

25 秋- 近世代数期中（回忆版）

November 30, 2025

1. 求二面体群 D_{10} 的中心
2. G, \overline{G} 有 2 个有限循环群, 阶分别为 m, n , 证明: 存在同态 $f: G \rightarrow \overline{G} \Leftrightarrow n|m$
3. $\{x_1, \dots, x_k\}$ 为有限群 G 的共轭类代表元, 证明

$$\sum_{k=1}^k \frac{1}{|C_G(x_i)|} = 1,$$

这里 $C_G(x_i) = \{g \mid gx_i = x_i g\}$

4. 设 G 为有限群, 且 $3 \nmid |G|$, 证明 G 的 Sylow 3-子群的个数为 $3k+1$, k 为某自然数.
5. 设 P 为有限群 G 的 Sylow p -子群, $N \trianglelefteq G$, 证明 $P \cap N$ 为 N 的 Sylow p -子群,
6. 证明有限群 G 存在极大正规子群.(即存在 $N \trianglelefteq G$, G/N 为单群)