24 秋- 代数学基础 1（回忆版）

February 10, 2025

---

1. 求矩阵 X 使得 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2. 计算行列式

   (a) $\begin{vmatrix}2 & 0 & -6 & 2\\ 1 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -3 & 1\\ -2 & 4 & 1 & 1\end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix}a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0\\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d\end{vmatrix}$

3. 计算 $(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3, 3x^2 - 14x + 15)$

4. 设 B 和 C 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 阶矩阵，证明

$$\det \begin{pmatrix}C & I_m\\ D & B\end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(D - BC)$$

5. 利用齐次线性方程组解和秩的关系证明：若 $m \times n$ 阶实矩阵 A 满足 $m > n$ 且秩 $r(A) = n$，则 $r(A^T A) = n$

6. (a) 设群 $G \supsetneq \langle a \rangle$，且 $o(a) = n$，证明 G 至少含有 $2n$ 个元素

   (b) 证明 4 阶群必同构于 $\mathbb{Z}_4$ 或 Klein 四元群

7. (a) $3x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 35$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约吗？若不可约给出证明

   (b) 设 $f_1(x), \cdots, f_4(x) \in \mathbb{C}[x]$，若 $f_1(x^{2025}) + x f_2(x^{2025}) + x^2 f_3(x^{2025}) + x^3 f_4(x^{2025})$ 可以被 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ 整除，证明 $f_i(1) = 0$，$i = 1, 2, 3, 4$