北京师范大学泛函分析试题

发表于 2018-01-11 | 分类于 学习

2017 期末试题

7, 8, 9 题目不保证与原文完全一致.

1. 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, $\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的子空间, 假定 $\exists c \in (0,1)$, s.t.
$$\inf_{x\in\mathscr{X}_0}\|y-x\| \leqslant c\|y\| \quad (\forall y \in \mathscr{X}).$$
求证: $\mathscr{X}_0$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠.

2. 设 M 是Hilbert空间 $\mathscr{H}$ 的子集, 求证:
$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{span}M}.$$

3. 设 $\mathscr{H}$ 是Hilbert空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, 且 $\exists m > 0$, s.t.
$$|(Ax,x)| \geqslant m\|x\|^2 \quad (\forall x \in \mathscr{H}).$$
求证: $\exists A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

4. 设 $\mathscr{X}$ 是复线性空间, p 是 $\mathscr{X}$ 上的半模. $\forall x_0 \in \mathscr{X}$, $p(x_0) \neq 0$. 求证: 存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f s.t.
   1. $f(x_0) = 1$;
   2. $|f(x)| \leqslant p(x)/p(x_0)$ $(\forall x \in \mathscr{X})$.
5. 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, $E \subset \mathscr{X}$ 是非空均衡闭凸集, $\forall x \in \mathscr{X}\backslash E$. 求证: $\exists f \in \mathscr{X}^*$ 及 $\alpha > 0$, s.t.
$$|f(x)| < \alpha < |f(x_0)| \quad (\forall x \in E).$$

6. 求证: B 空间是自反的当且仅当其共轭空间是自反的.

7. (不保证与原题完全一致) 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是Banach空间, 设 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是连续线性算子全体, 证明: 一一映射在其中构成一个开集.

8. 设 $\mathscr{H}$ 是Hilbert空间, $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, 若对 $\forall x, y \in \mathscr{X}$, 有 $(Ax,y) = (x,By)$, 证明: A 连续.

9. (不保证与原题完全一致) 设 $\mathscr{X}$ 是自反空间, E 是其中的闭凸集, 证明:
$$\exists x_0 \in E,\ \text{s.t. } \|x_0\| = \inf_{x\in E}\|x\|.$$

部分简略解答

7, 8, 9 解答不保证正确性.

1. 用 F.Riesz 引理, 参见习题1.4.13;

2. 参见习题1.6.5;

3. 用 Banach 逆映射定理, 参见习题2.3.3;

4. 用复 Hahn–Banach 定理, 参见习题2.4.3;

5. 用 Ascoli 定理, 参见习题2.4.10;

6. 利用自然映射和共轭算子, 参见习题2.5.5;

7. ––这是一个差不多的题目的解答
   先证明一个引理:

   > **LEMMA 1.** $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} < 1$, 则 $(I-A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且
   > $$\|(I-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leqslant \frac{1}{1-\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}}.$$
   > 证明略...(

   然后仍然是证明开集的正统方法: $\forall A$, s.t. $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ (1. 取集合里的一个元素), 取 $\forall T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, s.t. $\|T-A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}}$ (2. 取一个半径, 考虑以 A 为心的开球), 由 **LEMMA**, 有:
$$\begin{aligned}
\|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} &= \|(T-A+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} = \|(I+(T-A)A^{-1})^{-1}A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \\
&\leqslant \|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\cdot\|(I+(T-A)A^{-1})^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \\
&\leqslant \|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\cdot\frac{1}{1+\|(T-A)A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}} \qquad \text{(由上述引理可得)} \\
&< \infty \qquad \text{(这里实际上是在证明 } T^{-1} \text{ 有界)}
\end{aligned}$$
   其中, $\|(T-A)A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leqslant \|T-A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\cdot\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} < 1$. 至此, 我们证明了 $\forall A \in$" $\mathscr{L}(\mathscr{X})$中的连续线性算子集 ", A 的 邻 域 $B(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}}) \subset$" $\mathscr{L}(\mathscr{X})$中的连续线性算子集 ". (3. 证明 $\forall A$, 开球都包含在集合里, Over.)
   因此, $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的连续线性算子构成一个闭集.

8. 由闭图像定理, 只需证明 A 是闭算子且定义域闭. 考虑到定义域 $\mathscr{H}$ 显然闭, 只需要证明 A 是闭算子. 取 $x_n \to x \in \mathscr{H}$, 设 $Ax_n \to z$, 则只需证 $Ax = z$. (由闭算子的定义即可得, 参见课本P96: Def 2.3.9) **一方面**, 由内积的连续性, 即有 $(Ax_n, y) \to (z, y)$. 而**另一方面**又由条件有 $(Ax_n, y) = (x_n, By) \to (x, By) = (Ax, y)$. 于是由极限的唯一性即有 $Ax = y$, 得证.

9. (瞎写的) 设 $d = \inf_{x\in E}\|x\|$, 由定义可取 $x_n \in E$, s.t. $d < \|x_n\| < d + \frac{1}{n}$. 由于自反空间中闭集是弱自列紧的, 取其收敛子列的弱极限即可.

