习题课讲义

2021 年 11 月 14 日

1 期中考试试题

习题 1 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^5}{x^2+y^{10}}, & (x,y)=(0,0),\\ 0, & (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$ 判断 f 在原点是否连续.

解 当 $f(x,y)$ 沿 $x=ky^5$ 趋于 (x,y) 时，有

$$\lim_{\substack{y\to0,\\ x=ky^5}} f(x,y)=\lim_{y\to0} f(ky^5,y)=\lim_{y\to0}\frac{ky^{10}}{k^2y^{10}+y^{10}}=\frac{k}{k^2+1},$$

上式对于不同的 m 有不同的极限值. 这说明 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的极限不存在，当然也就不连续.

习题 2

（i）求函数 $f(x,y,z)=\ln\dfrac{z^2}{x^2+y^2}$ 在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 沿其梯度方向的方向导数.

（ii）设 f 可偏导，$u=f\Big(xyz,\dfrac{x^2}{z}\Big)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}$.

（iii）求方程组 $\begin{cases}ue^x+yv=0,\\ u\sin y+xv=0\end{cases}$ 所确定的隐函数组的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解

（i）对于任意可微三元函数 $f(x,y,z)$，其梯度为 $\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$，其沿梯度的方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}.$$

从而其沿梯度方向的方向导数为

$$\nabla f\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{f_x^2+f_y^2+f_z^2}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}=\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}.$$

因为 $f(x,y,z)=\ln\dfrac{z^2}{x^2+y^2}=2\ln z-\ln(x^2+y^2)$，所以 $\nabla f=\Big(\dfrac{-2x}{x^2+y^2},\dfrac{-2y}{x^2+y^2},\dfrac{2}{z}\Big)$，从而 $\nabla f\Big|_{(1,1,\sqrt{2})}=(-1,-1,\sqrt{2})$. 故 f 沿其梯度方向的方向导数为 $\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=2$.

（ii）注意，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}$ 是先对 y 求导，再对 z 求导.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=yzf_1+\frac{2x}{z}f_2,\\ &\frac{\partial u}{\partial y}=xzf_1,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}=xf_1+xz(xyf_{11}-\frac{x^2}{z^2}f_{12})=xf_1+x^2yzf_{11}-\frac{x^3}{z}f_{12}.\end{aligned}$$

如果先对 z 求导，再对 y 求导:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_1-\frac{x^2}{z^2}f_2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=xf_1+xy\cdot xzf_{11}-\frac{x^2}{z^2}\cdot xzf_{21}=xf_1+x^2yzf_{11}-\frac{x^3}{z}f_{21}.$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$ 是否相等，取决于 f_{21} 与 f_{12} 是否相等. 二阶混合偏导数存在且至少其一连续可保证相等.

(iii) 法一：设 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=u\mathrm{e}^x+yv,\\ G(x,y,u,v)=u\sin y+xv\end{cases}$，则

$$\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_u & F_v\\ G_x & G_y & G_u & G_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\mathrm{e}^x & v & \mathrm{e}^x & y\\ v & u\cos y & \sin y & x\end{pmatrix}.$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}u\mathrm{e}^x & y\\ v & x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & y\\ \sin y & x\end{vmatrix}}=-\frac{xu\mathrm{e}^x-vy}{x\mathrm{e}^x-y\sin y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & v\\ \sin y & u\cos y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & y\\ \sin y & x\end{vmatrix}}=-\frac{u\mathrm{e}^x\cos y-v\sin y}{x\mathrm{e}^x-y\sin y}.$$

法二：将 u,v 分别看成关于 x,y 的函数. 方程组两式同时对 x 求偏导，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^x+u\mathrm{e}^x+y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\sin y+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\implies\begin{cases}\mathrm{e}^x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u\mathrm{e}^x,\\ \sin y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v,\end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-u\mathrm{e}^x & y\\ -v & x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & 1\\ \sin y & x\end{vmatrix}}=\frac{vy-xu\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x-\sin y}.$$

方程组两式同时对 y 求偏导，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^x+v+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin y+u\cos y+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\end{cases}\implies\begin{cases}\mathrm{e}^x\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=-v,\\ \sin y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=-u\cos y,\end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & -v\\ \sin y & -u\cos y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & y\\ \sin y & x\end{vmatrix}}=\frac{v\sin y-u\mathrm{e}^x\cos y}{x\mathrm{e}^x-y\sin y}.$$

习题 3 给定椭球面 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$. 求其在第一卦限的，在三坐标轴的截距之和最小的切面方程.

