北京师范大学2024-2025学年秋季学期期中考试试卷

课程名称: 常微分方程　　任课教师姓名:

卷面总分: 100分　　考试时长: 100分钟　　考试类型: 闭卷

院(系):　　专业:　　年级:

姓名:　　学号:

1.(40分) 求下列微分方程的通解:

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2-x+1, \quad x>0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y^2+3}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

2.(10分) 求解Clairaut方程

$$y=xp+f(p)$$

其中 $p=\frac{dy}{dx}, f''(p)\neq 0$。并证明Clariraut方程的特解在各点都有通解中的某一个解在该点与其相切。

3.(20分) 求解常系数线性微分方程组：

$$\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}2-x\\ 0\\ 1-x\end{pmatrix}$$

4.(15分) 考虑n阶齐次线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y,\quad a<x<b$$

已知 $A(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上连续。

(1) 证明：此方程组一定存在n个线性无关的解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$；

(2) 设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是此方程组的n个线性无关的解，证明：此方程组的任一解 $y(x)$ 均可以表示为

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x),$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为常数。

5.(15分)给定积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\phi(\xi)d\xi \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的已知连续函数，$K(x,\xi)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的已知连续函数，λ 为常数。证明：当 $|\lambda|$ 足够小时，$(*)$ 式在 $[a,b]$ 上存在连续解.