北京师范大学 2024 ~ 2025 学年第一学期期中考试试卷（A 卷）

课程名称：数学分析　　　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　考试时长：100 分钟　考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

考试要求：

1. 写清答题根据, 无支持的结论将被扣除分数;
2. 雷同答题所得分数为应得分数除以雷同卷子数.

一 . (40 分) 计算极限:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)(1-e^{-x^2/2})}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x^2}-1)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3^{1/n}+9^{1/n}}{3}\right)^n$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-20)^{22}(2x-50)^{2002}}{(3x-100)^{2024}}$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$
7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin(\sqrt{4n^2+1}\pi)$

二 . (10 分) 设 $0<a<1$, 令 $x_1=\frac{a}{2}$, $x_{n+1}=\frac{a}{2}+\frac{x_n^2}{2}(n\geq 1)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限值.

三 . (20 分) 设函数 f 定义在 $\mathbb{R}$ 上.

(1) 叙述 f 在 $a\in\mathbb{R}$ 点有极限的 $\epsilon-\delta$ 定义.

(2) 叙述 f 在 $a\in\mathbb{R}$ 点处局部有界的定义.

(3) 证明：如果 f 在 $a\in\mathbb{R}$ 点极限存在，则 f 在 $a\in\mathbb{R}$ 点处局部有界.

(4) 证明：如果 f 在有界闭区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上每点都有极限，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

四 .（10 分）设 $P_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n\geq 2)$. 试证：

（1）方程 $P_n(x)=1$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有唯一实根 ξ_n;

（2）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\xi_n=\frac{1}{2}$.

五 . (10 分) (1). 叙述函数 f 在区间 X 上一致连续的定义.

(2). 叙述区间 X 上的函数 f 一致连续的充要条件.

(3) 证明 $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续, 但在 $[0,A]$ 上一致连续.

六 .（10 分）证明: 单调函数的不连续点至多可数.

附加题 设正数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足条件 $a_{n+2}\leq\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$. 证明极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.