2019.01泛函题目（所以是 2018 下半年的泛函考试）

只有两个附加题, 不保证题目完全一致且没有解答.感谢供题.

1. 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, $\forall x \in \mathscr{X}$, ε_n 为一个极限为 0 的序列, 且有
$$f_n(x) \leqslant \varepsilon_n\|f_n\|_{\mathscr{X}^*} + C(x).$$
其中 $C(x)$ 是一个函数（小李同学表示这个条件很懵B...）, 证明: $\|f_n\|_{\mathscr{X}^*}$ 一致有界.
2. B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上有 n 个半模 $p_k(x)$ $k = 1, \cdots, n$, 设线性泛函 $\varphi(x)$ 满足
$$|\varphi(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k(x),$$
试证: 存在线性泛函 $\varphi_k(x)$, $(k = 1, \cdots, n)$, s.t. $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)$, 且 $|\varphi_k(x)| \leqslant p_k(x)$, $(k = 1, \cdots, n)$.

- 感谢同学提供上述第 2 题的解答:

> As you said, considering the subspace $V_0 := \{(x, \dots, x) : x \in V\}$ together with a linear functional $g_0(x, \dots, x) := \phi(x)$ is a good point to start.
>
> You have that
> $$|g_0(x, \dots, x)| = |\phi(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} p_k(x) =: p(x, \dots, x)$$
> Of course $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is a seminorm on V^n.
>
> The algebraic version of Hahn-Banach gives you an extension g to V^n which is still dominated by p, i.e.
> $$|g(x_1, \dots, x_n)| \leq p(x_1, \dots, x_n).$$
> Let $\phi_i(x) := g(0, \dots, 0, \overset{i}{\smile}{x}, 0, \dots, 0)$. Then,
> $$\sum_i \phi_i(x) = g(x, 0, \dots) + g(0, x, 0, \dots) + \cdots + g(0, \dots, 0, x)$$
> $$= g(x, \dots, x) = g_0(x, \dots, x) = \phi(x).$$
> Furthermore,
> $$|\phi_i(x)| = |g(0, \dots, 0, \overset{i}{\smile}{x}, 0, \dots, 0)|$$
> $$\leq p(0, \dots, 0, \overset{i}{\smile}{x}, 0, \dots, 0) = p_i(x).$$

2019.12.30 泛函题目（所以是 2019 下半年的泛函考试）

依然是两个附加题, 不保证题目完全一致且没有解答. 感谢供题.

1. 设
   E 是线性空间, 映射
   $p : E \to \mathbb{R}$ 满足:
   1. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$;
   2. 固定 $x \in E$, 映射 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \to p(\lambda x)$ 连续;
   3. $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, 若 $p(x_n) \to 0$, 则 $p(\lambda x_n) \to 0$.

   求证:
   1. $p(0) = 0$;
   2. $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ 有极限且 $p(x_n) \to 0$, 则 $p(\alpha_n x_n) \to 0$.
2. 设 $\mathscr{X}, \mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 是 B 空间, T_i 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{X}_i$ 的闭算子, 且有:
$$D(T_1) \subseteq D(T_2)$$
求证 $\exists C > 0$, s.t. $||T_2x||_{\mathscr{X}_2} \leqslant c(||x||_{\mathscr{X}} + ||T_1x||_{\mathscr{X}_1})$, $\forall x \in D(T_1)$.

- 感谢汪玲同学提供上述第 2 题的解答:

> That's a direct application of closed graph theorem. Let's denote $\Gamma_i = \{(x, T_ix) : x \in D(T_i)\}$ - graphs of your operators. Theese are banach spaces in the sense of graph norms $||(x, T_ix)|| = ||x||_{\mathscr{X}} + ||T_ix||_{\mathscr{X}_i}$. Now consider operator $S : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ that acts as follows: $S(x, T_1x) = (x, T_2x)$ (S is well defined since $D(T_1) \subset D(T_2)$). It is easy to see that your initial statement is equivalent to continuity of S in graph norms.
>
> Now we prove that S is continuous by closed graph theorem. Let
> $$z_n = ((x_n, T_1x_n), (x_n, T_2x_n)) \to ((x, t), (x, s))$$
> be a converging sequence in $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. Then (x_n, T_ix_n) converges to some point (x, T_ix) in Γ_i. But then we have $t = T_1x$ and $s = T_2x$ and therefore $((x, t), (x, s))$ belongs to graph of S. So, graph of S is closed and S is continuous.
>
> Now we have some constant $C = ||S||$ such that $||(x, T_2x)|| \leq C||(x, T_1x)||$ for all $x \in D(T_1)$. So
> $$||x||_{\mathscr{X}} + ||T_2x||_{\mathscr{X}_2} \leq C(||x||_{\mathscr{X}} + ||T_1x||_{\mathscr{X}_1})$$
> Then your inequality holds with the same constant C.

师大 # 数学 # 各种试卷 # 泛函分析