解 考虑更一般的情形，给定椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. 设 $g(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，则 $\nabla g=\Big(\dfrac{2x}{a^2},\dfrac{2y}{b^2},\dfrac{2z}{c^2}\Big)$. 从而椭球面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为 $\nabla g\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\Big(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\Big)$. 故过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0. \tag{1.1}$$

记 $S=\Big\{(x,y,z)\Big|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\Big\}$，则因 $(x_0,y_0,z_0)\in S$，故有 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$，从而可将(1.1)式化简为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1. \tag{1.2}$$

从而该切平面在 x,y,z 轴的截距分别为 $x=\dfrac{a^2}{x_0}$，$y=\dfrac{b^2}{y_0}$，$z=\dfrac{c^2}{z_0}$，从而截距之和为 $\dfrac{a^2}{x_0}+\dfrac{b^2}{y_0}+\dfrac{c^2}{z_0}$. 记 $f(x,y,z)=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}$，因此题目转化为求 $f(x_0,y_0,z_0)$ 在条件 $g(x_0,y_0,z_0)$ 之下及 $x_0>0,\ y_0>0,\ z_0>0$ 的最小值. 设

$$L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=f(x_0,y_0,z_0)-\lambda g(x_0,y_0,z_0)=\frac{a^2}{x_0}+\frac{b^2}{y_0}+\frac{c^2}{z_0}-\lambda\Big(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\Big),$$

则

$$\begin{cases} L_{x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}-\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0,\\ L_{y_0}=-\dfrac{b^2}{y_0^2}-\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0,\\ L_{z_0}=-\dfrac{c^2}{z_0^2}-\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0,\\ L_\lambda=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0. \end{cases}$$

由 L_{x_0},L_{y_0},L_{z_0} 解得 $x_0=-\Big(\dfrac{a^4}{2\lambda}\Big)^{\frac13}$，$y_0=-\Big(\dfrac{b^4}{2\lambda}\Big)^{\frac13}$，$z_0=-\Big(\dfrac{c^4}{2\lambda}\Big)^{\frac13}$. 将 x_0,y_0,z_0 代入 L_λ，有

$$\Big(\frac{a^2}{2\lambda}\Big)^{\frac23}+\Big(\frac{b^2}{2\lambda}\Big)^{\frac23}+\Big(\frac{c^2}{2\lambda}\Big)^{\frac23}=1,$$

即 $(2\lambda)^{\frac13}=\pm\big(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23}\big)^{\frac12}$. 因 x,y,z 均正，故取 $(2\lambda)^{\frac13}=-\big(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23}\big)^{\frac12}$. 因此得到唯一驻点 $P:=\Big(\dfrac{a^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\dfrac{b^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\dfrac{c^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}}\Big)$.

注意到当 $(x,y,z)\in S$，且 $x\to0$ 或 $y\to0$ 或 $z\to0$ 时，都有 $f(x,y,z)\to+\infty$，即 f 在 S 上无最大值. 另一方面，$\exists\delta>0$，使得当 $0<x\leqslant\delta$，$0<y\leqslant\delta$，$0<z\leqslant\delta$ 时，有

$$f(x,y,z)>f\Big(\frac{a^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{b^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{c^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}}\Big)=\big(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23}\big)^{\frac32}.$$

