拓扑学必过攻略

课程名称：拓扑学　　　　任课教师姓名：

卷面总分：100 分　考试时长：120 分钟　考试类别：闭卷 √　开卷 □　其他 □

院（系）：数学科学学院　专 业：数学与应用数学　年级：2012

姓 名：__________　学 号：__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

阅卷教师（签字）：__________

一、举例说明以下事实：（1）T_1空间不一定是 T_2空间；（2）拓扑空间中的紧致集合不一定是闭集；（3）连通空间不一定是道路连通空间.（18 分）

二、拓扑空间 X 的子集 B 称为 X 的一个**收缩核**是指存在连续映射 $r: X\to B$ 使得对 B 中每个 x 满足 $r(x)=x$；称 r 为 X 到 B 的***收缩映射***. 设 D 是 R^n 的收缩核，拓扑空间 Y 满足 T_4公理，A 是 Y 的闭子集. 证明连续映射 f: $A\to D$ 可扩张到 X 上.（提示：利用 Tietze 扩张定理.）（20 分）

三、设 d 是对角映射，$d: X\to X\times X$，$d(x)=(x, x)$，证明 X 是 Hausdorff 空间当且仅当 $d(X)$ 是 $X\times X$ 中的闭集.（20 分）

四、设 $S^n=\{x\in R^{n+1} : |x|=1\}$，$B^{n+1}=\{x\in R^{n+1} : |x|\le 1\}$，$X$ 是拓扑空间. 证明连续映射 $f: S^n\to X$ 零伦当且仅当 f 可以扩充为连续映射 $g: B^{n+1}\to X$.（16 分）

五、设 $B^n=\{x\in R^n : |x|\le 1\}$，证明 R^n/B^n 同胚于 R^n.（提示：定义 h: $R^1\to R^1$ 为，当 $t>1$ 时 $h(t)=t-1$，当 $t\in[-1,1]$ 时 $h(t)=0$，当 $t<1$ 时 $h(t)=t+1$；然后证明映射 f: $R^n\to R^n$，$x\to h(|x|)x$ 是商映射.）（18 分）$t<-1$.

六、证明从局部道路连通的单连通拓扑空间 X 到 S^1 只有一个映射同论 类.（8 分）

一、反例 (20)

1. 拓扑空间中有限点集一定是闭集？

2. 拓扑空间中紧致集合一定是闭集？

3. 拓扑空间中连通分支一定也是道路连通分支？

4. 度量空间一定是 C_2 空间？

二、(20) 设 $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}: |x|=1\}$，$B^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}: |x|\le 1\}$。拓扑空间 X 满足 T_4 公理，A 是 X 的闭子集。证明连续 $f: A\to S^n$ 可连续扩张到 A 的一个开邻域上。

三、(20) 设拓扑空间 X 可以写成两个非空开集 X_1 和 X_2 的并集，并且 $X_0=X_1\cap X_2$ 道路连通，证明 X 道路连通当且仅当 X_1 和 X_2 都道路连通。

四 (14) 证明有限维紧致拓扑流形可度量化。

五、(10) 设 X 与 Y 为拓扑空间，$CX=(X\times[0,1])/(X\times\{1\})$ 是 X 上拓扑锥，证明连续映射 $f: X\to Y$ 零伦 $\Leftrightarrow$ f 可连续扩张至 CX 上

六、(10) 证明若 x_0, x_1 在 X 的同一道路分支中，则从 x_0 到 x_1 的任一道路类决定相同的同构 $\Leftrightarrow$ $\pi_1(X,x_0)$ 是交换群。

七、(6) 选做：

(7.1) 设 $p: E\to B$ 是复叠映射，V 是 E 的道路连通子集，$U=p(V)$，假如包含映射 $i: U\to B$ 诱导的基本群同态 $i_*: \pi_1(U)\to\pi_1(B)$ 是平凡的，则 $p|_V: V\to U$ 是同胚映射。

(7.2) 设 $n\in\mathbb{N}_+$，证明 P^2 到 n 维环 T^n 的每个连续映射 f 零伦。

2013级 拓扑期末试卷。

2019-2020 秋季学期 拓扑

一、举例.（20）

1. 满足 T_4 公理的拓扑空间不一定是 Hausdoff 空间.

