

北京师范大学 2023~2024 学年第一学期期中考试试卷 (A 卷)

课程名称: 数学分析 (1)

任课教师姓名: [REDACTED]

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭 卷

院(系): _____ 专业: _____ 年级: _____

姓 名: _____ 学号: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
成绩																

一、计算题 (共 50 分, 每题 5 分)

1. 用 $\varepsilon - N$ 定义证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 18}{3n^2 - n} = \frac{2}{3}$.

2. 用 $\varepsilon - \delta$ 定义证明极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$.

3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \sin(n!)}{n + 1}$.

4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right]$.

5. 判断函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 的连续性并说明理由, 若不连续, 说明间断点类型.

6. 求函数 $y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2} \right]$ 的导数.

7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$.

8. 已知 $f(x) = x^2 e^{ax}$, 其中 a 为常数, 求 $f^{(n)}(0)$.

9. 求不定积分 $\int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$, 其中 a, b 为常数, 且 $a^2 \neq b^2$.

10. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$.

二、证明题 (共 50 分, 每题 10 分)

11. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 有定义, $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ 为狄利克雷函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} D(x)f(x) = A$, 求证: $A = 0$.

12. 设 $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} (n \in \mathbb{N})$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

13. 设 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 能构成复合函数 $y = f[g(x)]$, 且函数 f 在 $u = b$ 点连续, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, 求证: $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$, 并利用此性质求下面数列的极限

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi \sqrt[n]{n}}{2} \right).$$

14. 设函数 f 在 $[a, b]$ 连续, $\forall x \in [a, b], \exists x_1 \in [a, b]$, 使得 $|f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$, 求证: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.

15. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim x$, $x_n = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)$. 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (a > 0)$.