设 $S_1=\Big\{(x,y,z)\Big|(x,y,z)\in S,x\geqslant\delta,\ y\geqslant\delta,\ z\geqslant\delta\Big\}$，则因 S_1 为紧集 (有界闭集) 且 f 为连续函数，故 f 在 S_1 上存在最大、最小值. 而在 $S\setminus S_1$ 及 ∂S_1 上，f 的值已大于 $\big(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23}\big)^{\frac32}$，这说明 f 在 S 上的最小值不在 $S\setminus S_1$ 及 ∂S_1 上取得，相应地必在 S_1° 取得. 又因 S_1° 只有唯一条件极值可疑点 P，所以 P 即为所求之条件最小值点. 将该点代入到(1.2)式，得到所求切面方程为

$$\frac{x}{a^{\frac23}}+\frac{y}{b^{\frac23}}+\frac{z}{c^{\frac23}}=(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}.$$

注 1 倒也可以通过计算二阶矩阵确定 P 为条件最小值点. 注意到 $L_{x_0x_0}=\dfrac{a^2}{2x_0^3}-\dfrac{2\lambda}{a^2}$，$L_{y_0y_0}=\dfrac{b^3}{2y_0^3}-\dfrac{2\lambda}{b^2}$，$L_{z_0z_0}=\dfrac{c^3}{2z_0^2}-\dfrac{2\lambda}{c^3}$，$L$ 的二阶混合偏导数均为零，故

$$\left.\begin{pmatrix} L_{x_0x_0} & L_{x_0y_0} & L_{x_0z_0}\\ L_{y_0x_0} & L_{y_0y_0} & L_{y_0z_0}\\ L_{z_0x_0} & L_{z_0y_0} & L_{z_0z_0}\end{pmatrix}\right|_P=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2a^2}(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac32} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{3}{2b^2}(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac32} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{3}{2c^2}(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac32}\end{pmatrix}$$

为正定阵，从而 P 为 f 的唯一极小值点.

但我们想要的是条件最小值点，所以对本题而言，仍需要通过上述讨论才能进一步确定 P 为条件最小值点. 所以相对来说这里计算二阶矩阵并不是本题的必要过程.

注 2 若取 $(2\lambda)^{\frac13}=\left(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23}\right)^{\frac12}$，则相应地 x_0,y_0,z_0 均为负，此时得到的会是 f 在第七卦限下的条件最大值点，即 f 在第七卦限下，会在该点取得最大值.

注 3 象限：quadrant，卦限：octant.

注 4 不采用条件极值而确定最小值的办法.

推广形式的 Hölder 不等式：设 $p,q,r>1$，且 $\dfrac1p+\dfrac1q+\dfrac1r=1$，则

$$\sum_{i=1}^n|a_ib_ic_i|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n|a_i|^p\Big)^{\frac1p}\Big(\sum_{i=1}^n|b_i|^q\Big)^{\frac1q}\Big(\sum_{i=1}^n|c_i|^r\Big)^{\frac1r}.$$

特别地，当 $p=q=r=3$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n|a_ib_ic_i|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n|a_i|^3\Big)^{\frac13}\Big(\sum_{i=1}^n|b_i|^3\Big)^{\frac13}\Big(\sum_{i=1}^n|c_i|^3\Big)^{\frac13},$$

亦即

$$\Big(\sum_{i=1}^n|a_ib_ic_i|\Big)^3\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n|a_i|^3\Big)\Big(\sum_{i=1}^n|b_i|^3\Big)\Big(\sum_{i=1}^n|c_i|^3\Big).$$

注意到

$$\begin{aligned} f^2(x_0,y_0,z_0)&=f^2(x_0,y_0,z_0)\cdot1\\ &=\Big(\frac{a^2}{x_0}+\frac{b^2}{y_0}+\frac{c^2}{z_0}\Big)\cdot\Big(\frac{a^2}{x_0}+\frac{b^2}{y_0}+\frac{c^2}{z_0}\Big)\cdot\Big(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\Big)\\ &\geqslant(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^3,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\frac{\frac{a^2}{x_0}}{\frac{x_0^2}{a^2}}=\frac{\frac{b^2}{y_0}}{\frac{y_0^2}{b^2}}=\frac{\frac{c^2}{z_0}}{\frac{z_0^2}{c^2}}\iff\frac{a^4}{x_0^3}=\frac{b^4}{y_0^3}=\frac{c^4}{z_0^3},$$

