新世纪高等学校教材

数学与应用数学系列教材

复变函数论

北京师范大学数学科学学院 主编

邓 冠 铁 编著

北京师范大学出版集团
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论/ 邓冠铁编著. -北京:
北京师范大学出版社, 2013.3
(新世纪高等学校教材. 数学与应用数学系列教材)
ISBN 978-7-303-15899-7

I. ① 复··· II. ① 邓··· III. ① 复变函数–高等学校–教材 IV. O174.5
中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第016795 号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码: 100875
印 刷:
经 销: 全国新华书店
开 本: 170 mm × 230 mm
印 张: 11.5
字 数: 205 千字
版 次: 2013年3月第1版
印 次: 2013年3月第1次印刷
定 价: 23. 00 元

策划编辑: 岳昌庆 责任编辑: 岳昌庆 程丽娟
美术编辑: 毛 佳 装帧设计: 毛 佳
责任校对: 李 菡 责任印制: 孙文凯

前 言

1915年北京高等师范学校成立数理部, 1922年成立数学系, 2004年成立北京师范大学数学科学学院. 经过近百年的风风雨雨, 数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980年, 北京师范大学出版社成立, 给教材的出版提供了一个很好的契机. 北京师范大学数学科学学院教师编著的多数教材已先后在这里出版. 除《北京师范大学现代数学丛书》外, 就大学教材而言, 共有5种版本. 第1种是列出编委会的《高等学校教学用书》, 这是在1985年, 由我校出版社编写出版了1套(17部)数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下, 这一计划完全实现, 满足了当时教学的需要. 第2种是标注“高等学校教学用书”, 但未列编委会的教材. 第3种是《面向21世纪课程教材》. 第4种是《北京师范大学现代数学课程教材》. 第5种是未标注“高等学校教学用书”, 但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中, 除再次印刷外, 已经有多部教材进行了修订或出版了第2版.

2005年5月, 李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作, 由李仲来教授与北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商, 由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责), 准备对学院教师目前使用的, 或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版,另有一些教材需要重新编写. 计划用几年时间, 出版数学与应用数学系列教材、数学教育主干课程系列教材、大学公共课数学系列教材、数学学科硕士研究生系列教材, 共4个系列的主要课程教材.

由学院组织和动员全院在职和退休教师之力量, 主编出版数学一级学科4个系列的60余部主要课程教材. 教材编写涉及面如此之广和数量之大, 持续时间之长, 这在一所高校数学院系内是为数不多的, 其数量在中国数学界列全国第一. 经过8年的编写, 至今已经出版了50余部教材, 原计划的大多数教材已经出版, 对于学院来讲, 这是一件值得庆贺的大事. 现在可以说, 数学科学学院和北京师范大学出版社基本上是干成了一件大事. 这是很难圆满办成的一件大事. 剩下的一些教材在两三年内多数可以出版. 若留下缺憾, 则需要后人去补充.

从数量上看, 按教材系列, 出版数学与应用数学系列教材28部、数学教育主干课程系列教材9 部、大学公共课数学系列教材7部、数学学科硕士研究生系列教材10部. 按出版教材版次, 第1版21 部、第2版21部、第3版12部. 还出版了3部教辅教材.

从质量上看, 6部教材被评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材; 7部教材被评为普通高等教育本科“十二五”国家级规划教材; 7部教材被评为北京

市高等教育精品教材.《师范院校数学学科4个系列教材建设》项目获2012年北京师范大学教育教学成果一等奖.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考. 希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者, 提出宝贵的修改意见, 使其不断改进和完善. (李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院
2013-01-01

编著者的话

复变函数是高等学校理、工科普遍开设的一门数学基础课. 由于这门课在我校一般被安排在大学二年级第二学期开设, 所以只假定读者具备数学分析与高等代数等预备知识.

全书共分六章.第一章通过引入复数的两种方法, 介绍了复数列、级数和辐角. 用级数定义了指数函数等初等函数, 证明了Euler公式, 并利用它把复数的三角表示转化成书写简单的指数形式. 把平面中的一些定义、定理和函数等变成复平面的术语. 本章的大部分定理只需了解, 其证明不要求. 第二章中把数学分析中的微分和积分直接引入到复变函数中来, 建立复变函数的微积分基本理论. 多值函数的解析分支的学习是初学者遇到的一个难点, 特别是初等多值函数的解析分支. 为了解决这一难题, 本章把多值函数看成是一些函数的集合, 组成集合的这些函数看成分支. 本章第四节对解析分支的存在性给出了严格的证明, 并用具体例子说明如何使用这些定理, 使初学者在做一些初等多值函数解析分支的习题时, 有例子可以仿照, 推理时心中有据可依. 第三章把数学分析中的级数理论引入到复变函数中来, 解析函数的零点和孤立奇点的性质是解析函数特有的性质. 第四章介绍了孤立奇点的留数理论和应用留数理论计算各种定积分, 给出了某些亚纯函数的部分分式展式的实例. 第五章介绍了保形映射的几何理论, 对分式线性映射的性质作了详细论述, 给出了若干保形映射的实例, 介绍了单连通区域的Riemann 映射定理, 包括Schwarz 引理等解析函数的性质, 第五章最后一节用来证明Riemann 映射定理.第六章介绍了解析延拓和解析函数的无穷乘积的展式, 介绍了Γ-函数, Beta 函数和Riemann zeta 函数, 以及它们的无穷乘积的表示.

本书中*表示本节或定理的证明超出大学本科大纲要求. “□”表示“证毕”. 作者非常感谢北京师范大学数学科学学院的师生在本课程讲授和本书编写过程中所给予的支持和提出的非常有价值的意见. 此外, 作者也十分感谢国家自然科学基金和教育部博士点基金的支持, 感谢北京师范大学出版社为本书的编辑出版所做的大量工作. 限于本人学识水平, 本书中还难免存在错误和不妥之处, 恳请专家和读者不吝赐教指正.

编著者　邓冠铁 (denggt@bnu.edu.cn)

2012-12-01

符 号 表

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$	复平面
i	虚数单位
$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$	非负整数集
$\mathbb{N}^+=\{1,2,\cdots\}$	正整数集
$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathrm{Re}\ z$	复数 z 的实部
$\mathrm{Im}\ z$	复数 z 的虚部
$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$	复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数
$\mathbf{Arg}\ z$	复数 z 的辐角全体组成的集
$\mathbf{Ln}\ z$	复数 z 的对数全体组成的集
$D(a,r)$	以a为圆心, r为半径的开圆盘
$\partial D(a,r)$	以a为圆心, r为半径的圆周
∂E	集合 E 的边界
$\triangle_C \arg\ f(z)$	函数 $f(z)$ 沿分段光滑曲线 C的辐角增量
$\mathrm{Res}(f(z),a)$	函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 的留数
$\mathbb{C}_\infty$	扩充复平面(或扩充复数集)

目 录

第一章　复变函数

本章通过引入复数的两种方法, 介绍了复数列、级数和辐角. 用级数定义了指数函数等初等函数, 证明了Euler公式, 利用它把复数的三角表示转化成书写简单的指数形式. 把平面中的一些定义、定理和函数等拓扑术语变成复平面的术语, 介绍了曲线和连通性, 对Jordan定理的特殊情况给出了证明. 本章的大部分定理的证明与数学分析课程中的证明类似.

§1.1　复数、复数列和级数

从一维欧氏空间$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ 扩充到一个复数域通常有两个方法. 第一个方法是代数扩张方法, 由于二次方程$x^2+1=0$ 在实数范围内无解, 引入一个新元i, 称为虚数单位, 它不在$\mathbb{R}$ 中, 规定$\mathrm{i}^2=-1$. 把形如$z=x+\mathrm{i}y$ 的元称为复数, $x,y\in\mathbb{R}$, 分别称为复数$z=x+\mathrm{i}y$ 的实部和虚部. 记作$x=\mathrm{Re}\,z,\quad y=\mathrm{Im}\ z$. 当$\mathrm{Im}\,z=0$ 时, $z=\mathrm{Re}\,z+\mathrm{i}0=x$是实数; 当$\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z=0$时, $z=0+\mathrm{i}0=0$, 称复数z等于零; 当$\mathrm{Re}\,z=0$, 且$\mathrm{Im}\,z\neq 0$ 时, $z=\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\ z$称为纯虚数. 复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$相等, 是指它们的实部与实部相等, 虚部与虚部相等. 即$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$ 当且仅当$x_1=x_2,y_1=y_2$. 复数$x-\mathrm{i}y$称为复数$z=x+\mathrm{i}y$的共轭复数, 用$\overline{z}=x-\mathrm{i}y$表示复数$z=x+\mathrm{i}y$的共轭, $\sqrt{x^2+y^2}$ 称为z的模或长度, 记为$|z|$. 当$a\in\mathbb{R}$时, $\overline{a}=a$.

两个复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$和$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$的加法、减法分别定义为

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2);$$

乘法定义为

$$z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).\tag{1.1.1}$$

从而复数$z=x+\mathrm{i}\,y$和它的共轭复数$\overline{z}=x-\mathrm{i}y$的乘积$z\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$. 于是当$z=x+\mathrm{i}y\neq 0$时, 记$z^{-1}=\frac{x}{|z|^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{|z|^2}$, 有

$$z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2},\quad 和\quad zz^{-1}=z^{-1}z=1.$$

记$z^1 = z$, 当$n \geqslant 2$, 归纳定义$z^n = zz^{n-1}$, 当$z \neq 0$时, 定义$z^0 = 1$, 当$n \geqslant 2$, 归纳定义$z^{-n} = z^{-1}z^{-(n-1)}$. 两个复数$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$和$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \neq 0$的除法定义为

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.1.2}$$

$\frac{z_1}{z_2}$也可记作$z_1 \cdot z_2^{-1}$.

复数的运算满足下列运算律:

(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; (交换律)

(2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$; (结合律)

(3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$. (分配律)

在全体复数集上引进了上述一个代数结构后, 称为复数域, 记作$\mathbb{C}$, 它是由实数域$\mathbb{R}$通过添加一个虚数单位i扩张而得到的.

扩充到一个复数域的第二个方法是从一维欧氏空间扩充到二维欧氏平面, 在二维欧氏平面$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$中类似于(1.1.1) 引入乘法运算

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

引进上述运算后, 平面$\mathbb{R}^2$成为复数域$\mathbb{C}$. 记$\widetilde{\mathbb{R}} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, 则$\widetilde{\mathbb{R}}$是域$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$的一个子域. 映射$\widetilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$: $(x,0) \to x$是一个一一映射, 所以, 实数域$\mathbb{R}$是复数域$\mathbb{C}$的一个子域. 把$(x,0)$简写为x. $\mathbb{C}$中元素$(0,1)$满足

$$(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

令$\mathrm{i} = (0,1)$,于是有$\mathrm{i}^2 = -1$, $(0,y) = (0,1)(y,0) = \mathrm{i}y$. 复数$(x,y)$可表示成$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x + \mathrm{i}y$, 这样复数$z = x + \mathrm{i}y$是由它的实部$x$和虚部$y$构成的一对实数$(x,y)$唯一确定. 作映射$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 : z = x + \mathrm{i}y \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$, 于是就建立了$\mathbb{R}^2$平面上全体点与$\mathbb{C}$上全体复数间的一一映射, 把点$(x,y) \in \mathbb{R}^2$看作复数$x + \mathrm{i}y$, 也把复数$x + \mathrm{i}y$看作点. 所以复数域是平面中引入一个乘法后得到的. 以后我们对复数和平面上的点不加区别. 这样表示复数$x + \mathrm{i}y$的平面称为复平面(或$z-$平面), 仍用$\mathbb{C}$表示. 我们于是把平面的术语直接来描述复平面. 例如我们把复数和平面中的向量用作同义语. 复数$z = x + \mathrm{i}y$除了用复平面$\mathbb{C}$上的点来表示外, 还可以用$\mathbb{C}$上的自由向量(向量的起点可以是平面上的任意一点)来表示. 这个自由向量在实轴和虚轴上的投影分别为x和y. 如果起点是原点, 那么向量的终点的坐标与这个向量的坐标就一致. 由于一向量经过平移所得到的向量表示的是同一个复数, 那么$|z_1 - z_2|$在几何上表示点z_1与点z_2之间的距离. 实轴的正向

与非零向量$z = x + \mathrm{i}y$之间的夹角称为复数z的辐角(Argument), $z \neq 0$的辐角全体记作$\mathbf{Arg}\,z$. 对于任一给定复数$z \neq 0$的模$|z|$与辐角θ, 其实部和虚部可表示为$\mathrm{Re}\,z = |z|\cos\theta$, $\mathrm{Im}\,z = |z|\sin\theta$, 于是如图1,

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.1.3}$$

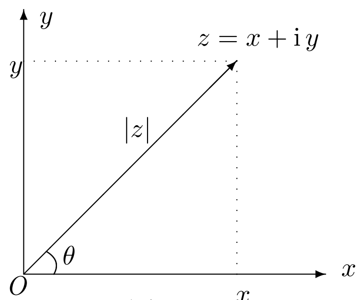

图 1

(1.1.3)称为复数z的三角表示式. 对于任一给定复数$z \neq 0$, 它的模$|z|$是唯一的, 其辐角有无穷多个, 其中任意两个相差2π的整数倍, 在这个集合中满足条件$-\pi < \theta \leqslant \pi$的有且仅有一个, 记作$\arg\ z$, 称之为$\mathbf{Arg}\,z$的主值, 或称之为$z$的主辐角. 所以复数$z$的辐角全体又可表示为

$$\mathbf{Arg}\,z = \{\arg\ z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.1.4}$$

它是一个集合. $\mathbf{Arg}\,z$的主值$\arg\ z$是由z唯一确定的. 例如在正、负实轴上复数辐角的主值分别为0, π; 在上、下半虚轴上复数辐角的主值分别是$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$; 一般主值$\arg\ z$可按如下公式确定

$$\arg\ z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x < 0, y \geqslant 0, \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

当$z = 0$时, $\mathbf{Arg}\,z$无意义.

设$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$为两个复数集, 则定义它们的和$\mathbf{A}+\mathbf{B}$为集合$\{a+b : a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$; 相减$\mathbf{A}-\mathbf{B}$为集合$\{a-b : a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$. 不难验证如下事实: 设$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \neq 0$, $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \neq 0$, 则

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

于是

$$\begin{cases}|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\\ \mathbf{Arg}\,(z_1z_2)=\mathbf{Arg}\,z_1+\mathbf{Arg}\,z_2.\end{cases}$$

即两复数乘积是这样一个复数: 模是这两个复数模的乘积, 辐角是这两个复数辐角的和加上2π的整数倍. 从几何上看, z_1z_2所表示的向量是把z_2所表示的向量沿逆时针方向旋转角度为$\arg z_1$, 向量z_2的模伸长$|z_1|$倍所得到的向量. 如$\mathrm{i}z$就是把z按逆时针方向旋转角度为$\frac{\pi}{2}$所得的向量. 同理由

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)),$$

推知

$$\begin{cases}\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\\ \mathbf{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}=\mathbf{Arg}\,z_1-\mathbf{Arg}\,z_2,\end{cases}$$

即两复数的商是这样一个复数: 模是这两个复数模的商, 辐角是这两个复数辐角的差. 说明z_1所表示的向量与z_2所表示的向量之间的夹角全体可用$\mathbf{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}$来表示.

复数$z=x+\mathrm{i}\,y$的模有如下几个重要不等式:

(1) $|x|=|\mathrm{Re}\ z|\leqslant|z|$,

(2) $|y|=|\mathrm{Im}\ z|\leqslant|z|$,

(3) $|z|\leqslant|\mathrm{Re}\ z|+|\mathrm{Im}\ z|$,

(4) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$(三角形两边之和大于第三边),

推广: $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$,

(5) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$ (三角形两边之差小于第三边).

例1.1.1 求$\mathbf{Arg}\,(-1+\mathrm{i})$与$\mathbf{Arg}\,(-7-11\mathrm{i})$.

解 由(1.1.4)式和(1.1.5)式, $\arg(-1+\mathrm{i})=\pi-\frac{\pi}{4}$, $\arg(-7-11\mathrm{i})=-\pi+\arctan\frac{7}{11}$, 所以

$$\mathbf{Arg}\,(-1+\mathrm{i})=\{-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi:k\in\mathbb{Z}\};$$
$$\mathbf{Arg}\,(-7-11\mathrm{i})=\{\arctan\frac{7}{11}+(2k-1)\pi:k\in\mathbb{Z}\}.$$

例1.1.2 设z_1,z_2是两个复数, 求证

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2).$$

证明

$$
\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\
&= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2). \qquad \square
\end{aligned}
$$

同理, 可得到如下平行四边形法则:

$$
|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2).
$$

即平行四边形的两对角线长度的平方和等于其四边长度平方和.

例1.1.3　设$a_k \in \mathbb{C}, b_k \in \mathbb{C}\,(k=1,2,\cdots,n)$. 求证

$$
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right). \tag{1.1.6}
$$

证明　对任意的$t \in \mathbb{C}$, 有

$$
|a_k - t\overline{b_k}|^2 = (a_k - t\overline{b_k})\overline{(a_k - t\overline{b_k})} = (a_k - t\overline{b_k})(\overline{a_k} - \bar{t}b_k) = |a_k|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{t}a_k b_k) + |t|^2|b_k|^2.
$$

对k求和得

$$
0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\bar{t}\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right) + |t|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2. \tag{1.1.7}
$$

当$\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2 = 0$时, 有$b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$,此时(1.1.6)式成立; 当$\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2 \neq 0$时, 令$t = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_k \setminus \sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2$代入(1.1.7)式, 得

$$
0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - \frac{2\mathrm{Re}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_k\right|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2} + \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_k\right|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2},
$$

整理得(1.1.6)式.　$\square$

定义1.1.4　设$z_n \in \mathbb{C}(n \in \mathbb{N}), \alpha \in \mathbb{C}$. 如果对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$, 当$n > N$时,有

$$
|z_n - \alpha| < \varepsilon, \tag{1.1.8}
$$

则称复数序列$\{z_n\}$收敛于点α. 记作$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$.

定理1.1.5 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n, \alpha = a + \mathrm{i}b$, 其中$a, b$ 和$x_n, y_n\,(n \in \mathbb{N})$ 为实数. 则$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

定义1.1.6 复数序列$\{z_n\}$称为Cauchy(柯西) 序列. 如果对任意的$\varepsilon > 0$,存在$N \in \mathbb{N}$, 当$n, m > N$时,有 $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

定理1.1.7 设$z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n$, 则复数序列$\{z_n\}$是 Cauchy序列的充分必要条件是$\{x_n\}, \{y_n\}$都是实Cauchy序列.

定理1.1.8 若复数序列$\{z_n\}$是Cauchy序列, 则$\{z_n\}$ 收敛.

证明 设$z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n \quad (n \in \mathbb{N})$, 则对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$,当$n, m > N$时,有$|z_n - z_m| < \varepsilon$, 从而有$|x_n - x_m| \leqslant |z_n - z_m| < \varepsilon$与$|y_n - y_m| \leqslant |z_n - z_m| < \varepsilon$. 即$\{x_n\}, \{y_n\}$都是实Cauchy序列. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, \alpha = a + \mathrm{i}b$, 由定理1.1.5, 有$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$. □

定义1.1.9 对于复数项的无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots, \tag{1.1.9}$$

令$s_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$(部分和). 若复数列$s_n (n \in \mathbb{N})$ 以有限复数s 为极限, 即若

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{1.1.10}$$

则称复数项无穷级数(1.1.9)收敛于s, 且称s 为级数(1.1.9)的和, 写成

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots;$$

若复数列$s_n (n \in \mathbb{N})$ 无有限极限, 则称级数(1.1.9)为发散.

定理1.1.10 设$\alpha_n = a_n + \mathrm{i}\,b_n \ (n \in \mathbb{N}), a_n$ 及b_n 为实数, 则复级数(1.1.9) 收敛于$s = a + \mathrm{i}\,b$ (a, b为实数)的充要条件为: 实级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 及$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$分别收敛于$a$及$b$.

定理1.1.11 复级数(1.1.9)收敛的充要条件为: 对任给$\varepsilon > 0$, 存在正整数$N = N(\varepsilon)$, 当$n > N$ 且p 为任意正整数时,

$$|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon.$$

特别, 取$p = 1$ 则必有$|\alpha_{n+1}| < \varepsilon$, 收敛级数的通项必趋于零, 即$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

显然, 收敛级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 的各项的绝对值组成的实数列$\{|\alpha_n|\}$必是有界的.

注　若级数(1.1.9) 中改变有限个项的值, 所得级数与原级数同为收敛或同为发散.

定理1.1.12　若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$收敛.

若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则称级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛; 非绝对收敛的收敛级数, 称为条件收敛.

注　级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ 的各项既为非负实数, 故它是否收敛, 可依正项级数的理论判定之.

定理1.1.13　(1)一个绝对收敛的复级数的各项可以任意重排次序, 而不改变其绝对收敛性, 亦不改变其和.

(2)两个绝对收敛的复级数$s=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n, s'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n'$, 则其Cauchy乘积

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_0\alpha_n'+\alpha_1\alpha_{n-1}'+\cdots+\alpha_n\alpha_0')=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}' \tag{1.1.11}$$

也绝对收敛, 且其和为ss'.

证明　只证(2). 设两个复级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n'$绝对收敛, 其和分别是$s$和$s'$, 于是两个正项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n'|$收敛, 设其和分别是$M$和$M'$. 设

$$\begin{aligned}&M_m=\sum_{n=0}^{m}|\alpha_n|,\quad M_m'=\sum_{n=0}^{m}|\alpha_n'|,\quad s_m=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n,\quad s_m'=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n',\\&\gamma_n=\alpha_0\alpha_n'+\alpha_1\alpha_{n-1}'+\cdots+\alpha_n\alpha_0'.\end{aligned}$$

则

$$\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\leqslant\sum_{n=0}^{m}(|\alpha_0\alpha_n'|+|\alpha_1\alpha_{n-1}'|+\cdots+|\alpha_n\alpha_0'|)\leqslant M_mM_m'\leqslant MM'.$$

于是级数(1.1.11) 绝对收敛. 设$T=M+2M'+1$, Γ_m是级数(1.1.11)前$m+1$项的和, 则对任意的$\varepsilon>0$, 存在N, 当$n>N$时, 有

$$M-M_n<\frac{\varepsilon}{T};\quad |s_n'-s'|<\frac{\varepsilon}{T}.$$

由于

$$\Gamma_m = \sum_{n=0}^{m} \gamma_n = \sum_{n+k\leqslant m} \alpha_n \alpha_k^{'} = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n s_{m-n}^{'},$$

从而当$m > 2N+1$时, 有

$$\begin{aligned} |\Gamma_m - ss'| &\leqslant |\Gamma_m - s_m s'| + |s'||s_m - s| = \left|\sum_{n=0}^{m} \alpha_n (s_{m-n}^{'} - s')\right| + |s'||s_m - s| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |\alpha_n||(s_{m-n}^{'} - s')| + \sum_{n=N+1}^{m} |\alpha_n||(s_{m-n}^{'} - s')| + |s'||s_m - s| \\ &\leqslant M_N \frac{\varepsilon}{T} + (M - M_{N+1})M' + M' \frac{\varepsilon}{T} < \varepsilon. \end{aligned}$$

于是级数(1.1.11)收敛且和是ss'. □

由于对任意复数z, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad 和 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2n)!}$$

收敛, 所以如下定义是合理的.

定义1.1.14 对任意复数z, 定义

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

$\mathrm{e}^z, \sin z$ 和$\cos z$ 分别称为指数函数、正弦函数和余弦函数.

当$z = x \in \mathbb{R}$时, 如上定义的三个函数就是通常数学分析定义的指数函数、正弦函数和余弦函数.

定理1.1.15

(1) (Euler (欧拉)公式) 对任意的复数z, 有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z. \tag{1.1.12}$$

(2) 对任意两个复数z_1, z_2, 有

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}. \tag{1.1.13}$$

证明 由于$\mathrm{i}^{2n}=(-1)^n$, 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos z+\mathrm{i}\sin z.\end{aligned}$$

这证明了(1.1.12). 由于

$$\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}$$

是级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}$和级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}$的Cauchy乘积的一般项, 所以由定理1.1.13, (1.1.13)成立. □

如果$z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, 则由Euler 公式有$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 等式$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$称为复数$z$的指数表示式. 当$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 0$时, 对于任意整数$m$, 有$z^m=|z|^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$. 当$|z|=1$, 取定$z$的辐角为$\theta$时, 由Euler公式得

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^m=\cos m\theta+\mathrm{i}\sin m\theta,$$

此公式称为De Moivre(棣莫弗)公式.

设$z\neq 0$为已给复数, 正整数$n\geqslant 2$, 定义$z^{\frac{1}{n}}$是满足$w^n=z$的复数w全体, 则得

$$z^{\frac{1}{n}}=\left\{\sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(\arg z+2k\pi)}:k\in\mathbb{Z}\right\},$$

其中$\sqrt[n]{|z|}$是一个正数, 满足$(\sqrt[n]{|z|})^n=|z|$. 由于$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(\arg z+2(n+k)\pi)}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(\arg z+2k\pi)}$, 所以$z^{\frac{1}{n}}$恰好有$n$个不同的值

$$z^{\frac{1}{n}}=\left\{\sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(\arg z+2k\pi)}:k=0,1,\cdots,n-1\right\}. \tag{1.1.14}$$

(1.1.14)中的n个n次根的模都是$\sqrt[n]{|z|}$, 因此它们都位于以原点为圆心,$\sqrt[n]{|z|}$为半径的圆周上. 由于相邻两根的辐角相差都是$\frac{2\pi}{n}$, 所以这n个点刚好把圆周分成n等份, 它们都是内接于圆的正n边形的顶点.

例1.1.16 求$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{4}}$与$(-8)^{\frac{1}{3}}$.

解 由于$\arg(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$, $\sqrt[4]{|1+\mathrm{i}|}=\sqrt[8]{2}$, $\arg(-8)=\pi$, $\sqrt[3]{|-8|}=2$, 所以

$$\begin{aligned}&(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{4}}=\left\{\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})\mathrm{i}}:k=0,1,2,3\right\};\\&(-8)^{\frac{1}{3}}=\left\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})}:k=0,1,2\right\}=\left\{1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad -2,\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}.\end{aligned}$$

§1.2 复平面的拓扑

由于$\mathbb{C}$ 是通过二维欧氏空间或平面$\mathbb{R}^2$引入乘法运算得到的, 我们可以把平面中的一些术语、定义和定理借来, 变成复平面相应的术语、定义和定理. 设$a \in \mathbb{C}, r > 0$, 则称集合$\{z : |z-a| < r\}$ 为以点a为中心, 以r为半径的圆盘, 记作$D(a,r)$. 特别当$a=0$, $r=1$时, $D(0,1)=\{z:|z|<1\}$称为单位圆盘. $D(a,r)$也称为点a的一个r邻域, 或者简称为点a的邻域. 称集合$D(a,r)\setminus\{a\} = \{z : 0 < |z-a| < r\}$为点$a$的空心邻域, 记作$D^\circ(a,r)$. 设$E\subset\mathbb{C}$, 其直径记作diam E, 定义为: $\mathrm{diam}\ E=\sup\{|z_1-z_2| : z_1,z_2\in E\}$. 设$E,F$是任意两个集合, E,F间的距离定义为$d(E,F)=\inf\{|z_1-z_2| : z_1\in E, z_2\in F\}$. 如果$E=\{a\}$是一个单点集, 那么点$a$与$F$间的距离为$d(a,F)=\inf\{|a-z| : z\in F\}$. 利用邻域的定义, 可将复平面$\mathbb{C}$上的点进行分类. 设$a\in\mathbb{C}$, 如果存在$r>0$, 使得$D(a,r)\subset E$, 那么称点$a$为集$E$的内点; 如果对任意的$r>0, D(a,r)\bigcap E$中有无穷个点, 那么称点$a$为集$E$的聚点或极限点. 集$E$的极限点可以属于集$E$, 也可以不属于集$E$; 如果对于任意的$r>0, D(a,r)\bigcap E\neq\varnothing, D(a,r)\bigcap E^c\neq\varnothing$, 那么称点$a$为集$E$的边界点. 边界点可以属于集$E$, 也可以不属于集$E$; 如果存在$r>0$, 使得$D(a,r)\bigcap E=\{a\}$, 点$a$为集$E$的边界点, 但非集$E$的聚点, 那么称点$a$为集$E$的孤立点; 如果存在$r>0$, 使得$D(a,r)\subset E^c$, 那么称点$a$为集$E$的外点. 外点不属于集$E$. 如果集$E$的点皆为内点, 那么称集$E$为开集; 如果集$E$的每个聚点都属于集$E$, 那么称集$E$为闭集; 集$E$的全部边界点所组成的集合称为集$E$的边界, 记作$\partial E$; $E\bigcup\partial E$称为集E的闭包, 记作$\overline{E}$; 集E的所有极限点组成的集合, 称为集E的导集, 记作E'; 显然, $\overline{E}=E\bigcup E'$以及E是一个闭集的充要条件是$E=\overline{E}$. 如果存在$r>0$, 使得$D(a,r)\supset E$, 那么称集E为有界集; 否则称集E为无界集.

定理1.2.1 (Cantor(康托)定理) *设$F_n\subset\mathbb{C}(n\in\mathbb{N})$为闭集列, 满足$F_0\supset F_1\supset\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{diam}\ F_n=0$, 则$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F_n$是单点集.*

这个定理是实数域中的区间套定理在复数域中的推广.

证明* 对任意的$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$, 当$n,m>N$ 时, 有$z_n,z_m\in F_N$, 从而有$|z_n-z_m|\leqslant\mathrm{diam}\ F_N<\varepsilon$. 即$\{z_n\}$是Cauchy序列. 由定理1.1.12, 存在$\alpha$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\alpha$. 固定$k\in\mathbb{N}$, 当$n>k$时, 有$F_n\subset F_k$. 即$\{z_n\}_k^\infty\subset F_k$. 已知$F_k$是闭集, 所以$\alpha\in F_k$. 于是, $\alpha\in\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F_n$. 假如$\beta\in\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F_n$, 则$\alpha,\beta\in F_n(n\in\mathbb{N})$, 由此可知,

$$|\alpha-\beta|\leqslant\mathrm{diam}\ F_n\to0(n\to\infty).$$

即$\alpha=\beta$. 这就是说$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F_n$是一个单点集. □

下面引进$\mathbb{C}$中的集合的更重要的一个特性:紧性. 设点集$E\subset\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$是一个开集族, 我们称$\mathcal{F}$是集合E的一个开覆盖, 就是说E中的每一点至少属于$\mathcal{F}$中的某一开集. 我们称点集E具有有限覆盖性质, 是指从E的任意一个开覆盖中必能选出有限个开集$G_1,G_2,\cdots,G_n$, 覆盖E, 即$E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_k$.

例如: 设E是一个点集, 则集族$\mathcal{F}=\{D(z,r):z\in E,0<r\in\mathbb{R}\}$ 是E的一个开覆盖.

定义1.2.2 *具有有限覆盖性质的集E称为紧集.*

例如: 空集与有限点集都是紧集. 单位圆盘$D(0,1)=\{z:z\in\mathbb{C},|z|<1\}$不是紧集, 这是因为$G_n=\{z:|z|<1-\frac{1}{n+1}\}(n\in\mathbb{N})$是$D(0,1)$的一个开覆盖, 但从中找不到有限个开覆盖.

定理1.2.3 (Heine−Borel(海涅−博雷尔)定理) *设$E\subset\mathbb{C}$, 则E是有界闭集的充要条件是E为$\mathbb{C}$中的紧集.*

证明*　**充分性** 设E为$\mathbb{C}$中的紧集. 如果$a\notin E$, 则集族$\mathcal{F}=\{D(z,\frac{|z-a|}{2}):z\in E\}$ 是E的一个开覆盖, 于是存在有限个$z_1,z_2,\cdots,z_n\in E$使得

$$\left\{D\left(z_k,\frac{|z_k-a|}{2}\right):k=1,2,\cdots,n\right\}$$

是E的一个开覆盖, 设$\delta=\frac{1}{2}\min\{|z_k-a|:k=1,2,\cdots,n\}$, 则有$\delta>0$, 且$D(a,\delta)$与$\{D(z_k,\frac{|z_k-a|}{2}):k=1,2,\cdots,n\}$中任意一个圆盘不相交, 于是$D(a,\delta)$ 与E不相交, 从而a 不是E的聚点. 所以E的每个聚点都属于集E, 从而E是闭集. 集族$\mathcal{F}=\{D(b,1):b\in E\}$ 是E的一个开覆盖, 于是存在有限个$b_1,b_2,\cdots,b_m\in E$使得$\{D(b_k,1):k=1,2,\cdots,m\}$ 是E的一个开覆盖, 所以E是有界的.

必要性 (反证法) 设E不是紧集, 即存在E的一个开覆盖$\mathcal{F}$, 但$\mathcal{F}$中不存在E的有限子覆盖. 已知E是有界集, 所以一定存在边长为$2M$的闭正方形$Q_0=\{(x,y):|x|\leqslant M,|y|\leqslant M\}$, 使得$E\subset Q_0$, 把这个正方形分成相等的四个小正方形, 则其中必有一个小正方形, 记作Q_1, 它满足:

(1) $Q_1\bigcap E$是有界闭集.

(2) 在$\mathcal{F}$中不存在$Q_1\bigcap E$的有限子覆盖.

再把Q_1分成相等的四个小正方形,则其中必有一个小正方形, 记作Q_2, 它也满足上述两条性质. 将这个过程无限地进行下去, 得到一列闭正方形$\{Q_n\}$, 令$F_n=Q_n\bigcap E$, 则F_n满足:

(3) F_n是有界闭集;

(4) $F_n \supset F_{n+1}(n \in \mathbb{N})$;

(5) 在$\mathcal{F}$中不存在F_n的有限子覆盖;

(6) diam $F_n \leqslant \frac{M}{2^n}\sqrt{2} \to 0(n \to \infty)$.

由Cantor定理, 存在复数α, 使得$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n = \{\alpha\}$. 由于$F_n \subset E$, 所以$\alpha \in E$, 于是在$\mathcal{F}$中必有一个开集$G_0$, 使得$\alpha \in G_0$, 由于$\alpha$是$G_0$的内点, 所以总存在点$\alpha$的某一个邻域$D(\alpha, \varepsilon) \subset G_0$, 由于diam $F_n \to 0(n \to \infty)$, 于是存在N, 当$n \geqslant N$时, $F_n \subset D(\alpha, \varepsilon) \subset G_0$, 即用$\mathcal{F}$中的一个开集$G_0$就覆盖了$F_n(n \geqslant N)$, 这与(5)矛盾. □

定理1.2.4 (Bolzano−Weierstrass(波尔查诺−魏尔斯特拉斯)定理) *任意有界无穷点集至少有一个极限点. (或任意有界序列至少有一个收敛的子序列.)*

证明* 设E是一个有界无穷集, 如果E没有极限点, 则$E = \overline{E}$, 即E是一个有界闭集, 由定理1.2.3, E是一个紧集. 对任意的$z \in E$, 存在$D(z, \varepsilon_z)$, 使得$D(z, \varepsilon_z) \bigcap E = \{z\}$. 集族$\mathcal{F} = \{D(z, \varepsilon_z) : z \in E\}$ 为E的一个开覆盖. E是一个紧集, 所以总可以从$\mathcal{F}$中选出有限个圆盘

$$D(z_1, \varepsilon_1), D(z_2, \varepsilon_2), \cdots, D(z_n, \varepsilon_n)$$

覆盖E, 即E是一个有限点集, 这与E是一个无穷点集的假设矛盾, 所以E必有极限点. □

一般, 如果E是紧集, 则E中任意点列, 必有收敛的子列, 且收敛于E中一点.

定理1.2.5 *设E是紧集, F是闭集, 且$E \bigcap F = \varnothing$, 则存在$a \in E$, $b \in F$ 使得$d(E, F) = |a - b| > 0$.*

证明* 由$d(E, F)$的定义, 存在$a_n \in E, b_n \in F$使得$|a_n - b_n| \to d(E, F)$, $n \to \infty$. 由于E是紧集, 它是有界闭集. $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$必有收敛的子列$\{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, 且收敛于$E$中一点$a$, $\{b_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 是有界列, 必有收敛的子列$\{b_{n_{k_j}} : j \in \mathbb{N}\}$, 且收敛于$F$中一点$b$, 于是有

$$|a_{n_{k_j}} - b_{n_{k_j}}| \to d(a, b), \quad j \to \infty.$$

所以就有$d(E, F) = |a - b| > 0$. □

例1.2.6 求证: 点集E的边界∂E是闭集.

