- 第一章小测

  (1) 设$f_k,\, f$是$E\subset\mathbb{R}^n$上的实值函数，记$E_0:=\{x\in E;\ \lim\limits_{k\to+\infty}f_k(x)=f(x)\}$. 证明
  $$E_0=\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{j=1}^{+\infty}\bigcap_{k=j}^{+\infty}\{x\in E;\ |f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{m}\}.$$

  2. 设$E\subset\mathbb{R}^n,\quad x_0\in\mathbb{R}^n$.

     (1) 分别给出x_0是E的孤立点和极限点的定义.

     (2) 证明: 如果E的孤立点集不空,则为至多可数集.

     (3) 证明: 如果E的导集E'是至多可数集，则E是可数集.

  3. 证明:任何G_δ集可以表示成递减开集列的极限集.

- 第二章小测

  1. 分别叙述集合$E\subset\mathbb{R}^n$是若当可测和勒贝格可测的定义.
  2. 设$E\subset\mathbb{R}^n,\ m^*(E)>0$. 证明: $\exists\, x_0\in E,\ \forall\delta>0,\ m^*(E\cap B_\delta(x_0))>0$.
  3. 设可测集$E\subset\mathbb{R},\ m(E)>0$. 证明: $\exists\, x_1,\ x_2\in E,\ x_1-x_2\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$.
  4. 设$E\subset\mathbb{R}^n,\ m^*(E)<+\infty$, 且存在可测集$H\supset E$. 证明: $m(H)=m^*(E)$, 当且仅当$H\backslash E$的任意可测子集是零测度集.

- 第三章小测

  1. 设f是$E\subset\mathbb{R}^n$上的实值函数.

     (1) 写出f是E上可测函数的定义.

     (2) 证明f是E上可测函数，当且仅当$\forall\, G\subset\mathbb{R}$开集，$f^{-1}(G)$是可测集.

  2. 设$f,\, f_k, k=1,2,\cdots$是E上几乎处处有限的可测函数. 叙述$\{f_k\}$在E上几乎处处收敛于f，近一致收敛于f(见书第114 页注)和依测度收敛于f的定义，以及3种收敛之间的关系.
  3. 设$E\subset\mathbb{R}^n,\quad m(E)<+\infty,\ f$是$E$上几乎处处有限的可测函数. 证明$\forall\epsilon>0,\exists\, A\subset E,\ m(E\backslash A)<\epsilon,\ f$在$A$上有界.