北京师范大学 2020–2021 学年第一学期近世代数期中考试试题

课程名称：近世代数　　　　任课老师姓名：________

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷

院（系）：________　　专 业：________　　年 级：________

姓 名：________　　学 号：________

一、(20分) 在 S_n 中, 令 $\sigma=(1\ 2)(5\ 6\ \cdots\ n), \tau=(3\ 4)(5\ 6\ \cdots\ n)$, $n\geqslant 5$. 记 $H=\langle\sigma,\tau\rangle$.

(1) 判断 H 是否为交换子群, 并说明理由;

(2) 求 $|H|$ 并给出计算过程.

二、(20分) 设 $G=GL_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}^*$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 中全体非零数的集合构成的乘法群. 令 H 和 H' 分别表示 G 中全体上(下)三角矩阵构成的子群.

(1) 证明 H 与 H' 同构;

(2) 对于正整数 $m\leqslant n$，证明 $\overline{G}=\underbrace{\mathbb{F}^*\times\cdots\times\mathbb{F}^*}_{m}$ 是 H 的一个满同态像, 并求出该同态映射 f 的核 $\mathrm{Ker}(f)$.

三、(20分) 设群 G 有子群链 $H\lhd N\lhd G$.

(1) 判断是否有 $H\lhd G$, 并说明理由;

(2) 若对于 Aut(G) 中的任意一个元素 σ 都有 $\sigma(H)=H$, 判断是否有 $H\lhd G$, 并说明理由.

四、(20分) 对于奇数 $n\geqslant 5$, 找出 $G=A_n$ 的两个真子群 H,K 使得 $G=HK$, 并说明理由.

五、(20分) 对于奇素数 p, 证明 $6p^2$ 阶群 G 的西罗 p-子群是正规的.