证明 设z为∂E的聚点, 则对任意的$\varepsilon > 0$, 在点z的ε邻域$D(z, \varepsilon)$内存在点$z_0 \neq$

z, 使得$z_0 \in \partial E$. 于是存在$\varepsilon' = \varepsilon - |z - z_0| > 0$, 使得$D(z_0, \varepsilon') \subset D(z, \varepsilon)$, 由于$z_0 \in \partial E$, 所以在$D(z_0, \varepsilon')$内存在属于$E$的点和不属于$E$的点, 于是在$D(z, \varepsilon)$内存在属于$E$的点和不属于$E$的点. 故$z \in \partial E$, 所以$\partial E$是闭集. □

例1.2.7 起点为z_1, 终点为z_2的有向线段记为$[z_1, z_2]$, 它的参数方程为

$$[z_1, z_2]: \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

例1.2.8 过z_1, z_2两点, 方向为从z_1到z_2的有向直线L的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

有$(z - z_1)\overline{z_2 - z_1} = t|z_2 - z_1|^2$. 如图2.

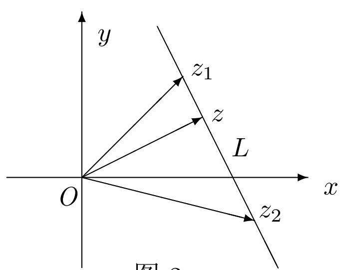

图 2

设直线L的法向量是$B = a + \mathrm{i}\,b$ $(\neq 0, a, b \in \mathbb{R})$, 则向量$B$ 与向量$z_2 - z_1$垂直, 而$\mathrm{Re}\, B\overline{z_2 - z_1}$是向量$B$与向量$z_2 - z_1$这两个复数所表示的向量的内积, 它等于$\frac{1}{2}(B\overline{z_2 - z_1} + \overline{B}(z_2 - z_1))$. 所以直线$L$的方程表达式是$B\overline{z - z_1} + \overline{B}(z - z_1) = 0$,或

$$\overline{B}z + \overline{z}B + 2C = 0, \tag{1.2.1}$$

其中$B = a + \mathrm{i}\,b$ 是复数, $2C = -B\overline{z_1} - \overline{B}z_1$是实数. 利用平面实数坐标$(x, y)$, 直线$L$的方程表达式是

$$ax + by + C = 0, \tag{1.2.2}$$

方程(1.2.1)和方程(1.2.2)是直线L的方程两种表达形式, 一个是用复数表达, 而另一个是用实数表达.

例1.2.9 关于圆周的方程. 首先建立圆周的参数方程, 设圆周$\partial D(z_0, R)$的圆心是$z_0 = a + \mathrm{i}\,b$, 半径是R. 如图3.

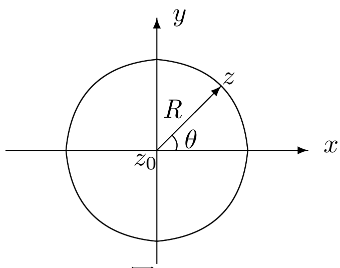

图 3

对于圆周$\partial D(z_0,R)$上任一点$z=x+\mathrm{i}\,y$, 有

$$\begin{cases} x=a+R\cos\theta, \\ y=b+R\sin\theta, \end{cases} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

于是圆周$\partial D(z_0,R)$的参数方程为

$$z=(a+R\cos\theta)+\mathrm{i}(b+R\sin\theta)=a+\mathrm{i}b+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

圆周$\partial D(z_0,R)$方程的复数形式表示为$|z-z_0|=R$, 即$|z-z_0|^2=R^2$ 或$(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=R^2$. 于是以$z_0$为圆心, R为半径的圆周又可表示为

$$z\overline{z}-\overline{z_0}z-z_0\overline{z}+|z_0|^2-R^2=0.$$

反之, 方程

$$Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0 \tag{1.2.3}$$

表示一个圆, 其中$A,C\in\mathbb{R}$, 且$A\neq 0, B\in\mathbb{C}, |B|^2-AC>0$.

这是因为(1.2.3)可改写成

$$z\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}z+\frac{B}{A}\overline{z}+\frac{C}{A}=0, \quad \text{或改写成} \quad \left(z+\frac{B}{A}\right)\left(\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}\right)=\frac{|B|^2-AC}{A^2},$$

即

$$\left|z-\left(-\frac{B}{A}\right)\right|=\frac{\sqrt{|B|^2-AC}}{|A|}.$$

因此(1.2.3)式表示一个以$-\frac{B}{A}$为圆心, $R=\frac{\sqrt{|B|^2-AC}}{|A|}$为半径的圆周.

结合例1.2.8和例1.2.9, 我们得到直线和圆周的方程可统一地表示为方程

$$Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0, \tag{1.2.4}$$

其中$A,C\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{C}, |B|^2-AC>0$. 当$A=0$时, (1.2.4)式为直线方程; 当$A\neq 0$时, (1.2.4)式为圆周方程.

§1.3　复球面与扩充复平面

为了今后讨论问题的需要, 我们需要在复平面中引进一个新“数”∞. 为了说明新数的合理性, Riemann首先引进了复数在球面上的几何表示. 在三维空间$\mathbb{R}^3$中考虑单位球面$S=\{(x,y,u)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+u^2=1\}$, 球面上的定点$N(0,0,1)$称为北极, 如图4.

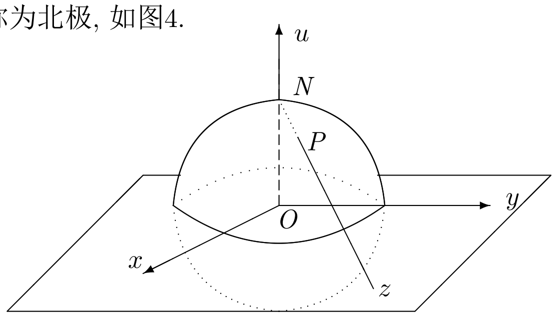

图4

复数$z=x+\mathrm{i}\,y$可看作$\mathbb{R}^3$中的点$z(x,y,0)$. 作连接N与$z-$平面上任一点$z(x,y,0)$的直线, 设此直线与球面S的交点是$P(x',y',u')\neq N(0,0,1)$. 若$|z|<1$, 则点P在下半球面上; 若$|z|>1$, 则点P在上半球面上; 若$|z|=1$, 则点P与点z重合.

反之, 作连接球面上的点$P(x',y',u')\neq N(0,0,1)$与北极$N(0,0,1)$的直线, 此直线与复平面交于一点$z(x,y,0)$, 这样在复平面$\mathbb{C}$与$S\setminus\{N\}$之间建立了一个双射, 并且当$|z|\to\infty$时, 点$z(x,y,0)$的对应点$P(x',y',u')\to$点$N(0,0,1)$. 于是, 我们自然会想到在$\mathbb{C}$中引进一个理想点, 称为无穷远点, 记作$z=\infty$. 它与点N对应, 添加∞点的复平面称为扩充复平面, 记作$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 注意：$\infty$点没有辐角.于是, 在球面$S$与扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$(或扩充复数集$\mathbb{C}_\infty$)之间建立了一个双射. 这样的球面$S$称为复球面或Riemann(黎曼)球面.下面给出上述对应的具体表达式.

首先由复平面上的点$z(x,y,0)$, 求出球面上的对应点$P(x',y',u')$. 由于点$z(x,y,0)$与点$P(x',y',u')$及点$N(0,0,1)$ 共线, 从而有

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{-1}{u'-1},$$

于是有$z=x+\mathrm{i}y=(x'+\mathrm{i}y')(1-u')^{-1}$, 从而

$$|z|^2=z\overline{z}=\frac{(x')^2+(y')^2}{(1-u')^2}=\frac{1-(u')^2}{(1-u')^2}=\frac{1+u'}{1-u'},$$

解得$u'=(|z|^2-1)(|z|^2+1)^{-1}$, 于是得

$$x'=\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1},\quad y'=\frac{z-\overline{z}}{\mathrm{i}(|z|^2+1)},\quad u'=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \tag{1.3.1}$$

(1.3.1)式就是球面上对应点$P(x',y',u')$的计算公式.

反之, 由球面上的点$P(x',y',u')$可求出复平面上对应的点$z(x,y,0)$. 由(1.3.1)式推出

$$x'+\mathrm{i}y'=\frac{2z}{1+|z|^2},\ 1-u'=\frac{2}{1+|z|^2},$$

于是得

$$z=\frac{x'+\mathrm{i}y'}{1-u'}. \tag{1.3.2}$$

(1.3.2)式就是复平面上对应点的计算公式.

由上述公式(1.3.1)和(1.3.2)可知, 球面上一圆周经球极射影到复平面上$\mathbb{C}$上也是一个圆周. 事实上：设球面上的圆周方程为

$$\begin{cases} x'^2+y'^2+u'^2=1, \\ a_1x'+a_2y'+a_3u'=a, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

其中$a_1,a_2,a_3,a\in\mathbb{R}$,且满足

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,\quad |a|<1.$$

将球面上的对应点公式(1.3.1) 代入(1.3.3)式中第二式得

$$a_1\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}+a_2\frac{z-\overline{z}}{\mathrm{i}(|z|^2+1)}+a_3\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}=a,$$

化简得

$$Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0, \tag{1.3.4}$$

其中$A=a_3-a,C=-a_3-a$为实数, $B=a_1+\mathrm{i}\,a_2$为复数, 且$|B|^2-AC=a_1^2+a_2^2+a_3^2-a^2=1-a^2>0$. 所以方程(1.3.4)表示$\mathbb{C}$上一个圆周. 当$a=0$时方程(1.3.3)表示球面$S$上的一个最大圆周, 它在复平面$\mathbb{C}$的球极射影中系数满足: $A+C=-2a=0$. 如果球面S上的圆周过北极$N(0,0,1)$, 就有$a_3=a$. 这时它的球极射影为$\mathbb{C}$上一直线:

$$(a_1+\mathrm{i}a_2)\overline{z}+\overline{(a_1+\mathrm{i}a_2)}z-2a=0. \tag{1.3.5}$$

于是我们将平面上的直线称为半径为∞ 的圆周.

反之, 复平面$\mathbb{C}$上一圆周经球极射影到球面S上仍为一圆周.

事实上: 设复平面$\mathbb{C}$上圆周方程为

$$Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0, \tag{1.3.6}$$

其中$A,C\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{C},\ |B|^2-AC>0$. 将(1.3.2) 和$|z|^2=\frac{1+u'}{1-u'}$,代入(1.3.6)得

$$A\frac{1+u'}{1-u'}+\overline{B}\frac{x'+\mathrm{i}y'}{1-u'}+B\overline{\left(\frac{x'+\mathrm{i}y'}{1-u'}\right)}+C=0,$$

化简得

$$(B+\overline{B})x'+\mathrm{i}(\overline{B}-B)y'+(A-C)u'=-A-C, \tag{1.3.7}$$

其中$B+\overline{B},\ \mathrm{i}(\overline{B}-B),\ A-C,\ -A-C$ 均是实数, 所以方程(1.3.7)表示一个平面. 将平面方程(1.3.7)的法向量单位化后就是(1.3.3)式中的第二个方程, 所以平面(1.3.7)必与球面S相交, 其交线为球面S上的一个圆周. 若$A+C=0$,则$a=0$.于是, 圆周$Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$是球面$S$上最大的圆周的球极射影, 反之也成立. 若$A=0$, 则$a_3=a$, 说明复平面$\mathbb{C}$上的直线是球面$S$上过北极$N(0,0,1)$的圆周的球极射影.

现在我们就可以在扩充复平面上定义两点间的距离,设$z_1,z_2\in\mathbb{C}_\infty$, 在球面$S$上的球极射影点分别为$P_1(x_1,y_1,u_1),P_2(x_2,y_2,u_2)$, 则$z_1,z_2$两点间的距离定义为$P_1(x_1,y_1,u_1),P_2(x_2,y_2,u_2)$在$\mathbb{R}^3$ 中的欧氏距离, 即

$$d_s(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(u_1-u_2)^2}. \tag{1.3.8}$$

(1.3.8)式我们有时也称为点z_1与点z_2间的球面距离. 由(1.3.8)式得

$$[d_s(z_1,z_2)]^2=2-2(x_1x_2+y_1y_2+u_1u_2). \tag{1.3.9}$$

将(1.3.1)式代入(1.3.9)式得

$$[d_s(z_1,z_2)]^2=\frac{4(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}}{(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)},$$

于是(1.3.8)式又可表示为

$$d_s(z_1,z_2)=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)}}.$$

设$z\in\mathbb{C}$在S上的球极射影为$P(x,y,u)$, 而$z=\infty$在S上的球极射影是$N(0,0,1)$, 同理可得

$$d_s(z,\infty)=\sqrt{x^2+y^2+(u-1)^2},$$

即

$$[d_s(z,\infty)]^2=x^2+y^2+(u-1)^2. \tag{1.3.10}$$

将(1.3.1)式代入(1.3.10)式得

$$[d_s(z,\infty)]^2 = \frac{4}{|z|^2+1},$$

于是就有

$$d_s(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

无穷大与无穷远点可用作同一语, 称集合$\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > r\}$ 为扩充复平面上的无穷远点$z=\infty$的邻域, 记作$D(\infty, r)$. 称集合$\{z : r < |z| < +\infty\}$为无穷远点$z=\infty$的空心邻域, 记作$D^\circ(\infty, R)$. 正常的复数与复平面上的点称为有限复数与有限点, 本书中除特别声明外, 只考虑有限复数.

设a为有限复数, 对于∞, 作如下规定:

称复数序列$\{z_n\}$收敛于∞. 如果对任意的$R>0$,存在$N \in \mathbb{N}$, 当$n > N$时,有$|z_n| > R$, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 其几何意义是: 当$n > N$时, 点$z_n$全部落在$\infty$点的邻域$D(\infty, R)$内.

(1) 复数∞的实部、虚部及辐角都无意义, 模$|\infty| = +\infty$.

(2) 对于任意一个有限复数z,有$|z| < +\infty$.

(3) 对$a \in \mathbb{C}$, 有$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$.

(4) 对$a \in \mathbb{C}_\infty, a \neq 0$, 有$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$.

(5) 对$a \in \mathbb{C}$, 有$\frac{a}{\infty} = 0$. 对$a \in \mathbb{C}, a \neq 0$, 有$\frac{a}{0} = \infty$ $\frac{\infty}{a} = \infty$.

(6) $\infty \pm \infty$; $0 \cdot \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$都无意义.

推论1.3.1 *若$E \subset \mathbb{C}_\infty$是闭集, 则$E$为$\mathbb{C}_\infty$中的紧集.*

证明 如果E是有界集, 则由定理1.2.3可知结论成立. 如果E是无界集, 已知E是闭集, 所以$\infty \in E$, 设$\mathcal{F}$是E的一个开覆盖, 于是在$\mathcal{F}$中存在开集G_0, 使得$\infty \in G_0$, 由于$E \backslash G_0$是有界闭集, 由定理1.2.3, 从$\mathcal{F}$中可选出有限个$G_1, G_2, \cdots, G_n$, 覆盖$E \setminus G_0$, 于是就有$E \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n} G_k$. □

§1.4　复变函数、曲线和连通性

设集合$E, G \subset \mathbb{C}$, 如果对每一个$z \in E$, 按照一规则使G中有唯一的复数值w与之对应, 则称在E上确定一单值函数f, 记为$f : E \to G$, 或记作$w = f(z)$. 如果对每一个$z \in E$, 按照一规则使G中有多个复数值w与之对应, 则称在E上确定一多值函数$\mathbf{F}$, 记为$\mathbf{F} : E \to G$, 或记作$\mathbf{w} = \mathbf{F}(z)$. 对于单值函数来说, $\mathbf{f}(z)$与$f(z)$ 是不加区分的. “函数”着重于说明复数与复数之间的关系, 有时为了说明点(或向量)与点(或向量)的对应关系, 函数也称为**映射**. 今后, 除非特别声明, 所讨论的函数总是指单值函数. 为了方便, 把函数$w = f(z)$的实部$u(z)$和虚部$v(z)$写出来, 有$w = f(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ 或$w = f(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y), z \in E$, 其中$u(x, y), v(x, y)$是两个二元实值函数. E称为f的定义域, 点集$f(E) = \{f(z) : z \in E\}$为$f$的值域.

复变函数f也称为映射或映照. 我们称复平面$\mathbb{C}$为$z-$平面, 把点集$f(E) = \{f(z) : z \in E\}$ 表示在复平面w上.于是, 映射$w = f(z)$把$z-$平面上的点集E映射为w平面上的点集$f(E)$. 与z对应的点$w = f(z)$称为点z在映射f下的像点, 同时z称为点$w = f(z)$的原像. 点集$f(E)$ 称为点集E在映射f下的像集. 如果F是复数集, 集$\{z \in E : f(z) \in F\}$称为F的原像集, 记为$f^{-1}(F)$.

例如指数函数和三角函数$\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z$ 是$\mathbb{C}$中的函数, 辐角函数$\mathbf{Arg}\, z$是$\mathbb{C} \setminus \{0\}$中的多值函数.

数学分析中的极限与连续的概念, 可以类似地推广到复变函数中来. 首先引入复变函数极限的概念.

定义1.4.1 *设函数$f(z)$在点集E上有定义, z_0是E的一个聚点, a是一个复常数, 如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$,总存在$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,使得当$z \in E$且$0 < |z - z_0| < \delta$时, 有$|f(z) - a| < \varepsilon$, 那么我们就称$a$是$f(z)$当$z$趋于$z_0$时的极限, 记作*

$$\lim_{z \in E,\ z \to z_0} f(z) = a, \quad \text{或} \quad f(z) = a + o(1) \quad (z \in E, z \to z_0).$$

上述的极限定义中, 要求点z以任意方式趋于点z_0时, $f(z)$都趋于a, 我们才称$f(z)$在点z_0的极限值是a, 即$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$. 否则, 我们称$f(z)$在点$z_0$不存在极限值.

由于给出一个复变函数$w = f(z)$, 就相当于给出两个二元实变函数$u(x, y)$和$v(x, y)$, 因此求复变函数$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$的极限问题就可以转化为求两个二元实变函数$u(x, y)$和$v(x, y)$的极限问题.

定理1.4.2 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, $a=u_0+\mathrm{i}\,v_0, z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$, 则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

证明 由不等式

$$|x-x_0|\leqslant|z-z_0|\leqslant|x-x_0|+|y-y_0|;$$
$$|y-y_0|\leqslant|z-z_0|\leqslant|x-x_0|+|y-y_0|;$$
$$|u(x,y)-u_0|\leqslant|f(z)-a|\leqslant|u(x,y)-u_0|+|v(x,y)-v_0|;$$
$$|v(x,y)-v_0|\leqslant|f(z)-a|\leqslant|u(x,y)-u_0|+|v(x,y)-v_0|,$$

即可得证. □

由此可知, 实变函数中有关极限的运算法则也可以推广到复变函数中来, 为了简单起见, 在此不一一叙述出来.

有关极限我们还有如下几个常用到的定义.

定义1.4.3 设函数$f(z)$在点集E上有定义, z_0是E的一个聚点, 如果对于任意的$A>0$, 总存在$\delta=\delta(A)>0$, 使得当$z\in E$ 且$0<|z-z_0|<\delta$时, 有$|f(z)|>A$, 那么我们就说, 当z趋于z_0时, $f(z)$的极限是无穷大, 记作

$$\lim_{z\in E, z\to z_0} f(z)=\infty,\quad \text{或}\quad f(z)\to\infty\quad(z\in E, z\to z_0).$$

定义1.4.4 设函数$f(z)$在点集E上有定义, a是一个复常数, 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$A=A(\varepsilon)>0$,使得当$z\in E$且$|z|>A$时, 有$|f(z)-a|<\varepsilon$, 那么我们就说,当z趋于∞时,$f(z)$的极限是a, 记作

$$\lim_{z\in E, z\to\infty} f(z)=a\quad\text{或}\quad f(z)\to a\quad(z\in E, z\to\infty).$$

定义1.4.5 设函数$f(z)$在点集E上有定义, $z_0\in E$. 如果

$$\lim_{z\in E, z\to z_0} f(z)=f(z_0),$$

那么我们就称函数$f(z)$在点z_0处连续; 如果$f(z)$在E上的每一点都连续, 那么我们就称$f(z)$在点集E上连续.

此定义也可叙述为: 如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 总存在$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当$z \in E$, 且$|z - z_0| < \delta$ 时, 有$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, 那么我们就称函数$f(z)$在点$z_0$处连续, 上述定义也称为$f(z)$在点$z_0$连续的$\varepsilon - \delta$语言. 函数$f(z)$在点$z_0 = \infty$连续的$\varepsilon - \delta$语言为: 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 总存在$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,当$|z| > \frac{1}{\delta}$时,有$|f(z) - f(\infty)| < \varepsilon$.

定理1.4.6 函数$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$在点$z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$处连续的充要条件是二元实函数$u(x, y), v(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处连续.

由此可知, 实变函数中有关连续性的运算法则也可以推广到复变函数中来, 为了简单起见, 在此不一一叙述出来. 下面引入复变函数一致连续的概念.

定义1.4.7 设函数$w = f(z)$在点集E上有定义, 如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当$z', z'' \in E : |z' - z''| < \delta$ 时, 有$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$, 那么我们就称函数$f(z)$在$E$上一致连续.

关于一致连续有如下一些重要结果:

定理1.4.8 设函数$f(z)$在紧集$E \subset \mathbb{C}$上连续, 则$f(z)$在E上一致连续.

定理1.4.9 设函数$f(z)$在紧集$E \subset \mathbb{C}$上连续, 则$f(z)$在E上有界.

说明 本定理对于一般的区域E不一定成立. 例如, 函数$f(z) = \frac{1}{1-z}$在单位圆$|z| < 1$内连续, 但不一致连续.

定理1.4.10 设函数$f(z)$在紧集$E \subset \mathbb{C}$上连续, 则$|f(z)|$在E上能取到最大值和最小值(分别称为$f(z)$在E上的最大模和最小模).

上述这些定理的证明类似于数学分析中的证明(略).

连续曲线、可求长曲线、光滑曲线与曲线都是复变函数论中的基本概念,下面我们给出它们的定义.

定义1.4.11 设$x(t), y(t)$是闭区间$[\alpha, \beta]$的两个实值连续函数, 则由方程组

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

或由复数方程$z = \gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 所确定的函数称为复平面$\mathbb{C}$上的一条连续曲线, 记作$\gamma : z = \gamma(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$. 曲线$\gamma$的方向就是参数$t$增加的方向, 在这种意义下, $\gamma(\alpha), \gamma(\beta)$分别称为曲线的起点和终点; 如果$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, 即起点与终点重合, 则称$\gamma$为闭曲线; 当$\alpha \leqslant t_1, t_2 \leqslant \beta, t_1 \neq t_2$时, 有$\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$成立, 则称曲线$\gamma$有重点; 无重点的非闭曲线$\gamma$ (即仅当$t_1 = t_2$时才有$\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$成

立)称为简单曲线或约当(Jordan)曲线. 对于闭曲线γ, 如果它只有起点和终点重合(即只有当$\alpha=t_1,\beta=t_2$时才有$\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$), 就称γ为简单闭曲线或Jordan闭曲线.

曲线γ的反向曲线记为$z=\gamma(\alpha+\beta-t)=x(\alpha+\beta-t)+\mathrm{i}\,y(\alpha+\beta-t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 记作$\gamma^-:z=\gamma^-(t)=\gamma(\alpha+\beta-t),\quad\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

集合$\{\gamma(t):\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\quad\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$也记为$\gamma[\alpha,\beta]$ 或简记为γ.

定义1.4.12 设$\gamma:z=\gamma(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$是一条连续曲线, 将区间 $[\alpha,\beta]$ 进行分割 $T:\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$, 以点$z_k=\gamma(t_k)\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$为顶点作折线$P$, 则折线$P$的长度为 $|P|=\sum\limits_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|$. 假如对于区间 $[\alpha,\beta]$ 的任意分割T, 上式都有一个与分割T无关的上界, 则称曲线γ是可求长曲线, 并称

$$L=\sup_{\{T\}}\{|P|\}=\sup_{\{T\}}\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|$$

为曲线γ 的长度.

定义1.4.13 设$\gamma(t):\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\quad\alpha\leqslant t\leqslant\beta$是一条连续曲线, 如果$\gamma'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$中存在且连续(其中$x'(\alpha),y'(\alpha)$应理解为右导数; $x'(\beta),y'(\beta)$应理解为左导数), 且$\gamma'(t)\neq0$, 则称γ为光滑曲线.

如同数学分析中所讨论的那样, $\gamma'(t)$是曲线γ在$\gamma(t)$处的切向量, 它与正实轴的夹角在$\mathbf{Arg}\quad\gamma'(t)$中. $\gamma'(t)$是连续的, 是指曲线γ的切线随着t连续地变化. 曲线γ的长度就可以表示为

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_\alpha^\beta|\gamma'(t)|dt.$$

定义1.4.14 如果将区间$[\alpha,\beta]$ 分成n个小区间: $[t_{k-1},t_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 曲线γ在每一个小区间$[t_{k-1},t_k]$上都是光滑的$(k=1,2,\cdots,n)$, 则称γ为分段光滑曲线.

定义1.4.15 (连通集的定义) 设E为$\mathbb{C}$(或$\mathbb{C}_\infty$) 中的集合, 如果$\mathbb{C}$(或$\mathbb{C}_\infty$) 中不存在满足下列条件的开集 G_1,G_2:

(1) $G_1\bigcap G_2=\varnothing$; (2) $E\bigcap G_1\neq\varnothing,E\bigcap G_2\neq\varnothing$; (3) $E\subset G_1\bigcup G_2$.

即E不能用两个互不相交的非空开集将其一分为二, 则称E为连通集. 规定空集$\varnothing$是连通的.

定义1.4.16 非空的连通开集D称为区域. 区域D加上它的边界∂D称为闭域, 记作 $\overline{D} = D\bigcup\partial D$.

区域是开的,不包含它的边界点. 如果区域D是有界集, 那么它就称为有界区域; 否则称为无界区域. n $(n \geqslant 2)$ 条首尾相连的线段$[a_{k-1}, a_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的曲线称为折线, 如果折线中每条线段$[a_{k-1}, a_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 都与x轴或与y轴平行, 则称折线为横竖折线.

定理1.4.17 设D为复平面$\mathbb{C}$中非空开集, 则下列条件等价:

(1) D是区域.

(2) D中任意两个有限点, 可用全在D中的曲线连接起来.

(3) D中任意两个有限点, 可用全在D中的折线连接起来.

(4) D中任意两个有限点, 可用全在D中的横竖折线连接起来.

证明* 显然(4) 可推出(3), (3) 可推出(2), 下证(1)推出(4).

设开集D是区域, 任取一点$z_0 \in D$, 考虑集合

$G_1 = \{z \in D:$可用全在D中的横竖折线连接z_0和z $\}$,

$G_2 = \{z \in D:$不能用全在D中的横竖折线连接z_0和z $\}$.

我们证G_1, G_2为开集. 设$z_1 \in G_1 \subset D$, 由于D为开集, 存在圆盘$D(z_1, \varepsilon) \subset D$, 由于圆盘$D(z_1, \varepsilon)$中的任意点$z$均可以用全在$D$中的横竖折线连接$z_0$和$z$, 所以$D(z_1, \varepsilon) \subset G_1$, 即$G_1$是开集. 设$z_2 \in G_2 \subset D$, 由于D为开集, 存在圆盘$D(z_2, \varepsilon) \subset D$, 由于圆盘$D(z_2, \varepsilon)$中的任意点$z$均不能用全在$D$中的横竖折线连接$z_0$和$z$, 否则的话有全在$D$中的横竖折线连接$z_0$和$z_2$, 这与$G_2$的定义矛盾, 所以$D(z_2, \varepsilon) \subset G_2$, 即$G_2$是开集. 由于$G_1\bigcap G_2 = \varnothing$, $G_1\bigcup G_2 = D$和D是连通的, G_1和G_2中必有一个是空集, 再由$z_0 \in G_1$, 推出$G_2 = \varnothing$, 故$D = G_1$.

最后来证由(2)可推出(1). 我们使用反证法. 假设D不连通. 那么由定义, 存在两个非空的开集G_1, G_2 满足: $G_1\bigcap G_2 = \varnothing$ 且$D = G_1\bigcup G_2$. 设$z_1 \in G_1$, $z_2 \in G_2$. 由条件(2), 在D 中存在曲线$\gamma: [\alpha, \beta] \to D$, 连接$z_1 = \gamma(\alpha)$ 和$z_2 = \gamma(\beta)$. 设$T = \sup\{t \in [\alpha, \beta] : \gamma(t) \in G_1\}$, 则$T \in [\alpha, \beta]$, 于是$\gamma(T) \in D = G_1\bigcup G_2$. 如果$\gamma(T) \in G_1$, 则$T < \beta$ 且存在圆盘$D(\gamma(T), \varepsilon) \subset G_1$, 由于$\gamma$ 连续, 所以存在$t_1 \in (T, \beta)$, 当$t \in (T, t_1)$时, $\gamma(t) \in D(\gamma(T), \varepsilon) \subset G_1$, 这与$T$的定义矛盾; 如果$\gamma(T) \in G_2$, 则$T > \alpha$ 且存在圆盘$D(\gamma(T), \varepsilon) \subset G_2$, 由于$\gamma$ 连续, 所以存在$t_2 \in (\alpha, T)$, 当$t \in (t_2, T)$时, $\gamma(t) \in D(\gamma(T), \varepsilon) \subset G_2$, 这也与$T$的定义矛盾. 因此假设不成立, 即$D$应为连通集. □

于是对于复平面中的开集, 定理1.4.17的(2)或(3)或(4)都可以当成D是区域

的定义.

定理1.4.18 设Ω 为平面上的一个区域, 如果$D\subset\Omega$ 是一个非空开集且D的闭包$\overline{D}$满足$\overline{D}\cap\Omega=D$, 则$D=\Omega$.

证明 设$D_2=\Omega\backslash\overline{D}$, 则$D_2=\Omega\backslash(\overline{D}\bigcap\Omega)$. 由于$\overline{D}\bigcap\Omega=D$, 所以$\Omega=D\bigcup D_2$. 而$D$和$D_2$均为开集, D是非空开集, Ω是区域, 所以$D=\Omega$. □

命题1.4.19 (Jordan 闭横竖折线定理) 平面中n条首尾相连的线段

$$[a_{k-1},a_k]\quad(k=1,2,\cdots,n,\ a_0=a_n)$$

组成 Jordan 闭横竖折线C 把平面分成两个区域, 一个是有界的, 称为C的内部,记为 $\mathrm{int}(C)$; 另一个是无界的, 称为C 的外部, C 是这两个区域的公共边界. 如果$n\geqslant5$, 则存在两个互不相交的区域D_1和区域D_2, 区域D_1和区域D_2的边界都是由不超过$n-1$条线段首尾相连组成的 Jordan 闭横竖折线, $\overline{D_1}\bigcap\overline{D_2}$ 是一条横竖线段I, I除端点全在 $\mathrm{int}(C)$ 中, 且 $\overline{\mathrm{int}(C)}=\overline{D_1}\bigcup\overline{D_2}\bigcup I$.

证明* 对Jordan 闭横竖折线的线段条数用归纳法来证明. 因为当Jordan 闭横竖折线的线段条数是4或5时, C为长方形的边界, Jordan 闭横竖折线定理显然成立. 当$n\geqslant6$时, 设Jordan 闭横竖折线的线段条数小于或等于$n-1$, Jordan 闭横竖折线定理成立. 设C为n条首尾相连的线段$[a_{k-1},a_k]$ $(k=1,2,\cdots,n,\ a_0=a_n)$ 组成Jordan 闭横竖折线, 并且设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中每一个顶点a_k均是角点, (即与a_k 相邻的两个顶点a_{k-1}和a_{k+1}不在同一条直线上.) 其中设$a_{n+1}=a_1, a_{-1}=a_{n-1}$. 由于$\mathrm{Im}\ A=\{\mathrm{Im}\ a_1,\mathrm{Im}\ a_2,\cdots,\mathrm{Im}\ a_n\}$为有限集, $\mathrm{Im}\ A$中有元达到最小值, 不妨设

$$\mathrm{Im}\,a_1=\mathrm{Im}\,a_2=\min\{\mathrm{Im}\,a:a\in A\}<\mathrm{Im}\ a_3=\mathrm{Im}\,a_4,\quad \mathrm{Re}\,a_0=\mathrm{Re}\ a_1<\mathrm{Re}\ a_2,$$

则可设$a_4'=\mathrm{Re}a_1+\mathrm{iIm}a_3\in[a_0,a_1]$($a_4'\notin[a_0,a_1]$时,可同理证明), B是由线段$[a_1,a_2]$, $[a_2,a_3]$, $[a_3,a_4']$ 和$[a_4',a_1]$ 所围成的长方形内部, 则$\mathrm{Re}\,a_4'<\mathrm{Re}\,a_3$. 存在$j_0\geqslant4$, $j_0<n$, 使得

$$\mathrm{Im}\ a_{j_0-1}=\mathrm{Im}\ a_{j_0}=\min\{\mathrm{Im}\ a_4,\mathrm{Im}\ a_5,\cdots,\mathrm{Im}\ a_{n-1}\},$$

且在线段$[a_0,a_1]$上有一点a_{j_0}', 使得由线段$[a_1,a_2],[a_2,a_3],\cdots,[a_{j_0-1},a_{j_0}']$和$[a_{j_0}',a_1]$首尾相连, j_0条线段组成的横竖折线C_1为Jordan闭横竖折线, 由线段

$$[a_{j_0},a_{j_0+1}],[a_{j_0+1},a_{j_0+2}],\cdots,[a_{n-1},a_n]\quad 和\quad [a_0,a_{j_0}']$$

(其中如果$a_0 = a'_{j_0}$, 则线段$[a_0, a'_{j_0}]$是一个点, 将其除去)首尾相连组成的横竖折线C_2为Jordan闭横竖折线. 由归纳法假设, 横竖折线C_1的内部为区域D_1, 横竖折线C_2的内部为区域D_2, $\overline{D_1}\bigcap\overline{D_2}$ 是一条线段$I = [a'_{j_0}, b]$, 其中当

$$B\bigcap\{a_5, a_6, \cdots, a_n\} \neq \varnothing, \quad b = a_{j_0}, \quad j_0 > 5;$$

当$B\bigcap\{a_5, a_6, \cdots, a_n\} = \varnothing, j_0 = 4$ 且当$\mathrm{Re}\ a_4 < \mathrm{Re}\ a_3$时$b = a_4$和当$\mathrm{Re}\ a_4 > \mathrm{Re}\ a_3$时$b = a_3$. 于是存在两个互不相交的区域$D_1$和区域$D_2$, 区域$D_1$和区域$D_2$的边界都是由不超过$n-1$条线段首尾相连组成的Jordan 闭横竖折线, $\overline{D_1}\bigcap\overline{D_2}$ 是一条线段I, I 除端点外全在$\mathrm{int}(C)$中, 且$\overline{\mathrm{int}(C)} = \overline{D_1}\bigcup\overline{D_2}\bigcup I$. 这样用归纳法就证明了Jordan 闭横竖折线定理. □

定义1.4.20 (单连通区域的定义) *设Ω为扩充复平面上的一个区域, 如果$\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$是连通的, 则称$\Omega$ 为单连通区域.*

设E为扩充复平面上的一个集合, 集合E中的最大连通子集称为E的连通分支. 设Ω为扩充复平面上的一个区域, 如果$\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$是由$n$个连通分支组成的, 则称$\Omega$ 为n连通区域.

定理1.4.21 *设Ω为扩充复平面上的一个区域, 则Ω 为单连通区域的充要条件是对Ω中的任意 Jordan 闭横竖折线γ, γ的内部全在Ω中或γ的外部全在Ω中.*

证明* **充分性** 如果$\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ 不是连通的, 则$\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$至少有一个非空连通的有界闭集$E_1$, 使得集合$E_2 = \mathbb{C}_\infty \setminus (\Omega\bigcup E_1)$是一个非空闭集. 于是$E_1$和$E_2$互不相交, 从而$d(E_1, E_2) > 0$. 设$\varepsilon > 0, 4\varepsilon < d(E_1, E_2)$, 对任意的$a \in E_1$, 作以$a$为中心, 边长为$2\varepsilon$的开正方形$S(a, \varepsilon) = \{z = x + \mathrm{i}\,y : |x - a| < \varepsilon, |y - a| < \varepsilon\}$, 由于$E_1$ 是紧的, 则存在有限个开正方形$S(a_1, \varepsilon), S(a_2, \varepsilon), \cdots, S(a_N, \varepsilon)$覆盖$E_1$, 其中$a_1, a_2, \cdots, a_N \in E_1$. 容易看出开集$G = \bigcup_{n=1}^{N} S(a_n, \varepsilon)$的边界$\partial G$全在$\Omega$中, ∂G是由有限条Jordan闭横竖折线$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_l$组成, 且这有限条Jordan闭横竖折线$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_l$的内部的并包含$G$. 由条件, 这有限条Jordan闭横竖折线$\Gamma_1$,$\Gamma_2$, $\cdots$, Γ_l的内部的并全在Ω中, 所以$E_1 \subset \Omega$, 这与$E_1 \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$矛盾. 这说明$\Omega$ 为单连通区域.

