北京师范大学 2020 ~ 2021 学年第二学期期中

课程名称：复变函数　　任课老师姓名：

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：

一. (10分) 试判断下列函数的可微性和解析性：

$(1) f(z)=x^2+\mathrm{i}y^2$;　　$(2) f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$.

二. (15分) 试证下列函数在z平面上解析，并求其导函数：

$$f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{i}e^x(y\cos y+x\sin y).$$

三. (15分) 计算下列复积分：

(1) $\int_C (x-y+\mathrm{i}x^2)\mathrm{d}z$，其中积分路径$C$是连接由0到$1+\mathrm{i}$的直线段.

(2) $\int_{-2}^{-2+\mathrm{i}}(z+2)^2\mathrm{d}z$;　　(3) $\int_{|z+1|=1/2}\frac{\sin(\pi z/4)}{z^2-1}\mathrm{d}z$.

四. (10分) 设$f(z)$是一个整函数，且$f(z)$满足

$$\limsup_{z\to+\infty}|f(z)||z|^{-a}<+\infty,$$

其中a是正常数. 证明$f(z)$是一个次数不超过a的多项式.

五. (10分) 假设简单闭围线C不通过三个相异点a,b,c，求出$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)(z-c)}$的所有可能值.

六. (10分) 设$f(z)$是扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$中的亚纯函数，$f(z)$只有2个极点$z=1$和$z=\infty$. 如果$f(z)$在这2个极点处的Laurent 展开式的主要部分分别是

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\quad 和\quad z+z^3,$$

且$f(0)=0$，求$f(z)$.

七. (10分) 说明多值函数$(z(1-z)^3)^{\frac{1}{4}}$在割去线段$[0,1]$的z平面上可以分出四个单值连续分支. 求出在$[0,1]$的上沿取正值的那个单值解析分支$g_0(z)$在点$z=-1$处的值($g_0(-1)=?$) 和在点$z=i$处的值($g_0(i)=?$).

八. (20分) (1) 将函数$\frac{z}{z^2-4z+13}$按$z-2$的幂展出，并指出其收敛半径.

(2) 将下列函数在指定圆环内展为罗朗级数:

(a) $\frac{1}{z^3(z^2-4)}$，$2<|z|<+\infty$;　(b) $\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$，$0<|z-1|<+\infty$.