即 $y_0=\dfrac{b^{\frac43}}{a^{\frac43}}x_0$，$z_0=\dfrac{c^{\frac43}}{a^{\frac43}}x_0$. 将 x_0,y_0,z_0 代入到椭球面方程，并注意到 x_0,y_0,z_0 恒正，即有

$$(x_0,y_0,z_0)=\Big(\frac{a^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{b^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{c^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}}\Big).$$

注 5 另外的一种应该可行的说明 P 为条件极值的过程：由 f 的连续性，$\exists\delta>0$，当 $x,y<\delta$ 且 δ 足够小时，有

$$\begin{aligned}f(x_0,y_0,z_0)&=\frac{a^2}{x_0}+\frac{b^2}{y_0}+\frac{c^2}{z_0}=\frac{a^2}{x_0}+\frac{b^2}{y_0}+\frac{c^2}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}>\frac{a^2}{\delta}+\frac{b^2}{\delta}+c \\ &>f\Big(\frac{a^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{b^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{c^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}}\Big)=(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac32}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

而 $S_2:=\Big\{(x,y)\Big|\frac{\delta^2}{a^2}+\frac{\delta^2}{b^2}\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1\Big\}$ 为紧集，故 f 可在 S_2 上达到最小值

$$f\Big(\frac{a^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{b^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}},\frac{c^{\frac43}}{(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac12}}\Big)=(a^{\frac23}+b^{\frac23}+c^{\frac23})^{\frac32},$$

它也是 f 在 $\Big\{(x,y)\Big|0\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1\Big\}$ 上的最小值.

习题 4 设 (X,ρ) 为度量空间，其中 ρ 为距离 (度量).

(i) 写出 (X,ρ) 上一致连续函数的定义.
(ii) 设 $A\subset X$ 为非空集合. 证明距离函数

$$f(x)=\inf_{y\in A}\rho(x,y),\quad x\in X,$$

为一致连续函数.

解

(i) 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall x',x''\in X$，当 $\rho(x',x'')<\delta$ 时，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称 f 为 (X,ρ) 上的一致连续函数.

(ii) $\forall\varepsilon>0$，$\forall x'\in X$，由下确界定义，$\exists y'\in A$，使得

$$\rho(x',y')<\inf_{y\in A}\rho(x',y)+\frac{\varepsilon}{2}=f(x')+\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $\forall x''\in X$，

$$\begin{aligned}f(x'')&=\inf_{y\in A}\rho(x'',y)\leqslant\rho(x'',y')<\rho(x',x'')+\rho(x'',y'')\\&<\rho(x',x'')+\inf_{y\in A}\rho(x'',y)+\frac{\varepsilon}{2}\\&=f(x')+\rho(x',x'')+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

即

$$f(x'')-f(x')<\rho(x',x'')+\frac{\varepsilon}{2}.\tag{1.4}$$

同理

$$f(x')-f(x'')<\rho(x',x'')+\frac{\varepsilon}{2}.\tag{1.5}$$

故由(1.4)式及(1.5)式可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，使得 $\forall x',x''\in X$，当 $\rho(x',x'')<\delta$ 时，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\rho(x',x'')+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 f 为 (X,ρ) 上的一致连续函数.

习题 5 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为非空凸区域，f 在 Ω 上可微且满足

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{1.6}$$

(i) 证明：若 $(0,0) \in \Omega$，则 f 在 Ω 上为常数.

(ii) 若 $(0,0) \notin \Omega$，判断上述结论是否仍成立.