必要性 设$E = \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ 是连通的. 对Ω中的任意Jordan 闭横竖折线γ, 设γ的内部是G_1, γ的外部是G_2, 则$E \subset G_1\bigcup G_2$, G_1和G_2 是互不相交的非空开集. 由于E 是连通的, 由连通的定义, $G_1\bigcap E$ 和$G_2\bigcap E$ 中至少有一个是空集, 如果$G_1\bigcap E$ 是空集, 则$G_1 \subset \mathbb{C}_\infty \setminus E = \Omega$, 如果$G_2\bigcap E$ 是空集, 则$G_2 \subset \mathbb{C}_\infty \setminus E = \Omega$. 于是$G_1$ 和G_2 中至少有一个包含在Ω中. □

下面的事实是直观的, 但证起来是复杂的, 故述而不证(证明见[12] 和[16]).

定理1.4.22* (Jordan 闭曲线定理) 设γ为平面中一条 Jordan 闭曲线, 则它把复平面分成两个没有公共点的区域, 其中一个是有界的, 称为γ的内部, 记作 $\mathrm{int}(\gamma)$; 另一个是无界的, 称为γ的外部, 记作 $\mathrm{ext}(\gamma)$; γ是这两个区域的公共边界.

不是单连通的区域称为多连通区域. 由两条Jordan 闭曲线所围成的区域是二连通的, 由n条Jordan 闭曲线所围成的区域是n连通的, 这些Jordan闭曲线可能退化成为一个点或一条Jordan曲线.

例1.4.23 函数$f(z)$在点z_0连续,且$f(z_0) \neq 0$, 则存在点z_0的邻域$D(z_0,\delta)$, $f(z)$在$D(z_0,\delta)$内处处不为零.

证明 已知$f(z)$在点z_0连续, 取$\varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2} > 0$, 总存在$\delta > 0$,当$|z - z_0| < \delta$时, 就有$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, 即$|f(z)| > |f(z_0)| - \varepsilon = \varepsilon > 0$. 因此, $f(z)$在点z_0的δ邻域内处处不为零. □

例1.4.24 集合$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$及$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z < 0\}$ 分别表示以实轴$\mathrm{Im}\ z = 0$为边界的两个单连通无界区域. 集合$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > 0\}$及$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z < 0\}$ 分别表示以虚轴$\mathrm{Re}\ z = 0$为边界的两个单连通无界区域.

例1.4.25 集合$\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$表示以原点为圆心的同心圆环形区域, 它是一个二连通有界区域, 其边界为两个圆周$\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$及$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

例1.4.26 集合$\{z \in \mathbb{C} : c < \mathrm{Im}\ z < d\}$表示水平带形区域,它是一个单连通无界区域, 其边界为两条直线$\mathrm{Im}\ z = c$和$\mathrm{Im}\ z = d$. 集合$\{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}\ z < b\}$表示竖直带形区域,它是一个单连通无界区域, 其边界为两条直线$\mathrm{Re}\ z = a$和$\mathrm{Re}\ z = b$.

例1.4.27 集合$\{z \in \mathbb{C} : 2 < \arg(z - \mathrm{i}) < 3\}$表示一个角形区域, 它是一个单连通无界区域, 其边界为半射线$\arg(z - \mathrm{i}) = 2$ 及$\arg(z - \mathrm{i}) = 3$.

例1.4.28 求映射$w = z^3$把$z-$平面上的直线$z = (1 + \mathrm{i})t$ 映射成w平面上的像的曲线方程.

解 直线$z = (1 + \mathrm{i})t$ 可写成方程组$x = t$, $y = t$, 它在z 平面上表示直线$y = x$. 映射$w = u + \mathrm{i}\,v = z^3$ 把z 平面上的直线$z = (1 + \mathrm{i})t$ 映射成w平面上

的曲线, 其方程为$w=(1+\mathrm{i})^3t^3$, 即$w=(-2+2\mathrm{i})t^3$. 于是有$u=-2t^3,\ \ v=2t^3$, 从中消去t 得$v=-u$, 这就是所要求的像曲线的方程. 它表示w 平面上的一条直线.

例1.4.29 求映射$w=z^2$把$z-$平面上的直线$x=c\ (c\neq 0)$及$y=c\ (c\neq 0)$映射成w平面上的像曲线方程.

解 由$w=u+\mathrm{i}v=z^2$, $z=x+\mathrm{i}\,y$, 有$u=x^2-y^2,\ \ v=2xy$. 设$L_c=\{c+\mathrm{i}\,y:-\infty<y<\infty\},\ \ w=f(z)=z^2$, 由$u=x^2-y^2,\ v=2xy,\ x=c$, 当$c\neq 0$ 时, 消去x和y得

$$u=c^2-\frac{v^2}{4c^2}.$$

这就是所要求的像曲线$f(L_c)$方程, 它是关于w平面上实轴对称的抛物线族方程. 其顶点位于正实轴, 开口向左. 若$c=0$, 则映射$w=z^2$把$z-$平面上的直线$x=0$映射成w平面上的像曲线$f(L_0)$, 其方程为: $u=-y^2,\ \ v=0$, 即$f(L_0)=\{u:u\leqslant 0\}$. 由此可知$z-$平面上的虚轴映射成$w$平面上的负实轴.

同理映射$w=z^2$把$z-$平面上的直线$y=c(c\neq 0)$映射成w平面上的抛物线族

$$u=\frac{v^2}{4c^2}-c^2,$$

其顶点位于负实轴, 开口向右. 若$c=0$,则映射$w=z^2$把$z-$平面上的直线$y=0$映射成w平面上的正实轴.

例1.4.30 设α是一个复数, 如果

$$\lim_{z\to 0}\frac{\alpha\bar{z}}{z}=\beta$$

存在, 则$\alpha=0$.

证明 用反正法. 如果$\alpha\neq 0$, 则

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\frac{\beta}{\alpha},$$

于是$\frac{|\beta|}{|\alpha|}=1$. 存在$\theta_0\in\mathbb{R}$使得$\frac{\beta}{\alpha}=e^{i\theta_0}$, 从而对任意的$\theta\in\mathbb{R}$, 有

$$e^{-i2\theta}=\lim_{r>0,r\to 0}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{i\theta_0},$$

所以对任意的$\theta\in\mathbb{R}$, $2\theta+\theta_0$是2π的整数倍, 这是不可能的. 所以$\alpha=0$.

习　题　一

1. 计算下列各题:

(1) $(2-\sqrt{2}\mathrm{i})(2+\sqrt{2}\mathrm{i})$;

(2) $\frac{1+\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}-3)}$;

(3) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-3}$;

(4) $\sqrt{2}(\cos(\arctan 2)+\mathrm{i}\sin(\arctan 2))(\cos(\arctan 3)+\mathrm{i}\sin(\arctan 3))$.

2. 求下列各复数的模和辐角的主值.

(1) $\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$;　(2) $1-\mathrm{i}$;　(3) $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$;

(4) $1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\ (-\pi\leqslant\theta<\pi)$.

3. 求复数$1+\mathrm{i}$和i的n次方根.

4. 设$z=x+\mathrm{i}\,y$,求下列各复数的实部和虚部.

(1) z^n;　(2) $\frac{z-1}{z+1}$;　(3) $\sin z$;　(4) $\cos z$.

5. 证明: 当且仅当$z=\bar{z}$时, 复数z为实数.

6. 设z_1, z_2是任意两个复数, 证明:

(1) $|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2)$;

(2) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

并说明其几何意义.

7. 设$z=x+\mathrm{i}\,y$,证明:

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

8. 求解下列各方程.

(1) $z^6=1$;　(2) $z^2-4\mathrm{i}\,z-(4-9\mathrm{i})=0$;

(3) $z^4+a^4=0\ (a>0)$;　(4) $\mathrm{e}^z=1$.

9. 证明:

$$(1+\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+\mathrm{i}\,\sin\frac{n\theta}{2}\right).$$

10. 设z_1,z_2,z_3三点满足条件:

$$z_1+z_2+z_3=0,\quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=1,$$

证明z_1,z_2,z_3是内接于单位圆的一个正三角形的顶点.

11. 设$|z_0|<1$, 证明:

(1) 若$|z|=1$, 则$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|=1$;

(2) 若$|z|<1$, 则$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|<1$;

(3) 若$|z|<1$, 则

$$\frac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|}\leqslant\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|\leqslant\frac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}\leqslant|z|+|z_0|;$$

(4) 若$z\bar{z}_0\neq 1$, 则

$$1-\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|^2=\frac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}_0 z|^2}.$$

12. 证明: 分别以三点z_1,z_2,z_3及三点w_1,w_2,w_3为顶点的两个三角形相似的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=0.$$

13. 证明: 三点z_1,z_2,z_3共线的充要条件是下列四条件之一成立.

(1) $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$=实数.

(2) $\overline{z}_1 z_2+\overline{z}_2 z_3+\overline{z}_3 z_1$=实数.

(3) 存在不全为零的实数λ_1,λ_2 和λ_3,使得

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3=0.\end{cases}$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3 \end{vmatrix}=0.$$

14. 设z_1,z_2,z_3是以原点为圆心的单位圆周上的三个点, 证明: 这三个点是一正三角形顶点的充要条件是$z_1+z_2+z_3=0$.

15. 设z_1,z_2,z_3,z_4是以原点为圆心的单位圆周上的四个点, 证明: 这四个点是一矩形顶点的充要条件是$z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

16. 设$z_1,z_2,\cdots,z_n$是以原点为圆心的单位圆周上的n个点,如果这n个点是正n边形的n个顶点,证明：$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$.

17. 设$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,如果z_1+z_2与z_1z_2都是实数,证明z_1, z_2 或者都是实数,或者是一对共轭复数.

18. 证明:z_1, z_2对应于球面上一直径的两端点的充要条件为: $z_1\overline{z}_2=-1$.

19. 证明:$|z-z_0|=r$是球面上大圆周的球极投影, 当且仅当$r^2=1+|z_0|^2$.

20. 下列复数列是否有极限? 若有求出其极限.

(1) $\frac{\mathrm{i}}{17}, \left(\frac{\mathrm{i}}{17}\right)^2, \cdots, \left(\frac{\mathrm{i}}{17}\right)^n, \cdots$;　　(2) $\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{i}}{3}, \frac{1}{4}, \frac{\mathrm{i}}{5}, \frac{1}{6}, \frac{\mathrm{i}}{7}, \cdots$;

(3) $\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, 1, \cdots$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+\mathrm{i}\,y}{n}\right)^n$.

21. 设$2>r_n>1, 0<\theta_n<\pi(n\in\mathbb{N})$, 则复数序列$\{z_n=r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)\}$收敛到点$\alpha=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 的充要条件是实数序列$\{r_n\}$及$\{\theta_n\}$分别收敛到ρ及φ.

22. 证明: 若$r>0, \theta\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n(r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}-1)=\ln r+\mathrm{i}\,\theta.$$

23. 证明:若复数序列$\{z_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\alpha\neq\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_0+z_1+\cdots+z_n}{n}=\alpha.$$

24. 证明:若复数序列$\{z_n\}$及$\{w_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\alpha$及$\lim\limits_{n\to\infty} w_n=\beta$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}=\alpha\beta$.

25. 证明: 若$E\subset\mathbb{C}$是非空点集,则对任意的$z_1, z_2\in\mathbb{C}$,有

$$|d(z_1, E)-d(z_2, E)|\leqslant|z_1-z_2|.$$

26. 证明: 若E为开集, 则$E'=\partial E\bigcup E$.

27. 证明: 若$E\subset\mathbb{C}$既为开集,又为闭集, 则$E=\varnothing$或$E=\mathbb{C}$.

28. 求下列方程(t是实参数)给出的曲线:

(1) $z=(1+\mathrm{i})t$;　　(2) $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$;

(3) $z=t+\frac{\mathrm{i}}{t}$;　　(4) $z=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2}$.

29. 满足下列条件的点所组成的点集是什么? 它是不是区域? 如果是区域, 是单连通区域还是多连通区域?

(1) $\mathrm{Re}\,z=7$;　　(2) $\mathrm{Im}\,z<7$;

(3) $|\arg z|<\frac{\pi}{3}$;　　(4) $0<\arg z<\frac{\pi}{3}, 1<|z|<3$;

(5) $\arg(z-\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}$;　　(6) $0<\arg(z-\mathrm{i})<\frac{\pi}{6}$;

(7) $|\arg(z-1)|<\frac{\pi}{6}, 2<\operatorname{Re} z<3$; (8) $|z-\mathrm{i}| \leqslant |2+\mathrm{i}|$;

(9) $|z-2|+|z+2|=5$; (10) $|\frac{z-1}{z+1}| \leqslant 2$.

30. 证明存在复数z满足$|z-a|+|z+a|=2$ 的充要条件是$|a| \leqslant 1$. 如果这一条件满足, 则$|z|$的最大值和最小值是什么?

31. 设复级数$s=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n, s'=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n'$收敛, 且其中一个绝对收敛, 则其Cauchy 乘积

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_0\alpha_n'+\alpha_1\alpha_{n-1}'+\cdots+\alpha_n\alpha_0')=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}'$$

也收敛, 且其和为ss'.

32. 求$(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta)+\mathrm{i}(\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta)$.

33. 设Ω为平面中非空开集, 证明Ω可以分解为有限个或可列个互不相交且连通开集的并.

34. 设Ω为平面中非空开集, $E \subset \Omega$是离散点集, E没有极限点在Ω中, 证明$\Omega \setminus E$是开集.

35. 试证下列等式:

(1) $\left(\frac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}\right)^n=\frac{1+\mathrm{i}\tan n\theta}{1-\mathrm{i}\tan n\theta}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \quad (0<r<1)$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \quad (0<r<1)$.

36. 设$\gamma: z=\gamma(t)\,(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$是一条光滑曲线, 试用复数表示$\gamma: z=\gamma(t)\,(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$的切线方向和法线方向.

37. 设Ω为平面中有界区域, f在Ω中连续, 且对任意$z_0 \in \partial\Omega$,极限$f_{z_0}=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$存在, 证明:

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & z\in\Omega, \\ f_{z_0}, & z=z_0\in\partial\Omega \end{cases}$$

在$\overline{\Omega}$上连续.

38. 设Ω为平面中有界区域, f在Ω中一致连续, 证明:对任意$z_0 \in \partial\Omega$, 极限$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$存在.

第二章　复变函数的微分和积分

本章主要研究复变函数的微分和积分. 把数学分析中的微分和积分直接引入到复变函数中来, 建立复变函数的微积分基本理论. 多值函数的解析分支是学习的一个难点, 特别是初等多值函数的解析分支. 为了解决这一难题, 本章把多值函数看成一些函数的集合, 组成集合的这些函数看成分支. 本章第4节对解析分支的存在性给出了严格的证明, 并用具体例子说明如何使用这些定理. 解析函数是复变函数论研究的主要对象, 它是一类实部和虚部满足Cauchy–Riemann(柯西–黎曼) 方程的可微函数.

§2.1　复变函数实可微和线积分及性质

本节把数学分析中的微分和积分用复变函数中的符号来书写. 例如, 对函数关于实变量x和y的可微定义如下(为了与复变函数的复可微区别, 称为实可微):

定义2.1.1 (实可微的定义)　*设f是从开集Ω到$\mathbb{C}$中的函数, $a\in\Omega$, 如果有复常数A,B 使得*

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(a+z)-f(a)-Ax-By}{z}=0, \tag{2.1.1}$$

则称f在a处实可微.

极限(2.1.1)式用数学分析的大O 和小o记号, 可以方便地写成

$$f(a+z)=f(a)+xA+yB+o(z)\quad (z=x+\mathrm{i}\,y\to 0). \tag{2.1.2}$$

用复变量z和$\bar{z}$ 可以对实可微重新书写. 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, u,v都是实值函数. 如果f在$a=a_1+\mathrm{i}\,a_2$处实可微, 则它的实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$是微积分中通常在$a=(a_1,a_2)$处可微, 且

$$u(a+z)=u(a)+x\mathrm{Re}\,A+y\mathrm{Re}\,B+o(z)\quad (z=x+\mathrm{i}\,y\to 0),$$

$$v(a+z)=v(a)+x\mathrm{Im}\,A+y\mathrm{Im}\,B+o(z)\quad (z=x+\mathrm{i}\,y\to 0).$$

于是一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(a)$ 存在, 并且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a)=\mathrm{Re}\,A,\ \frac{\partial v}{\partial x}(a)=\mathrm{Im}\,B,\ \frac{\partial u}{\partial y}(a)=\mathrm{Re}\,B,\ \frac{\partial v}{\partial y}(a)=\mathrm{Im}\,B.$$

于是可以定义$f=u+\mathrm{i}\,v$一阶偏导数为

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a),\quad B=\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\frac{\partial u}{\partial y}(a)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}(a).$$

(2.1.2)可以写成

$$f(a+z)=f(a)+x\frac{\partial f}{\partial x}(a)+y\frac{\partial f}{\partial y}(a)+o(z)\quad(z=x+\mathrm{i}\,y\to 0).$$

如果$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$在$a=a_1+\mathrm{i}\,a_2$处实可微, 可以定义$f(z)$在$a$点微分为$df(a)=du(a_1,a_2)+\mathrm{i}\,dv(a_1,a_2)$, 简记为$df=du+\mathrm{i}\,dv$, 从而有

$$df(a)=\tfrac{\partial f}{\partial x}(a)dx+\tfrac{\partial f}{\partial y}(a)dy.$$

引入微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

和$dz=dx+\mathrm{i}\,dy, d\bar{z}=dx-\mathrm{i}\,dy$, 则有

$$df=\tfrac{\partial f}{\partial z}dz+\tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

$\mathbb{R}^2$中的微分形式$Pdx+Qdy$可写成$hdz+gd\bar{z}$, 其中$h=(P-\mathrm{i}Q)/2$, $g=(P+\mathrm{i}Q)/2$.

关于$\frac{\partial}{\partial z}$和$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$的运算与实变量的偏导数的运算相同. 例如设$f,g$ 在开集Ω 中实可微, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, 则

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\partial f}{\partial z}+\beta\frac{\partial g}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}+\beta\frac{\partial g}{\partial \bar{z}};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg)=\frac{\partial f}{\partial z}g+f\frac{\partial g}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(fg)=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g+f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}};$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

当$\zeta=g(z)$在开集Ω中实可微, $w=f(\zeta)$ 在包含$g(\Omega)$中的开集实可微, 则复合函数$F(z)=f(g(z))$在开集Ω中实可微, 且

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial z},\qquad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}.$$

我们直接从数学分析的二元实函数的第二类曲线积分来定义复变函数的线积分.

定义2.1.2 (复变函数积分的定义) 设可求长有向曲线$C: z=z(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 以$a=z(\alpha)$为起点, $b=z(\beta)$为终点, $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$沿$C$有定义. 如果二元实变函数的第二类曲线积分

$$\int_C udx - vdy \quad 和 \quad \int_C udy + vdx$$

均存在, 则称$f(z)$ 在C上可积, 且定义$f(z)$在C上的积分为

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C udy + vdx. \tag{2.1.3}$$

由于$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$沿$C$连续的充要条件是$u, v$ 均在C上连续, 所以如果$f(z)$沿C连续, 则$f(z)$在C上的积分存在.

为了能够计算(2.1.3)式, 我们将(2.1.3)式转化为数学分析中的Riemann(黎曼)积分. 设$z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $x(t), y(t)$ 为区间$[a,b]$上的Riemann可积实函数, 则定义$z(t)$ 在区间$[a,b]$上的Riemann积分为:

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^b x(t)dt + \mathrm{i}\int_a^b y(t)dt.$$

如果$z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$是区间$[a,b]$上的分段光滑函数, 则有

$$\int_a^b z'(t)dt = \int_a^b x'(t)dt + \mathrm{i}\int_a^b y'(t)dt = z(b) - z(a).$$

定理2.1.3 如果$f(z)$在分段光滑有向曲线$C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)\,(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$上的积分存在, 则

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt. \tag{2.1.4}$$

定理2.1.4 (复变函数积分的基本性质) 设$f(z), g(z)$沿分段光滑有向曲线C连续, 则有下列与数学分析中的曲线积分相类似的性质:

(1) $\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz, a$ 是复常数;

(2) $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$;

(3) $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$, 其中$C$由曲线$C_1$和$C_2$ 衔接而成;

(4) $\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$;

(5) $\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant \int_C |f(z)||dz| = \int_C |f(z)|ds$, 这里$|dz|$表示弧长的微分, 即$|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$. 积分$\int_C |f(z)||dz| = \int_C |f(z)|ds$ 表示的是数学分析中的第一类曲线积分.

定理2.1.5 (积分估计) 设$f(z)$沿分段光滑有向曲线C连续, 且有正数M使$|f(z)| \leqslant M$, L为曲线C的长度, 则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant ML.$$

接下来我们研究连续函数在区域上的积分情况. 我们知道, $\mathbb{R}^2$内有Green(格林)公式

$$\int_{\partial\omega} Pdx + Qdy = \iint_{\omega}(Q_x - P_y)dxdy,$$

其中ω是一个有界区域, 其边界$\partial\omega$是一条分段光滑Jordan闭曲线, 并取正方向, $P, Q \in C^1(\overline{\omega})$. (为了符号简单, $C^1(\overline{\omega})$ 表示由ω中所有一阶偏导函数连续且都可以连续延拓到ω 闭包$\overline{\omega}$ 上的函数构成的空间.)

因此用复变函数的记号, Green公式可写成

$$\int_{\partial\omega} fdz + gd\bar{z} = 2\mathrm{i}\iint_{\omega}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dxdy, \qquad f, g \in C^1(\overline{\omega}). \tag{2.1.5}$$

事实上, 对$f, g \in C^1(\overline{\omega})$, 不妨设$f, g$都是实的, 否则可分别考虑其实部和虚部. 令$P = f + g$, $Q = \mathrm{i}(f - g)$, 代入Green公式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\partial\omega} fdz + gd\bar{z} &= \int_{\partial\omega} Pdx + Qdy = \iint_{\omega}(Q_x - P_y)dxdy \\ &= \iint_{\omega}\left[\mathrm{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right]dxdy \\ &= 2\mathrm{i}\iint_{\omega}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dxdy.\end{aligned}$$

特别地, 如果在(2.1.5)式中取$g = 0$, 则

$$\int_{\partial\omega} fdz = 2\mathrm{i}\iint_{\omega}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dxdy. \tag{2.1.6}$$

如果在上式中取$f = \bar{z}$, 则ω 的面积是$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\partial\omega}\bar{z}dz$. 利用(2.1.5)式可以得到如下的 Cauchy (柯西)定理.

定理2.1.6 (Cauchy 定理)　设ω是一个有界区域, 其边界$\partial\omega$是一条分段光滑的Jordan 闭曲线, 如果$f \in C^1(\overline{\omega})$ 且在ω中有$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 则

$$\int_{\partial\omega} f(z)dz = 0. \tag{2.1.7}$$

对有界闭区域上的具有连续一阶偏导数的函数, 有如下的Green−Pompeiu (格林−彭培儒)公式.

定理2.1.7 (Green−Pompeiu 公式)　设ω是一个有界区域, 其边界$\partial\omega$是一条分段光滑的 Jordan 闭曲线, 如果$f \in C^1(\overline{\omega})$, $a \in \omega$, 则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\omega}\frac{f(z)}{z - a}dz - \frac{1}{\pi}\iint_{\omega}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{dxdy}{z - a}. \tag{2.1.8}$$

特别地, 如果$f \in C^1(\overline{\omega})$ 且在ω中有$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 则对$a \in \omega$ 有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \omega} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{2.1.9}$$

(2.1.9)式称为 Cauchy 公式.

证明* 任取$a \in \omega$, 取足够小的$\varepsilon > 0$, 使得$D(a, 2\varepsilon) \subset \omega$, 对$z$的函数$f(z)/(z-a)$利用(2.1.5)式, 可得

$$\textstyle\int_{\partial(\omega \setminus D(a,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\mathrm{i} \int_{\omega \setminus D(a,\varepsilon)} \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dxdy}{z-a}.$$

由于

$$\int_{\partial(\omega \setminus D(a,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\partial \omega} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{2.1.10}$$

和$\partial D(a,\varepsilon)$有参数方程表达式$z = z(\theta) = a + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, 从而$z'(\theta) = \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 于是由(2.1.4), 有

$$\int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) d\theta.$$

由于$f \in C^1(\overline{\omega})$, $f(z)$ 在$\overline{\omega}$上一致连续, 在(2.1.10)式中令$\varepsilon \to 0$, 可得(2.1.8)式. 如果在ω上f还满足$\partial f / \partial \overline{z} = 0$, 则(2.1.9) 式成立. □

例2.1.8 设$C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)\, (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$为分段光滑的有向曲线, 以$a = z(\alpha)$为起点, $b = z(\beta)$为终点, 则

$$\int_C dz = b - a, \quad \int_C 2z dz = b^2 - a^2. \tag{2.1.11}$$

解 只证(2.1.11)式中的第二式. 我们有

$$\int_C 2z dz = \int_\alpha^\beta 2(x(t) + \mathrm{i}y(t))(x'(t) + \mathrm{i}y'(t)) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(x(t) + \mathrm{i}y(t))^2 dt = b^2 - a^2.$$

§2.2 复变函数复可微、解析的定义及性质

定义2.2.1 (复可微和解析函数的定义) 设f是定义在开集Ω上的复变函数, $a \in \Omega$, 如果有常数α 使得

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(a+z)-f(a)}{z}=\alpha \tag{2.2.1}$$

存在, 我们称f在$a\in\Omega$处复可微或称$f(z)$在点a可导, 并把α 记作$f'(a)$, $f'(z)$ 称为$f(z)$在点a处的导数. 如果存在a的一个邻域$D(a,r)\subset\Omega$, 使得$f(z)$在$D(a,r)$中的每点都有导数, 则称 $f(z)$在 a点解析(analytic). 如果f在Ω上的每点解析, 则称f在Ω中解析或全纯(holomorphic).

开集Ω 上所有解析函数的全体记作$H(\Omega)$. 如果E是平面上的集合, $H(\overline{E})$ 表示存在包含E的闭包的开集Ω_f, 使得$f\in H(\Omega_f)$的函数f全体.

极限(2.2.1)式用数学分析的大O 和小o记号, 可以方便地写成

$$f(a+z)=f(a)+f'(a)z+o(z)\quad (z=x+\mathrm{i}\,y\to 0). \tag{2.2.2}$$

定理2.2.2 设$f(z)$是定义在开集Ω上的复变函数, $a\in\Omega$处, 如果$f(z)$ 在a点复可微, 则$f(z)$在a处实可微且$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)=0$ 和$f'(a)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

证明 如果$f(z)$在$a\in\Omega$处复可微, 则$f'(a)$存在. 由(2.1.2)式和(2.2.2)式, f在a处实可微, 且有

$$z\frac{\partial f}{\partial z}(a)+\bar z\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)-f'(a)z=o(z)\quad (z=x+\mathrm{i}\,y\to 0).$$

于是

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)\frac{\bar z}{z}\right)=f'(a)-\frac{\partial f}{\partial z}(a).$$

由例1.4.30, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)=0$, 从而$f'(a)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)$. □

定理2.2.3 设$f=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是定义在开集$\Omega$上的复变函数, $a\in\Omega$, 如果$f(z)$ 在$a\in\Omega$处实可微且$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)=0$, 则$f$在$a$处复可微且

$$f'(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a)=-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a)=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a)+\frac{\partial v}{\partial y}(a). \tag{2.2.3}$$

证明 设复变函数f在$a\in\Omega$处实可微, 则当$z=x+\mathrm{i}\,y, \bar z=x-\mathrm{i}\,y$时,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(a)+y\frac{\partial f}{\partial y}(a)=z\frac{\partial f}{\partial z}(a)+\bar z\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a). \tag{2.2.4}$$

所以当$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)=0$时, (2.2.1)成立, 其中$f'(a)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, 所以$f$在$a$处复可微. 在(2.2.4)中分别取$x=1,y=0$和$x=0,y=1$, 知(2.2.3)成立. □

由命题2.2.3可知, 如果f 在开集Ω中实可微, 并且在Ω上$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, 则$f\in H(\Omega)$. 反过来, 如果$f\in H(\Omega)$, 则$f$ 实可微且$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0\ (z\in\Omega)$.

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在开集Ω中实可微, u,v都是实值函数, 由(2.2.4), 知$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ 的充要条件是$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$且$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 我们将

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \quad \text{或} \quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

称为Cauchy–Riemann(柯西–黎曼)方程, 简称为C–R方程.

本书为了方便, f在a处可微是指f在a处复可微, 并把$\frac{\partial f}{\partial z}(a)$ 记为$\frac{df}{dz}(a)$或$f'(a)$, $f'(a)$称为f在点a的导数.

定理2.2.4 (解析函数的运算法则)

(1) *如果$f(z),g(z)$在区域Ω内解析, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, 则$\alpha f(z)+\beta g(z)$和$f(z)g(z)$ 在区域Ω 内解析, $\frac{f(z)}{g(z)}$在$\{z\in\Omega: g(z)\neq 0\}$内解析且满足如下求导法则:*

$$(\alpha f(z)+\beta g(z))'=\alpha f'(z)+\beta g'(z),\quad (f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)\ \ (z\in\Omega),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}\ \ (g(z)\neq 0).$$

(2) *当$\zeta=g(z)$在开集Ω中解析, $w=f(\zeta)$ 在包含$g(\Omega)$的开集中解析, 则复合函数$F(z)=f(g(z))$在开集Ω中解析, 且 $F'(z)=f'(g(z))g'(z)$.*

常数C, 整幂函数$z^n(n\geqslant 1)$及多项式$P(z)$在整个z–平面上解析; 有理分式函数(两个多项式的商) $\frac{P(z)}{Q(z)}$在整个z–平面上除使分母$Q(z)=0$的各点外解析.

例2.2.5 函数$f(z)=\bar{z}$在$\mathbb{C}$中处处连续, 但处处不复可微.

解 显然, $f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}\,y=u+\mathrm{i}\,v$ 在$\mathbb{C}$中处处连续和实可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

于是C–R条件:$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$处处不成立, 这就说明了$f(z)=\bar{z}$在$\mathbb{C}$中处处不可导.

我们用同样的方法还可以证明$f(z)=\mathrm{Re}\ z, f(z)=\mathrm{Im}\ z$在$\mathbb{C}$中处处连续实可微, 但处处不复可微, 在复变函数中这种例子很多, 但在实变函数中要举出这

种例子就不容易, 这就说明在复变函数中复可微的要求比实变函数中实可导的要求要强得多, 所得的结论也就强得多.

例2.2.6　函数 $f(z)=y^3+\mathrm{i}x^3$和$g(z)=z\mathrm{Re}\,z$ 在何处(复)可微, 在何处解析? 在(复)可微处, 求出导数.

解　设$u=y^3$和$v=x^3$, 则函数$u=y^3$和函数$v=x^3$在复平面处处实可微,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=3x^2.$$

于是C−R条件: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$成立的充要条件是$x=0, y=0$, 所以函数 $f(z)=y^3+\mathrm{i}x^3$ 只在$z=0$处(复)可微, 处处不解析. 在$z=0$处的导数是$f'(0)=0$. 同理函数$g(z)=z\mathrm{Re}\;z=x^2+\mathrm{i}\,xy$在复平面处处实可微, 且只在$z=0$处(复)可微, 处处不解析. 在$z=0$处的导数是$g'(0)=0$.

例2.2.7　按导数的定义求z^n $(n\in\mathbb{N})$的导数.

解　因为

$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{(z+\triangle z)^n-z^n}{\triangle z}=\lim_{\triangle z\to 0}\left\{nz^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^{n-k}(\triangle z)^{k-1}\right\}=nz^{n-1},$$

所以$(z^n)'=nz^{n-1}$.

例2.2.8　证明函数$f(z)=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\,\sin y)$ 在$z-$平面上解析, 且$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$.

解　函数 $u=\mathrm{e}^x\cos y$和函数 $v=\mathrm{e}^x\sin y$在复平面处处实可微,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

于是C−R条件: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$处处成立, 所以指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$处处(复)可微, 所以指数函数$f(z)=\mathrm{e}^z$ 在$z-$平面上解析, 且$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=\mathrm{e}^z$.

于是可以证明函数

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2}\quad 和\quad \sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2\mathrm{i}}$$

在$z-$平面上解析, 且

$$(\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z.$$

§2.3 解析函数的积分和 Cauchy 积分公式

定义2.3.1 设f是区域Ω上的连续函数，g在Ω上解析，若对任意的$z\in\Omega$，有$g'(z)=f(z)$，则称$g(z)$ 为$f(z)$在Ω中的原函数或不定积分.

定理2.3.2 如果$f(z)$是区域Ω上的连续函数，$f(z)$在Ω中有原函数$g(z)$，$C:z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$为分段光滑有向曲线，以$a=z(\alpha)$为起点，以$b=z(\beta)$ 为终点，全在区域Ω中，则

$$\int_C f(z)dz=g(b)-g(a). \tag{2.3.1}$$

证明 因为$\frac{d}{dt}g(z(t))=g'(z(t))z'(t)=f(z(t))z'(t)$, 所以

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}g(z(t))dt=g(b)-g(a).$$

这个定理说明: 如果$f(z)$是区域Ω上的连续函数，$f(z)$在Ω中有原函数$g(z)$，则积分

$$\int_C f(z)dz$$

只与曲线C的起点a和终点b有关, 而与曲线C在Ω内从a到b的具体路径无关. 所以如果$f(z)$是区域Ω上的连续函数，$f(z)$在Ω中有原函数$g(z)$，$a\in\Omega,b\in\Omega$, 则积分

$$\int_a^b f(z)dz$$

表示沿着任意在Ω内从a到b的分段光滑曲线C的积分, 并且

$$\int_a^b f(z)dz=\int_a^b g'(z)dz=g(b)-g(a). \tag{2.3.2}$$

(2.3.2)式可以称为Newton–Leibniz(牛顿–莱布尼茨)公式.

作为定理2.3.2 的应用, 可以看到对任意不等于-1的整数n, $\alpha\in\mathbb{C}$ 以及不经过α 的任意闭分段光滑曲线C, 有

$$\int_C (z-\alpha)^n dz=0. \tag{2.3.3}$$

事实上, $f(z)=(z-\alpha)^n$的一个原函数是

$$g(z)=\frac{(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}, \tag{2.3.4}$$

它在区域$\mathbb{C}\setminus\{\alpha\}$上解析. 当整数$n$非负时, 对任意闭分段光滑曲线$C$, (2.3.2)式也成立, 这是因为$f(z)=(z-\alpha)^n$的原函数(2.3.4)式在整个平面$\mathbb{C}$上解析.

定理2.3.3 如果$f(z)$是区域Ω上的连续函数, 则$f(z)$在Ω中有原函数的充要条件是对全在区域Ω中任意 Jordan 闭横竖折线C 有

$$\int_C f(z)dz=0. \tag{2.3.5}$$

证明 由定理2.3.2, 只需证明充分性. 固定$a\in\Omega$, 设

$$g(z)=\int_{L_z} f(\zeta)d\zeta,$$

其中L_z是Ω中从a到z的横竖折线, 由命题1.4.19 (Jordan闭横竖折线定理), $g(z)$ 不依赖Ω中从a到z的横竖折线的选取, 从而$g(z)$ 在Ω中有定义. 对任意的$z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0\in\Omega$, 存在$z_0$的邻域$D(z_0,r)\subset\Omega$. 我们证明$g$在$z_0$点复可微, 且$g'(z_0)=f(z_0)$. 当$\triangle z=\triangle x+\mathrm{i}\,\triangle y, 0<|\triangle z|<r$时,

$$g(z_0+\triangle z)-g(z_0)=\int_{[z_0,z_0+\triangle x]} f(\zeta)d\zeta+\int_{[z_0+\triangle x,z_0+\triangle z]} f(\zeta)d\zeta,$$

于是

$$g(z_0+\triangle z)-g(z_0)-f(z_0)\triangle z=\triangle x\varepsilon_1(\triangle z)+\mathrm{i}\,\triangle y\varepsilon_2(\triangle z),$$

其中

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\triangle z)&=\int_0^1(f(z_0+t\triangle x)-f(z_0))dt=o(1)\ \ (\triangle z\to 0),\\
\varepsilon_2(\triangle z)&=\int_0^1(f(z_0+\triangle x+\mathrm{i}\,t\triangle y)-f(z_0))dt=o(1)\ \ (\triangle z\to 0).
\end{aligned}$$

从而g在z_0点复可微, 且$g'(z_0)=f(z_0)$. 由z_0的任意性可知, g在Ω 中处处复可微, 且$g'(z)=f(z)$, 所以$f(z)$在Ω 中有原函数$g(z)$. □

推论2.3.4 设$f(z)$是区域Ω上的连续函数. 如果对全在区域Ω中任意Jordan闭横竖折线C, (2.3.5)式成立, 则$f(z)$在Ω中有原函数且对全在区域Ω中任意闭分段光滑曲线 C, (2.3.5)式也成立.

证明 由定理2.3.3和2.3.2, 知推论2.3.4成立. □

定理2.3.5 (Goursat(古萨) 定理) 设Ω是一个单连通区域, $f(z)$ 在Ω中解析, 则$f(z)$在Ω中有原函数.

