中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型 (极点要指明阶数).

(a) $\frac{1}{z(z^2+1)^3}$; (b) $\frac{z^2 \cos z}{\cos z - 1}$; (c) $\frac{1}{z \sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

(2) 求 (a) 和 (b) 中函数在孤立奇点 0 点的留数.

四 (20 分) 用留数定理计算下列积分

(1) $\int_{|z|=2} \frac{z-3}{z^3(z-1)} dz$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$; (3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} d\theta$

五 (10 分) 求分式线性映射 $w = T(z)$ 把单位圆盘 $D(0, 1): |z| < 1$ 保形映射为单位圆盘 $D(0, 1): |w| < 1$ 且 $T\left(\frac{1}{2}\right) = 0, T'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

六 (15 分) (1) 说明多值函数 $\sqrt[3]{z(1-z)^3}$ 在割去线段 $[0, 1]$ 的 z -平面上可以分出四个单值解析分支. 求出在 $[0, 1]$ 的上沿取正值的那个单值解析分支 $g(z)$ 在点 $z = -1$ 处的值 ($g(-1) = ?$) 和点 $z = i$ 处的值 ($g(i) = ?$).

(2) 用留数定理计算定积分:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x(1-x)^3}}$$