

25 秋- 数学分析 3 期中（回忆版）

November 30, 2025

1. (10') 证明:

(a) $S \subset \mathbb{R}^n$ 的所有内点组成的点集 S° 必为开集;

(b) $S \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点的全体 ∂S 是闭集。

2. (10') 求下列极限

(a) $\lim_{x,y \rightarrow \infty} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

(b) 函数 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ 在 原点处的极限和两个累次极限。

3. (20') 求导数

(a) 函数 $z = xe^{2y}$ 在 $(1, 0)$ 处的沿从 $P = (1, 0)$ 到 $Q = (2, -1)$ 方向的方向导数;

(b) 向量值函数 $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + e^y \cos z \\ x^3 + y^3 \tan z \end{pmatrix}$ 的导数;

(c) 对于 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 v^2 \end{cases}$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. (10') 求函数 $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ 在有界闭区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 内的最大最小值点。

5. (10') 设 f 是有界开区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的一致连续函数, 证明

(a) 可以将 f 延拓到 D 的边界上, 即存在定义在 \bar{D} 上的连续函数 \tilde{f} , 使得 $\tilde{f}|_D = f$;

(b) f 在 D 上有界。

6. (10') 叙述二元函数的微分中值定理, 应用中值定理证明对函数 $f(x, y) = \sin x \cos y$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{3}{4} = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi\theta}{3} \cos \frac{\pi\theta}{6} - \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi\theta}{3} \sin \frac{\pi\theta}{6}.$$

7. (15') 定出正数 λ 使曲面 $xyz = \lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在某一点相切, 即有共同的切平面。

8. (15') 设 $D = (a, b) \times (-\infty, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$, $F(x, y)$ 在 D 上连续, 且 $\frac{\partial F}{\partial y} \geq m > 0$, 证明 $F(x, y) = 0$ 在 (a, b) 上存在唯一的连续解 $y = f(x)$ 。