

课程名称: 微分几何任课教师姓名: 高红铸卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷   开卷  其他 院(系): 数学科学学院 专业: 励耘班 年级: 2022

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	总分
得分							

阅卷教师(签字): \_\_\_\_\_

本试题中所涉及的坐标系均是右手直角坐标系

一、(15 分) 已知曲线  $C: \begin{cases} x^3 = 3y \\ 2xz = 1 \end{cases}$ , 求1、 $C$  在平面  $y=1/3$  和  $y=9$  之间的弧段的长度;2、 $C$  在点  $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  处的曲率。二、(12 分) 记正则曲面  $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  的单位法向量函数是  $\mathbf{n}(u, v)$ , 证明  $S$  是一个球心在原点的球面当且仅当  $\mathbf{r}(u, v) \times \mathbf{n}(u, v) = 0$ 。三、(20 分) 已知圆环面  $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = ((b + a \cos \varphi) \cos \theta, (b + a \cos \varphi) \sin \theta, a \sin \varphi)$ , 其中  $0 < a < b$ , 以及其上的三条曲线  $C_1: \theta=0, C_2: \varphi=\pi/2, C_3: \theta=\varphi$ , 求

1、在圆环面上三条曲线所围成的曲边三角形的三个内角;

2、在圆环面上三条曲线所围成的曲边三角形的面积。

四、(20 分) 对于正螺旋面  $S: \mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, v)$ , 证明1、 $S$  是极小曲面;2、 $u$  线和  $v$  线的角平分线是  $S$  的曲率线。五、(15 分) 在旋转抛物面  $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, u^2), u > 0$ , 上建立正交切标架场  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , 并求诸微分形式  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ 。六、(18 分) 已知曲面  $S$  在测地极坐标系下的第一基本形式是  $ds^2 = d\rho^2 + G(\rho, \psi) d\psi^2$ ,1、求  $\rho$ -线和  $\psi$ -线的测地曲率;2、假设一条曲线  $C$  处处与  $\rho$ -线夹固定角  $\theta \in [0, \pi]$ , 证明  $C$  是测地线的必要充分条件是  $C$  本身是一条  $\rho$ -线