证明　先证明对Ω 中的任意闭长方形$\square$, 它的边界$C=\partial\square$是分段光滑曲线, 则(2.3.5)成立. 设

$$I=\int_{\partial\square}f(z)dz.$$

等分给定的闭长方形$\square$的每一边, 两两连接这些分点, 给定的闭长方形$\square$ 被分成四个全等的闭长方形$\square^1,\square^2,\square^3,\square^4$, 显然有

$$I=\sum_{k=1}^{4}\int_{\partial\square^k}f(z)dz.$$

这是由于在每一条连接分点的线段上, 积分恰好按相反的方向取了两次, 因而互相抵消. 沿着闭长方形$\square^k$的边界$\partial\square^k$ 积分至少有一个所得积分, 它的绝对值不小于$|I|/4$. 比如说, 假定这个闭长方形是$\square_1$, 沿着此闭长方形$\square_1$的边界$\partial\square_1$ 积分满足

$$\left|\int_{\partial\square_1}f(z)dz\right|\geqslant|I|/4,$$

对于这个闭长方形$\square_1$, 和前面一样, 把它分成四个全等闭长方形, 其中一个闭长方形$\square_2$满足$|\int_{\partial\square_2}f(z)dz|\geqslant\frac{|I|}{4^2}$. 把这种作法无限制地继续下去, 于是我们得到一个闭长方形序列$\square_1,\square_2,\square_3,\cdots,\square_n,\cdots$, 其中每一个包含后面一个, 而且有不等式

$$\left|\int_{\partial\square_n}f(z)dz\right|\geqslant\frac{|I|}{4^n}.$$

用$|\partial\square|$表示闭长方形$\square$的周长. 由于闭长方形序列中每一个包含它后面的全部闭长方形, 而且闭长方形$\square_n$ 的周长$\frac{|\partial\square|}{2^n}$, 当$n\to\infty$时趋向于零, 可见存在$a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\square_n$. 又因$f$ 在a 点复可微, 所以任给$\varepsilon>0$, 可找到$\delta>0$, 使得$D(a,2\delta)\subset\Omega$, 并且当$|z-a|<\delta$ 时,

$$|f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)|\leqslant\varepsilon|z-a|.$$

显然当n充分大时, $\square_n\subset D(a,\delta)$. 由(2.3.4), 有

$$\int_{\partial\square_n}(f(a)+f'(a)(z-a))dz=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{|I|}{4^n}\leqslant\left|\int_{\partial\square_n}f(z)dz\right|&=\left|\int_{\partial\square_n}\left(f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)\right)dz\right|\\&\leqslant\varepsilon\int_{\partial\square_n}|z-a||dz|\leqslant\varepsilon|\partial\square_n|^2=\varepsilon4^{-n}|\partial\square|^2,\end{aligned}$$

于是有$|I| \leqslant \varepsilon|\partial\square|^2$, 由此可见$I = 0$. 再用归纳法证明当$C$为$n$条首尾相连的线段$[a_{k-1}, a_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n,\ a_0 = a_n)$ 组成Jordan 闭横竖折线时, (2.3.5)式成立. 当$n = 4$, C为4条首尾相连的线段$[a_{k-1}, a_k]$ $(k = 1, 2, 3, 4,\ a_0 = a_4)$ 组成Jordan闭横竖折线时,由于Ω是单连通区域, C的内部是一个长方形, 所以(2.3.5)成立. 设当C为Jordan 闭横竖折线, 其线段条数小于或等于$n-1$时, (2.3.5)式成立. 则当C为n条首尾相连的线段

$$[a_{k-1}, a_k] \quad (k = 1, 2, \cdots, n,\ a_0 = a_n)$$

组成Jordan 闭横竖折线时, 由Jordan 闭横竖折线定理, 存在两个互不相交的区域D_1和区域D_2, 区域D_1和区域D_2的边界都是不超过$n-1$条线段首尾相连组成的Jordan闭横竖折线, $\overline{D_1}\bigcap\overline{D_2}$ 是一条横竖线段I. 设$I = [a, b]$,$I_0 = I\backslash\{a, b\}$是$I$中除端点$a$和$b$组成的开线段, 则$C$的内部$\mathrm{int}(C) = D_1\bigcup D_2\bigcup I_0$, 所以

$$\int_C f(z)dz = \int_{\partial D_1} f(z)dz + \int_{\partial D_2} f(z)dz = 0.$$

从而(2.3.5)式成立. 由定理2.3.3, 知定理2.3.5 成立. □

推论2.3.6 (单连通区域的Cauchy 定理) 设Ω是一个单连通区域, $f(z)$ 在Ω上解析,则$f(z)$在Ω中有原函数且对全在区域Ω中任意分段光滑闭曲线C, (2.3.5)式成立.

设Ω是一个单连通区域, $f(z)$ 在Ω中解析, 则$f(z)$在Ω中有原函数, 积分

$$\int_a^b f(z)dz$$

表示$f(z)$ 沿Ω中连接起点a与终点b的任意分段光滑曲线的积分. 由定理2.3.3 充分性的证明, 知如下定理成立.

定理2.3.7　设$f(z)$ 在z 平面上的单连通区域Ω内解析, $a \in \Omega$, 则

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta)d\zeta$$

在单连通区域Ω内解析, 且$F'(z) = f(z)$.

定理2.3.8　设$f(z)$ 在z 平面上的单连通区域Ω内解析, 如果$\varPhi(z)$为$f(z)$在单连通区域Ω 内任一原函数, 则

$$\int_a^b f(\zeta)d\zeta = \varPhi(b) - \varPhi(a) \quad (a, b \in \Omega).$$

定理2.3.9 (Cauchy 高阶求导公式) 设Ω是一个单连通区域, C是全在区域Ω中的闭 Jordan 分段光滑曲线, C所围区域是ω. 如果$f(z)$在Ω中解析, 则如下 Cauchy 公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(z)dz}{z-z_0}\qquad(z_0\in\omega)\tag{2.3.6}$$

成立且对任意正整数m, f的m阶复导数$f^{(m)}(z)$在Ω中存在解析, 且如下 Cauchy 高阶求导公式

$$f^{(m)}(z_0)=\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{m+1}}\qquad(z_0\in\omega,\ m\in\mathbb{N}^+)\tag{2.3.7}$$

成立, 其中

$$f^{(0)}(z)=f(z),\ f^{(1)}(z)=f'(z),\ f^{(m)}(z)=\frac{d}{dz}f^{(m-1)}(z)\quad(m\geqslant 2).$$

证明 设$z_0\in\omega$, 则存在$\varepsilon_0>0$ 使得$\overline{D(z_0,\varepsilon_0)}\subset\omega$, 对任意$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, 存在有向线段$[a,b]\subset\overline{\omega}$,其中$a\in\partial D(z_0,\varepsilon),b\in\partial\omega$, 可以假设$b$为闭曲线$C$的起点和终点, 则曲线$[b,a],\partial D(z_0,\varepsilon)$, $[a,b]$ 和C首尾相接构成一条分段闭光滑曲线, $\frac{f(z)}{z-z_0}$在$\Omega\setminus\{z_0\}$中解析, 从而

$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{[a,b]}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\int_{[b,a]}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\int_{\partial D(z_0,\varepsilon)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0.$$

从而

$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{\partial D(z_0,\varepsilon)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_0^{2\pi}f(z_0+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}d\theta\to 2\pi\mathrm{i}f(z_0)\quad(\varepsilon\to 0).$$

于是当$m=0$时, (2.3.7)式成立. 设当$m=k\geqslant 0$时, (2.3.7)式成立, 则当$m=k+1$时, 存在$\varepsilon_0>0,\varepsilon_0<1$ 使得$\overline{D(z_0,\varepsilon_0)}\subset\omega$, 当$0<|\triangle z|<\varepsilon_0$ 时,

$$\frac{f^{(k)}(z_0+\triangle z)-f^{(k)}(z_0)}{\triangle z}-\frac{(k+1)!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}}=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)g(z,\triangle z)dz,$$

其中

$$g(z,\triangle z)=\frac{1}{\triangle z}\left(\frac{1}{(z-z_0-\triangle z)^{k+1}}-\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\right)-\frac{k+1}{(z-z_0)^{k+2}}.$$

由于

$$(z-z_0)^{k+2}g(z,\triangle z)=\frac{(k+1)\triangle z}{z-z_0-\triangle z}+\sum_{j=2}^{k+1}\frac{(k+1)!(z-z_0)(\triangle z)^{j-1}}{j!(k+1-j)!(z-z_0-\triangle z)^j},$$

当$0 < |\triangle z| < \frac{\varepsilon_0}{4}$时, $g(z, \triangle z)$ 满足

$$|g(z, \triangle z)| \leqslant \frac{4^{k+5}}{\varepsilon_0^{k+3}} |\triangle z|.$$

而$f(z)$ 在C上连续, 从而在C上有界, 于是

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(z) g(z, \triangle z) dz = 0,$$

这说明当$m = k+1$时, (2.3.7)式成立, 所以对任意正整数m, f的m阶复导数$f^{(m)}(z)$在Ω 中解析. □

定理2.3.10 (解析函数的无穷可微性) 设$f(z)$ 在z 平面上的区域Ω内解析, 则$f(z)$在区域Ω内具有各阶导数, 并且它们也在Ω内解析.

定理2.3.11 (Morera(莫勒拉) 定理) 设f在Ω上连续, 如果对任意长方形$\Box \subset \Omega$, 有

$$\int_{\partial \Box} f(z) dz = 0,$$

则$f(z)$在Ω上解析.

证明 对任意的$z_0 \in \Omega$, 存在z_0的邻域$D(z_0, r) \subset \Omega$, 我们证明f在$D(z_0, r)$上解析. 对$D(z_0, r)$ 中的任意闭长方形$\Box$, 它的边界$\partial\Box$是分段光滑曲线C, (2.3.5)式成立, 于是由定理2.3.5 的证明, 对全在区域$D(z_0, r)$中任意Jordan闭横竖折线C, (2.3.5)式成立. 由定理2.3.3, $f(z)$在$D(z_0, r)$中有原函数$g(z)$, $g'(z) = f(z)$, 所以由定理2.3.9, $g'(z) = f(z)$在$D(z_0, r)$中复可微,由于$z_0 \in \Omega$是任意的, 所以$f(z)$在Ω上解析. □

定理2.3.12 (Cauchy 积分定理的推广) 设C为一条Jordan 闭分段光滑曲线, Ω为C之内部, $f(z)$在闭域$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup C$上解析, 则

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

定义2.3.13 考虑$n+1$条Jordan 闭分段光滑曲线$C_0, C_1, \cdots, C_n$, 其中C_1, C_2, $\cdots$, C_n 中每一条在其余各条的外部, 而它们又都在C_0的内部. 在C_0的内部同时又在$C_1, C_2, \cdots, C_n$外部的点集构成一个有界的多连通区域Ω, 以C_0, C_1, $\cdots, C_n$为它的边界. 在这种情况下, 我们称区域Ω 的边界是一条复围线, 记为

$$\partial\Omega = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-,$$

它包括取正方向的C_0, 以及取负方向的$C_1, C_2, \cdots, C_n$. 换句话说, 假如观察者沿复围线$\partial\Omega$的正方向绕行时, 区域Ω的点总在它的左手边.

定理2.3.14 (多连通的Cauchy 定理) 设Ω是由复围线

$$\partial\Omega = C_0 + C_1^- + C_2^- \cdots + C_n^-$$

所围成的有界多连通区域, $f(z)$在$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$ 中解析, 则

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0. \tag{2.3.8}$$

证明 为证明这个定理, 我们使用归纳法. 当$n=0$时, 由推论2.3.6, (2.3.8)式成立. 设(2.3.8)式对$n-1(n \geqslant 1)$成立. 当n时,存在$a \in C_0$ 和$b \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k$使得

$$|a-b| = d\left(C_0, \bigcup_{k=1}^{n} C_k\right).$$

可不妨设$b \in C_n$ (如图5, $n=3$时的情形). 于是对有向线段$[a,b] \subset \overline{\Omega}$, 可以假设$a$为闭曲线$C_0$的起点和终点, 则曲线$[a,b], C_n^-$, $[b,a]$和C_0首尾相接构成一条闭分段光滑曲线L^0. 设Ω_0是由复围线$\partial\Omega_0 = L^0 + C_1^- + C_2^- \cdots + C_{n-1}^-$ 所围成的有界多连通区域, $f(z)$在$\overline{\Omega}_0 = \Omega \bigcup \partial\Omega$ 中解析, 由归纳法, (2.3.8)式对$n-1(n \geqslant 1)$成立, 由于在$[a,b]$上沿相反方向的积分抵消, 所以(2.3.8)式对n也成立. □

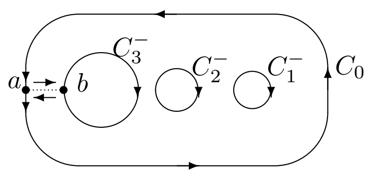

图5

同理可得到如下定理.

定理2.3.15 (多连通的Cauchy求导公式) 设区域Ω的边界是复围线$\partial\Omega$, $f(z)$在$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$中解析, 则

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}).$$

定理2.3.16 (解析函数均值定理) 如果函数$f(z)$ 在圆盘$|z-z_0| < R$ 内解析, 在闭圆盘$|z-z_0| \leqslant R$ 上连续, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) d\theta. \tag{2.3.9}$$

即它在圆心z_0 的值等于它在圆周上的值的算术平均.

证明 由 Cauchy 公式, 有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(z)dz}{z-z_0},$$

其中$0<r<R$, 而$\partial D(z_0,r)$ 的参数方程为$z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 从而

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}d\theta}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta. \tag{2.3.10}$$

由于$f(z)$ 在$\overline{D(z_0,R)}$上一致连续, 在(2.3.10)式中令$r\to R$, 则知(2.3.9)式成立. □

定理2.3.17 (Cauchy 不等式) 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, a为Ω内一点, 如果$\overline{D(a,R)}=\{z:|z-a|\leqslant R\}\subset\Omega$, 则有

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M(R)}{R^n}\quad(n\in\mathbb{N}), \tag{2.3.11}$$

其中

$$M(R)=\max\{|f(z)|:|z-a|=R\}.$$

证明 由定理2.3.9 的 Cauchy 高阶求导公式,

$$|f^{(n)}(a)|=\left|\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,R)}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right|=\left|\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\right|\leqslant\frac{n!M(R)}{R^n},$$

所以(2.3.11)式成立. □

在整个复平面$\mathbf{C}$上解析的函数称为**整函数**. 例如多项式、指数函数e^z、正弦函数$\sin z$和余弦函数$\cos z$都是整函数.

定理2.3.18 (Liouville(刘维尔) 定理) 有界整函数必为常数.

证明 设$f(z)$是有界整函数, 所以存在正常数$M>0$, 使得对任意的$z\in\mathbb{C}$有$|f(z)|\leqslant M$. 取a为$\mathbb{C}$内任一点, 对任意$R>1$, 由(2.3.11)式, 有

$$|f'(a)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

令$R\to\infty$, 则知$f'(a)=0$, 从而$f(z)$ 在$\mathbb{C}$中恒等于常数. □

设函数$f(z)$在有界区域Ω上解析, 并连续到$\partial\Omega$上, 则$|f(z)|$显然是$\overline{\Omega}$上的连续函数, 从而$|f(z)|$必在$\bar{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$上取最大值. 最大模原理指出, $|f(z)|$的最大值只能在边界$\partial\Omega$上取到, 除非$f(z)$为常数.

定理2.3.19 (最大模原理) 设函数$f(z)$在有界区域Ω内解析, 并连续到边界$\partial\Omega$上. 设$M=\max\{|f(z)|: z\in\overline{\Omega}\}$, 则在$\Omega$内有$|f(z)|<M$, 除非$f(z)=M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, 这里$M,\alpha$为常数.

证明 如果存在$z_0\in\Omega$ 使得$|f(z_0)|=M$, 令$D=\{z\in\Omega: |f(z)|=M\}$, 则$D\neq\varnothing$. 这是因为已知有$z_0\in D$. 由于$f(z)$为$\overline{\Omega}$上的连续函数, 故$\overline{D}\bigcap\Omega=D$. 现在来证$D$也是开集. 若$z_0'\in D$, 取$r_0>0$使得$D(z_0',r_0)\subset\Omega$. 对任意$r$ 使得$0<r<r_0$. 于是由均值性质,

$$M=|f(z_0')|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0'+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0'+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|dt\leqslant M.$$

由于上式中左、右两端相等, 故所有不等式中等号成立, 即$|f(z_0')|=|f(z_0'+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|=M$ 对所有的$t\in[0,2\pi]$及$0<r<r_0$都成立. 于是$D(z_0',r_0)\subseteq D$, 则D是开集. 因此D是Ω中非空、既开又闭的集合. 由于Ω是连通的, 故由定理1.4.18, $D=\Omega$, 因此$|f(z)|$在Ω上为常数M. 如果$M=0$, 则$f(z)$ 在Ω中恒为零. 如果$M>0$, 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 则$u^2(x,y)+v^2(x,y)=M^2$. 所以 $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0$; $u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0$. 从而由Cauchy−Riemann方程, 知 $u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 由于$u^2(x,y)+v^2(x,y)=M^2>0$, 所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$; $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 从而$u$在$\Omega$中恒为常数, 由Cauchy−Riemann方程, v在Ω中也恒为常数.于是f在Ω中恒为常数, 它的绝对值是M, 所以存在实数α, 使得$f(z)$ 在Ω中恒为常数$M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. □

例2.3.20 计算积分

$$I=\int_{|z|=4}\frac{z}{(z-1)(z-2)}dz,$$

其中$\int_{|z|=4}$表示沿圆周$|z|=4$反时针方向积分.

解 因为

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1},$$

所以由Cauchy 公式(2.3.6), 有

$$I=\int_{|z|=4}\frac{2}{z-2}dz-\int_{|z|=4}\frac{1}{z-1}dz=4\pi i-2\pi i=2\pi i.$$

§2.4 初等解析函数和多值函数的解析分支

定义2.4.1 (多值函数的连续分支的定义) 设Ω 为区域, $\mathbf{F}(z)$ 为区域Ω上的多值函数, 如果$f(z)$ 为Ω上的连续函数,并且对任意的$z \in \Omega$, 有$f(z) \in \mathbf{F}(z)$, 则称$f(z)$ 为$\mathbf{F}(z)$在区域Ω上的连续分支.

定义2.4.2 (多值函数的解析分支的定义) 设Ω 为区域, $\mathbf{F}(z)$ 为区域Ω上的多值函数, 如果$f(z)$ 为Ω上的解析函数,并且对任意的$z \in \Omega$, 有$f(z) \in \mathbf{F}(z)$, 则称$f(z)$ 为$\mathbf{F}(z)$在区域Ω上的解析分支.

显然, 如果$f(z)$ 为$\mathbf{F}(z)$在区域Ω上的解析分支, 则$f(z)$ 为$\mathbf{F}(z)$在区域Ω上的连续分支.

例2.4.3 指数函数e^z有如下性质:满足 (1) 对于任何复数$z = x + \mathrm{i}\, y$, 有$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\, y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\, \sin y)$; (2) 于是对于实数$z = x (y = 0)$, 指数函数与通常实指数函数的定义是一致的; (3) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x > 0$, (4) e^z在$z-$平面上解析,且$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$; (4) $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$; (5) e^z是以$2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期的周期函数.

定义2.4.4 我们规定对数函数是指数函数的反函数. 即若设$z \neq 0, \infty$, 将满足$z = \mathrm{e}^w$的复数w称为z的对数值, 同时把z的一切对数值的集合称为z的对数, 并且记作$\mathbf{Ln}\ z$.

设$w = u + \mathrm{i}\, v$, 则$z = \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}\, v} = \mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i}\, \sin v)$. 因为$|z| = \mathrm{e}^u$, 所以$u = \ln|z|$, 又$v = \arg z + 2k\pi$, 从而 $\mathbf{Ln}\ z = \{\ln|z| + \mathrm{i}\, \arg z + \mathrm{i}\, 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. 若把等于$\ln|z| + \mathrm{i}\arg z$的对数值称为主值, 记作$\ln z$, 则

$$\mathbf{Ln}\ z = \{\ln z + 2k\pi\mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

把z看成非零复数, 则z的对数函数$w = \mathbf{Ln} z$的定义域为$\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

当z_1, z_2为非零复数时, 其积与商的对数的计算法则如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ln}(z_1 z_2) &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\mathbf{Arg}\ (z_1 z_2)\\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}(\mathbf{Arg}\ z_1 + \mathbf{Arg}\ z_2) = \mathbf{Ln} z_1 + \mathbf{Ln}\ z_2;\\ \mathbf{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \ln\ |z_1| - \ln\ |z_2| + \mathrm{i}(\mathbf{Arg}\ z_1 - \mathbf{Arg}\ z_2) = \mathbf{Ln}\ z_1 - \mathbf{Ln}\ z_2.\end{aligned}$$

定理2.4.5 (解析函数的对数解析分支) 设Ω 为单连通区域, $f(z)$在Ω中解析且处处不为零, 则$\mathbf{Ln} f(z)$ 在区域Ω上有解析分支$g(z)$ 满足$\mathrm{e}^{g(z)} = f(z)$, 并

且$\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω上所有的解析分支一定是$g(z)+2k\pi\mathrm{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$的形式, 即

$$\mathbf{Ln}f(z)=\{g(z)+2k\pi\mathrm{i}:k\in\mathbb{Z}\}. \tag{2.4.1}$$

从而$\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω中有无穷个解析分支, $\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω 上任意两个解析分支相差$2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍.

证明 由于Ω 为单连通区域, 函数$\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在Ω 中解析, 由推论2.3.6, 函数$\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在Ω 中有原函数$g_0(z)$, 它在Ω 中解析, 满足$g_0'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$. 从而

$$(f(z)\mathrm{e}^{-g_0(z)})'=f'(z)\mathrm{e}^{-g_0(z)}-f(z)\mathrm{e}^{-g_0(z)}g_0'(z)=0 \quad (z\in\Omega).$$

于是$f(z)\mathrm{e}^{-g_0(z)}$ 在Ω 中恒为一个不为零的常数c, 即$f(z)=c\mathrm{e}^{g_0(z)}$. 取$a$满足$\mathrm{e}^a=c$, 令$g(z)=g_0(z)+a$, 则$\mathrm{e}^{g(z)}=\mathrm{e}^{g_0(z)+a}=c\mathrm{e}^{g_0(z)}=f(z)$, 于是$g(z)$ 为$\mathbf{Ln}\ f(z)$ 在区域Ω上的解析分支. 显然对任意的$k\in\mathbb{Z}$,$g(z)+2k\pi\mathrm{i}$ 也是$\mathbf{Ln}\ f(z)$ 在区域Ω中的解析分支. 设$h(z)$ 是区域Ω上$\mathbf{Ln}\ f(z)$ 的另一个解析分支, 则它满足$\mathrm{e}^{h(z)}=f(z)=\mathrm{e}^{g(z)}$. 则对任意$z\in\Omega$, 有$\mathrm{e}^{h(z)-g(z)}=1$. 从而$1=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(h(z)-g(z))}$. 因此$\mathrm{Re}\,(h(z)-g(z))=0$. 由于$(h(z)-g(z))$在区域$\Omega$ 上解析, 由Cauchy-Riemann方程知$h(z)-g(z)$在区域Ω中为常数. 由$\mathrm{e}^{h(z)-g(z)}=1$, 存在整数k, 使得$(h(z)-g(z))=2k\pi i$ 从而$h(z)=g(z)+2k\pi\mathrm{i}$. 所以$\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω上有解析分支$g(z)$, $\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω上任意两个解析分支相差$2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍. □

定理2.4.5 表明, $\mathbf{Ln}f(z)$ 在单连通区域Ω上任意两个解析分支, 在区域Ω上一点z_0的值相等, 则两解析分支恒等. 所以在$z_0\in\Omega$的点取定$\mathbf{Ln}f(z_0)$的值w_0, 则满足$g(z_0)=w_0$的单值解析分支$g(z)$就唯一地确定了. 为了方便, 当Ω 为单连通区域, $f(z)$在Ω中解析处处不为零, $\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω上的解析分支$g(z)$ 有时简写为$\ln f(z)$. 如果要强调是特定的一支, 需给定一点$z_0\in\Omega$, 然后确定$\ln f(z)$在z_0点的值.

例2.4.6 (对数函数的解析分支) 设Ω 为单连通区域, $z_0\notin\Omega$, 则$\mathbf{Ln}(z-z_0)$ 在区域Ω上有解析分支$\ln_\Omega(z-z_0)$, 满足$\mathrm{e}^{\ln_\Omega(z-z_0)}=z-z_0$, 并且$\mathbf{Ln}(z-z_0)$ 在区域Ω上所有的解析分支一定是$\ln_\Omega(z-z_0)+2k\pi\mathrm{i},k\in\mathbb{Z}$的形式, 即

$$\mathbf{Ln}(z-z_0)=\{\ln_\Omega(z-z_0)+2k\pi\mathrm{i}:k\in\mathbb{Z}\} \quad z\in\Omega.$$

从而$\mathbf{Ln}(z-z_0)$ 在区域Ω中有无穷个解析分支, $\mathbf{Ln}(z-z_0)$ 在区域Ω上任意两个解析分支相差$2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍.

证明 设$f(z)=z-z_0$, 则$f(z)=z-z_0$在Ω中解析且处处不为零, 由定理2.4.5, 知例2.4.6成立.

注 设Ω 为单连通区域, $z_0 \notin \Omega$, 在不引起误解的情况下, 为了方便, 把$\mathbf{Ln}(z-z_0)$ 在区域Ω上的解析分支$\ln_\Omega(z-z_0)$中的下标Ω省略掉, 简记为$\ln(z-z_0)$. 例如$\mathbf{Ln}\ z$ 在区域$\Omega=\{z=re^{\mathrm{i}\theta}: r>0, 0<\theta<2\pi\}$上的无穷多个单值连续解析分支是

$$w_k=\ln_k z=\ln z+2k\pi\mathrm{i}=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\ (0<\arg z<2\pi,\ k\in\mathbb{Z}).$$

设Ω 为非空区域, φ 为Ω上的实连续函数, 则$\varphi(\Omega)$是实轴上的一个区间. 事实上, 对任意的$b_1,b_2\in\varphi(\Omega)$, 可不妨设$b_1<b_2$, 则存在$z_1,z_2\in\Omega$ 使得$b_1=\varphi(z_1), b_2=\varphi(z_2)$. 在$\Omega$ 中存在曲线$\gamma:[\alpha,\beta]\to\Omega$, 连接$z_1=\gamma(\alpha)$ 和$z_2=\gamma(\beta)$, 于是函数$h(t)=\varphi(\gamma(t))$是区间$[\alpha,\beta]$上的实连续函数且$b_1=h(\alpha), b_2=h(\beta)$. 由连续函数取中间值定理, 知$h([\alpha,\beta])\supset[b_1,b_2]$. 于是$\varphi(\Omega)$是实轴上的一个区间.

例2.4.7 (多值辐角函数的连续分支) 设Ω 为单连通区域, $z_0\notin\Omega$, 则$\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$ 在区域Ω上有连续分支$\arg_\Omega(z-z_0)$, 它在区域Ω上, 对实变量x和y, 有各阶偏导数, 并且$\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$ 在区域Ω上所有的连续分支一定是$\arg_\Omega(z-z_0)+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$的形式, 即

$$\mathbf{Arg}\ (z-z_0)=\{\arg_\Omega(z-z_0)+2k\pi: k\in\mathbb{Z}\}.$$

从而$\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$ 在区域Ω中有无穷个连续分支, $\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$ 在区域Ω上任意两个连续分支相差2π 的整数倍.

解 由例2.4.6, $\mathbf{Ln}\ (z-z_0)$ 在区域Ω上有解析分支$\ln_\Omega(z)$. 设$\arg_\Omega(z-z_0)=\mathrm{Im}\ \ln_\Omega(z-z_0)$, 则$\arg_\Omega(z-z_0)$在$\Omega$ 中连续, 在区域Ω上有对实变量x和y有各阶偏导数, 满足$\arg_\Omega(z-z_0)\in\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$, $z\in\Omega$.

设$f(z)$ 是$\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$ 在区域Ω上的一个连续分支, 则对任意$z\in\Omega$, 有$f(z)\in\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$. 由于$\varphi(z)=(2\pi)^{-1}(f(z)-\arg_\Omega(z-z_0))$在区域$\Omega$上是实连续函数, 只取整数, 而$\varphi(\Omega)$是实轴上的一个区间, 所以存在整数$k$,使得$\varphi(\Omega)=\{k\}$, 从而$f(z)-\arg_\Omega(z-z_0)=2k\pi$. 所以$\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$ 在区域Ω上任意两个连续分支相差2π 的整数倍.

注 设Ω 为单连通区域, $z_0\notin\Omega$, 在不引起误解的情况下, 为了方便, 把$\mathbf{Arg}\ (z-z_0)$ 在区域Ω上的连续分支$\arg_\Omega(z-z_0)$中的下标Ω省略掉, 简记为$\arg(z-z_0)$.

由例2.4.7, 我们可以得到如下几何上比较显然的结论: 设$\Gamma: z=\gamma(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$是一条分段光滑的有向曲线(简称为路径), 如果$0\notin\Gamma$, 即$\gamma(t)$在$[a,b]$上不取零值, 则存在$\rho(t)=|\gamma(t)|, \vartheta(t)$ 是$[a,b]$上分段光滑的实函数, 使得$\gamma(t)=\rho(t)e^{\mathrm{i}\vartheta(t)}$.

事实上, $\rho(t)=|\gamma(t)|$与$\gamma(t)$一样, 是$[a,b]$上分段光滑的实函数. 另外, 设$2\delta=d(0,\Gamma)$表示原点0到Γ的距离, 则$\delta>0$, 由于$\gamma(t)$在$[a,b]$上一致连续, 存在正整数n, 使得当$|t-t'|\leqslant\frac{b-a}{n}, t,t'\in[a,b]$ 时, $|\gamma(t)-\gamma(t')|<\delta$. 设

$$t_k=a+\frac{k}{n}(b-a),\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

则

$$\gamma([t_{k-1},t_k])\subset D(\gamma(t_{k-1}),\delta)\bigcap D(\gamma(t_k),\delta)\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

由例2.4.7, 可以得到$\mathbf{Arg}\,z$在圆盘$D(\gamma(t_0),\delta)$上的连续分支$\arg_0 z$, 它在区域 $D(\gamma(t_0),\delta)$上, 对实变量x和y, 有各阶偏导数. 同理, 可以得到$\mathbf{Arg}\ z$ 在圆盘$D(\gamma(t_1),\delta)$上的连续分支$\arg_1 z$, 满足$\arg_1\gamma(t_1)=\arg_0\gamma(t_1)$, $\arg_1 z$ 在区域 $D(\gamma(t_1k),\delta)$上, 对实变量x和y, 有各阶偏导数. 归纳得到$\mathbf{Arg}\ z$ 在圆盘$D(\gamma(t_k),\delta)$上的连续分支$\arg_k z$, 它在区域 $D(\gamma(t_k),\delta)$上, 对实变量x和y, 有各阶偏导数, 且当$k\geq 1$时, $\arg_{k-1} z$和$\arg_k z$在单连通区域 $D(\gamma(t_{k-1}),\delta)\bigcap D(\gamma(t_k),\delta)$ 上相等. 令

$$\vartheta(t)=\arg_k(\gamma(t)), t\in[t_{k-1},t_k],\ k=1,2,\cdots,n,$$

那么$\vartheta(t)$ 是$[a,b]$上分段光滑的实函数, 满足$\gamma(t)=\rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(t)}$.

定理2.4.8 (解析函数n方根的解析分支) *设$n\geqslant 2$是一个整数, Ω 为单连通区域, $f(z)$在Ω中解析处处不为零, 则$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω上有解析分支$g(z)$, 并且$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω上所有解析分支是$g(z)\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$的形式, 即*

$$(f(z))^{\frac{1}{n}}=\{g(z)\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}:k=0,1,\cdots,n-1\}.$$

从而$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω中有n个解析分支, $(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω上任意两个解析分支相除是$\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$ 的整数幂.

证明 由例2.4.7, $\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω上有解析分支$g_0(z)$ 满足$\mathrm{e}^{g_0(z)}=f(z)$. 于是函数$g(z)=\mathrm{e}^{\frac{g_0(z)}{n}}$ 在Ω上解析, 满足$(g(z))^n=\mathrm{e}^{g_0(z)}=f(z)$. 设$h(z)$ 是区域Ω上$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 的一个解析分支, 则它满足$(h(z))^n=f(z)=(g(z))^n$, 则对任意$z\in\Omega$, 有$\left(\frac{h(z)}{g(z)}\right)^n=1$, 从而$1=\left|\frac{h(z)}{g(z)}\right|$. 由于$\frac{h(z)}{g(z)}$ 在区域Ω 上解析, 由Cauchy-Riemann方程知$\frac{h(z)}{g(z)}$在区域Ω中为常数, 设此常数为c, $\frac{h(z)}{g(z)}=c$, 于是$|c|=1, c^n=1$. 所以存在非负整数$k<n$, 使得$c=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}$, 于是$h(z)=g(z)\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}$. 故$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω上所有的解析分支一定是$g(z)\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$的形式. □

定理2.4.9 (连续函数为n方根的解析分支的判别定理) *设$n\geqslant 2$是一个整数, Ω 为区域, $f(z)$在Ω中解析处处不为零, $g(z)$ 为$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω上的连续分支, 则$g(z)$为$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω上的解析分支$g(z)$.*

证明　设$z_0\in\Omega, z_0+\triangle z\in\Omega$, 由于$f(z)=(g(z))^n$, 所以

$$f(z_0+\triangle z)-f(z_0)=(g(z_0+\triangle z)-g(z_0))\sum_{k=0}^{n-1}g^k(z_0+\triangle z)g^{n-1-k}(z_0),$$

$g(z)$ 在z_0处连续, 且$g(z_0)\neq 0$, 所以$g'(z_0)$ 存在, 且$f'(z_0)=g'(z_0)ng^{n-1}(z_0)$, 所以$g(z)$ 在区域Ω上解析, 故$g(z)$为$(f(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域Ω上的解析分支. □

例2.4.10 证明多值函数$\left(z^2(1-z)^3\right)^{\frac{1}{5}}$ 在$z-$平面上割去线段$[0,1]$的区域$D=\mathbb{C}\setminus[0,1]$(如图6)上可以分出5个解析分支. 求出在$(0,1)$的上沿取正值的那个单值解析分支$g_0(z)$在点$z=-1$处的值$g_0(-1)$ 以及$g_0'(-1)$和$g_0''(-1)$.

