25 秋- 近世代数期中（回忆版）

November 30, 2025

---

1. 设 G 为 Abel 群，幺元为 e, $H=\{a\in G\mid a^2=e\}$, 证明 H 为 G 的子群

2. 叙述群论中的拉格朗日定理，并借助该定理找到 S_3 的全部子群

3. 设 $C(G)$ 是群 G 的中心，证明若 $G/C(G)$ 为循环群，则 G 为 Abel 群.

4. 设 G_1,G_2 为群，$G_1\times G_2$ 为其外直积. 证明 $C(G_1\times G_2)=C(G_1)\times C(G_2)$.

5. 设 G 为群，$\forall x,y\in G$, $xyx^{-1}y^{-1}$ 为 x,y 的换位子，将 G 中所有换位子生成的子群成为 G 的换位子群，记为 G'，即 $G'=\langle xyx^{-1}y^{-1}\mid x,y\in G\rangle$. 证明
   (a) G 为交换群当且仅当它的换位子群为平凡群
   (b) $G'\trianglelefteq G$
   (c) 若 $G'\leq N\leq G$, 那么 $N\trianglelefteq G$.
   (d) 若 $G=S_n$, 证明 $S_n'\leq A_n$.

6. 设 $G=\{\begin{pmatrix} r & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mid r,s\in\mathbb{Q},\ r\neq 0\}$, $H=\{\begin{pmatrix} 1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mid s\in\mathbb{Q}\}$. 证明
   (a) G 关于矩阵乘法构成群
   (b) $H\trianglelefteq G$
   (c) $G/H\cong\mathbb{Q}^*$

7. 设 G 为区间 $[0,1]$ 上全部实值函数的全体，定义二元运算为函数间的加法，若 $N=\{f\in G\mid f(1/4)=0\}$，证明 G/N 同构于 $(\mathbb{R},+)$.

8. 设 N 是群 G 的正规子群，证明：若 $a\in G$ 为有限阶元素，则 $aN\in G/N$ 也是有限阶的，且其阶整除 a 在 G 中的阶.