BNU 2021 秋季学期近世代数期中考试

命题人： **整理人:$\boldsymbol{Aut}$**

一、设 $G=A_5, \tau=(12345)$.

(1) 证明 τ 与 τ^{-1} 共轭.

(2) $\forall g \in G$, 判断 g 与 g^{-1} 是否共轭, 并说明理由.

二、设 G 为域 F 上可逆上三角矩阵关于矩阵乘法构成的群, N 为域 F 上对角元为 1 的上三角矩阵的集合, K 为域 F 上对角矩阵的集合. 证明:

(1) $N \leqslant G,\ K \leqslant G$;

(2) $N \trianglelefteq G,\ G/N \cong K$.

三、设 $n \in \{51,52,53,54,55,56\}$. 证明: 不存在 n 阶非交换单群.

四、设 $N \trianglelefteq G$ 是 G 的真正规子群, $Z=\{xN | x \in G\}$. 定义

$$\begin{aligned} \circ:\ G \times Z &\longrightarrow Z \\ (g, xN) &\longmapsto g(xN)g^{-1} \end{aligned}$$

(1) 证明 $\circ$ 是不可迁的群作用;

(2) 对于 $G=A_4, N=K_4$, 求上述群作用的轨道个数.

五、设 $|G|=p^2q,\ p,q$ 为素数, $p^2<q$ 且 G 的 Sylow p-子群 $P \trianglelefteq G$, 证明 G 是交换群.

一、

设 $G=A_5,\tau=(12345)$.

(1) 证明 τ 与 τ^{-1} 共轭.

(2) $\forall g\in G$, 判断 g 与 g^{-1} 是否共轭, 并说明理由.

证明. (1) 取 $\sigma=(15)(24)\in A_5$, 则 $\sigma\tau\sigma^{-1}=\sigma(12345)\sigma^{-1}=(54321)=\tau^{-1}$.

(2) 答案是肯定的. 考虑 g 的阶 $o(g)$.

对于 $o(g)=1,2$, 均有 $ege^{-1}=g^{-1}=g$; 对于 $o(g)=3$, 由 $n\geqslant 5$ 时任一 3-循环的共轭类由全体 3-循环组成知 g 与 g^{-1} 共轭; 对于 $o(g)=5$, 类似 (1) 也有 g 与 g^{-1} 共轭.

断言: $o(g)$ 只可能为 $1,2,3,5$.

考虑 g 分解为不相交循环 (长度 >2) 的乘积. 若 g 只分解为 1 个循环, 则断言成立. 否则 g 至多分解为 2 个不相交循环的乘积, 此时 $o(g)=2$, 断言成立.

综上可知 $\forall g\in G$, g 与 g^{-1} 共轭. □

二、

设 G 为域 F 上可逆上三角矩阵关于矩阵乘法构成的群, N 为域 F 上对角元为 1 的上三角矩阵的集合, K 为域 F 上对角矩阵的集合. 证明:

(1) $N\leqslant G$, $K\leqslant G$;

(2) $N\trianglelefteq G$, $G/N\cong K$.

证明. (1) 按定义验证即可.

(2) 前者按定义验证即可, 后者考虑满同态 $f: G\longrightarrow K, A=(a_{ij})\longmapsto \mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$. 易证 $\ker f=N$, 由群同态基本定理即证. □

三、

设 $n\in\{51,52,53,54,55,56\}$. 证明: 不存在 n 阶非交换单群.

证明. $51=3\times 17$, $52=4\times 13$, $55=5\times 11$, 由 np $(n<p,(n,q)=1)$ 阶群只有一个 q 阶群知其非单.

53 是素数, 素数阶群是循环群, 从而是交换的.

$54=2\times 27$, 由 $2n$(n为奇数) 阶群有指数为 2 的正规子群知其非单.

对于 $56=2^3\times 7$, 若 G 的 Sylow 7-子群不是正规子群, 那么 $n_7=8$, 设为 $\{P_1,P_2,\cdots,P_8\}$,

由于 $P_i\bigcap P_j=\{e\},\forall i\neq j$, 此时其余元素有 $56-(7-1)\times 8=8$ 个, 它们组成 1 个 Sylow 2-子群, 它是正规的.

综上不存在 n 阶非交换单群 $(n\in\{51,52,53,54,55,56\})$. □

四、

设 $N \trianglelefteq G$ 是 G 的真正规子群, $Z=\{xN|x\in G\}$. 定义

$$\begin{aligned} \circ:\ G\times Z &\longrightarrow Z \\ (g,xN) &\longmapsto g(xN)g^{-1} \end{aligned}$$

(1) 证明 $\circ$ 是不可迁的群作用;
(2) 对于 $G=A_4, N=K_4$, 求上述群作用的轨道个数.

证明. (1) 按定义验证即可, 另外注意到 N 是不动点, 故不可迁.

(2) 因为 $[A_4:K_4]=3$, 我们断言 $Z=\{K_4, K_4(123), K_4(123)^{-1}\}$,
首先 $(123)\notin K_4$; 若 $K_4(123)=K_4(123)^{-1}$, 则 $(123)^2\in K_4$, 即 $(132)\in K_4$, 矛盾!
又 K_4 是不动点, 故轨道个数只可能为 2 或 3. 假设轨道个数为 2, 那么 G 在 $\{K_4(123), K_4(123)^{-1}\}$ 上的作用是可迁的. 考虑稳定化子 $H=(A_4)_{K_4(123)}\leqslant A_4$, 则 $|H|=6$, 但 A_4 没有 6 阶子群, 矛盾!
所以轨道个数为 3. □

五、

设 $|G|=p^2q$, p,q 为素数, $p^2<q$ 且 G 的 Sylow p-子群 $P\trianglelefteq G$, 证明 G 是交换群.

证明. (1) 由 Sylow 第三定理可知 $n_q=1$, 则 G 的 Sylow q-子群 $Q\trianglelefteq G$, 又 $P\bigcap Q=\{e\}$, 则

$$|PQ|=\frac{|P||Q|}{|P\bigcap Q|}=p^2q=|G|,$$

从而 $PQ=G$. 由于 P,Q 均为交换群, 考虑 $\forall a\in P, b\in Q$, 则 $aba^{-1}b^{-1}\in P\bigcap Q=\{e\}$, 即 $ab=ba$.
因此 G 是交换群. □