2. 可分空间不一定是 C_2 空间

3. 连通的度量空间不一定是道路连通拓扑空间

4. 同伦等价的两个拓扑空间不一定同胚.

二.（20）

设 $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid |x|=1\}$. 拓扑空间 X 满足 T_4 公理，A 是 X 闭子集。证明：连续映射 $f:A\to S^1$ 可以 ~~连续扩~~ 连续扩张到 A 的一个开邻域上（Tietze 扩张定理）

三、（20）

把 P^2 定义为 S^2 上粘合对径点所得到的商空间，

设 $f:S^2\to\mathbb{R}^4$ $(x,y,z)\mapsto(x^2-y^2,\ xy,\ xz,\ yz)$.

证明 $f(S^2)$ 同胚于 P^2.

四.（20）

证明有限维紧致拓扑流形可以度量化.

五（10）

对道路连通拓扑空间 X. $B^2=\{v\in\mathbb{R}^2\mid |v|\leq1\}\supset S^1$，证明 X 是单连通 $\Longleftrightarrow$ 任何连续映射 $f:S^1\to X$ 可以扩充为连续映射 $g:B^2\to X$.

六（10）选一 斯零伦.

6.1 $p:E\to B$ 复叠映射，X 连通，连续映射 $f:X\to B$ 零伦，证明 f 有提升，且每个

6.2 设 n 自然数，证明 P^2 到 n 维环面 T^n 每个连续映射零伦.

2020年拓扑学　　　老师

一、举例说明（18'）

1. T_3 不一定 T_2

2. 可分不一定 C_2

3. 连通不一定道路连通

二、（课本P50 T3）

设 D 是 E^n 的收缩核。X 满足 T_4 公理，A 是 X 的闭集。证明连续映射 $f: A \to D$ 可扩张到 X 上。　　（卷子上有收缩核定义，并提示使用Tietze扩张定理）

三、（课本P86 T7）

证明 $E^2/D^2 \cong E^2$

四、（课本P44 T12）

证明：如果 X 是 C_1 空间，并且它的序列最多只能收敛到一个点，则 X 是Hausdorff空间。

五、（课本P133 T4）

与道路连通空间同伦等价的拓扑空间也道路连通。

六、（课本P134 T16）

设 l 是 E^3 中一条直线，证明 $\pi_1(E^3 \setminus l)$ 是自由循环群

七、证明从道路连通且局部道路连通的拓扑空间 X 满足 $\pi_1(X)$ 是有限群，则任意连续映射 $f: X \to S^1$ 零伦。

出题规律分析：

1、每三年一轮，会有一定的题目类似，可以参考和自己考试年份模3等价年份的试卷。

2、Tietze扩张定理每年必考，基本是50页3道题3选1，送分必拿。

3、如果讲到复叠映射，考试题目全部是第2节内容，第2节3、4题是重中之重，后面会详细说明解法和注意事项，建议熟背，尽量理解。

反例汇总

1. f 一一且连续，f^{-1} 不连续：$f:[0,1)\to S^1$，$f(t)=e^{i2\pi t}$

2. T_1 但不 T_2：(R,τ_f)

3. T_4 但不 T_1, T_2, T_3：(R,τ) $\tau=\{(-\infty,a)\mid -\infty\le a\le +\infty\}$

4. 度量但不 C_2：(R,d) 离散拓扑空间 $d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\ne y\end{cases}$

