北京师范大学 2005～2006 学年第二学期期末考试试卷（B 卷）

课程名称：复变函数 任课教师姓名：______ 考试时间：______

数学科学学院 院（系）数学与应用数学 专业 04 级本科生 考试地点：数学楼 307

姓名 ______ 班级 ______ 学号 ______ 分数 ______

（所有答案必须写在答题纸上，做在试题纸或草稿纸上的一律无效）

$u_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xyi$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -i2xy + x^2$

一、（8 分）讨论函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 的（复）可微性和解析性（在何处可微和解析）

二、（10 分）将函数

$$f(z)=\frac{z^2+5}{z^2-2z+10}$$

$f(z) = \frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}=y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy$ $\quad (0,0)$

按 $z-1$ 的幂展出，并指出其收敛范围。

$\frac{\partial v}{\partial y}=x^2 \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy$

三、（15 分）将下列函数在指定圆环内展为洛朗（Laurent）级数

$$(1)\ \frac{z}{z^2(z^2+4)},\ 0<|z|<1;\quad (2)\ \sin\left(\frac{1}{z-1}\right),\ 0<|z-1|<+\infty.$$

$=\left(\frac{1}{z-1}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^3+\cdots$

四、（23 分）用留数定理计算定积分：

$$(1)\ \oint_{|z|=2}\frac{z}{z^2(z+1)}dz;\quad (2)\ \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4+\cos\theta};\quad (3)\ \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{1+x^2}\ (-1<\alpha<1).$$

五、（15 分）求下列各函数的孤立奇点，孤立奇点各属于哪一种类型，并求这些函数在孤立奇点的留数：

$$(1)\ \frac{z}{(z^3-1)};\quad (2)\ \frac{1}{\cos z};\ (3)\ \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

六（10 分）设 $D=D(0,1)-(-1,-\frac{1}{2}]$ 是单位圆盘 $D(0,1)=\{z:|z|<1\}$ 除去实轴上的半闭区间 $(-1,-\frac{1}{2}]$ 所得区域，试作一单叶解析函数 $w=f(z)$ 把 $D=D(0,1)-(-1,-\frac{1}{2}]$ 映射到单位圆盘 $D(0,1)=\{w:|w|<1\}$.

七、（12 分）设 $f(z)$ 在单位圆盘 $D(0,1)=\{z:|z|<1\}$ 中解析，且当 $z\in D(0,1)$ 时，有 $|f(z)|\le 1$，设 $a\in D(0,1)$，$f(a)=0$，则 i)

$$|f(z)|\le\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$$

$\alpha(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

对所有 $z\in D(0,1)$ 都成立，且

$$|f'(a)|\le\frac{1}{1-|a|^2},$$

ii) 如果

$$|f'(a)|=\frac{1}{1-|a|^2},$$

则 $w=f(z)$ 是分式线性映射。

八（7 分）试证多值函数 $\sqrt[4]{z^3(z-1)}$ 在割去线段 $[0,1]$ 的 z 平面上可以分出四个单叶解析分支，求函数在点 $z=2$ 处取正值的那个分支在点 $z=\pm i$ 的值。