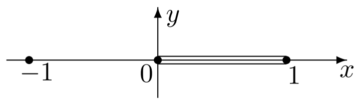

图6

证明　设$P(z)=z^2(1-z)^3=-z^2(z-1)^3$, $D_0=\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 为$z-$平面上割去射线$[0,+\infty)$的单连通区域, 从而$(P(z))^{\frac{1}{5}}$ 在D_0中有5个解析分支

$$f_k(z)=|P(z)|^{\frac{1}{5}}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{5}(2\arg z+3\arg(z-1)-3\pi+2k\pi)\right\}$$
$$0<\arg z<2\pi,\quad 0<\arg(z-1)<2\pi,\quad k=0,1,2,3,4,$$

从而$f_k(z)=f_0(z)\exp\{2k\pi\mathrm{i}/5\}$, $k=1,2,3,4$. 当$x_0\in(0,1)$时, $\arg z$和$\arg(z-1)$在$x_0\in(0,1)$ 的上沿的值分别为0和π; $\arg z$和$\arg(z-1)$在$x_0\in(0,1)$ 的下沿的值分别为2π和π, 所以$f_0(z)$ 在$x_0\in(0,1)$ 的上沿的值为

$$f_{0+}(x_0)=\lim_{\operatorname{Im}z>0,z\to x_0}f_0(z)=|P(x_0)|^{\frac{1}{5}},$$

$f_0(z)$ 在$x_0\in(0,1)$ 的下沿的值为

$$f_{0-}(x_0)=\lim_{\operatorname{Im}z<0,z\to x_0}f_0(z)=|P(x_0)|^{\frac{1}{5}}\exp\{\frac{4\pi\mathrm{i}}{5}\}.$$

当$x_0>1$时, $\arg z$和$\arg(z-1)$在$x_0\in(1,+\infty)$ 的上沿的值分别为0和0; $\arg z$和$\arg(z-1)$在$x_0\in(1,+\infty)$ 的下沿的值分别为2π和2π, 所以$f_0(z)$ 在$x_0\in(1,+\infty)$ 的上沿的值为

$$f_{0+}(x_0)=\lim_{\operatorname{Im}z>0,z\to x_0}f_0(z)=|P(x_0)|^{\frac{1}{5}}\exp\{\frac{-3\pi\mathrm{i}}{5}\},$$

$f_0(z)$ 在$x_0\in(1,+\infty)$ 的下沿的值为

$$f_{0-}(x_0)=\lim_{\operatorname{Im}z<0,z\to x_0}f_0(z)=|P(x_0)|^{\frac{1}{5}}\exp\{\frac{7\pi\mathrm{i}}{5}\}=f_{0+}(x_0).$$

于是当$x_0 > 1$时,$f_0(z)$ 在$x_0 \in (1,+\infty)$ 的上沿的值等于$f_0(z)$ 在$(1,+\infty)$ 的下沿的值. 由此可见, $(P(z))^{\frac{1}{5}}$ 在D_0中的5个单值解析分支$f_k(z)$可以延拓到割去线段$[0,1]$的区域$D = D_0 \bigcup (1,+\infty)$上, 成为区域$D$上连续函数,延拓后的连续函数仍记为$f_k(z)$. 由定理2.4.9, $f_k(z)$为区域D上的解析函数. 函数f_0 在$[0,1]$的上沿取正值, 从而$g_0(z) = f_0(z)$, 它在点$z = -1$处的值为

$$g_0(-1) = |P(-1)|^{\frac{1}{5}} \exp\{\frac{\mathrm{i}}{5}(2\pi + 3\pi - 3\pi)\} = 2^{\frac{3}{5}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{5}}.$$

由于$(g_0(z))^5 = P(z) = z^2(1-z)^3$, 所以$5(g_0(z))^4 g_0'(z) = P'(z) = 2z(1-z)^3 - 3z^2(1-z)^2$, 从而

$$20(g_0(z))^3(g_0'(z))^2 + 5(g_0(z))^4 g_0''(z) = P''(z) = 2(1-z)^3 - 12z(1-z)^2 + 6z^2(1-z),$$

$$P'(-1) = -28, \quad P''(-1) = 2(1+1)^3 + 12(1+1)^2 + 6(1+1) = 76,$$
$$g_0'(-1) = -\frac{7}{5} 2^{-\frac{2}{5}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{5}}, \qquad g_0''(-1) = -\frac{3}{50} 2^{\frac{3}{5}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{5}}.$$

当$P(z)$是次数为$N \geqslant 1$的多项式时, 为了求出$P(z)$的$n \geqslant 2$方根的解析分支和解析分支的解析区域, 第一步先将$P(z)$分解成

$$P(z) = a(z-a_1)^{l_1}(z-a_2)^{l_2} \cdots (z-a_k)^{l_k},$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_k$是$P(z)$的一切相异零点, $l_1, l_2, \cdots, l_k$分别是它们的重数,

$$N = l_1 + l_2 + \cdots + l_k, \quad a \neq 0.$$

第二步用Jordan折线L (或其他Jordan 曲线) 连接这些相异零点和∞, 则区域$D_0 = \mathbb{C} \setminus L$是单连通区域, 确定$\arg a$的值和连续分支$\arg(z-a_j)$在$D_0$中的取值范围, 由定理2.4.8, $(P(z))^{\frac{1}{n}}$ 在区域D_0上的n个解析分支有如下形式

$$f_s(z) = |P(z)|^{\frac{1}{n}} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{n} \left(\arg a + \sum_{j=1}^{k} l_j \arg(z-a_j) + 2s\pi \right) \right\}$$

或

$$(P(z))^{\frac{1}{n}} = \{ f_0(z) \mathrm{e}^{\frac{2s\pi \mathrm{i}}{n}} : s = 0, 1, \cdots, n-1 \}.$$

第三步对Jordan折线上的线段I, 给出$\arg(z-a_j)$在I的两侧的值, 检查$f_0(z)$是否可以连续延拓到I上, 如果可以则将I添加到D_0中, 检查完所有Jordan折线上的线段后, 得到一个包含D_0的最大区域D, 使得$f_0(z)$可以连续延拓到D上, 由定

理2.4.9, 延拓后在D 上的连续函数是D上解析函数. 这样可以得到$P(z)$的$n \geqslant 2$方根的解析分支和解析分支的解析区域. 利用方程$(f_s(z))^n = P(z)$, 得到$n(f_s(z))^{n-1}f_s'(z) = P'(z)$, 可求出$f_s'(z)$在指定点的值.

定义2.4.11 设$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 不是整数, $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, 定义

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathbf{Ln} z} = \{\mathrm{e}^{\alpha w} : w \in \mathbf{Ln}\ z\}$$

称为z的α 次幂函数.

性质2.4.12 设$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 不是整数, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}, r > 0$, 则

$$z^\alpha = \{\mathrm{e}^{\alpha(\ln r + \mathrm{i}\,\theta + 2k\pi \mathrm{i})} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

性质2.4.13 设$\alpha = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ 是没有公因子的整数, $n \geqslant 2, z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, 则

$$z^\alpha = (z^m)^{\frac{1}{n}} = \left((z)^{\frac{1}{n}}\right)^m = \{r^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(m\theta + 2k\pi)} : k = 0, 1, \cdots, n-1\},$$

其中对于复数集$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$, 定义 $\mathbf{A}^0 = \{1\}, \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{AB} = \{ab : a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$和$\mathbf{A}^{m+1} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^m)$ $(m \in \mathbb{N})$.

证明 设$\alpha = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ 是没有公因子的整数, $n \geqslant 2$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$, $r > 0$, 则$z^m = r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$, 所以

$$(z^m)^{\frac{1}{n}} = \{r^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(m\theta + 2k\pi)} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

而

$$\left((z)^{\frac{1}{n}}\right)^m = \{r^{\frac{m}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(m\theta + 2(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)\pi)} : k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \cdots, m\}.$$

上面两个集合是相同的, 并且有$(z^m)^{\frac{1}{n}} \supset z^\alpha$. 由于$m, n$ 没有公因子, 则存在整数p, q 使得$np + mq = 1$, 从而

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(m\theta + 2k\pi)} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(m\theta + 2k(np + mq)\pi)} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m}{n}(\theta + 2kq\pi)} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

于是有$(z^m)^{\frac{1}{n}} \subset z^\alpha$. 从而有$(z^m)^{\frac{1}{n}} = z^\alpha$. □

定理2.4.14 (幂函数的解析分支) 设$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 不是整数, 设Ω 为单连通区域, $f(z)$在Ω中解析且处处不为零, 则$(f(z))^\alpha$ 在区域Ω上有解析分支$g(z)$, 并且$(f(z))^\alpha$ 在区域Ω上所有的解析分支一定是$g(z)\mathrm{e}^{2k\pi\alpha \mathrm{i}}$ $(k \in \mathbb{Z})$的形式, 即,

$$(f(z))^\alpha = \{g(z)\mathrm{e}^{2k\pi\alpha \mathrm{i}} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

从而$(f(z))^\alpha$ 在区域Ω上任意两个解析分支相除是$\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}$ 的整数幂. 当$\alpha=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$ 是没有公因子的整数, $n\geqslant 2$时, $(f(z))^\alpha$ 在区域Ω中有n 个解析分支, 当$\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$ 不是有理数时, $(f(z))^\alpha$ 在区域Ω中有无穷个解析分支.

证明 由定理2.4.5, $\mathbf{Ln}f(z)$ 在区域Ω上有解析分支$g_0(z)$ 满足$f(z)=\mathrm{e}^{g_0(z)}$. 函数$g(z)=\mathrm{e}^{\alpha g_0(z)}$在$\Omega$ 中解析, 满足$g(z)\in(f(z))^\alpha$. 所以$g(z)$ 为$(f(z))^\alpha$ 在区域Ω上的解析分支$g(z)$. 由定义2.4.11, 对任意的$k\in\mathbb{Z}$, 函数$g(z)\mathrm{e}^{2k\pi\alpha i}$是$(f(z))^\alpha$ 在区域Ω的解析分支. 如果$h(z)$是$(f(z))^\alpha$ 在区域Ω的解析分支, 由定义2.4.11, 存在整数$k(z)$, 使得$h(z)=g(z)\mathrm{e}^{2k(z)\pi\alpha\mathrm{i}}$, 从而$\varphi(z)=\frac{|f(z)|}{|g(z)|}=\mathrm{e}^{-2k(z)\pi\mathrm{Im}\,\alpha}$ 在区域Ω 上连续, 从而$\varphi(\Omega)$是区间, 而集合$\{\mathrm{e}^{-2k\pi\mathrm{Im}\,\alpha}:k\in\mathbb{Z}\}$至多为一可数点集, 从而$\varphi(\Omega)$是一个只含一个点的集和. 所以$\varphi(z)$在$\Omega$中为常数, 由Cauchy-Riemann方程知$\frac{f(z)}{g(z)}$在区域$\Omega$中为常数. 所以$k(z)$在$\Omega$中为常数$k\in\mathbb{Z}$. 从而$(f(z))^\alpha$ 在区域Ω上任意两个解析分支相除是$\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}$ 的整数幂. 当$\alpha=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$ 是没有公因子的整数, $n\geqslant 2, z\in\mathbb{C}, z\neq 0$, $(f(z))^\alpha$ 在区域Ω中有n 个解析分支, 当$\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$ 不是有理数时, $(f(z))^\alpha$ 在区域Ω中有无穷个解析分支. □

定理2.4.14 表明, $(f(z))^\alpha$ 在单连通区域Ω上任意两个解析分支, 在区域Ω上一点z_0的值相等, 则两个解析分支恒等. 这是因为: 如果$g_1(z)$和$g_2(z)$为$(f(z))^\alpha$ 在单连通区域Ω上的两个解析分支, 且$g_1(z_0)=g_2(z_0)$, 则存在整数k, 使得$g_2(z)=g_1(z)\mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}}$, 由$g_1(z_0)=g_2(z_0)\neq 0$, 有$\mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}}=1$, 于是在$\Omega$中有$g_2(z)=g_1(z)$. 所以在$z_0\in\Omega$的点取定$(f(z))^\alpha$的值$w_0$, 则满足$g(z_0)=w_0$的单值解析分支$g(z)$就唯一地确定了. 为了方便, 当$\Omega$ 为单连通区域, $f(z)$在Ω中解析且处处不为零, $(f(z))^\alpha$ 在区域Ω上的解析分支$g(z)$, 有时就直接简写为$(f(z))^\alpha$. 如果要强调是特定的一支, 需给定一点$z_0\in\Omega$, 然后确定$(f(z))^\alpha$在z_0点的值.

例2.4.15 正弦函数$\sin z$ 和余弦函数$\cos z$ 有如下性质:

(1) $2\mathrm{i}\sin z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$, $2\cos z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$.

(2) 当z为实数x时,与数学分析中的正弦函数及余弦函数的定义是一致的.

(3) 在$z-$平面上是解析, 且$(\sin z)'=\cos z, (\cos z)'=-\sin z$.

(4) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数, 并遵从通常的三角恒等式:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

(5) $\sin z$ 及$\cos z$ 是以2π为基本周期的周期函数.

(6) $\sin z$ 的零点(即$\sin z=0$ 的根)为$z=n\pi\,(n\in\mathbb{Z})$.

(7) $\cos z$ 的零点(即$\cos z=0$ 的根)为$z=(n+\frac{1}{2})\pi\ (n\in\mathbb{Z})$.

定义2.4.16 函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z},$$

分别称为z的正切、余切、正割及余割函数.

注 这四个函数都在z 平面上使分母不为零的点处解析, 且

$$(\tan z)'=\sec^2 z,\ \ (\cot z)'=-\csc^2 z,\ \ (\sec z)'=\sec z\tan z,\ \ (\csc z)'=-\csc z\cot z.$$

正切和余切的周期为π, 正割及余割的周期为2π.

定义2.4.17 函数

$$\sinh z=(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})/2,\quad \cosh z=(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})/2,\quad \tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z=\frac{1}{\tanh z}$$

分别称为z的双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切函数.

注 它们都是解析函数, 各有其解析区域, 且都是相应的实双曲函数在复数域中的推广. 由于e^z及e^{-z}皆以$2\pi\mathrm{i}$为基本周期, 双曲正弦、双曲余弦也以$2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期.

反三角函数定义为三角函数的反函数, 和一般幂函数一样, 也是用对数函数表示.

定义2.4.18 *多值函数* $\mathbf{Arcsin}\ z=\{w\in\mathbb{C}:\sin w=z\}$, $\mathbf{Arccos}\ z=\{w\in\mathbb{C}:\cos w=z\}$和$\mathbf{Arctan}\ z=\{w\in\mathbb{C}:\tan w=z\}$ *分别称为反正弦函数、反余弦函数和反正切函数.*

性质2.4.19 *反正弦函数、反余弦函数和反正切函数有如下表示:*

$$\mathbf{Arcsin}\ z=-\mathrm{i}\mathbf{Ln}(\mathrm{i}\,z+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}),\quad \mathbf{Arccos}\ z=-\mathrm{i}\mathbf{Ln}(z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}})$$

和

$$\mathbf{Arctan}\ z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathbf{Ln}\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}.$$

证明 只证反余弦函数的表达式. $w\in\mathbf{Arccos}z$ 充要条件是$z=\cos w=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,w}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,w}}{2}$. 令$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,w}=t$, 则$z=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}$, 该式可以化为$t^2-2zt+1=0$ 或$(t-z)^2=z^2-1$, 由此得$t-z\in(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$, 所以$w\in\mathbf{Arccos}\ z$的充要条件是$w\in-\mathrm{i}\,\mathbf{Ln}\ t=-\mathrm{i}\,\mathbf{Ln}(z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}})$. □

习 题 二

1. 讨论函数 $f(z) = xy^2 - \mathrm{i}x^2y$的可微性和解析性(在何处可微和解析).

2. 试证函数$f(z) = \mathrm{e}^x(-\sin y) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \cos y$在$z$ 平面上解析, 并求出其导函数.

3. 计算积分$\int_C |z|^2(\mathrm{Re}\ z)dz$, 积分路径$C$ 是

(1) 从1到-1的直线段;

(2) 从1到-1的上半单位圆周;

(3) 从1到-1的下半单位圆周.

4. 写出下列函数的实部和虚部, 并验证它们满足Cauchy$-$Riemann条件:

(1) $\sin z$; (2) $\cos z$; (3) z^3; (4) e^z.

5. 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, 且满足下列条件之一, 证明$f(z)$在Ω 中为常数.

(1)在Ω中, $f'(z) = 0$,

(2) $\overline{f(z)}$ 在区域Ω内解析,

(3) $\mathrm{Re}\ f(z)$或$\mathrm{Im}\ f(z)$在区域Ω内为常数,

(4) $|f(z)|$在区域Ω内为常数.

6. 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, 证明$\overline{f(\bar{z})}$在区域$\Omega_1 = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$中解析.

7. 计算积分

(1) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{1}{z^2+4}dz$; (2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{z^2-4}dz$;

(3) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z-1}{(2z+1)(z+2)}dz$; (4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}dz$.

8. 如果函数$f(z), g(z)$在点z_0解析,且$f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, 则

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

9. 通过计算积分

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z},$$

其中n是正整数, 求证

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

10. 通过计算积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=R}\frac{z+a}{z-a}\frac{dz}{z}\quad (|a|<R),$$

求证

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|R\mathrm{e}^{i\theta}-a|^2}d\theta=1.$$

11. 设

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2},$$

证明$f^{(4n+3)}(1)=0$ $(n\in\mathbb{N})$.

12. 试证函数 $f(z)=(\mathrm{e}^x(-\sin y)+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\cos y)(x^2-y^2+2\mathrm{i}\,xy+1)$在$z$ 平面上解析, 并求出其导函数.

13. 验证

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg)=\frac{\partial f}{\partial z}g+f\frac{\partial g}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(fg)=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g+f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.$$

14. 对下列函数$f(z,\bar{z})$, 直接计算$\frac{\partial f}{\partial z}$和$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$:

(1) $z+z^2+z^3+z^4$; (2) $1+\bar{z}-\bar{z}^2$;

(3) $(z^2+\bar{z}^2)^3$; (4) $z^2+2z\bar{z}+3|z|^3$.

15. 证明在极坐标下, 函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$的Cauchy−Remann方程是:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

16. 证明多值函数$\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$在区域$D=\mathbb{C}\setminus([-2,-1]\bigcup[1,2])$中有解析分支$f(z)$ 满足$f(0)=2$. 求$f(\mathrm{i})$和$f'(\mathrm{i})$的值.

17. 证明对任意复数z, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\mathrm{e}^z.$$

18. 证明对于$\cos(z+w)$, $\sin(z+w)$的加法公式.

19. 证明$|\sin(x+\mathrm{i}\,y)|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y$.

20. 证明$|\cos(x+\mathrm{i}\,y)|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y$.

21. 证明$\sin z$的零点集为$\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$.

22. 证明$\cos z$的零点集为$\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi : n\in\mathbb{Z}\}$.

23. 假设f,g在区域Ω中解析. 证明Leibniz(莱布尼茨)公式

$$(f(z)g(z))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(z)g^{(k)}(z)$$

成立, 其中$f^{(0)}(z)=f(z), g^{(0)}(z)=g(z)$, 以及

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

24. 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$,证明在极坐标下, 函数$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r>0, R=R(r,\theta)>0, \psi=\psi(r,\theta)$, Cauchy−Remann方程分别与

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

和

$$r\frac{\partial R}{\partial r}=R\frac{\partial \psi}{\partial \theta},\quad \frac{\partial R}{\partial \theta}=-rR\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

等价.

25. 在下列区域中, 哪些区域存在$\mathbf{Ln}(z^2-1)$的解析分支?

(1) $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$; (2) $\mathbb{C}\setminus[-1,+\infty)$;

(3) $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$; (4) $\mathbb{C}\setminus([-1,0]\cup[1,+\infty))$.

26. 在下列区域中, 哪些区域存在$\sqrt{z^2-1}$的解析分支?

(1) $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$; (2) $\mathbb{C}\setminus[-1,+\infty)$;

(3) $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$; (4) $\mathbb{C}\setminus([-1,0]\cup[1,+\infty))$.

27. 设C为$z-$平面上的任意正向简单闭曲线. 记

$$g(w)=\int_C\frac{z^3+2z}{(z-w)^3}dz.$$

证明当w在C内时, $g(w)=6\pi\mathrm{i}\,w$而w在C外时, $g(w)=0$.

28. 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$在有界闭区域$\overline{D}$上连续且在其内解析不为常数. 证明$u(x,y)$在且只在$\overline{D}$的边界处取得最大值及最小值.

第三章　解析函数的级数理论

本章把数学分析中的级数理论引入到复变函数中来, 给出解析函数的级数表示: Taylor 级数和 Laurent 级数. 以级数为工具, 研究解析函数的零点和孤立奇点的性质, 这些性质是解析函数特有的性质.

§3.1　复变函数项级数

定义3.1.1 设复函数项级数

$$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \tag{3.1.1}$$

的各项均在点集E上有定义, 且在E上存在一个函数$f(z)$, 对于E上每一点z, 级数(3.1.1)均收敛于$f(z)$, 则称$f(z)$ 为级数(3.1.1)的和函数, 记为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z). \tag{3.1.2}$$

$s_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$称为级数(3.1.1)的部分和函数.

上述的$\varepsilon-N$ 叙述为: 任给$\varepsilon>0$ 以及给定的$z\in E$, 存在$N=N(\varepsilon,z)$, 使当$n>N$时, 有

$$|s_n(z)-f(z)|=\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} f_k(z)\right|<\varepsilon.$$

上述的正整数$N=N(\varepsilon,z)$, 一般地说,不但依赖于ε , 而且依赖于z.

定义3.1.2 对级数(3.1.1), 如果在点集E上有一个函数$f(z)$, 使对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N=N(\varepsilon)$, 当$n>N$ 时, 对一切的$z\in E$ 均有

$$|s_n(z)-f(z)|=\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} f_k(z)\right|<\varepsilon,$$

则称级数(3.1.1)在E 上一致收敛于$f(z)$ 或称部分和序列$\{s_n(z)\}$ 在E 上一致收敛于$f(z)$.

不一致收敛可以叙述为: 存在某个$\varepsilon_0 > 0$, 对任何$N > 0$, 存在$n_N > N$和$z_N \in E$ 使得

$$\left| f(z_N) - \sum_{k=0}^{n_N} f_k(z_N) \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

定理3.1.3 (Cauchy (柯西)一致收敛准则) 级数(3.1.1)或部分和序列$\{s_n(z)\}$在点集E上一致收敛于某函数的充要条件是:任给$\varepsilon > 0$ 存在正整数$N = N(\varepsilon)$, 当$n > N$ 时, 对一切的$z \in E$ 均有

$$|s_{n+p}(z) - s_n(z)| = |f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \quad (p \in \mathbb{N}).$$

其逆否命题为: 级数(3.1.2) 在点集E上不一致收敛的充要条件是：存在$\varepsilon_0 > 0$, 对任何正整数$N > 0$, 存在$n_N > N, p_N > 0$ 和$z_N \in E$ 使得

$$|f_{1+n_N}(z_N) + \cdots + f_{n_N+p_N}(z_N)| \geqslant \varepsilon_0.$$

定理3.1.4 (Weierstrass(魏尔斯特拉斯) M−判别法) 如果有正数列$M_n(n \in \mathbb{N})$, 使对一切$z \in E$, 有

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

而且正项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ 收敛, 则复函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在集E上绝对收敛且一致收敛.

这样的正项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ 称为复函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 的优级数.

Weierstrass M−判别法把判别复函数项级数一致收敛性转化为判别正项级数的收敛性, 而实现后者较容易;另外Weierstrass M−判别法同时还可以判定绝对收敛性.

定理3.1.5 设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 的各项在点集E上连续, 并且一致收敛于$f(z)$, 则和函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

也在E上连续.

定理3.1.6 设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 的各项在分段光滑曲线C上连续, 并且在C上一致收敛于$f(z)$, 则沿C可以逐项积分:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)dz.$$

以上4个定理的证明同数学分析的证明.

定义3.1.7 设函数$f_n(z)(n\in\mathbb{N})$ 定义于区域Ω内, 若级数(3.1.2)在Ω内任一有界闭集上一致收敛, 则称此级数在Ω中内闭一致收敛.

定理3.1.8 级数(3.1.2)在圆盘$D(a,R):|z-a|<R$中内闭一致收敛的充要条件为: 对任意正数ρ, 只要$\rho<R$, 级数(3.1.2)在闭圆盘$\overline{D(a,\rho)}:|z-a|\leqslant\rho$ 上一致收敛.

证明 设级数(3.1.2) 在开圆盘$D(a,R)$中内闭一致收敛, 对任意正数ρ, 只要$\rho<R$, 闭圆盘$\overline{D(a,\rho)}$是$D(a,R)$ 中有界闭集, 所以级数(3.1.2) 在闭圆盘$\overline{D(a,\rho)}$上一致收敛.

反之, 设对任意正数ρ, 只要$\rho<R$, 级数(3.1.2) 在闭圆盘$\overline{D(a,\rho)}$ 上一致收敛, 则对任意$D(a,R)$中有界闭集K, 存在$\rho<R,\rho>0$使得$K\subset\overline{D(a,\rho)}$, 级数(3.1.2) 在闭圆$\overline{D(a,\rho)}$上一致收敛, 所以级数(3.1.2) 在$K$上一致收敛. 所以级数(3.1.2) 在圆$D(a,R)$中内闭一致收敛. □

定理3.1.9 (Weierstrass(魏尔斯特拉斯)定理) 设$f_n(z)(n\in\mathbb{N})$ 在区域Ω内解析, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在Ω中内闭一致收敛于$f(z)$, 则和函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)$$

在区域Ω内解析, 且

$$f^{(m)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(m)}(z)\ (z\in\Omega,m\in\mathbb{N}),$$

其中的级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n^{(m)}(z)$ 在Ω中内闭一致收敛于$f^{(m)}(z)$.

证明 先证$f(z)$在Ω上连续. 对任意的$a\in\Omega$, 存在$R>0$, 使得闭圆盘$\overline{D(a,R)}\subset\Omega$, 且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在$\overline{D(a,R)}$上一致收敛于$f(z)$. 由于$f_n(z)$ 在$\overline{D(a,R)}$上解析, 当然$f_n(z)$在$\overline{D(a,R)}$上连续, 于是$f(z)$也在$\overline{D(a,R)}$上连续, 由a的任意性知$f(z)$在Ω上连续. 任取长方形$\Box\subset\overline{D(a,R)}\subset\Omega$, 由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$在$\partial\Box$ 上一致收敛于$f(z)$, 又$f_n(z)$ 在Ω 中解析, 结合Cauchy 定理, 有

$$\int_{\partial\Box}f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Box}\sum_{k=0}^{n}f_k(z)dz=0.$$

由Morera 定理, f在Ω 中解析. 对任意紧集$K\subset\Omega$, 则存在$R>0$, 使得对任意的$a\in K$, 有$\overline{D(a,2R)}\subset\Omega$, 开圆盘族$\{D(a,R):a\in K\}$是紧集$K$的开覆盖, 所以$K$中存在有限个$a_1,a_2,\cdots,a_l$ 使得$\{D(a_k,R):k=1,2,\cdots,l\}$是紧集$K$的开覆盖, 由Cauchy 高阶求导公式, 对任意的$z\in D(a_k,R)$,

$$f_n^{(m)}(z)=\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a_k,2R)}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+1}}d\zeta,$$

$$f^{(m)}(z)=\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a_k,2R)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+1}}d\zeta.$$

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在 $\overline{D(a_k,2R)}$ 上一致收敛于 $f(\zeta)$, 对任意$\varepsilon>0$, 存在N_k, 当$n>N_k$时, 对任意的$\zeta\in\partial D(a_k,2R)$, 有

$$\left|\sum_{k=0}^{n}f_k(\zeta)-f(\zeta)\right|<\frac{\varepsilon R^m}{4m!}.$$

从而对任意$z\in D(a_k,R),\zeta\in\partial D(a_k,2R)$, 有$|\zeta-z|\geqslant|\zeta-a_k|-|z-a_k|\geqslant R$, 于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}f_k^{(m)}(z)-f^{(m)}(z)\right|&=\left|\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a_k,2R)}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}f_k(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+1}}d\zeta\right|\\&\leqslant\frac{m!}{2\pi}\int_{\partial D(a_k,2R)}\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n}f_k(\zeta)-f(\zeta)\right|}{|\zeta-z|^{m+1}}|d\zeta|\\&\leqslant\frac{\varepsilon R^m}{4m!}\frac{m!}{2\pi}\int_{\partial D(a_k,2R)}\frac{1}{R^{m+1}}|d\zeta|=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_l\}$, 当$n>N$时, 对任意的$z\in K\subset\bigcup\limits_{k=1}^{l}D(a_k,R)$, 有

$$\left|\sum_{k=0}^{n}f_k^{(m)}(z)-f^{(m)}(z)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n^{(m)}(z)$在$K$上一致收敛于$f^{(m)}(z)$, 从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n^{(m)}(z)$ 在Ω中内闭一致收敛于$f^{(m)}(z)$. □

§3.2　幂级数

具有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \tag{3.2.1}$$

形式的复函数项级数称为幂级数, 其中$c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 和a 都是复常数.

如果作变换$\zeta = z - a$, 则以上幂级数还可以写成如下形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n = c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots.$$

定理3.2.1 (Abel(阿贝尔) 定理)　如果幂级数 (3.2.1)在某点$z_1(\neq a)$ 收敛, 则它必在圆盘$D(a, |z_1 - a|) = \{z : |z-a| < |z_1 - a|\}$ 内绝对收敛且内闭一致收敛.

证明　由于幂级数(3.2.1)在某点$z_1(\neq a)$ 收敛, 所以有

$$\lim_{n\to\infty} c_n(z_1 - a)^n = 0.$$

因此存在正常数$M > 0$, 使得

$$|c_n(z_1-a)^n| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

对任意紧集$K \subset D(a, |z_1 - a|)$, 则存在$R > 0, R < |z_1 - a|$, 使得$K \subset \overline{D(a, R)}$. 令$q = \frac{R}{|z_1-a|}$, 则$0 < q < 1$, 且对$z \in K$, 有

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_1-a)^n| \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n \leqslant Mq^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

由于级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$收敛, 级数(3.2.1)在$D(a, |z_1 - a|)$ 内绝对收敛且内闭一致收敛. □

推论3.2.2　若幂级数 (3.2.1)在某点$z_2(\neq a)$ 发散, 则它在以a 为圆心, 半径为$|z_2 - z_1|$ 的圆周外部发散.

定义3.2.3　对幂级数(3.2.1), 数

$$R = \sup\{|z-a| : \text{幂级数(3.2.1)在点 } z \text{ 收敛}\} \tag{3.2.2}$$

称为幂级数(3.2.1)的收敛半径.

由阿贝尔(Abel) 定理和推论3.2.2, 如果$R>0$, 级数(3.2.1)在$D(a,R)$ 中收敛, 如果$R<\infty$, 级数在$\{z:|z-a|>R\}$ 中发散. 下一个定理给出了收敛半径R的求法公式.

定理3.2.4 (Cauchy (柯西)−Hadamard(阿达玛) 公式) *如果幂级数(3.2.1)的系数c_n 满足*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l \text{ (D'alembert (达朗贝尔))},$$

$$\text{或}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=l \text{ (Cauchy)},$$

$$\text{或}\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=l \quad \text{(Cauchy−Hadamard)}, \tag{3.2.3}$$

则幂级数(3.2.1)的收敛半径

$$R=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0<l<\infty,\\ 0, & l=\infty,\\ \infty, & l=0.\end{cases}$$

证明 只证(3.2.3). 当$l>0$时, 对$z_1\neq a$, 如果$|z_1-a|>\frac{1}{l}$, 则$l>\frac{1}{|z_1-a|}$, 由上极限l的定义, 存在一列严格递增正整数$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 使得$|c_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}|z_1-a|>1$, 所以$|c_{n_k}(z_1-a)^{n_k}|>1,\quad k\in\mathbb{N}$. 幂级数(3.2.1)在点$z_1$ 发散, 所以$R\leqslant\frac{1}{l}$. 从而当$l=\infty$时, $R=0$. 当$l<\infty$时, 对z_2, 如果$|z_2-a|<\frac{1}{l}$, 取$R_1>|z_2-a|$ 且$R_1<\frac{1}{l}$, 则$l<\frac{1}{R_1}$, 由上极限l的定义, 存在$N\geq 0$, 使得当$n\geq N$时, 有$|c_n|\leq R_1^{-n}$, 所以存在正常数$M>0$, 使得

$$|c_n|R_1^n\leqslant M,\quad n\in\mathbb{N}.$$

令$q=\frac{|z_2-a|}{R_1}$, 则$0<q<1$, 且有

$$|c_n(z_2-a)^n|\leqslant Mq^n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

由于级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}Mq^n$收敛, 级数(3.2.1) 在点$z_2$收敛, 所以$R\geqslant\frac{1}{l}$. 从而当$l=0$时, $R=\infty$; 当$0<l<\infty$时, $R=\frac{1}{l}$. □

定理3.2.5 *设幂级数 (3.2.1) 的收敛半径$R>0$, 则 (3.2.1) 的和函数$f(z)$在其收敛圆盘$D(a,R)=\{z:|z-a|<R\}$ 内解析. 在$D(a,R)$内, 幂级数 (3.2.1) 可以逐项求导至任意阶, 即*

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-p+1)c_n(z-a)^{n-p}\quad (p\in\mathbb{N}), \tag{3.2.4}$$

且

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.2.5}$$

证明 设$f_n(z) = c_n(z-a)^n$, 则$f_n(z)$ 在$D(a,R)$中解析. 由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在$D(a,R)$中内闭一致收敛, 所以和函数$f(z)$在$D(a,R)$ 中解析. 而由定理3.1.9 可知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z)$在$D(a,R)$ 中内闭一致收敛于$f^{(p)}(z)$, 所以(3.2.4)式成立. 在(3.2.4)中取$z = a$, 知(3.2.5)也成立. □

例3.2.6 等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{3.2.6}$$

在单位圆盘$D(0,1)$中内闭一致收敛到和函数$\frac{1}{1-z}$. 于是对任意正整数m, 有

$$\frac{m!}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)z^{n-m} \quad (|z| < 1), \tag{3.2.7}$$

级数(3.2.7)在单位圆盘$D(0,1)$中是内闭一致收敛到$\frac{m!}{(1-z)^{m+1}}$.

解 由于部分和为

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}.$$

如果$f(z) = \frac{1}{1-z}$, 那么当$|z| \leqslant R < 1$时,

$$|f(z) - S_n(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leqslant \frac{R^{n+1}}{1-R},$$

显然, 当$n \to \infty$时, 上式右边趋于零. 所以等比级数(3.2.6) 在单位圆盘$D(0,1)$中内闭一致收敛到和函数$\frac{1}{1-z}$. 由定理3.1.9, 级数(3.2.7) 在单位圆盘$D(0,1)$中是内闭一致收敛到$\frac{m!}{(1-z)^{m+1}}$.

§3.3 解析函数的 Taylor 展式

定理3.3.1 (Taylor(泰勒)定理) 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, $a \in \Omega$, 只要$D(a,R) = \{z : |z-a| < R\}$ 包含在Ω中, 则$f(z)$ 在$D(a,R)$内能展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots, \tag{3.3.1}$$

其中系数

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad (0 < \rho < R, n \in \mathbb{N}) \tag{3.3.2}$$

且如果$f(z)$ 在$D(a,R)$内能展成幂级数(3.3.1), 则 (3.3.2) 成立.

证明 如果$D(a,R) \subset \Omega$, 则当$|z-a| < r < R$时, 由Cauchy 公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

由于$|\zeta - a| = r < R$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

对$\zeta \in \partial D(a,r)$一致收敛, 因此

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

其中系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

由Cauchy 高阶求导公式(其中可以把r换成ρ),

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \quad (0 < \rho < R, n \in \mathbb{N}).$$

所以(3.3.1)式成立. 如果$f(z)$ 在$D(a,R)$内能展成幂级数(3.3.1), 则由定理3.1.9 和定理3.2.5, 知(3.3.2)成立. □

定义3.3.2 (3.3.1) 式称为$f(z)$ 在点a 的 Taylor 展式, (3.3.2)式称为其 Taylor 系数, 而(3.3.1) 式右边的级数, 则称为 Taylor 级数.

定理3.3.3 $f(z)$ 在区域Ω内解析的充要条件为: $f(z)$ 在Ω内任一点a 的邻域内可展成$z-a$ 的幂级数, 即 Taylor 级数.

定义3.3.4 设$f(z)$ 在区域Ω内一点a 的值为零, 则称a 为解析函数$f(z)$ 的零点. 如果a 为解析函数$f(z)$ 的零点, $m \geqslant 1$为整数且

$$f(a) = f^{(1)}(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0,\ f^{(m)}(a) \neq 0.$$

则称a 为解析函数$f(z)$ 的m 阶零点. 一阶零点称为简单零点.

定理3.3.5 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, 不恒为零, $a \in \Omega, f(a) = 0$, 则存在正整数m, 使得a是$f(z)$的m阶零点, 且存在Ω中的解析函数$\varphi(z)$, 满足$\varphi(a) \neq 0$且

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z). \tag{3.3.3}$$

证明 设$f(z)$在区域Ω内一点a 的值为零, 则存在$R > 0$, 使得$D(a, R) \subset \Omega$内解析, 由Taylor定理, $f(z)$ 在$D(a, R)$ 内能展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

其中$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$. 如果$f^{(n)}(a) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. 令$D = \{b \in \Omega : f^{(n)}(b) = 0, n \in \mathbb{N}\}$, 我们证明$D$是非空集.事实上, 对任意的$b \in D$, 存在$R_b > 0$, 使得$D(b, R_b) \subset \Omega$, 对任意的非负整数$n$, 由$f^{(n)}(b) = 0$和Taylor 定理, 对任意$z \in D(b, R_b)$, 有$f(z) = 0$, 于是对任意的非负整数$n$, $f^{(n)}(z) = 0$, 从而$D(b, R_b) \subset D$. 于是D是非空开集. 对任意的$b \in \overline{D} \cap \Omega$, 对任意的非负整数$n$, 由于$f^{(n)}(z)$ 连续, 所以$f^{(n)}(b) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, 从而$\overline{D} \cap \Omega \subset D$. 由定理1.4.18 , $D = \Omega$, 从而$f(z) \equiv 0$, 与$f(z)$ 在区域Ω内解析, 不恒为零矛盾. 所以存在正整数m, 使得a是$f(z)$的m 阶零点. 于是$c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$. 设

$$\varphi(z) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^n, & z \in D(a, R), \\ \frac{f(z)}{(z-a)^m}, & z \in \Omega \setminus D(a, R), \end{cases}$$

则$\varphi(z)$是Ω中的解析函数, 满足$\varphi(a) = c_m \neq 0$且(3.3.3)成立. □

定理3.3.6 (零点的孤立性定理) 如果函数$f(z)$ 在区域Ω 中解析, 不恒为零, $a \in \Omega, f(a) = 0$, 则必有a 的一个邻域$D(a, R) \subset \Omega$, 使得$f(z)$ 在$D(a, R)$ 中除a外无其他的零点.

证明 由定理3.3.5, 可以设a是$f(z)$的m 阶零点且存在Ω中的解析函数$\varphi(z)$满足$\varphi(a)\neq 0$且(3.3.3)成立. 由于$\varphi(z)$在点a连续, 取$\varepsilon=\frac{|\varphi(a)|}{2}>0$, 总存在$R>0$, 使得$D(a,R)\subset\Omega$ 且当$|z-a|<R$时, 有$|\varphi(z)-\varphi(a)|<\varepsilon$, 从而$|\varphi(z)|>|\varphi(a)|-\varepsilon=\varepsilon>0$. 因此, $\varphi(z)$在点a的邻域$D(a,R)$内除a外无其他的零点. □

简单说来就是: 不恒为零的解析函数的零点必是孤立的. 于是有如下推论.