   可分但不 C_2：(R,τ)，$\tau=\{U\setminus A\mid U$ 是 E^1 开集，$A\subset S$，S 是全体无理数$\}$

5. 紧致子集不闭：(R,τ_f) 取子集 $A=[0,1]$

6. T_3 但不 T_2：　　T_2 但不 T_3：把 τ 中的 S 换成 $\{\frac{1}{n}\mid n\in N_+\}$

7. T_4 不遗传：$X=\{a,b,c,d\}$ $\tau=\{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},X,\varnothing\}$ $Y=\{a,b,c\}$

8. 连通不道路连通：$X=A\cup B$，$A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\mid x\in(0,1)\}$ $B=\{(0,y)\mid y\in[-1,1]\}$

9. 连通但不局部连通：X ↑ 注：X 是度量空间，且是连通分支

10. 连通分支不一定开：X 是 E^1 中全体有理数构成的子空间

11. 道路连通但不局部道路连通：篦形子集 $X=\{(x,y)\mid x$ 是有理数或 $y=0\}$

12. 连续映射但不是开/闭映射：$id:(R,\tau_c)\to(R,\tau_f)$

13. 开映射不闭：$i:(0,1)\to E^1$；闭映射不开：$r: E^1\to[-1,1]$

    $r(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ x & |x|\le 1\\ -1 & x<-1\end{cases}$

14. 同伦等价但不同胚：$E^1\simeq E^2$

15. 有限点集不闭：(R,τ_c) 或构造 $X=\{a,b\}$ $\tau=\{\{a\},\{a,b\},\varnothing\}$

16. 局部连通但不连通 $X=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$　　$(0,1)\cup(1,2)$

17. T_3 但不 T_2：$X=\{0,1,2\}$ $\tau=\{\{0\},\{1,2\},X,\varnothing\}$

18-20 分的题，必背！

第五章经典题型

BEIJING NORMAL UNIVERSITY
Beijing 100875,P.R.China

(2012) 局部道路连通的单连通拓扑空间 X 到 S^1 只有一个映射同伦类

解: $\forall$ 连续映射 $f: X \to S^1$ 取复叠映射 $p: E^1 \to S^1$ 为 $p(t)=e^{i2\pi t}$

因为 X 单连通, 故可取它的平凡基本群 $\pi_1(X, x_0)$

记 $b_0 = f(x_0)$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ 则有 $f_\pi(\pi_1(X, x_0)) \subset H_{e_0}$

因为 X 局部道路连通, 由映射提升定理, 存在 f 的提升 $\tilde{f}: X \to E^1$

使得 $\tilde{f}(x_0) = e_0$ 因为 E^1 是凸集, $\tilde{f}$ 同伦于常值映射

所以 $f = p \circ \tilde{f}$ 同伦于常值映射 #

(2013) P^2 到 T^n 的每个连续映射同~~伦~~零伦

解: $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ 故只需证 $f_i: P^2 \to S^1$ 同伦于一常值映射

导出 $f_{i\pi}: \pi_1(P^2) \to \pi_1(S^1)$

参见 P_{153} $n \geq 2$ 时, $\pi_1(P^n) \cong Z_2$ $(Z/2Z)$

参见 P_{119} $\pi_1(S^1)$ 是自由循环群, 故 $\pi_1(S^1) \cong Z$ 没有2阶元素

故 $f_{i\pi}(\pi_1(P^2))$ 是 $\pi_1(S^1)$ 的平凡子群

由映射提升定理, 存在 f_i 的提升 $\tilde{f}_i$: ~~X~~ $P^2 \to E^1$

参考上一题, 有 $f_i = p \circ \tilde{f}_i$ 同伦于常值映射 g_i

故 f 同伦于常值映射 $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ #

两题区别: P^2 不是单连通的 共同点: 说明 $f_\pi(\pi_1(X)) \subset p_\pi(\pi_1(E^1))$

套路十分固定，题目的变化仅仅在怎么说明 $f_\pi(\pi_1(X)) \subset p_\pi(\pi_1(E^1))$

每个连续映射零伦 => 只有一个映射同伦类