1. (32 分) 计算下列积分

(1) $\iint_E e^{\frac{2y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 E 是由曲线 $x=0,\ y=0,\ x+y=1$ 围成的有限平面区域.

(2) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

(4) $\iint_E (x+y)\sin(x-y)dxdy$, 其中 $E=\{(x,y)\ :\ 0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\}$.

2. (24 分) 计算下列三重积分

(1) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围区域;

(2) $\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 $V=\{(x,y,z):x,y,z\ge 0$ 且$x+y+z\le 1\}$.

(3) $\iiint_\Omega (x+y)dxdydz$, 其中 Ω 由 $x=0,x=1,x^2+1=\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$ 所围成 (其中 $a,b>0$).

3. (10 分) 设 f 是定义在若当可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的数值函数.

(1) 叙述函数 f 在若当可测集 E 上黎曼可积的勒贝格准则.

(2) 如果 $f\in\mathcal{R}(E)$, $f(E)\subset[\alpha,\beta]$, $\varphi\in C[\alpha,\beta]$. 证明: $\varphi\circ f\in\mathcal{R}(E)$.

4. (10 分) 设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是若当可测集, $\hat{x}\in Int(E)$. 记 $B_{\frac{1}{k}}(\hat{x})=\{x\in\mathbb{R}^2; |x-\hat{x}|<\frac{1}{k}\}$.

(1) 记 $E_k:=E\backslash B_{\frac{1}{k}}(\hat{x})$. 证明 $\{E_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 是 E 的一个单增可测集列.

(2) 设无界函数 $f: E\backslash\{\hat{x}\} \to \mathbb{R}$ 连续, 且满足

$$\forall\, x \in E\backslash\{\hat{x}\}, \qquad 0 \le f(x) \le \frac{c}{|x-\hat{x}|^p},\ \ c>0,\ \ p<2.$$

证明: 广义积分 $\displaystyle\int_{E\backslash\{\hat{x}\}} f$ 收敛.

(3) 设无界函数 $f: E\backslash\{\hat{x}\} \to \mathbb{R}$ 连续, 且满足

$$\forall\, x \in E\backslash\{\hat{x}\}, \qquad f(x) \ge \frac{c}{|x-\hat{x}|^p},\ \ c>0,\ \ p\ge 2.$$

证明: 广义积分 $\displaystyle\int_{E\backslash\{\hat{x}\}} f$ 发散.

5. (18 分)

(1) 叙述含参量广义积分一致收敛的 M 判别法和狄利克雷判别法;

(2) 证明: 积分

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\, du \quad (\alpha>0)$$

关于 t 在 $[0,\infty)$ 上一致收敛;

(3) 确定函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{y^2dy}{3+y^x}$ 的定义域, 并讨论其连续性和可微性.