推论3.3.7 *设$f(z)$ 在区域Ω 内解析. 如果$a\in\Omega$, 且在Ω 内有$f(z)$ 的一列零点$\{z_n\}(z_n\neq a)$ 收敛于a, 则$f(z)$ 在Ω内必恒为零.*

定理3.3.8 (解析函数唯一性定理) *设函数$g(z)$ 和$h(z)$ 在区域Ω内解析, $a\in\Omega$, 且Ω内有一个收敛于$a\in\Omega$ 的点列$\{z_n\}(z_n\neq a)$使得$g(z_k)=h(z_k)$ $(k\in\mathbb{N})$, 则$g(z)$ 和$h(z)$ 在Ω内恒等.*

证明 设$f(z)=g(z)-h(z)$, 由推论3.3.7, $f(z)\equiv 0$. □

唯一性定理揭示了解析函数一个非常深刻的性质, 解析函数在区域Ω内的局部值确定了函数在区域Ω内整体的值, 即局部与整体之间有着十分密切的内在联系.

定义3.3.9 *设Ω是区域, $a\in\partial\Omega$. 如果$f(z)$ 在区域Ω内解析,且存在$R>0$和$D(a,R)$上解析函数$F(z)$使得$D(a,R)\bigcap\Omega$ 是区域以及$F(z)$ 在$D(a,R)\bigcap\Omega$ 内与$f(z)$ 相等, 则称$f(z)$可以从区域Ω 中解析开拓到a点; 否则称a 为$f(z)$关于区域Ω的奇点.*

定理3.3.10 *如果幂级数*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{3.3.4}$$

的收敛半径$R>0, R<\infty$, 则它的和函数$f(z)$ 在收敛圆周$\partial D(a,R)=\{z:|z-a|=R\}$上至少有一奇点.

证明 如果$f(z)$ 在收敛圆周$\partial D(a,R)$上没有奇点, 即对任意的$b\in\partial D(a,R)$, 存在b的邻域$D(b,R_b)$ 和$D(a,R)\bigcup D(b,R_b)$上解析函数$F_b(z)$, $F_b(z)$ 在$D(a,R)$ 内与$f(z)$ 恒等. 开圆盘族$\{D(b,R_b):b\in\partial D(a,R)\}$ 是紧集$\partial D(a,R)$的开覆盖, 根据覆盖定理, 存在有限个开圆盘

$$D(b_k,R_{b_k}),\quad b_k\in\partial D(a,R),\quad k=1,2,\cdots,l,$$

它是紧集$\partial D(a,R)$的开覆盖. 设

$$\Omega = D(a,R)\bigcup\bigcup_{k=1}^{l} D(b_k, R_{b_k}),$$

则Ω 是一个包含闭圆盘$\overline{D(a,R)}$的区域, 在Ω上定义函数$F(z)$ 如下: 对任意的$z \in \Omega$, 存在k, 使得$z \in D(a,R)\bigcup D(b_k, R_{b_k})$, 则令$F(z) = F_{b_k}(z)$. 当

$$z \in D(a,R)\bigcup\Big(D(b_j, R_{b_j})\bigcap D(b_k, R_{b_k})\Big)$$

时, 有$F_{b_j}(z) = F_{b_k}(z)$, 所以$F(z)$为Ω上有定义的解析函数, 它在$D(a,R)$ 内与$f(z)$ 恒等. 由于存在$R' > R$, 使得$D(a,R') \subset \Omega$, 由Taylor 定理, 幂级数(3.3.4) 的收敛半径$\geqslant R'$, 与幂级数(3.3.4) 的收敛半径是R矛盾. 矛盾说明$f(z)$ 在收敛圆周$\partial D(a,R)$上至少有一奇点. □

定理3.3.10 表明, 如果幂级数(3.3.4)的收敛半径$R > 0$, 则不可能有这样的函数$F(z)$存在, 它在$D(a,R)$ 内与$f(z)$ 恒等, 而在$\partial D(a,R)$上处处解析. 定理3.3.10,一方面建立了幂级数的收敛半径与此幂级数所代表的函数的性质之间的密切关系; 同时, 还表明幂级数的理论只有在复数域内才弄得完全明白.

例3.3.11 幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \tag{3.3.5}$$

在收敛圆周$|z| = 1$上处处收敛, 其和函数$f(z)$ 在收敛圆周上仍然至少有一奇点.

解 幂级数(3.3.5)在单位圆盘中内闭一致收敛, 其和函数$f(z)$在单位圆盘内解析且

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}, \quad f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}.$$

$z = -1$ 是$f''(z) = \frac{1}{1+z}$ 的奇点, 所以$z = -1$ 是$f(z)$ 的奇点.

我们有$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, 所以

$$f'(z) = \int_0^z f''(\zeta)d\zeta = \ln(1+z), \quad f(z) = \int_0^z \ln(1+\zeta)d\zeta, \quad |z| < 1.$$

现在, 我们立即可得一确定收敛半径R的方法: 设$f(z)$ 在区域Ω中解析, 点$a \in \Omega$ 解析, 又设$f(z)$ 在点a 的某邻域内的幂级数展式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{3.3.6}$$

如果$A=\mathbb{C}\backslash\Omega$ 是一个至多可数集, 点$b\in A$ 是A中距a最近的一个奇点, 则$|a-b|=R$ 即为幂级数(3.3.6) 收敛半径.

例3.3.12 求函数e^z, $\cos z$, $\sin z$ 在a点的Taylor 展式.

解 由于e^z, $\cos z$, $\sin z$在整个平面都解析, 它们展成Taylor 级数的收敛半径均为无穷大.

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{z-a}=\mathrm{e}^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^a(z-a)^n}{n!},$$

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z})=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}\exp\{\mathrm{i}\,(z-a)\}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a}\exp\{-\mathrm{i}\,(z-a)\}\right)$$

由于$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}, -\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\frac{-\pi\mathrm{i}}{2}}$, 所以

$$\begin{aligned}\sin z&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{(a+\frac{\pi n}{2})\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+\frac{\pi n}{2})}}{2\mathrm{i}\ n!}(z-a)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(a+\frac{\pi n}{2})}{n!}(z-a)^n\quad(|z-a|<\infty).\end{aligned}$$

另外, 也可以用和差化积公式

$$\sin(z-a+a)=\sin a\cos(z-a)+\sin(z-a)\cos a$$

以及

$$\sin(z-a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}(z-a)^n\quad(|z-a|<\infty),$$

$$\cos(z-a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-a)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n!}(z-a)^n\quad(|z-a|<\infty),$$

得到

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)\frac{(z-a)^n}{n!}\quad(|z-a|<\infty).$$

同理

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)\frac{(z-a)^n}{n!}\quad(|z-a|<\infty).$$

例3.3.13 求多值函数$\mathbf{Ln}(1+z)$的解析分支$f(z)=\ln(1+z)$在0点的Taylor展式, 其中$f(0)=0$.

解 设$f(z)=\ln(1+z)$, 则

$$f(0)=0,\ f'(z)=\frac{1}{1+z},\cdots,f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n},\cdots$$

于是

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\quad(|z|<1),$$

级数的收敛半径是1.

例3.3.14 设$\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$不是整数, 求多值函数$(1+z)^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\mathbf{Ln}(1+z)}$ 的解析分支

$$f(z)=\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+z)}\ (-\pi<\arg(z+1)<\pi)$$

在0点的Taylor 展式, 其中$f(0)=1$.

解

$$f(0)=1,\ f'(z)=\alpha\mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln(1+z)}=\frac{\alpha f(z)}{1+z},\cdots,$$
$$f^{(n)}(z)=n!\binom{\alpha}{n}\mathrm{e}^{(\alpha-n)\ln(1+z)}=n!\binom{\alpha}{n}\frac{f(z)}{(1+z)^n},\cdots,$$

其中

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

于是$f(z)$ 在$|z|<1$内的Taylor 展式是

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n\quad(|z|<1),\tag{3.3.7}$$

级数(3.3.7)的收敛半径是1.

级数(3.3.7) 也适用于α 是整数的情形. 此时$(1+z)^{\alpha}$是$|z|<1$ 中的解析函数. 当α 是正整数时, (3.3.7)式中级数化为α次多项式; 当α 是负整数时, (3.3.7)式中级数的收敛半径是1.

例3.3.15 将函数

$$f(z)=\frac{1}{z^2-2z+2}$$

按$z-1$的幂展出, 并指出其收敛范围.

解

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{2n}\quad(|z-1|<1),$$

其收敛半径是1.

例3.3.16 设$f(z)$和$g(z)$在圆盘$|z| < R$中解析, $g(z)$在圆盘$|z| < R$中处处不为零, 且设$f(z)$和$g(z)$在圆盘$|z| < R$中解析, 有如下Taylor 展式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

则$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$在圆盘$|z| < R$中解析, 有如下Taylor 展式

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

其中

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad c_1 = \frac{1}{b_0^2}\begin{vmatrix} b_0 & a_0 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \cdots,$$

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}}\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & a_n \end{vmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}^+). \tag{3.3.8}$$

解 由于$f(z) = g(z)h(z)$, 利用Cauchy 乘积(1.1.11), 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}c_k\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

由Taylor 展式的唯一性, 有

$$\begin{cases} b_0c_0 & & & & & = & a_0, \\ b_1c_0 & +b_0c_1 & & & & = & a_1, \\ b_2c_0 & +b_1c_1 & +b_0c_2 & & & = & a_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1}c_0 & +b_{n-2}c_1 & +b_{n-3}c_2 & +\cdots & +b_0c_{n-1} & = & a_{n-1}, \\ b_nc_0 & +b_{n-1}c_1 & +b_{n-2}c_2 & +\cdots & +b_1c_{n-1}+b_0c_n & = & a_n. \end{cases}$$

由此解得(3.3.8)式.

例3.3.17 正割函数$\sec z$和正切函数$h(z) = \tan z$在圆盘$|z| < \frac{\pi}{2}$中分别有如下Taylor 展式(只求前5项系数).

$$\sec z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \frac{61}{6!}z^6 + \cdots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}, \tag{3.3.9}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{4}{6!}z^7 + \cdots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}. \tag{3.3.10}$$

以上两个幂级数的收敛半径均为$\frac{\pi}{2}$.

解 由于$\sec z = \frac{1}{\cos z}$和$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$以及

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

再由(3.3.8)式, 求出正割函数$\sec z$和正切函数$h(z) = \tan z$在圆盘$|z| < \frac{\pi}{2}$ 中Taylor 展式的前5项系数, 得到(3.3.9)式和(3.3.10)式. 由于正割函数$\sec z$和正切函数$h(z) = \tan z$在圆盘$|z| < \frac{\pi}{2}$中解析, 分别有Taylor 展式(3.3.9)式和(3.3.10)式, 所以级数(3.3.9)式和(3.3.10)式的收敛半径均不小于$\frac{\pi}{2}$. 正割函数$\sec z$和正切函数$h(z) = \tan z$在圆周$|z| = \frac{\pi}{2}$有奇点$\pm\frac{\pi}{2}$, 所以级数(3.3.9)式和(3.3.10)式的收敛半径均为$\frac{\pi}{2}$.

例3.3.18 在$|z| < 1$中, 是否分别存在解析函数$f(z)$满足下列条件:

(1) $f\left(\frac{1}{2n+3}\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$;

(2) $f\left(\frac{1}{2n+3}\right) = \frac{n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

解 (1) 由于$\left\{\frac{1}{2n+3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2n+2}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ 都收敛到0, 由定理3.3.8, $f(z) = z$是在$|z| < 1$中解析且满足$f\left(\frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2n+2}$的唯一函数, 但该函数不满足$f\left(\frac{1}{2n+3}\right) = 0$, 故在$|z| < 1$中解析满足条件(1)的函数不存在.

(2) 由于$\{\frac{1}{2n+3}\}$ $(n \in \mathbb{N})$ 收敛到0, 且

$$f\left(\frac{1}{2n+3}\right) = \frac{n}{n+1} = \frac{2n+3-3}{2n+3-1} = \frac{1-\frac{3}{2n+3}}{1-\frac{1}{2n+3}},$$

由定理3.3.8, $f(z) = \frac{1-3z}{1-z}$是在$|z| < 1$中解析且满足(2)的唯一函数.

§3.4 解析函数的 Laurent 展式

对级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} = c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots \quad (3.4.1)$$

通过变换$\zeta = (z-a)^{-1}$, 可以将(3.4.1)式变为幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n} = c_{-1}\zeta^{1} + \cdots + c_{-n}\zeta^{n} + \cdots \quad (3.4.2)$$

如果幂级数(3.4.2)的收敛半径是$\frac{1}{r}$且$r < \infty$, 则通过变换$\zeta = (z-a)^{-1}$, 级数(3.4.1) 在$|z-a| > r$内绝对收敛且内闭一致收敛于一解析函数. 设普通幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n}(z-1)^{n} = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \quad (3.4.3)$$

的收敛半径是R, 如果$R > 0$, 则级数(3.4.3)在$|z-a| < R$内绝对收敛且内闭一致收敛于一解析函数. 级数(3.4.1)和级数(3.4.3) 相加, 得到如下级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n}(z-a)^{n} =$$

$$\cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \quad (3.4.4)$$

此级数称为Laurent(罗朗)级数.

如果幂级数(3.4.3)和级数(3.4.1)都在点z收敛, 则称Laurent级数(3.4.4)在点z处收敛.

设幂级数(3.4.3)的收敛半径是R和级数(3.4.1)在$|z-a| > r$内收敛, 如果$R > r \geqslant 0$, 则圆环$r < |z-a| < R$ 称为Laurent级数(3.4.4) 的收敛圆环. 根据Taylor定理和定理3.1.9, 我们有如下定理.

定理3.4.1 设$R > r \geqslant 0$, Laurent 级数 (3.4.4) 的收敛圆环为$r < |z-a| < R$, 则 (3.4.4) 在$r < |z-a| < R$内绝对收敛且内闭一致收敛于一解析函数$f(z)$, $f(z)$在$r < |z-a| < R$内可逐项求导p次,

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)c_n(z-a)^{n-p} \quad (r < |z-a| < R).$$

定理3.4.2 (Laurent(罗朗)定理) 设$f(z)$ 在圆环区域$B(r,R)=\{z:r<|z-a|<R\}$内解析, 则$f(z)$ 在$B(r,R)$内能展成Laurent级数 (3.4.4); 反之, 如果$f(z)$在$B(r,R)$内能展成Laurent级数 (3.4.4) 则对任意的$\rho\in(r,R)$, 有

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,\rho)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(r<\rho<R,\ n\in\mathbb{Z}).\tag{3.4.5}$$

证明 当$r<r_1<|z-a|<R_1<R$时, 如图7, 由多连通的Cauchy 积分公式, 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,R_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,r_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.\tag{3.4.6}$$

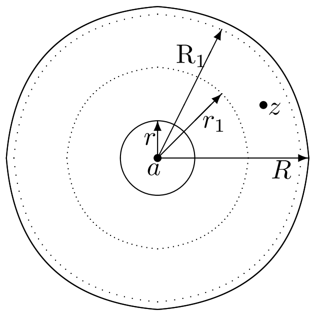

图7

当$|\zeta-a|=r_1<|z-a|$时, 级数

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-a-(\zeta-a)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\tag{3.4.7}$$

关于$\zeta\in\partial D(a,r_1)$一致收敛, 而当$|\zeta-a|=R_2>|z-a|$时, 级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\tag{3.4.8}$$

关于$\zeta\in\partial D(a,R_2)$一致收敛. 把(3.4.7)式和(3.4.8)式分别代入(3.4.6)式, 然后逐项积分得到$f(z)$ 在$B(r,R)$内能展成Laurent级数(3.4.4), 其中系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,R_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n\in\mathbb{N}),$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,r_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{-n+1}}\ (n\in\mathbb{N}^+).$$

反之, 如果$f(z)$ 在$B(r,R)$内能展成Laurent 级数(3.4.4), 则对任意的$\rho\in(r,R)$和任意的整数n, Laurent级数 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^{k-n-1}$ 在圆周$|z-a|=\rho$上一致收敛

到$f(z)(z-a)^{-n-1}$, 于是由逐项积分定理3.1.6, 有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,\rho)}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,\rho)}\frac{dz}{(z-a)^{n+1-k}}=c_n.$$

所以(3.4.5)式成立. □

定义3.4.3 (3.4.4) 式称为$f(z)$ 在点a 的Laurent展式, (3.4.5) 式称为其Laurent展式系数, 而(3.4.4)式右边的级数, 则称为Laurent级数.

例3.4.4 将函数$f(z)=\frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)}$分别在圆环$1<|z|<2$和$2<|z|<\infty$中展成Laurent级数.

解 首先将$f(z)$分解为部分分式:

$$f(z)=1+\frac{5}{z-2}+\frac{-2}{z-1}.$$

当$1<|z|<2$时,

$$f(z)=1+\frac{-\frac{5}{2}}{1-\frac{z}{2}}+\frac{-\frac{2}{z}}{1-\frac{1}{z}}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-5}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-2)z^{-n}.$$

当$2<|z|<\infty$时,

$$f(z)=1+\frac{\frac{5}{z}}{1-\frac{2}{z}}+\frac{-\frac{2}{z}}{1-\frac{1}{z}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(5(2^n)-2)z^{-n}.$$

例3.4.5 将函数$f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$在圆环$0<|z|<\infty$中展成Laurent级数.

解

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3)!}z^{2n}\quad(0<|z|<\infty).\qquad(3.4.9)$$

级数(3.4.9)在零点也收敛, 只要补充定义$f(0)=-\frac{1}{6}$, 则级数(3.4.9) 在整个复平面处处收敛.

例3.4.6 将函数$f(z)=z\sin\frac{1}{z}$在圆环$0<|z|<\infty$中展成Laurent级数.

解

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n},\quad 0<|z|<\infty.$$

例3.4.7 设整函数$\sinh z=-\mathrm{i}\,\sin(\mathrm{i}\,z)$, 它的零点为$z=n\pi\mathrm{i}\quad(n\in\mathbb{Z})$, 求

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^2(z+z^3/3!+z^5/5!+\cdots)}$$

在圆环$0<|z|<\pi$中的Laurent 级数(给出该Laurent 级数的前三个非零项).

解

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots}\right) \tag{3.4.10}$$

在去心圆盘$0<|\ z\ |<\pi$内有一个Laurent 级数表示. 等式(3.4.10)右边的圆括号内因子的分母为$\sinh z/z$, 它是整函数, 在圆盘$|\ z\ |<\pi$内处处不为零, 又以1除以$\sinh z/z$, 可以找到它在圆盘$|\ z\ |<\pi$内的幂级数表示, 例如可以用辗转相除法得到:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-\frac{1}{3!}z^2+\left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^4+\cdots \\ \hline
1+\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\cdots & 1 \\
 & 1+\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\cdots \\ \cline{2-2}
 & -\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4+\cdots \\
 & -\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{(3!)^2}z^4-\cdots \\ \cline{2-2}
 & \left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^4+\cdots \\
 & \left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^4+\cdots \\ \cline{2-2}
 & \vdots
\end{array}
$$

于是

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots}=1-z^2/3!+[1/(3!)^2-1/5!]z^4+\cdots\quad(|z|<\pi),$$

因而

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6z}+\frac{7z}{360}+\cdots\qquad(0<|\ z\ |<\pi).$$

虽然我们仅给出该Laurent级数的前三个非零项, 但是其任意项可以继续运算除法找到.

§3.5　解析函数的孤立奇点

定义3.5.1　设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}=\{z:0<|z-a|<r\}$ 内解析, 则点a称为$f(z)$ 的孤立奇点.

设函数$f(z)$在$0<|z-a|<r$内解析, 则$f(z)$ 在$0<|z-a|<r$内可以展成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{3.5.1}$$

称

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{3.5.2}$$

为$f(z)$在点a的解析部分, 而称

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{3.5.3}$$

为$f(z)$ 在点a的主要部分.

定义3.5.2 (孤立奇点分类)　设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$ 内解析.

(1)　如果$f(z)$ 在点a 的主要部分为零, 则称a 为$f(z)$ 的可去奇点.

(2)　如果$f(z)$ 在点a 的主要部分为有限多项不为零, 则称a为$f(z)$的极点, 如果$f(z)$ 在点a 的主要部分为

$$c_{-m}(z-a)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{-1}\quad(c_{-m}\neq 0),$$

则称a 为$f(z)$ 的m 阶极点.

(3)　如果$f(z)$ 在点a 的主要部分为无限多项, 则称a 为$f(z)$ 的本性奇点.

定理3.5.3 (可去奇点判别法)　设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$ 内解析. 则下列三条件是等价的. 因此, 它们中的任何一条都是可去奇点的特征.

(1)　$f(z)$在点a 的主要部分为零;

(2)　$\lim_{z\to a}f(z)=b$　存在有限;

(3)　$f(z)$在点a 的某去心邻域内有界.

证明　设a 是$f(z)$ 的孤立奇点, 则存在$r>0$, 函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$ 内解析.

先证(1) $\Rightarrow$ (2). 设$f(z)$ 在点a 的主要部分为零, 则$f(z)$ 在$0<|z-a|<r$内有Laurent级数(3.5.2), 从而$\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$存在有限.

(2) $\Rightarrow$ (3)是显然的.

再证(3) $\Rightarrow$(1). 令$h(a)=0$ 且对$z\in D(a,r)\setminus\{a\}$, 令$h(z)=(z-a)^2f(z)$, 则由假设可以推出

$$h'(a)=\lim_{z\to a}\frac{h(z)-h(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0,$$

从而$h(z)$在$D(a,r)$中解析. 于是$h(z)$ 在$D(a,r)$ 中可用幂级数表示

$$h(z)=\sum_{n=2}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

令$f(a)=c_2$, 则f 在$D(a,r)$ 中可用幂级数表示

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+2}(z-a)^n.$$

所以$f(z)$ 在点a 的主要部分为零. 这证明了定理. □

定理3.5.4 (m阶极点判别法) 设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$内解析, $m\geqslant 1$ 是整数, 则下列三条件是等价的. 因此, 它们中的任何一条都是m阶极点的特征.

(1) $f(z)$ 在点a 的主要部分为

$$c_{-m}(z-a)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{-1}\quad(c_{-m}\neq 0).\tag{3.5.4}$$

(2) $f(z)$在点a 的某去心邻域内能表成

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},\tag{3.5.5}$$

其中$\varphi(z)$ 在点a 的邻域内解析, 且$\varphi(a)\neq 0$.

(3) $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 以a 为m 阶零点(可去奇点当作解析点看, 于是取$g(a)=0$).

证明 设a 是$f(z)$ 的孤立奇点, 则存在$r>0$, 使得函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$ 内解析. 于是a 为$f(z)$ 的m 阶极点的充要条件是$f(z)$ 在$0<|z-a|<r$内有如下Laurent级数

$$f(z)=c_{-m}(z-a)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\quad(c_{-m}\neq 0),$$

这等价于存在$D(a,r)$中的解析函数

$$\varphi(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+\sum_{n=m}^{\infty}c_{n-m}(z-a)^{n}\quad(|z-a|<r),$$

满足$\varphi(a)=c_{-m}\neq 0$ 且(3.5.5)式成立. 所以(1)和(2)是等价的. $f(z)$ 在点a 的某去心邻域内能表成

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

其中$\varphi(z)$ 在点a 的邻域内解析, 且$\varphi(a)\neq 0$ 的充要条件是$g(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\psi(z)$, 其中$\psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ 在点a 的邻域内解析且$\psi(a)\neq 0$. 所以(2)和(3)是等价的. □

由此得到如下极点判别法.

定理3.5.5 (极点判别法) 设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$ 内解析. a为$f(z)$ 的极点的充要条件是

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty. \tag{3.5.6}$$

证明 设a 是$f(z)$ 的孤立奇点, 则存在$r>0$, 使得函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$0<|z-a|<r$ 内解析. 如果a为$f(z)$ 的极点, 则由极点的定义, (3.5.6)式成立.

反之, 如果(3.5.6)式成立, 则存在$\rho>0,\rho\leqslant r$, 使得当$0<|z-a|<\rho$时, $|f(z)|\geqslant 1$. 于是$g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 在$0<|z-a|<\rho$中有界解析, 不为零且

$$\lim_{z\to a}g(z)=0.$$

令$g(a)=0$, 则$g(z)$在$|z-a|<\rho$中解析, 从而存在正整数m 和$|z-a|<\rho$中解析函数$\varphi(z)$, $\varphi(a)\neq 0$ 使得$g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$ $(|z-a|<\rho)$, 所以a是$f(z)$的极点.□

结合定理3.5.3和定理3.5.5, 有如下本性奇点判别法.

定理3.5.6 (本性奇点判别法) 设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$ 内解析. a 为$f(z)$ 为本性奇点的充要条件是极限

$$\lim_{z\to a}f(z)$$

不存在且不是∞.

定理3.5.7 设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$ 内解析, 处处不为零, 则$z=a$ 为$f(z)$ 的一本性奇点的充要条件是$z=a$ 必为$\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

定理3.5.8 (Weierstrass定理) 设函数$f(z)$在点a 的某一去心邻域$D(a,r)\setminus\{a\}$内解析. 如果a 为$f(z)$ 的本性奇点, 则对于任何常数A, 不管它是有限数还是无穷, 都有一个收敛于a 的点列$\{a_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A. \tag{3.5.7}$$

证明 如果$A=\infty$, a 为$f(z)$ 的本性奇点, 则对任何正整数n, $f(z)$在$0<|z-a|<\frac{1}{n}$ 内无界, 所以存在点a_n, 使得$0<|a_n-a|<\frac{1}{n}$且$|f(a_n)|>n$, 所以(3.5.7)式对$A=\infty$成立. 设A 是有限数, 只需证明对于任何正整数n, 在$0<|z-a|<\frac{r}{n}$ 内存在点a_n, 使得$0<|a_n-a|<\frac{r}{n}$且$|f(a_n)-A|<\frac{1}{n}$. 假设这一命题不成立, 则存在$n_0>0$ 使得对任意的

$$z\in D\left(a,\frac{r}{n_0}\right)\setminus\{a\}=\{z:0<|z-a|<\frac{r}{n_0}\},$$

有$|f(z)-A|\geqslant\frac{1}{n_0}$, 函数$g(z)=(f(z)-A)^{-1}$ 在a的去心邻域$D(a,\frac{r}{n_0})\setminus\{a\}$中有界解析. 由定理3.5.3, $g(z)$ 可以延拓为$D(a,\frac{r}{n_0})$中的解析函数. 如果$g(a)\neq 0$, 则存在$\rho>0, \rho<\frac{r}{n_0}$使得$g$ 在a的去心邻域$D(a,\rho)\setminus\{a\}$中有正的下界, 从而f在a的去心邻域$D(a,\rho)\setminus\{a\}$中有界, 由定理3.5.3, a点是f 的可去奇点, 矛盾. 如果$g(z)$在a点有m阶零点, 由定理3.3.5, 存在圆盘$D(a,\frac{r}{n_0})$上的解析函数$\varphi(z)$, 使得$\varphi(a)\neq 0$, 且对$z\in D(a,\frac{r}{n_0})$ 有$g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$. 于是对$z\in D(a,\frac{r}{n_0})$有$\varphi(z)\neq 0$. 令$h(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$, 则$h(z)$ 在$D(a,\frac{r}{n_0})$中解析且$f(z)=A+(z-a)^{-m}h(z)$, 从而a是$f(z)$的极点, 矛盾. 所以定理3.5.8成立. □

定理3.5.9* (Picard (毕卡)定理) 如果a 为$f(z)$ 的本性奇点, 则对于每一个$A\neq\infty$, 除掉可能一个值$A=A_0$ 外, 必有趋于a 的无穷点列$\{z_n\}$ 使 $f(z_n)=A$ $(n\in\mathbb{N})$.

定义3.5.10 设$r\geqslant 0$, 函数$f(z)$在无穷远点的去心邻域$r<|z|<+\infty$ 内解析, 则称点∞ 为$f(z)$ 的一个孤立奇点.

设点∞ 为$f(z)$ 的孤立奇点, 利用变换$w=\frac{1}{z}$, 函数

$$\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right) \tag{3.5.8}$$

在去心邻域: $0<|w|<\frac{1}{r}$内解析. $w=0$ 就是$\varphi(w)$ 的孤立奇点.

定义3.5.11 若$w=0$ 为$\varphi(w)$ 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点, 则我们相应地称$z=\infty$ 为$f(z)$ 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点.

设在去心邻域$0 < |w| < \frac{1}{r}$内将$\varphi(w)$ 展成Laurent级数

$$\varphi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n.$$

令$w = \frac{1}{z}$, 并根据(3.5.8), 则有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n, \tag{3.5.9}$$

其中$b_n = c_{-n}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(3.5.9)式为$f(z)$ 在无穷远点去心邻域$r < |z| < +\infty$ 内的Laurent 展式. 对应$\varphi(w)$ 在$w = 0$ 的主要部分, 我们称$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 为$f(z)$ 在$z = \infty$ 的主要部分.

定理3.5.12 设函数$f(z)$在无穷远点的去心邻域$r < |z| < +\infty$ 内解析, $f(z)$的孤立奇点$z = \infty$ 为可去奇点的充要条件是下列三条中的任何一条成立.

(1) $f(z)$ 在 $z = \infty$的主要部分为零.

(2) $\lim_{z\to\infty} f(z) = b$ 存在有限, 记为$b = f(\infty)$.

(3) $f(z)$ 在点 $z = \infty$的某去心邻域$r < |z| < \infty$ 内有界.

定理3.5.13 设函数$f(z)$在无穷远点的去心邻域$r < |z| < +\infty$ 内解析, $f(z)$的孤立奇点$z = \infty$ 为m阶极点的充要条件是下列三条中的任何一条成立.

(1) $f(z)$在 $z = \infty$ 的主要部分为

$$\sum_{n=1}^{m} b_n z^n = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m \quad (b_m \neq 0).$$

(2) $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的某去心邻域$r < |z| < +\infty$ 内能表成

$$f(z) = z^m \psi(z),$$

其中$\psi(z)$ 在 $z = \infty$ 的邻域$r < |z| \leqslant +\infty$内解析, 且

$$\psi(\infty) = \lim_{z\to\infty} \psi(z)$$

存在有限不为零.

(3) $g(z) = \frac{1}{f(z)}$以$z = \infty$ 为m 阶零点(只要令$g(\infty) = 0$).

定理3.5.14 设函数$f(z)$在无穷远点去心邻域$r < |z| < +\infty$ 内解析, 则$f(z)$的孤立奇点∞ 为极点的充要条件是

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

定理3.5.15 设函数$f(z)$在无穷远点去心邻域$r<|z|<+\infty$内解析, $f(z)$的孤立奇点∞为本性奇点的充要条件是下列两条中的任何一条成立.

(1) $f(z)$在$z=\infty$的主要部分有无穷多项正幂不等于零.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$不存在(即当$z$趋向于$\infty$时, $f(z)$不趋向于任何(有限或无穷)极限).

在整个复平面解析的函数$f(z)$称为**整函数**. 设$f(z)$为一整函数, 则$f(z)$只以$z=\infty$为孤立奇点, 且可设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z|<+\infty). \tag{3.5.10}$$

定理3.5.16 (代数基本定理) 设n是正整数, 如果

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0,$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$是复数, 则$P(z)$在复平面中至少有一个零点.

证明 如果$P(z)$在复平面中没有零点, 则$\frac{1}{P(z)}$是一个整函数. 设$R_0=1+(|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|)$, 则$m_0=\min\{|P(z)|:|z|\leqslant R_0\}>0$, 当$|z|\geqslant R_0$时,

$$|P(z)|\geqslant |z|^n-|a_{n-1}||z|^{n-1}-\cdots-|a_0|\geqslant |z|^n(1-(|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|))\geqslant R_0^n,$$

所以$\left|\frac{1}{P(z)}\right|$在整个复平面有上界$M=\max\{R_0^{-n},m_0^{-1}\}$, 由定理2.3.18, $\frac{1}{P(z)}$是一个常数, 所以P是一个常数, 矛盾. □

定理3.5.17 若$f(z)$为一整函数, 则

(1) $z=\infty$为$f(z)$的可去奇点的充要条件为$f(z)=$常数;

(2) $z=\infty$为$f(z)$的$m\geqslant 1$阶极点的充要条件为: $f(z)$是一个$m\geqslant 1$次多项式

$$\sum_{n=0}^{m} b_n z^n=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m \quad (b_m\neq 0);$$

(3) $z=\infty$为$f(z)$的本性奇点的充要条件为: 展式(3.5.10)有无穷多个b_n不等于零 (我们称这样的函数$f(z)$为**超越整函数**).

定义3.5.18 设Ω是区域, 在Ω中除极点外无其他类型奇点的解析函数称为Ω中的亚纯函数.

定理3.5.19 设$f(z)$是复平面$\mathbb{C}$中的亚纯函数, 则$f(z)$为有理函数的充要条件是∞是$f(z)$的可去奇点或极点.

证明 **必要性**是显然的. 下证**充分性**. 设$f(z)$是复平面$\mathbb{C}$中的亚纯函数, 如果∞ 是$f(z)$ 的可去奇点或极点, 则存在$R_0 > 0$, $f(z)$ 在$R_0 < |z| < \infty$中解析. 设B是f 在$|z| \leqslant R_0$ 中极点组成的集合, B是有界集, 如果B是无限集, 则B有极限点$b \in \overline{B}$, 由于f 在区域$\mathbb{C}$ 中亚纯, b不是$f(z)$的孤立奇点, 与f 在$\mathbb{C}$中是亚纯的矛盾. 所以B是有限集. 设$B = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$, $f(z)$ 在点a_k 的主要部分为

$$h_k(z) = \frac{c_{-m_k,k}}{(z-a)^{m_k}} + \cdots + \frac{c_{-1,k}}{(z-a)} \quad (k = 1, 2, \cdots, p),$$

$f(z)$ 在点∞ 的主要部分为

$$h_0(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_q z^q,$$

当∞ 是$f(z)$ 的可去奇点时, 令$h_0(z) \equiv 0$.

令$F(z) = h_0(z) + h_1(z) + \cdots + h_p(z)$, $G(z) = f(z) - F(z)$, 则$F(z)$ 是有理函数, $a_1, a_2, \cdots, a_p$和∞ 均为函数$G(z)$的可去奇点. 令

$$G(a_k) = \lim_{z \to a_k} G(z),$$

则$G(z)$为一个有界整函数, 由定理2.3.18, $G(z)$是一个常数C, 从而$f(z) = C + F(z)$ 是有理函数. 这证明了定理. □

这里, 我们顺便得到了这样一个结论: 任何有理函数一定能分解成部分分式之和, 而且这种分解是唯一的. 这种结论在计算有理函数的不定积分时经常使用.

定义3.5.20 非有理函数的亚纯函数称为超越亚纯函数.

习 题 三

1. 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛, 且存在$\alpha > 0, \alpha < \frac{\pi}{2}$, 使得$|\arg c_n| \leqslant \alpha$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$绝对收敛.

2. 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$收敛, 且$\mathrm{Re}\, c_n \geqslant 0$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$绝对收敛.

3. 求下列函数项级数的收敛范围:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z^n}{n^3} + \dfrac{1}{3^n z^n}\right)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nz}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{z+n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$.

4. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^3} z^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4+(-1)^n}{n} z^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3^n + n^3) z^n$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3^n + 1) z^{n!}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1) z^{2n}$.

5. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$的收敛半径分别是$R_1 > 0$和$R_2 > 0$, 讨论下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$; (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n z^n}{1+|b_n|}$.

6. 将函数$\frac{z^2+4}{z^2-2z+17}$ 按$z-1$的幂展开, 并指出其收敛半径.

7. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径分别是$R > 0$, 并且在收敛圆周$|z| = R$上有一点$z_0 > 0$, 使其绝对收敛, 证明幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在闭圆盘$|z| \leqslant R$上绝对收敛且一致收敛.

8. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在集合$E$上一致收敛, 函数$g(z)$在$E$有界, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(z) f_n(z)$在集合$E$上一致收敛.

9. 设$f_n(z) (n \in \mathbb{N})$在区域$\Omega$中解析, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在Ω中某点$z_0 \in \Omega$上收敛, 则级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$\Omega$中内闭一致收敛的充要条件是级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$在$\Omega$中内闭一致收敛.

10. 证明级数$1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (z^n - z^{n-1})$在单位圆盘$D(0,1)$上收敛于函数$f(z) \equiv 0$, 但此级数在单位圆盘$D(0,1)$上不是一致收敛而是内闭一致收敛.

11. 如果函数$f(z)$在扩充复平面上只有有限个孤立奇点, 则$f(z)$的奇点至多只有有限多个.