解

(i)

- 证法一：令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$. 则

  $$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

  因 $(0,0) \in \Omega$，故 r 可取值为 0. 故当 $r = 0$ 时，有 $f(x,y) = f(0,0)$. 当 $r > 0$ 时，注意到

  $$f_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y,$$

  故

  $$\begin{aligned}\frac{1}{r} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{1}{r}\big[r\cos\theta f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\big] \\ &= \frac{1}{r}\big[xf_x(x,y) + yf_y(x,y)\big] = 0,\end{aligned}$$

  即 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 与 r 无关. 从而对任意固定的 θ，因 $(0,0) \in \Omega$，故由 f 在点 $(0,0)$ 的连续性，有

  $$f(x,y) = \lim_{r \to 0^+} f(x,y) = \lim_{r \to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(0,0).$$

- 证法二：因

  $$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0 = 0 \cdot f(x,y),$$

  故 f 为零次齐次函数. 于是 $\forall t > 0$，

  $$f(x,y) = t^0 f(x,y) = f(tx, ty).$$

  因 $(0,0) \in \Omega$，故由 f 在点 $(0,0)$ 的连续性，有

  $$f(x,y) = \lim_{t \to 0^+} f(x,y) = \lim_{t \to 0^+} f(tx, ty) = f(0,0).$$

- 证法三：$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$，定义一元函数

  $$\varphi(t) = f(tx, ty), \quad t > 0.$$

  则

  $$\varphi'(t) = xf_1(tx,ty) + yf_2(tx,ty) = \frac{1}{t}\big[txf_1(tx,ty) + tyf_2(tx,ty)\big] = 0,$$

  故 $\varphi(t)$ 为常数. 取 $t = 1$，则 $\varphi(t) \equiv \varphi(1)$. 即

  $$f(tx, ty) = f(x,y).$$

  因 $(0,0) \in \Omega$，故由 f 在点 $(0,0)$ 的连续性，有

  $$f(x,y) = \lim_{t \to 0^+} f(x,y) = \lim_{t \to 0^+} f(tx, ty) = f(0,0).$$

- 证法四：因 Ω 为凸区域且 $(0,0)\in\Omega$，故由微分中值定理，$\forall \boldsymbol{b}=(x,y)$，取 $\boldsymbol{a}=(0,0)$，则 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\begin{aligned}
f(x,y)-f(0,0)&=f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})\\
&=\nabla f(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\
&=f_x(\theta x,\theta y)x+f_y(\theta x,\theta y)y\\
&=\frac{1}{\theta}\big[\theta x f_x(\theta x,\theta x)+\theta y f_y(\theta x,\theta y)\big]\\
&=0,
\end{aligned}$$

即

$$f(x,y)\equiv f(0,0),\quad \forall(0,0)\in\Omega.$$

（ii）因 $(0,0)\notin\Omega$，故 x,y 不同时为 0. 不妨设 $x\neq 0$. 则因 f 为零次齐次函数，故可设

$$g\Big(\frac{y}{x}\Big)=f(tx,ty)=f(x,y). \tag{1.7}$$

同理，当 $y\neq 0$ 时，可设

$$h\Big(\frac{x}{y}\Big)=f(tx,ty)=f(x,y).$$

从而对任意具有 $g\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$、$h\Big(\dfrac{x}{y}\Big)$ 形式的函数，均可使得(1.6)式成立.

注 1 定义：如果函数 $f(x,y)$ 满足 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，其中 $t>0$，n 为非负整数，则称 f 是 n 次齐次函数.

命题：设 f 可微. 则 f 是 n 次齐次函数的充分必要条件是

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=nf(x,y).$$

注 2 多元函数微分中值定理：设 Ω 为凸区域，则 $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\Omega$，$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})=\nabla f\big(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\big)\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

2 补充习题

习题 6 证明：

$$\int_0^1\sin\pi s\ln\Gamma(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\Big(\ln\frac{\pi}{2}+1\Big).$$

解 令 $s=1-t$，则

$$\int_0^1\sin\pi s\ln\Gamma(s)\,\mathrm{d}s=\int_1^0\sin(\pi-t\pi)\ln\Gamma(1-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^1\sin\pi t\ln\Gamma(1-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sin\pi s\ln\Gamma(1-s)\,\mathrm{d}s.$$

故由余元公式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},$$

有

$$
\begin{aligned}
2\int_0^1 \sin\pi s\ln\Gamma(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 \sin\pi s\ln\Gamma(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^1 \sin\pi s\ln\Gamma(1-s)\,\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1 \sin\pi s\ln[\Gamma(s)\Gamma(1-s)]\,\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1 \sin\pi s\ln\frac{\pi}{\sin\pi s}\,\mathrm{d}s\\
&=\ln\pi\int_0^1 \sin\pi s\,\mathrm{d}s-\int_0^1 \sin\pi s\ln\sin\pi s\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{2}{\pi}\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

以下计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s$.

- 首先证明

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos s\ln\cos s\,\mathrm{d}s.
$$

令 $t=\dfrac{\pi}{2}-s$，则

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)\ln\sin\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ln\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos s\ln\cos s\,\mathrm{d}s.
$$

- 其次证明

$$
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s.
$$

令 $t=s-\dfrac{\pi}{2}$，则

$$
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big)\ln\sin\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ln\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s.
$$

因此

$$
\int_0^{\pi}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s.
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\ln\sin s\,\mathrm{d}s&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}\ln\sin s\,\mathrm{d}s\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin s\,\mathrm{d}\Big(\sin^2\frac{s}{2}\Big)\\
&=2\sin^2\frac{s}{2}\ln\sin s\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{s}{2}\cdot\frac{\cos s}{\sin s}\,\mathrm{d}x\\
&=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{s}{2}\cdot\frac{2\cos^2\frac{s}{2}-1}{2\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}}\,\mathrm{d}s\\
&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{s}{2}\Big(2\cos\frac{s}{2}-\frac{1}{\cos\frac{s}{2}}\Big)\,\mathrm{d}s\\
&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\,\mathrm{d}s+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{s}{2}\,\mathrm{d}s\\
&=-1+2\ln\Big|\sec\frac{s}{2}\Big|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=-1+2\ln\sqrt{2}=-1+\ln 2,
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin \pi s \ln \Gamma(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{\pi}\ln \pi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin s \ln \sin s\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\pi}\ln \pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin s \ln \sin s\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\pi}\ln \pi - \frac{1}{\pi}(-1+\ln 2) = \frac{1}{\pi}\Big(\ln \frac{\pi}{2} + 1\Big).\end{aligned}$$

注 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} = \frac{1}{a}.$$

注 2 三角函数公式：

$$\sin\Big(\frac{n\pi}{2}+\theta\Big) = \begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\theta, & n\text{为奇数},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\sin\theta, & n\text{为偶数};\end{cases} \qquad \cos\Big(\frac{n\pi}{2}+\theta\Big) = \begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\theta, & n\text{为奇数},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\theta, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

特别地，

$$\begin{aligned}
&\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\theta\Big) = \cos\theta, && \cos\Big(\frac{\pi}{2}-\theta\Big) = \sin\theta,\\
&\sin\Big(\theta-\frac{\pi}{2}\Big) = -\cos\theta, && \cos\Big(\theta-\frac{\pi}{2}\Big) = \sin\theta,\\
&\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\theta\Big) = \cos\theta, && \cos\Big(\frac{\pi}{2}+\theta\Big) = -\sin\theta,\\
&\sin\Big(\frac{3\pi}{2}-\theta\Big) = -\cos\theta, && \cos\Big(\frac{3\pi}{2}-\theta\Big) = -\sin\theta,\\
&\sin\Big(\frac{3\pi}{2}+\theta\Big) = -\cos\theta, && \cos\Big(\frac{3\pi}{2}+\theta\Big) = \sin\theta.
\end{aligned}$$