12. 设幂级数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$和$g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$的收敛半径分别是$R_1>0$ 和$R_2>0$, 且$R_1<\infty$和$R_2<\infty$, $f(z)$在闭圆盘$\overline{D(0,R_1)}$上连续, 证明当$|z|<R_1R_2$时,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R_1}f(\zeta)g\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

13. 求下列解析函数或多值函数的解析分支在$z=0$的Taylor展式:

(1) $\dfrac{1}{2z+1}$; (2) $\dfrac{1}{(1-z)^3}$; (3) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$;

(4) $\sin^2 z$; (5) $\dfrac{1}{(z^6-1)(z-1)}$; (6) $\mathrm{e}^z\cos^2 z$;

(7) $f(z)$为$\frac{1}{2}\left(\mathbf{Ln}\,\frac{1}{1-z}\right)^2$ 在单位圆盘$|z|<1$的解析分支, 满足$f(0)=0$;

(8) $f(z)$为$(1-z)^{\frac{5}{2}}$ 在单位圆盘$|z|<1$的解析分支, 满足$f(0)=1$.

14. 求下列解析函数或多值函数的解析分支在指定圆环区域的Laurent展式:

(1) $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$, $1<|z-1|<+\infty$; (2) $\dfrac{1}{(1-z)^3}$, $1<|z|<\infty$;

(3) $\sin\dfrac{z}{z-1}$, $0<|z-1|<1$; (4) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$, $2<|z|<\infty$;

(5) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}$, $0<|z|<1$; (6) $\mathrm{e}^z\cos\dfrac{1}{z}$, $0<|z|<\infty$;

(7) $\dfrac{f(z)}{z^3}$, $0<|z|<1$, $f(z)$为$\mathbf{Ln}(1-z)$在$|z|<1$中满足$f(0)=0$的解析分支;

(8) $\dfrac{f(z)}{z^5}$, $0<|z|<1$, $f(z)$为$(1-z)^{\frac{1}{2}}$在$|z|<1$中满足$f(0)=1$的解析分支.

15. 求下列各函数在复平面$\mathbb{C}$(不含∞点) 中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型(极点要指明阶数).

(1) $\dfrac{z^5-1}{z(z+1)^2(z^2+1)^2}$; (2) $\dfrac{\sin z-z}{z^4\cos z}$; (3) $\dfrac{1}{z\cos(z^{-1})}$;

(4) $\dfrac{1}{\sin z-\sin\alpha}$ (α是常数); (5) $\dfrac{\sin\frac{1}{1-z}}{z^4\cos z}$; (6) $\dfrac{1}{z(\mathrm{e}^z-1)}$;

(7) $\frac{1}{1+f(z)}$, $f(z)$为$\sqrt{z}$在$\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$中满足$f(1)=1$的解析分支;

(8) $\frac{\ln z}{z-1}$, $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$, $|\arg z|<\pi$.

16. 求函数$f(z)=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{z}}$在扩充复平面中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型(极点要指明阶数).

17. 求函数$f(z)=\sin\left(\frac{1}{z\sin z}\right)$ 在扩充复平面中的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型(极点要指明阶数).

18. 求在扩充复平面中只有n个一阶极点的解析函数的一般形式.

19. 下列多值函数在指定的去心邻域内能否有解析分支可以展成Laurent 级数.

(1) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)},\ z=\infty$; (2) $\sqrt[3]{z(1+z)},\quad z=0$;

(3) $\sqrt{\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}},\ z=0$; (4) $\mathbf{Ln}\sqrt{\dfrac{(z+1)(z-2)}{(z-1)(z+2)}},\quad z=0$;

(5) $\mathbf{Ln}\,\dfrac{1}{1-z},\quad z=0$; (6) $\sqrt[4]{(z-1)(z+1)^3},\quad z=0$.

20. 设$f(z)$是整函数, 对任意z, 有$|f(z)|\geqslant 1$. 证明$f(z)$恒等于常数.

21. 设$f(z)$是整函数, 有$\lim\limits_{z\to\infty} z^{-1}f(z)=0$. 证明$f(z)$恒等于常数.

22. 证明: 如果$f(z)$在$0<|z|<1$中解析, 不恒为零并且存在一列$z_n, 0<|z_n|<1$使得$\lim_{n\to\infty} z_n=0$和$f(z_n)=0$, 则0是$f(z)$的本性奇点.

23. 设$P(z)$和$Q(z)$分别为n次和m次多项式, 指出∞是下列有理函数的什么奇点: (1) $P(z)+Q(z)$; (2) $\frac{P(z)}{Q(z)}$; (3) $P(z)Q(z)$.

24. 证明: 如果$f(z)$在$0<|z|<1$中解析, 不取零值并且0是$f(z)$的本性奇点, 则0也是$\frac{1}{f(z)}$的本性奇点.

25. 证明: 如果$f(z)$是$0<|z|<1$中的亚纯函数, 并且存在一列$a_n, 0<|a_n|<1$使得$\lim_{n\to\infty} a_n=0$和a_n是$f(z)$的极点, 则对任意的复数A或$A=\infty$, 存在一列$z_n, 0<|z_n|<1$使得$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

26. 设$f(z)$是扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$中的亚纯函数, $f(z)$只有3个极点$z=0, z=1$和$z=\infty$. 如果$f(z)$在这3个极点处的Laurent 展开式的主要部分分别是

$$\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2},\quad \frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\quad \text{和}\quad z+z^3,$$

且$f(-1)=0$, 求出$f(z)$的表达式.

27. 是否分别存在在$|z|<1$中解析的函数$f(z)$满足下列条件 ($n\in\mathbb{N}$):
(1) $f\left(\frac{1}{n+1}\right)=f\left(\frac{-1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{n+1}\right)^3$; (2) $f\left(\frac{1}{n+1}\right)=f\left(\frac{-1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2$.

28. 函数$\sin\frac{1}{z-1}$在$|z|<1$中解析, 不恒为零, 但在$|z|<1$内有无穷个零点$z_n=1-\frac{1}{(n+1)\pi}$ $(n\in\mathbb{N})$, 有极限点1, 此事实是否与解析函数唯一性定理矛盾.

第四章　留数理论和应用

在这一章我们将介绍留数及其应用的基本理论. 留数概念是复变函数论中的重要概念之一. 留数定理是Cauchy定理和Cauchy公式在亚纯函数中的推广. 它是复分析中的主要结论之一, 有着广泛的应用. 应用之一是计算某些定积分和级数求和, 这里所指的定积分主要是被积函数的原函数不能用初等函数表示出来的积分. 数学分析中通常采用含参变量积分的方法, 一般来说, 这种方法较复杂. 而用留数定理计算则颇显巧妙, 但方法却是灵活的, 本章主要讨论了五种类型的积分, 介绍了辐角原理及其应用, 给出了某些亚纯函数的部分分式展式的实例.

§4.1　留数的定义和计算

定义4.1.1 设函数$f(z)$在$0<|z-a|<r$内解析, a是$f(z)$ 的孤立奇点, 设$0<\rho<r$, $\partial D(a,\rho)=\{z=a+\rho e^{i\theta}:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$. 称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)}f(z)dz\ (0<\rho<r) \tag{4.1.1}$$

为$f(z)$在孤立奇点a的留数(Residue), 记为$\operatorname{Res}(f,a)$.

根据Laurent定理可知, $f(z)$在$0<|z-a|<r$中可展成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n, \tag{4.1.2}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\ \ (0<\rho<r,\ n\in\mathbb{Z}).$$

于是我们可以得到$\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}$. 此外, 这里定义的留数$\operatorname{Res}(f,a)$与圆周$|z-a|=\rho$的半径无关. 这是因为不妨设$0<\rho_1<\rho_2<r$, 由Cauchy 定理在多连通区域的推广可知

$$\int_{\partial D(a,\rho_1)}f(z)dz=\int_{\partial D(a,\rho_2)}f(z)dz.$$

定义4.1.2 (无穷远点的留数) 设$z=\infty$是函数$f(z)$的孤立奇点, $f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析, $R<\rho<+\infty$, 称

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\rho)}f(z)dz \tag{4.1.3}$$

为$f(z)$在$z=\infty$的留数, 记为 $\mathrm{Res}(f,\infty)$.

由于$f(z)$在$R<|z|<+\infty$可展成Laurent级数, 所以

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n\ \ (R<|z|<+\infty),\quad \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\frac{1}{z^{n+2}}\ \ (0<|z|<\frac{1}{R}),$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(a,\rho)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\ \ (R<\rho<+\infty),$$

所以

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-c_{-1}=-\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right).\tag{4.1.4}$$

定理4.1.3 (留数定理) 考虑$n+1$条 Jordan 闭分段光滑曲线$C_0,C_1,\cdots,C_n$, 其中$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 中每一条在其余各条的外部, 而它们又都在C_0的内部. 在C_0的内部同时又在$C_1,C_2,\cdots,C_n$外部的点集构成一个有界的多连通区域Ω, 以$C_0,C_1,\cdots,C_n$为它的边界. $z_k\in\Omega$, $k=1,2,\cdots,m$, 函数$f(z)$ 在闭域$\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$上除去孤立奇点$z_1,z_2,\cdots,z_m$外是解析的, 则

$$\int_{\partial\Omega}f(z)dz=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_k).\tag{4.1.5}$$

证明 存在$\varepsilon>0$ 使得$D(z_k,\varepsilon)\subset\Omega$ 且$D(a_k,\varepsilon)$ $(k=1,2,\cdots,n)$两两互不相交, 于是由Cauchy 公式, 有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(z_k,\varepsilon)}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k).$$

所以(4.1.5)式成立. □

定理4.1.4 若函数$f(z)$在扩充平面上除去有限个孤立奇点$z_1,z_2,\cdots,z_n,\infty$外是解析的, 则$f(z)$在所有孤立奇点的留数之和为零, 即

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)+\mathrm{Res}(f,\infty)=0.\tag{4.1.6}$$

证明 设$R_0=\max\{|z_1|,|z_2|,\cdots,|z_n|\}$, 则对任意$R>R_0$, 由于$f(z)$在$R_0<|z|<+\infty$中解析, 所以

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(0,R)}f(z)dz,$$

由Cauchy 留数定理, 知(4.1.6)式成立. □

显然留数的定义可以作为计算留数的方法, 但在应用中, 仅用定义计算留数是不够的. 应用Laurent展式求留数是一般方法, 特别当a 为本性奇点, 或孤立奇点a的类型不清楚时, 只能用这个一般方法. 对于a 为极点, 除了可用一般方法, 还可以寻找一些更简便有效的方法.

定理4.1.5 设函数φ 在$|z-a|<r$内解析, $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z-a}$, 则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}f(z)(z-a)=\varphi(a). \tag{4.1.7}$$

证明 设$\varphi(z)$ 在$|z-a|<r$内的Taylor 展式是

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots\quad(|z-a|<r), \tag{4.1.8}$$

则$f(z)=\frac{c_0}{z-a}+g(z)$ $(0<|z-a|<r)$,其中$g(z)$在$|z-a|<r$中解析, $c_0=\varphi(a)$. 所以(4.1.7)式成立.

定理4.1.6 设函数φ 在$|z-a|<r$内解析, $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^2}$, 则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}\frac{d\left(f(z)(z-a)^2\right)}{dz}=\varphi'(a). \tag{4.1.9}$$

证明 设$\varphi(z)$ 在$|z-a|<r$内的Taylor 展式是(4.1.8)式, 其中$c_1=\varphi'(a)$, 所以(4.1.9)式成立. □

定理4.1.7 若$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, 其中$P(z),Q(z)$在$|z-a|<r$内解析, 并且$Q(a)=0,Q'(a)\neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{P(a)}{Q'(a)}. \tag{4.1.10}$$

证明 因为$Q(a)=0$, 所以

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}\frac{P(z)}{Q(z)}(z-a)=P(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{Q(z)-Q(a)}=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

所以(4.1.10)式成立. □

定理4.1.8 设函数$\varphi(z)$在$|z-a|<r$内解析, $m\geqslant 1$是正整数, $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, 则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}. \tag{4.1.11}$$

证明　设$\varphi(z)$ 在$|z-a|<r$内的Taylor 展式是(4.1.8)式, 则

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}=\frac{c_0}{(z-a)^m}+\frac{c_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{z-a}+g(z)\ (0<|z-a|<r),$$

其中$g(z)$在$|z-a|<r$中解析, $c_{m-1}=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$, 所以(4.1.11)式成立. □

例4.1.9　求$f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)}$在$z=0$点的留数.

解法1　由留数的定义有

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{5z-2}{z-1}}{z-0}dz=2.$$

解法2　由于$z=0$是$f(z)$的孤立奇点, 所以

$$f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)}=\frac{2}{z}+\frac{3}{z-1}=\frac{2}{z}-3\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\ (|z|<1),\quad \mathrm{Res}(f,0)=c_{-1}=2.$$

解法3　由于$f(z)=\frac{\frac{5z-2}{z-1}}{z-0}$, 即$z=0$是$f(z)$的一阶极点. 故

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{5z-2}{z-1}=2.$$

解法4　设$P(z)=5z-2$, $Q(z)=z(z-1)$, 则$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(0)=-2, Q(0)=0, Q'(0)=-1\neq 0$. 故$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{P(0)}{Q'(0)}=2$.

例4.1.10　求$f(z)=\frac{z^2+1}{\mathrm{e}^z}$在$z=\infty$的留数.

解　$f(z)$是个整函数, 由定义, $\mathrm{Res}(f,\infty)=0$.

例4.1.11　求$f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$在$z=\infty$的留数.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f(z),\infty)&=-\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)\\&=-\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right)=-1.\end{aligned}$$

§4.2 用留数定理计算实积分

在数学分析及实际问题中, 往往要求一些定积分的值. 而这些积分中或被积函数的原函数不能用初等函数表示出来, 或即使可以求出原函数, 计算也往往比较复杂. 用复变函数中的留数定理求这种积分, 既简便又巧妙. 用留数定理求定积分有种种技巧, 如函数的选取、积分路径的选取等. 我们先把取极限时常遇到的积分估计写成引理.

引理4.2.1 设$R > 0, 0 < \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi$, 若$f(z)$ 在$E = \{z : 0 < |z - a| < R, \theta_1 \leqslant \arg(z - a) \leqslant \theta_2\}$ 上连续, 且

$$\lim_{z\in E, z\to a}(z-a)f(z) = A,$$

则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = \mathrm{i}A(\theta_2 - \theta_1), \tag{4.2.1}$$

其中$C_r : z = a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$是中心在$a$点, 半径为$r$, 从$a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}$到$a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}$的圆弧.

证明 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\triangle > 0, \delta < R$, 使得当$z \in \Omega, |z - a| < \triangle$时, 有

$$|(z-a)f(z) - A| < \varepsilon.$$

于是当$r > 0, r < \triangle$时, 由于

$$\int_{C_r} \frac{A}{z-a}dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} A\mathrm{i}\, d\theta = \mathrm{i}\, A(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\int_{C_r} f(z)dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\mathrm{i}\, d\theta,$$

所以

$$\left|\int_{C_r} f(z)dz - \mathrm{i}A(\theta_2-\theta_1)\right| \leqslant \int_{\theta_1}^{\theta_2} |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) - A| d\theta \leqslant (\theta_2-\theta_1)\varepsilon.$$

这说明(4.2.1)式成立.

引理4.2.2 (Jordan引理) 设$a > 0$, 若函数$f(z)$在$R_0 \leqslant |z| < +\infty$, $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$上连续, 且$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, 则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, az} f(z)dz = 0, \tag{4.2.2}$$

其中$C_R: z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$是中心在0点, 半径为$R$, 从$R$到$-R$的圆弧.

证明 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$R_\varepsilon > R_0$, 使得当$\operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| > R_\varepsilon$时, 有$|f(z)| < \varepsilon$. 于是当$R > R_\varepsilon$时,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az} f(z) dz\right| &\leqslant \int_0^\pi \varepsilon \mathrm{e}^{-aR\sin\theta} R d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\, d\theta \\ &\leqslant 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{-2R\theta}{\pi}}\, d\theta = \pi\varepsilon(1 - \mathrm{e}^{-R}) < \pi\varepsilon.\end{aligned}$$

这证明了(4.2.2)式. □

设$R(\sin\theta, \cos\theta)$是$\cos\theta, \sin\theta$的有理函数且在$[0, 2\pi]$上连续, 设$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 则有

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z}), \quad d\theta = \frac{1}{\mathrm{i}z} dz.$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \int_{\partial D(0,1)} F(z) dz,$$

其中

$$F(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z} R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right)$$

是z的有理函数. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是$F(z)$ 在圆$|z| < 1$内的极点, 则

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(F, \alpha_k).$$

例4.2.3 计算积分

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} \quad (a > 1).$$

解 令$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} \\ &= \frac{2}{\mathrm{i}} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 + 2az + 1)^2} = \frac{2}{\mathrm{i}} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2}.\end{aligned}$$

其中$\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}$, $\beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}$为实系数二次方程$z^2 + 2az + 1 = 0$的两相异实根. 由根与系数的关系$\alpha\beta = 1$, 且有$|\beta| = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1 > |\alpha|$. 于

是函数$f(z)=\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}$在$|z|=1$上无奇点. 在单位圆周内部只有一个二阶极点$z=\alpha$. 故有

$$\mathrm{Res}\,(f,\alpha)=\left[\frac{z}{(z-\beta)^2}\right]'_{z=\alpha}=-\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3}=\frac{a}{4\,(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

因此

$$I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{a}{4\,(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a\pi}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

定理4.2.4　设$P(z)$, $Q(z)$为z的多项式, 且$Q(z)$在实轴上无零点, 其次数比$P(z)$至少大2. 设$Q(z)$在上半平面内互不相同的零点为$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right).\tag{4.2.3}$$

证明　由于$Q(z)$的次数比$P(z)$至少大2, 所以存在正常数M和$R_0>1+\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$, 当$|z|>R_0$时,

$$\frac{|P(z)|}{|Q(z)|}\leqslant\frac{M}{1+|z|^2}.$$

设$\Omega_R=\{z=re^{\mathrm{i}\theta}:0<\theta<\pi,0<r<R\}$是中心在0点, 半径为$R$的开半圆盘, $C_R:z=Re^{\mathrm{i}\theta}\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$是中心在0 点, 半径为$R$, 从$R$到$-R$的半圆弧, 如图8, 则当$R>R_0$时,

$$\int_{\partial\Omega_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right).\tag{4.2.4}$$

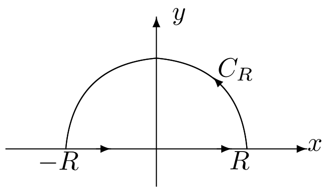

图8

由于当$R>R_0$时,

$$\left|\int_{C_R}\frac{P(z)dz}{Q(z)}\right|\leqslant\frac{M\pi R}{1+R^2},$$

在(4.2.4)式中令$R\to\infty$, 得到(4.2.3)式. □

例4.2.5 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}.$$

解 取

$$f(z)=\frac{1}{z^4+1},$$

它满足定理4.2.4的条件, 在z 平面上有四个一阶极点,

$$z_k=\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi}{4}i},\quad k=0,1,2,3,$$

其中z_0和z_1 在上半平面. 易得

$$\mathrm{Res}\,(f,z_k)=-\frac{z_k}{4},\quad \mathrm{Res}\,(f,z_0)+\mathrm{Res}\,(f,z_1)=-\frac{1}{4}(z_0+z_1)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i},$$

故

$$I=\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\pi\mathrm{i}\cdot(\mathrm{Res}\,(f,z_0)+\mathrm{Res}\,(f,z_1))=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

例4.2.6 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2p}-x^{2q}}{1-x^{2r}}dx,$$

其中p, q, r为非负整数且$p<r$, $q<r$.

解 函数

$$f(z)=\frac{z^{2p}-z^{2q}}{1-z^{2r}}$$

分母的次数$2r$比分子次数$2p$至少大2. $f(z)$的所有位于上半平面的极点为

$$z_k=\exp\left(\frac{k\pi\mathrm{i}}{r}\right)=z_1^k\qquad(k=1,2,\cdots,r-1),$$

且全是一阶的.

$$\mathrm{Res}\,(f,z_k)=\left.\frac{z^{2p}-z^{2q}}{-2rz^{2r-1}}\right|_{z=z_k}=\frac{1}{2r}\left[z_1^{(2q+1)k}-z_1^{(2p+1)k}\right].$$

由被积函数为偶函数, 得

$$2I=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2r}\sum_{k=1}^{r-1}\left[z_1^{(2q+1)k}-z_1^{(2p+1)k}\right]=\frac{\pi\mathrm{i}}{r}\left[\frac{1-z_1^{(2q+1)r}}{1-z_1^{2q+1}}-\frac{1-z_1^{(2p+1)r}}{1-z_1^{2p+1}}\right].$$

由于$z_1^r=-1$, 所以

$$2I=\frac{\pi 2\mathrm{i}}{r}\left[\frac{1}{1-z_1^{2q+1}}-\frac{1}{1-z_1^{2p+1}}\right]=\frac{\pi}{r}\left(\cot\frac{2p+1}{2r}\pi-\cot\frac{2q+1}{2r}\pi\right).$$

应用Jordan 引理, 同样可以得到如下定理.

定理4.2.7 设$a>0$, $P(z)$, $Q(z)$为z 的多项式且$Q(z)$在实轴上无零点, 其次数比$P(z)$的次数至少大1. 设$Q(z)$在上半平面内互不相同的零点为$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}dx=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},a_k\right). \tag{4.2.5}$$

证明 由于$Q(z)$的次数比$P(z)$的次数至少大1, 所以

$$\lim_{z\to\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}=0.$$

设$\Omega_R=\{z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:0<\theta<\pi,0<r<R\}$是中心在0点, 半径为$R$的开半圆盘, $C_R:z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$是中心在0点, 半径为$R$, 从$R$到$-R$的半圆弧, 则当$R>R_0=1+\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$时, 如图8, 有

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}dz&=\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}dx+\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}dz\\&=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},a_k\right).\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

由Jordan引理

$$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}dz=0,$$

在(4.2.6)式中令$R\to\infty$, 得到(4.2.5)式. □

当$a>0$, $P(x),Q(x)$为实多项式且$Q(x)$的次数至少比$P(x)$的次数大1, $Q(x)\neq 0$时, 利用定理4.2.7的结果, 可得到下面两种混合型积分的值:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax dx=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}dx\right)$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax dx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}dx\right).$$

例4.2.8 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}dx,\qquad m>0,\ a>0.$$

解 $R(z)=\frac{z}{z^4+a^4}$在上半平面有一阶极点$a\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}},a\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}$, 分母幂次数比分子高3次, 实轴上无奇点.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^4+a^4}dx&=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}\right)+\mathrm{Res}\left(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}\right)\right\}\\&=\frac{\pi\mathrm{i}}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}ma}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}ma.\end{aligned}$$

又

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^4+a^4}dx,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}dx=\frac{\pi}{2a^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}ma}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}ma.$$

例4.2.9 计算积分

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax dx}{x^2+b^2}\qquad(a>0,\ b>0).\tag{4.2.7}$$

解 $R(z)=\frac{1}{z^2+b^2}$ 在上半平面有一阶极点$\mathrm{i}b$, 分母中多项式的次数比分子中多项式的次数高2次, 实轴上无奇点.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}dx}{x^2+b^2}=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},\mathrm{i}b\right)=2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\mathrm{i}b}}{2\mathrm{i}b}=\frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-ab}.$$

所以$I(a,b)=\frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-ab}$.

例4.2.10 计算积分

$$J(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx,\qquad a>0,\quad b>0.\tag{4.2.8}$$

解 $R(z)=\frac{z}{z^2+b^2}$在上半平面有一阶极点$b\mathrm{i}$, 分母幂次数比分子高1次, 实轴上无奇点.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}dx}{x^2+b^2}=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},\mathrm{i}b\right)=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-ab}.$$

所以$J(a,b)=\pi\mathrm{e}^{-ab}$.

注意到

$$-\frac{\partial}{\partial a}I(a,b)=\pi \mathrm{e}^{-ab}=J(a,b).$$

我们发现可以通过在(4.2.7)式的积分号下对a求导, 得到(4.2,8)式中的积分值. 另外, 有$J(a,0)=\pi\ (a>0)$, 这可以用如下的例子来验证.

例4.2.11 计算Dirichlet积分

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx\quad (a>0).$$

解 设$C_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$是中心在0 点, 半径为$R$, 逆时针从$R$到$-R$的半圆弧, 如图9, 则当$R>a>r>0$时,

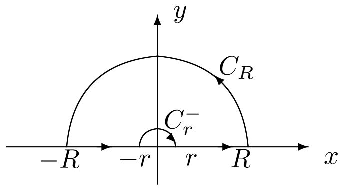

图9

$$\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x}dx+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{x}dx-\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z}dz=0. \qquad (4.2.9)$$

由Jordan引理, 有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z}dz=0.$$

在引理4.2.1中取$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z}, A=1, \theta_1=0$ 和$\theta_2=\pi$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z}dz=\pi\mathrm{i}\,.$$

在(4.2.9)式中令$R\to\infty$ 和$r\to 0$, 得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}}{x}dx=\pi\mathrm{i}\,.$$

于是$I(a)=\frac{\pi}{2}$.

被积函数或辅助函数是多值函数的情形, 一定要适当割开平面, 使其能分出解析分支, 才能应用Cauchy 积分定理或留数定理来求积分值.

定理4.2.12 若函数$f(z)$在平面$\mathbb{C}$上除孤立奇点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外处处解析, 且孤立奇点都不包含在原点的正实轴上, $f(z)$在正实轴上取实值且

$$\lim_{z\to\infty}|z|(\ln|z|)^2 f(z)=0, \qquad (4.2.10)$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)(\ln z)^2, a_k)\right), \tag{4.2.11}$$

其中$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z,\ 0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

证明 设$C_R : z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$是中心在0 点, 半径为$R$, 逆时针从$R$到$R$的圆弧和$M(R) = \sup\{|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, 则当$R > 0, R \neq |a_k|,\ k = 1, 2, \cdots, n$时,

$$\left|\int_{C_R} f(z)(\ln z)^2 dz\right| \leqslant 2\pi RM(R)(\ln R + 2\pi)^2.$$

由假设, 有

$$\lim_{R\to\infty} R(\ln R)^2 M(R) = 0, \quad \lim_{r\to 0} r(\ln r)^2 M(r) = 0.$$

设$R_0 = 1 + \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\},\ r_0 = \min\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$, 则当$R > R_0, 0 < r < r_0$时, 如图10, 有

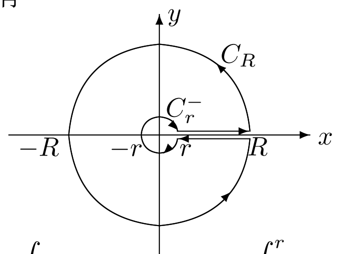

图10

$$\int_r^R f(x)(\ln x)^2 dx + \int_{C_R} f(z)(\ln z)^2 dz + \int_R^r f(x)(\ln x + 2\pi\mathrm{i})^2 dx -$$

$$\int_{C_r} f(z)(\ln z)^2 dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)(\ln z)^2, a_k). \tag{4.2.12}$$

在(4.2.12)式中, 令$R \to \infty$ 和$r \to 0$, 得到

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^{\infty} f(x)(\ln x)dx + 4\pi^2\int_0^{\infty} f(x)dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)(\ln z)^2, a_k).$$

上式除以$-4\pi\mathrm{i}$, 然后取实部得到(4.2.11)式.

例4.2.13 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$$

解 设$f(z) = (1+z^2)^{-1}$, 则

$$\lim_{z\to\infty}|z|(\ln|z|)^2 f(z) = 0,$$

由定理4.2.12,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}(f(z)(\ln z)^2, \mathrm{i}) + \mathrm{Res}(f(z)(\ln z)^2, -\mathrm{i})\right).$$

由于

$$\mathrm{Res}(f(z)(\ln z)^2, \mathrm{i}) = \left(\frac{(\ln z)^2}{(z+\mathrm{i})^2}\right)'\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = \left[\frac{2\ln z}{z(z+\mathrm{i})^2} - \frac{2(\ln z)^2}{(z+\mathrm{i})^3}\right]\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2\mathrm{i}}{16},$$

和

$$\mathrm{Res}(f(z)(\ln z)^2, -\mathrm{i}) = \left[\frac{2\ln z}{z(z-\mathrm{i})^2} - \frac{2(\ln z)^2}{(z-\mathrm{i})^3}\right]\Bigg|_{z=-\mathrm{i}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\pi^2\mathrm{i}}{16},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

定理4.2.14 设$0 < p < 1$, 若函数$f(z)$在平面$\mathbb{C}$上除孤立奇点$a_1, a_2, \cdots, a_n$外处处解析, 且孤立奇点都不包含在原点的正实轴上, 且

$$\lim_{z\to\infty} |z|^p f(z) = 0, \tag{4.2.13}$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^{p-1}dx = -\frac{\pi \mathrm{e}^{-p\mathrm{i}\pi}}{\sin p\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z)\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}, a_k)\right), \tag{4.2.14}$$

其中$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$ $(0 < \arg z < 2\pi)$在$\mathbb{C}\setminus[0, +\infty)$中解析.

证明 设$C_R: z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$是中心在0 点, 半径为$R$, 逆时针从$R$到$R$的圆弧和$M(R) = \sup\{|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, 则当$R > 0, R \neq |a_k|$, $k = 1, 2, \cdots, n$时,

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}dz\right| \leqslant 2\pi R M(R) R^{p-1}.$$

由假设, 有

$$\lim_{R\to\infty} R^p M(R) = 0, \quad \lim_{r\to 0} r^p M(r) = 0.$$

设$R_0 = 1 + \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$, $r_0 = \min\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$, 则当$R > R_0, 0 < r < r_0$时, 如图10, 有

$$\int_r^R f(x)x^{p-1}dx + \int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}dz - \int_r^R f(x)\mathrm{e}^{(p-1)(\ln x + \mathrm{i}\,2\pi)}dx -$$

$$\int_{C_r} f(z)\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}, a_k). \tag{4.2.15}$$

在(4.2.15)式中, 令$R\to\infty$ 和$r\to 0$, 得到

$$(1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}})\int_0^{\infty} f(x)x^{p-1}dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}, a_k).$$

由此得到(4.2.14)式. □

例4.2.15 计算积分

$$I(p) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx \quad (0<p<1).$$

解 设$f(z)=\frac{1}{1+z}$, $z=-1$是$f(z)$ 的一阶极点且$\lim\limits_{z\to\infty}|z|^p f(z)=0$, 于是

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}}{1+z}, -1\Big) = \mathrm{e}^{(p-1)\pi\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}},$$

故

$$I(p) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

定理4.2.16 设$\alpha>-1, \beta>-1$是实数且$\alpha+\beta$是整数, 若函数$f(z)$在平面$\mathbb{C}$上除孤立奇点$a_1, a_2, \cdots, a_n$外处处解析, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不在线段$[0,1]$上. 则函数

$$g(z) = \exp\{\alpha\ln z + \beta\ln(z-1) - \mathrm{i}\beta\pi\}$$

在$\mathbb{C}\setminus[0,1]$中解析, 其中

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\arg z, \quad \ln(z-1) = \ln|z-1| + \mathrm{i}\,\arg(z-1),$$

$$0\leqslant \arg z < 2\pi;\ 0\leqslant\arg(z-1)<2\pi,$$

且

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}f(x)dx$$

$$= -\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}\sin\alpha\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)g(z), a_k) + \mathrm{Res}(f(z)g(z), \infty)\right). \tag{4.2.16}$$

证明 对任意的$x>0$, 设$g_0(x)=\lim\limits_{\mathrm{Im}z<0,z\to x}g(z)$, 则当$x\in(0,1)$时, $g_0(x)=x^\alpha(1-x)^\beta\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}=g(x)\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}$; 当$x>1$时, $g_0(x)=x^{a-1}(x-1)^\beta\mathrm{e}^{-\pi\beta\mathrm{i}}=g(x)$. 于是$g(z)$ 在$\mathbb{C}\setminus[0,1]$中连续, 从而对任意$\mathbb{C}\setminus[0,1]$中的长方形$\square$, 有

$$\int_{\partial\square}g(z)dz=0,$$

由Morera定理, $g(z)$在$\mathbb{C}\setminus[0,1]$中解析.

设$C_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$是中心在0 点, 半径为$R$, 逆时针从$R$到$R$的圆弧, $C_{1,r}: z=1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$是中心在1点, 半径为$r$, 逆时针从$1+r$到$1-r$的圆弧和$C_{2,r}: z=1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$是中心在1点, 半径为$r$, 逆时针从$1-r$到$1+r$的圆弧. 又设$R_0=1+\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$, $r_0=\min\{\frac{1}{4},|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$, 则当$R>R_0, 0<r<r_0$时, 如图11, 由留数定理, 有

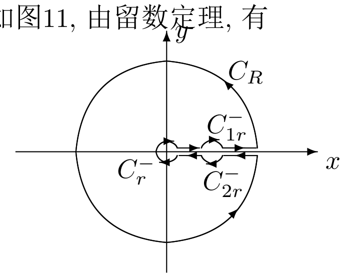

图11

$$\int_r^{1-r}f(x)g(x)dx+\int_{C_{1,r}^-}f(z)g(z)dz+\int_{1+r}^{R}f(x)g(x)dx+\int_{C_R}f(z)g(z)dz+$$

$$\int_R^{1+r}f(x)g_0(x)dx+\int_{C_{2,r}^-}f(z)g(z)dz+\int_{1-r}^{r}f(x)g_0(x)dx+\int_{C_r^-}f(z)g(z)dz$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(f(z)g(z),a_k). \tag{4.2.17}$$

由于

$$\int_{C_R}f(z)g(z)dz=-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f(z)g(z),\infty),$$

在(4.2.17)式中, 令$R\to\infty$ 和$r\to 0$, 得到

$$(1-\mathrm{e}^{2\alpha\pi\mathrm{i}})\int_0^1 f(x)g(x)dx=2\pi\mathrm{i}\left(\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(f(z)g(z),a_k)+\mathrm{Res}(f(z)g(z),\infty)\right).$$

由此得到(4.2.16)式. □

例4.2.17 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx.$$

解 函数$f(z)=\frac{1}{1+z}$ 除$z=-1$外处处解析.

$$g(z)=\exp\left\{-\frac{2}{3}\ln z-\frac{1}{3}(\ln(z-1)-\pi\mathrm{i}\,)\right\}$$

在$\mathbb{C}\setminus[0,1]$中解析, 其中

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\arg z,\quad \ln(z-1)=\ln|z-1|+\mathrm{i}\,\arg(z-1),$$

$$0\leqslant \arg z<2\pi;\ 0\leqslant \arg(z-1)<2\pi.$$

由于$\lim\limits_{z\to\infty} zg(z)f(z)=0$, 所以$\mathrm{Res}(f(z)g(z),\infty)=0$, 又有

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{g(z)}{1+z},-1\Big)=g(-1)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{\sqrt[3]{2}}.$$

故由定理4.2.16, 有

$$I=-\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}\sin\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}.$$

例4.2.18 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx.$$

解 设$f(z)=\frac{1}{(1+z)^3}$, 则$z=-1$是$f(z)$ 的3阶极点.

$$g(z)=\exp\left\{\frac{2}{5}\ln z+\frac{3}{5}(\ln(z-1)-\pi\mathrm{i}\,)\right\}$$

在$\mathbb{C}\setminus[0,1]$中解析, 其中

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\arg z,\quad \ln(z-1)=\ln|z-1|+\mathrm{i}\,\arg(z-1),$$

$$0\leqslant \arg z<2\pi;\ 0\leqslant \arg(z-1)<2\pi.$$

由于$\lim\limits_{z\to\infty} zg(z)f(z)=0$, 所以$\mathrm{Res}(f(z)g(z),\infty)=0$, 又由例2.4.10, 有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{(1+z)^3},-1\right)=\frac{g''(-1)}{2}=-\frac{3}{100}\sqrt[5]{8}\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}.$$

故由定理4.2.16, 有

$$I=-\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{5}}\sin\frac{2\pi}{5}}\frac{-3}{100}\sqrt[5]{8}\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}=\frac{3\pi\sqrt[5]{8}}{100\sin\frac{2\pi}{5}}.$$

例4.2.19 计算积分

$$I=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx,$$

其中$\alpha>-1,\beta>-1$是实数且$\alpha+\beta=m$是整数.

解 $g(z)=\exp\{\alpha\ln z+\beta(\ln(z-1)-\pi\mathrm{i})\}$ 在$\mathbb{C}\setminus[0,1]$中解析, 其中

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z,\quad \ln(z-1)=\ln|z-1|+\mathrm{i}\arg(z-1),$$

$$0\leqslant\arg z<2\pi;\ 0\leqslant\arg(z-1)<2\pi.$$

由于当$x>1$时,

$$\mathrm{e}^{\pi\beta\mathrm{i}}g(x)=x^{m-\beta}(x-1)^{\beta}=x^m(1-\frac{1}{x})^{\beta}=x^m(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{\beta}{n}x^{-n}),$$

由解析函数的唯一性, 有

$$g(z)=z^m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{\beta}{n}z^{-n}\right)\mathrm{e}^{-\pi\beta\mathrm{i}}\quad(|z|>1).$$

所以

$$\mathrm{Res}(g(z),\infty)=-(-1)^{m+1}\binom{\beta}{m+1}\mathrm{e}^{-\pi\beta\mathrm{i}}.$$

故由定理4.2.16, 有

$$I=-\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}\sin\alpha\pi}\mathrm{Res}(g(z),\infty)=\frac{(-1)^m\pi}{\sin\beta\pi}\binom{\beta}{m+1}.$$

§4.3 辐角原理及其应用

引理4.3.1 (1) 设$f(z)$在$|z-a|<r$中解析, a 为$f(z)$ 的n阶零点, 则a 必为函数$\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 并且

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = n. \tag{4.3.1}$$

(2) 设$g(z)$在$0<|z-b|<r$中解析, b为$g(z)$ 的m阶极点, 则b 必为函数$\frac{g'(z)}{g(z)}$ 的一阶极点, 并且

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g'(z)}{g(z)}, b\right) = -m. \tag{4.3.2}$$

证明 (1) 设$f(z)$在$|z-a|<r$中解析, a 为$f(z)$ 的n 阶零点, 则在$|z-a|<r$中存在解析函数$\varphi(z)$, 使得$\varphi(a)\neq 0$ 且在$|z-a|<r$中有$f(z)=(z-a)^n\varphi(z)$, 于是$f'(z)=n(z-a)^{n-1}\varphi(z)+(z-a)^n\varphi'(z)$,从而

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

由于存在$\delta>0, \delta\leqslant r$, 使得$\varphi(z)$ 在$|z-a|<\delta$中不取零值, 所以$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在$|z-a|<\delta$中解析, 函数$\frac{f'(z)}{f(z)}$在$0<|z-a|<\delta$中解析, a 必为函数$\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 并且(4.3.1)式成立.

(2) 设$g(z)$在$0<|z-b|<r$中解析, b 为$g(z)$ 的m 阶极点, 则在$|z-b|<r$中存在解析函数$\psi(z)$, 使得$\psi(b)\neq 0$ 且在$0<|z-b|<r$中有$g(z)=(z-b)^{-m}\psi(z)$, 于是$g'(z)=-m(z-b)^{-m-1}\psi(z)+(z-b)^{-m}\psi'(z)$,从而

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{-m}{z-b} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

由于存在$\delta_1>0, \delta_1\leqslant r$, 使得$\psi(z)$ 在$|z-b|<\delta_1$中不取零值, 所以$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 在$|z-b|<\delta_1$中解析, 函数$\frac{g'(z)}{g(z)}$在$0<|z-b|<\delta_1$中解析, b 必为函数$\frac{g'(z)}{g(z)}$ 的一阶极点, 并且(4.3.2)成立. □

引理4.3.2 设Ω 是区域, $K\subset\Omega$ 是有界闭集. 如果f 是区域Ω 中不恒为零的亚纯函数, 则$f(z)$在K中至多只有有限个极点和零点.

证明 设B是f 在K 中极点组成的集合, 则$B\subset K$是有界集. 如果B 是无限集, 则B有极限点$b\in\overline{B}\subset K\subset\Omega$. 由于$f$ 在区域Ω 中亚纯, b是$f(z)$的奇点但不是$f(z)$的孤立奇点, 与f 在开集Ω 中亚纯矛盾. 所以B是有限集. 设A是f 在K

中零点组成的集合. 则$A\subset K$是有界集, 且$\Omega_1=\Omega\setminus B$ 是区域, 如果A是无限集, 则A有极限点$a\in\overline{A}\subset K\subset\Omega$. 由于$f$ 在区域Ω 中亚纯, a不可能是$f(z)$的极点, 于是$a\in\Omega_1$, 由解析函数的唯一性, f 在区域Ω_1 中恒为零, 与f 在区域Ω 中亚纯矛盾. □

定理4.3.3 (辐角原理) 设Ω 是区域, $\omega\subset\Omega$ 是有界区域, 其边界$C=\partial\omega\subset\Omega$ 是一条复围线, 它由$n+1$条Jordan闭分段光滑曲线$C_0,C_1,\cdots,C_n$组成, 其中$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 中每一条在其余各条的外部, 而它们又都在C_0的内部. 如果f在开集Ω 中亚纯且f 在$\partial\omega$ 上没有零点和极点, 则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial\omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N(f,C)-P(f,C),$$

其中$N(f,C)$表示f 在ω中零点的数目(k阶零点算k个零点), $P(f,C)$表示f 在ω中极点的数目 (k阶极点算k个极点).

证明 设B是f 在ω 中零点和极点组成的集合, ω是有界集, 所以由引理4.3.2, B是有限集. 设$B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 则由留数定理和引理4.3.1,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial\omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a_k\right)=N(f,C)-P(f,C).$$

这证明了定理. □

设$C:z=\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$是一条分段光滑的有向曲线(简称为路径), $f(z)$在C上解析, 则$\Gamma=f(\gamma):w=\Gamma(t)=f(\gamma(t))(a\leqslant t\leqslant b)$也是一条分段光滑的有向曲线, 如果$0\notin\Gamma$, 即$f(z)$在$C$上不取零值, 则存在$\rho(t)=|\Gamma(t)|$和$\vartheta(t)$,它们是$[a,b]$上分段光滑的函数, 使得$\Gamma(t)=\rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(t)}$, 将

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\int_a^b\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\mathrm{i}\,\vartheta'(t)\right)dt\right)=\vartheta(b)-\vartheta(a)$$

记为$\triangle_\Gamma\arg w$, 也记为$\triangle_\gamma\arg f(z)$. $\triangle_\gamma\arg f(z)$称为$f(z)$沿$\gamma$的辐角增量. 它的几何意义是当$w(=f(z))$ 沿Γ从起点$\Gamma(a)=f(\gamma(a))$到终点$\Gamma(b)$时, 辐角$\vartheta(t)$连续变动的增量. 于是有

$$\triangle_\Gamma\arg w=\triangle_C\arg f(z)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{d\zeta}{\zeta}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)dz}{f(z)}\right).$$

当$C:z=\gamma(t)(a\leqslant t\leqslant b)$是一条分段光滑的有向闭曲线时, $f(z)$在C上解析, 则$\Gamma=f(C):w=\Gamma(t)=f(\gamma(t))(a\leqslant t\leqslant b)$也是一条分段光滑的有向曲线, 如

果$f(z)$在C上不取零值, 则$\Gamma(a)=\Gamma(b)$, 所以$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(a)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(b)}$, 从而$\vartheta(b)-\vartheta(a)$是$2\pi$的整数倍. 它表示当$w$沿$\Gamma$的给定方向运动从起点$\Gamma(a)$到终点$\Gamma(b)$时, 辐角$\vartheta(t)$连续变动的增量, 并且它反映了闭路径$\Gamma$绕原点的圈数. 于是我们得到如下辐角原理.

定理4.3.4 (辐角原理) 设Ω是区域, $\omega\subset\Omega$是有界区域, 其边界$C=\partial\omega\subset\Omega$是一条Jordan闭分段光滑曲线, 如果$f$在开集$\Omega$中亚纯且$f$在$C$上没有零点和极点, $f(z)$在围线C内部的零点个数与极点个数之差, 等于当z沿C之正向绕行一周后$\arg f(z)$的改变量$\triangle_C \arg f(z)$除以2π, 即

$$N(f,C)-P(f,C)=\frac{\triangle_C \arg f(z)}{2\pi}. \tag{4.3.3}$$

特别, 如果$f(z)$在围线C上及C之内部均解析, 且$f(z)$在C上不为零, 则

$$N(f,C)=\frac{\triangle_C \arg f(z)}{2\pi}. \tag{4.3.4}$$

定理4.3.5 (Rouché(儒歇)定理) 设Ω是区域, $\omega\subset\Omega$是有界区域, 其边界$C=\partial\omega\subset\Omega$是一条Jordan闭分段光滑曲线, 如果$f(z)$和$g(z)$在开集$\Omega$中解析且在$C$上, $|f(z)|>|g(z)|$, 则函数$f(z)$与$f(z)+g(z)$在C的内部ω有相同的(k阶零点算作k个零点)零点个数, 即

$$N(f+g,C)=N(f,C). \tag{4.3.5}$$

证明 由于在C上, $|f(z)|>|g(z)|$, 所以$f(z)$和$F(z)=f(z)+g(z)$在C上无零点. 设

$$h(z)=\frac{F(z)}{f(z)}=1+\frac{g(z)}{f(z)},\quad \Gamma=h(C),$$

则对$z\in C$, 有$|h(z)-1|<1$, 所以闭曲线$\Gamma=h(C)$全在单连通区域$D(1,1)=\{w:|w-1|<1\}$中, 所以

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{h'(z)}{h(z)}dz=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{dw}{w}=0,$$

而

$$\frac{h'(z)}{h(z)}=\frac{F'(z)}{F(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

所以

$$N(F,C)-N(f,C)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\left(\frac{F'(z)}{F(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{h'(z)}{h(z)}dz=0.$$

从而(4.3.5)成立. □

例4.3.6 求方程z^4+6z+3在圆$|z|<1$内和与圆环$1<|z|<2$内根的个数.

解 当$|z|=1$时,

$$|z^4+3|\leqslant 4<6=|6z|,$$

由Rouché定理, 函数z^4+6z+3与$6z$在$|z|<1$内有相同的零点个数, 所以z^4+6z+3在圆$|z|<1$内只有一个根.

当$|z|=2$时,

$$|6z+3|\leqslant 15<16=|z^4|,$$

由Rouché定理, 函数z^4+6z+3与z^4在$|z|<2$内有相同的零点个数, 所以z^4+6z+3在圆$|z|<2$内只有4个根.因此z^4+6z+3在圆环$1<|z|<2$内有3个根. 即z^4+6z+3在圆$|z|<1$内只有1个根, 在圆环$1<|z|<2$内有3个根.

例4.3.7 设$a\in\mathbb{C}$, n是一个正整数. 如果$|a|>\mathrm{e}$, 证明方程$\mathrm{e}^z=az^n$在单位圆$|z|<1$内有n个根.

证明 令$f(z)=az^n$, $g(z)=-\mathrm{e}^z$. 则当$|z|=1$时,

$$|g(z)|=|\mathrm{e}^z|\leqslant \mathrm{e}^{|z|}=\mathrm{e}<|a|=|az^n|=|f(z)|.$$

由Rouché定理, 函数$az^n-\mathrm{e}^z$与az^n在$|z|<1$内有相同的零点个数, 从而$\mathrm{e}^z=az^n$在单位圆$|z|<1$内有n个根.

定理4.3.8 *设f在区域Ω中解析, $b=f(a), a\in\Omega$, a是$f(z)-b$的m阶零点, 则存在$\varepsilon_0>0$, 使得对任意$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 存在$\delta>0$, 对满足$0<|A-b|<\delta$的每一个值$A$, 函数$f(z)-A$在$|z-a|<\varepsilon$内恰好有$m$个不同的一阶零点.*

证明 设a是$f(z)-b$的m阶零点, 由定理3.3.5, 存在Ω中的解析函数$h(z)$使得$f(z)-b=(z-a)^m h(z)$且$h(a)\neq 0$. 求导得

$$f'(z)=m(z-a)^{m-1}h(z)+(z-a)^m h'(z).$$

由于$h(z)$和$mh(z)+(z-a)h'(z)$在a点连续, 存在$\varepsilon_0>0$, 以a为圆心的一个开圆盘$D(a,\varepsilon_0)\subset\overline{D(a,\varepsilon_0)}\subset\Omega$, 使得$h(z)$和$mh(z)+(z-a)h'(z)$在闭圆盘$\overline{D(a,\varepsilon_0)}$中处处不为零, 从而$f(z)-b$和$f'(z)$在$\overline{D(a,\varepsilon_0)}\setminus\{a\}$上无零点. 对于任意$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 由于$f(z)-b$在$\overline{D(a,\varepsilon)}$上解析, 并且在$\partial D(a,\varepsilon)$上无零点, 那么在$\partial D(a,\varepsilon)$上, $|f(z)-b|$有最小值

$$\min\{|f(z)-b|:z\in\partial D\}=\delta>0.$$

对满足$0<|A-b|<\delta$的任意数A, 因为$f(z)-A=f(z)-b+b-A$, 且在$\partial D(a,\varepsilon)$上有$|A-b|<\delta\leqslant|f(z)-b|$, 由 Rouché 定理, $f(z)-A$ 与$f(z)-b$ 在$D(a,\varepsilon)$内有相同的零点个数. $f(z)-b$ 在$D(a,\varepsilon)$内恰好有m个零点, 于是$f(z)-A$ 在$D(a,\varepsilon)$内也恰好有m个零点. 设$F(z)=f(z)-A$, 由于$F(a)\neq 0$ 以及$F'(z)=f'(z)$在$\overline{D(a,\varepsilon)}\setminus\{a\}$上无零点, 所以$F(z)=f(z)-A$在$D(a,\varepsilon)$中的每个零点均为一阶零点.所以$F(z)=f(z)-A$在$D(a,\varepsilon)$中的这$m$ 个零点是简单零点, 即函数$f(z)-A$ 在$|z-a|<\varepsilon$内恰好有m 个不同的一阶零点. □

定理4.3.9 设Ω 为区域, f 在区域Ω中解析, 如果$f(z)$ 在Ω中不为常数, 则$f(\Omega)$是区域.

证明 对任意的$a\in\Omega$, 由零点的孤立性知, a是$f(z)-f(a)$的孤立零点. 由定理4.3.8, 存在$\varepsilon_0>0$, 以a为圆心的一个开圆盘$D(a,\varepsilon_0)\subset\overline{D(a,\varepsilon_0)}\subset\Omega$ 和$\delta_0>0$, 使得对于$0<|w-f(a)|<\delta_0$的每一个值w, 函数$f(z)-w$ 在$|z-a|<\varepsilon_0$内至少有一个零点, 从而$D(f(a),\delta_0)\subset f(D(a,\varepsilon_0))\subset f(\Omega)$, 于是$f(\Omega)$ 是开集. 对于任意的$w_1,w_2\in f(\Omega)$, 存在$z_1,z_2\in\Omega$ 使得$w_1=f(z_1),w_2=f(z_2)$. 因为Ω 是连通的, 所以在Ω 中有一条连续曲线$L: z=\gamma(t)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$连接$z_1,z_2$, 于是连续曲线$f(L)$包含在$f(\Omega)$中, 且连接$w_1,w_2$. 于是$f(\Omega)$是连通的. 这证明了定理4.3.9. □

§4.4 亚纯函数的部分分式展式

利用留数定理可以将复平面中的亚纯函数展成部分分式, 下面给出一个利用留数定理把亚纯函数展成部分分式的例子.

例4.4.1 对任意$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 有

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \ , \tag{4.4.1}$$

级数在区域$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$中内闭一致收敛.

解 对任意有界闭集$K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, 存在$R > 1$ 和$\delta_0 > 0, \delta_0 < \frac{1}{2}$, 使得对任意$z \in K$ 有$|z| \leqslant R$且$|n^2 - z^2| \geqslant \delta_0, n \in \mathbb{Z}$, 于是当$n > 2R$时,

$$\left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leqslant \frac{8R}{n^2}, \quad z \in K.$$

所以级数(4.4.1)在区域$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$中内闭一致收敛. 对任意$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, 设$n > |z_0| + 1$是一个正整数, 设$\partial\Omega_n$是正方形区域$\Omega_n = \{z = x + \mathrm{i}\, y : |x| < n + \frac{1}{2}, \ \ |y| < n + \frac{1}{2}\}$的边界. 函数$\frac{\cot \pi z}{z - z_0}$在$z = n \ (n \in \mathbb{Z})$和$z_0$有一阶极点, 其留数分别为:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot \pi z}{z - z_0}, n \right) = \frac{1}{\pi\,(n - z_0)}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{\cot \pi z}{z - z_0}, z_0 \right) = \cot \pi z_0.$$

由留数定理

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega_n} \frac{\cot \pi z}{z - z_0} dz &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\pi\,(k - z_0)} + \cot \pi z_0 \\ &= \cot \pi z_0 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z_0}{z_0^2 - k^2} \right). \end{aligned}$$

现在来估计左端的积分. 对任意正整数n, 有

$$\left| \sin \pi \left(\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathrm{i}\, y \right) \right| = |\cos \pi \mathrm{i}\, y| = \cosh \pi y,$$

$$\left| \cos \pi \left(\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathrm{i}\, y \right) \right| = |\sin \pi \mathrm{i}\, y| = \sinh \pi |y|,$$

$$\left| \cos \pi \left(x \pm \mathrm{i} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \right|^2 = \cosh^2 \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) - \sin^2 \pi x \leqslant \frac{1}{4} (\mathrm{e}^{2n\pi + \pi} + 3),$$

$$\left| \sin \pi \left(x \pm \mathrm{i} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \right|^2 = \sinh^2 \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \sin^2 \pi x \geqslant \frac{1}{4} (\mathrm{e}^{2n\pi + \pi} - 2),$$

所以在$\partial\Omega_n$中平行于y轴的两边上,

$$\left|\cot\pi\left(\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{i}\,y\right)\right|=\frac{\sinh\pi|y|}{\cosh\pi y}\leqslant 1.$$

在$\partial\Omega_n$平行于x轴的两边上,

$$\left|\cot\pi\left(x\pm\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\right|^2\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2\pi n+\pi}+3}{\mathrm{e}^{2\pi n+\pi}-2}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{3\pi}+3}{\mathrm{e}^{3\pi}-2}\leqslant 4,$$

故对任意正整数n, 在$\partial\Omega_n$上有$|\cot\pi z|\leqslant 2$. 又

$$\int_{\partial\Omega_n}\frac{\cot\pi z}{z-z_0}dz=\int_{\partial\Omega_n}\frac{\cot\pi z}{z}dz+\int_{\partial\Omega_n}\frac{z_0\cot\pi z}{(z-z_0)\,z}dz,$$

上式右端第一个积分由留数定理

$$\int_{\partial\Omega_n}\frac{\cot\pi z}{z}dz=2\pi\mathrm{i}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\frac{1}{\pi k}=0,$$

第二个积分当$n>1+|z_0|$ 时, 由$|\cot\pi z|\leqslant 2$有

$$\left|\int_{\partial\Omega_n}\frac{z_0\cot\pi z}{(z-z_0)\,z}dz\right|\leqslant\frac{2|z_0|}{n\,(n-|z_0|)}\cdot(8n+4)\to 0\quad(n\to+\infty)\,.$$

综上有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\partial\Omega_n}\frac{\cot\pi z}{z-z_0}dz=0.$$

在等式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega_n}\frac{\cot\pi z}{z-z_0}dz=\cot\pi z_0-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z_0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2z_0}{z_0^2-k^2}\right)$$

中, 令$n\to+\infty$取极限即得

$$\cot\pi z_0=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z_0}{z_0^2-n^2}\right]\quad(z_0\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}).$$

由$z_0\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$的任意性, (4.4.1)式成立.

　　由上例, 当$|z|<1$时,

$$\pi z\cot\pi z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2-n^2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^{2k}$$

$$=1-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^{2k}}{n^{2k}}=1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k}.$$

所以

$$z\cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{2k}n^{2k}}\right)z^{2k},\quad |z| < \pi.$$

又函数$z\cot z$在圆$|z| < \pi$内解析, 所以在$|z| < \pi$内可展开成泰勒级数. 因$z\cot z$为偶函数, 泰勒展开式中只含偶次幂.

$$\begin{aligned} z\cot z &= z\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots} \\ &= 1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{32}{3\times 7!}z^6 - \cdots \end{aligned}$$

于是

$$\pi z\cot \pi z = 1 - \frac{\pi^2}{3}z^2 - \frac{\pi^4}{45}z^4 - \frac{32\pi^6}{3\times 7!}z^6 - \cdots,\quad |z| < 1.$$

根据幂级数展开式的唯一性,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},\cdots.$$

例4.4.2 对任意$z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 有

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right), \tag{4.4.2}$$

级数(4.4.2) 在区域$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$中内闭一致收敛.

解 将等式(4.4.1)两边对z求导, 由定理3.1.9, 知(4.4.2)式成立且级数(4.4.2)式在区域$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$中内闭一致收敛.

习 题 四

1. 求下列各函数的孤立奇点, 孤立奇点各属于哪一种类型, 并求这些函数在孤立奇点的留数:

(1) $\dfrac{1}{z(z+1)^2(z^2+1)^2}$; (2) $\dfrac{\sin z}{z^4\cos z}$;

(3) $\dfrac{1}{\cos^2 z}$; (4) $\dfrac{\cos z}{\sin z-1}$;

(5) $\dfrac{\sin z}{z^2(\cos z-1)}$; (6) $\dfrac{1}{z(\mathrm{e}^z-1)}$;

(7) $\dfrac{z-7}{z^4(z^2+1)}$; (8) $\dfrac{\sin z-z}{z^2\cos z}$.

2. 求下列各函数在指定点的留数:

(1) $\frac{\sin z}{(z+1)^2}$, $z=-1$; (2) $\frac{\sin z^3}{(1-\cos z)^3}$, $z=0$;

(3) $\frac{z^2+1}{(\mathrm{e}^{\pi z}+1)^2}$, $z=i$; (4) $\frac{z}{\ln^3(1-z)}, z=0$ $(\ln(1-z)|_{z=0}=0)$;

(5) $\frac{1}{(1+z^2)^6}$, $z=i$; (6) $\frac{\sin az}{z^2\sin bz}$, $z=0$ $(a\neq b, b\neq 0)$;

(7) $z^2\cos\frac{1}{z-4}$, $z=4$; (8) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $z=\infty$ $(n\in\mathbb{N})$.

3. 设z_k是$f(z)=\frac{1}{z^{10}+a^{10}}$ $(a\neq 0)$的极点, 证明$\mathrm{Res}(f,z_k)=-\frac{z_k}{10a^{10}}$.

4. 设$g(z)$在$|z-z_0|<1$中解析, $g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$. 设$f(z)=\frac{1}{(g(z))^2}$, 证明z_0是$f(z)$的二阶极点, 且$\mathrm{Res}(f,z_0)=-\frac{g''(z_0)}{(g'(z_0))^3}$.

5. 设$f(z)$在$0<|z-z_0|<1$中解析, z_0是$f(z)$的孤立奇点, 证明$\mathrm{Res}(f,z_0)\neq 0$的充要条件是$f(z)$在$0<|z-z_0|<1$中没有原函数$F(z)$满足$F'(z)=f(z)$.

6. 计算积分

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$; (2) $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}\,dx$;

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+a\cos\theta)^2}d\theta$ $(0<a<1)$; (4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{1+x^2}$;

(5) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(4+x)^2}dx$; (6) $\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}dx$; (8) $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^2(1-x)^3}dx}{(2+x)^3}$;

(9) $\int_0^{1}\frac{x}{(1+x)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}dx$; (10) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$;

(11) $\int_0^{\infty}\frac{x^\alpha}{(4+x)^2}dx$ $(-1<\alpha<1)$; (12) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$ $(-1<\alpha<1)$.

7. 利用Poisson (泊松)积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

计算Fresnel (菲涅耳)积分

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \quad 与 \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

8. 计算Poisson (泊松)积分$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos 2bx dx \quad (b > 0)$.

9. 计算Laplace (拉普拉斯)积分$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \quad (a > 0)$.

10. 用留数定理计算定积分:

(1) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z-1)} dz$; (2) $\int_{|z|=2} \frac{z}{(z-i)(z-1)^2} dz$;

(3) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 \sin z}$; (4) $\int_{|z|=2} \frac{z dz}{\cos z - 1}$;

(5) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z-3)(z+\mathrm{i})^{10}}$; (6) $\int_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} dz \quad (n \in \mathbb{N})$.

11. 用留数定理和函数

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{(z+a)(z+b)} = \frac{\mathrm{e}^{(1/3)\log z}}{(z+a)(z+b)} \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi),$$

计算下列无穷积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{(x+a)(x+b)} dx \quad (a > b > 0).$$

12. 设$f(z)$为平面中的亚纯函数, 且为偶函数. 证明

(1) 对任意复数a, $\mathrm{Res}(f(z), a)$ =-$\mathrm{Res}(f(z), -a)$;

(2) 如果$f(z)$在圆周$|z| = R$无极点, 则

$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 0.$$

13. 设n为自然数, 求方程$z^{6n} - 7z^{3n} + z^n + 1 = 0$在单位圆$|z| < 1$内根的个数.

14. 假设函数f在正向简单闭曲线C内和C上解析, 且在C上没有零点, 证明: 若f在C内有n个零点z_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 其中每一个z_k的重数为m_k, 则

$$\int_C \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} m_k z_k.$$

15. 设C_N是由下列直线所围成的正方形边界$x = \pm(N + \frac{1}{2})\pi$, $y = \pm(N + \frac{1}{2})\pi$, 这里$N$为正整数. 证明

$$\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} = 2\pi\mathrm{i} \left[\frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right].$$

然后由$N \longrightarrow \infty$时这个积分的值为零, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

16. 证明方程$z^4 + 2z^3 - 6z + 1 = 0$在单位圆$|z| < 1$ 内恰好有一个根.

17. 求方程$2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$在圆环$1 \leqslant |z| < 2$ 内根的个数.

18. 设$f(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z)$是一个整函数, 且假设存在两个正数$R$和$M$, 使得当$|z| \geqslant R$时, $f(z)$的实部$u(z)$ 满足$|u(z)| \leqslant M|z|$. 证明$f(z)$是一个次数至多为1次的多项式或一个常数.

19. 如果$f(z)$在区域Ω中解析, 不为常数, 且没有零点, 证明$|f(z)|$ 不可能在Ω内达到最小值.

20. 设$f(z)$在单位圆盘$|z| < 1$内解析, 在闭单位圆盘$|z| \leqslant 1$内连续, 并且

$$|f(0)| < \min\{|f(z)| : |z| = 1\}.$$

证明$f(z)$在单位圆盘$|z| < 1$内至少有一个零点.

21. 证明: 如果$R \in (0, 1)$, 则存在N, 当$n > N$时, 方程

$$nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \cdots + 3z^2 + 2z + 1 = 0$$

在圆$|z| < R$ 内没有根.

22. 设多项式$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ $(n \geqslant 2)$的系数满足$\sum\limits_{k=2}^{n} k|a_k| < |a_1|$, 证明$P_n(z)$ 在单位圆盘$|z| < 1$ 内是一一的.

23. 如果$R > 0$, 则存在N, 当$n > N$时, 方程

$$\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{z^2}{2!} + z + 1 = 0$$

在圆$|z| < R$ 内没有根.

24. 证明方程$\sin z = 2z^4 - 7z + 1 = 0$在单位圆$|z| < 1$ 内恰好有一个根.

25. 证明下列函数在指定区域D内是一一的:

(1) $w = z + \frac{1}{3}z^3$, $D = \{z : |z| < 1\}$;

(2) $w = \frac{z}{(1-z)^3}$, $D = \{z : |z| < \frac{1}{2}\}$;

(3) $w = z + z^2$, $D = \{z : |z| < \frac{1}{2}\}$.

26. 证明方程$z + \mathrm{e}^{-z} = a$ $(a > 1)$在右半平面$\mathrm{Re}\, z > 0$ 内恰好有一个根且此根是实根.

第五章　保形映射

本章介绍了保形映射的几何理论, 对分式线性映射的性质作了详细论述, 给出了若干保形映射的实例. 对单连通区域的Riemann 映射定理, 包括Schwarz 引理等解析函数的性质给出了证明, 本章最后一节用解析函数正规族的理论来证明Riemann映射定理.

§5.1　单叶解析函数的映射性质

定义5.1.1　设Ω是区域, $f(z)$是Ω中的解析函数, 如果$f(z)$在Ω中是一一的, 即对任意的$z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$, 有$f(z_1) \neq f(z_2)$, 则称$f(z)$ 是Ω中的单叶解析函数.

定理5.1.2　如果f是区域Ω上的单叶解析函数, 则对任意的$z \in \Omega$, $f'(z) \neq 0$; 反之如果f是区域Ω上的解析函数, $a \in \Omega$, $f'(a) \neq 0$, 则存在a的一个邻域$D(a, \varepsilon_1) \subset \Omega$, 使得$f(z)$在$D(a, \varepsilon_1)$上是单叶解析函数.

证明　先证如果f是区域Ω上的单叶解析函数, 则对任意的$z \in \Omega$, $f'(z) \neq 0$. 若不然, 存在$a \in \Omega$, 使得$f'(a) = 0$, 则a 是函数$f(z) - f(a)$ 的$m(m \geqslant 2)$ 阶零点. 由定理4.3.8, 存在$\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, 使得$D(a, \varepsilon_0) \subset \Omega$ 且对于满足$0 < |w - f(a)| < \delta_0$的每一个值$w$, 函数$f(z) - w$ 在$|z - a| < \varepsilon_0$内至少有$m \geqslant 2$ 个不同的零点, 从而存在$z_1, z_2 \in D(a, \varepsilon_0) \subset \Omega$, $z_1 \neq z_2$, 有$f(z_1) = f(z_2) = w$, 这与$f(z)$ 是Ω中单叶解析函数矛盾, 所以在Ω 内有$f'(z) \neq 0$.

反之, 若$f'(a) \neq 0$, 则a 是函数$f(z) - f(a)$ 的一阶零点. 由定理4.3.9, $f(\Omega)$是区域. 由定理4.3.8, 存在$\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, 使得$D(a, \varepsilon_0) \subset \Omega$, $D(f(a), \delta_0) \subset f(\Omega)$且对于满足$|w - f(a)| < \delta_0$的每一个值$w$, 函数$f(z) - w$ 在$|z - a| < \varepsilon_0$ 内恰好有一个零点, 再由$f(z)$的连续性, 存在$\varepsilon_1 > 0$ $(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, 使得$f(D(a, \varepsilon_1)) \subset D(f(a), \delta_0)$. 所以如果$z_1, z_2 \in D(a, \varepsilon_1)$, $f(z_1) = f(z_2)$, 记$w = f(z_1) = f(z_2)$, 则$|w - f(a)| < \delta_0$, $f(z) - w$ 在$|z - a| < \varepsilon_0$内恰好只有一个零点, z_1, z_2是$f(z) - w$ 在$|z - a| < \varepsilon_0$ 内的零点, 从而$z_1 = z_2$. 于是$f(z)$在$D(a, \varepsilon_1)$内是单叶解析函数. $\square$

定理5.1.3 (反函数定理) 设Ω 为区域, 如果f是区域Ω上的单叶解析函数, 则$f(\Omega)$是区域. 设$z=g(w)$是$w=f(z)$的反函数,则g 是$W=f(\Omega)$中的单叶解析函数, 且

$$g'(w)\Big|_{w=f(z)}=\frac{1}{f'(z)}.$$

证明 由定理4.3.9, $f(\Omega)$是区域. 由定理5.1.2, 对任意$z\in\Omega, f'(z)\neq 0$. 再证明$g(w)$在$W=f(\Omega)$上连续. 对任意的$w_0\in W$, 有唯一的$z_0\in\Omega$, 使得$g(w_0)=z_0$. 由于$f'(z_0)\neq 0$, z_0是$f(z)-w_0$的一阶零点, 由定理4.3.8, 存在$\varepsilon_0>0$, 使得$\overline{D(z_0,\varepsilon_0)}\subset\Omega$, 且对任意$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 存在

$$\delta=\min\{|f(z)-f(a)|:|z-a|=\varepsilon\}>0,$$

对满足$0<|w-b|<\delta$的每一个值w, 函数$f(z)-w$ 在$|z-a|<\varepsilon$内恰好有1个零点, 这个零点恰好是$z=g(w)$. 于是$z=g(w)$满足: 对任意$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 存在$\delta>0$, 对满足$|w-b|<\delta$的每一个值$w$, 有$|z-z_0|=|g(w)-g(w_0)|<\varepsilon$, 由此可知$g(w)$在$w_0$点连续. 由$w_0$ 的任意性, 得$g(w)$ 在$W=f(\Omega)$上连续. 对任意的$w_0\in W$, 当$w\to w_0$时, $z=g(w)\to z_0=g(w_0)$, 于是

$$g'(w_0)=\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

由w_0 的任意性, 得g 在W中解析, 并且$g'(w)=1/f'(z)$, 其中$w=f(z)$. □

设Ω 为区域, $z_0\in\Omega$, $f(z)$是区域Ω上的解析函数且$f'(z_0)\neq 0$, $\mathbf{Arg}\ f'(z_0)$的每个值称为映射$w=f(z)$在点z_0处的**转动角**. 设$\gamma: z=\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$是$\Omega$中一条过$z_0=\gamma(a)$的光滑的有向曲线, $\gamma'(a)\neq 0$, γ在点z_0处的切线与正实轴的夹角为$\arg\gamma'(a)$. 则$\Gamma=f(\gamma): w=\Gamma(t)=f(\gamma(t))(a\leqslant t\leqslant b)$是区域$f(\Omega)$中一条过$w_0=f(z_0)$的有向曲线, 且$\Gamma'(a)=f'(\gamma(a))\gamma'(a)=f'(z_0)\gamma'(a)\neq 0$, 所以$\Gamma$在点$w_0=f(z_0)$处的切线与正实轴的夹角为

$$\arg\Gamma'(a)\in\arg\gamma'(a)+\mathbf{Arg}\ f'(z_0),$$

或写为

$$\arg\Gamma'(a)-\arg\gamma'(a)\in\mathbf{Arg}\ f'(z_0),$$

这说明像曲线$f(\gamma)$在点$w_0=f(z_0)$处的切线与正实轴的夹角与原曲线γ在点z_0处的切线与正实轴的夹角之差是映射$w=f(z)$在点z_0处转动角, 它属于$\mathbf{Arg}\ f'(z_0)$, 与曲线γ无关.

如果过点z_0处, 作两条有向光滑曲线$\gamma_1 : z = \gamma_1(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$和$\gamma_2 : z = \gamma_2(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, $z_0 = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, 则$\Gamma_1 = f(\gamma_1) : w = \Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))(a \leqslant t \leqslant b)$和$\Gamma_2 = f(\gamma_2) : w = \Gamma_2(t) = f(\gamma_2(t))(a \leqslant t \leqslant b)$是区域$f(\Omega)$中过$w_0 = f(z_0)$的两条有向曲线, 且$\Gamma_1'(a) = f'(z_0)\gamma_1'(a) \neq 0$, $\Gamma_2'(a) = f'(z_0)\gamma_2'(a) \neq 0$, 所以

$$\mathbf{Arg}\ \Gamma_1'(a) - \mathbf{Arg}\ \Gamma_2'(a) = \mathbf{Arg}\ \gamma_1'(a) - \mathbf{Arg}\ \gamma_2'(a).$$

上式表明过点z_0处两曲线γ_1和γ_2在点z_0处两切线的夹角(此夹角定义为两曲线γ_1和γ_2 在点z_0处的夹角) 与像曲线$f(\gamma_1)$和$f(\gamma_2)$在点$f(z_0)$处两切线的夹角是保持不变的. 我们把具有此性质的映射称为在点z_0处是保角的. 于是我们证明了如下结果.

定理5.1.4 (保角定理) *设Ω 为区域, $z_0 \in \Omega$, $f(z)$是区域Ω上的解析函数且$f'(z_0) \neq 0$, 则映射$w = f(z)$在点z_0是保角的.*

设Ω 为区域, $z_0 \in \Omega$, $f(z)$是区域Ω上的解析函数且$f'(z_0) \neq 0$, 则

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

由于$|f'(z_0)|$是比值$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ 的极限, 它可以近似地表示这个比值. 在映射$w = f(z)$的作用下, $|z - z_0|$及$|f(z) - f(z_0)|$分别表示$z-$平面上向量$z - z_0$及w平面上向量$f(z) - f(z_0)$的长度. 当$|z - z_0|$充分小时, $|f'(z_0)|$ 近似地表示在映射$w = f(z)$下, $|f(z) - f(z_0)|$与$|z - z_0|$的伸缩率, 这个伸缩率与向量$z - z_0$的方向无关. 我们把$|f'(z_0)|$称为$f(z)$在点z_0处的伸缩率.

我们用几何说明单叶解析函数作为映射的几何意义. 设Ω 为区域, f是区域Ω上的单叶解析函数, $z_0 \in \Omega$, 则$f'(z_0) \neq 0$, 如果$\triangle \subset \Omega$是一个三角形, $z_0 \in \triangle$, 则$f(\triangle)$是区域$f(\Omega)$中的曲边三角形, 曲边三角形$f(\Omega)$与三角形$\triangle$的对应角相等, 对应边近似成比例, 因此曲边三角形$f(\triangle)$与三角形$\triangle$近似地相似. 根据这个理由, 我们把区域Ω上的单叶解析函数f称为区域Ω上的**保形映射**.

如果$f(z)$是区域$R < |z| < +\infty$上的解析函数, 且∞是$f(z)$的可去奇点, 则$f(z)$有如下Laurent 展式

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots, \quad R < |z| < \infty$$

并且$f(\infty) = c_0$, 此时我们称$f(z)$在∞点解析.

定义5.1.5 *设Ω 为扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$上的区域, $\infty \in \Omega$. 如果f是区域Ω上的一一解析函数, 则称f是区域Ω上的单叶解析函数.*

设a,b 为实数且$a<b$, 如果$\gamma: z=\gamma(t)\ (a\leqslant t<b)$是$R<|z|<\infty$中一条的有向曲线, 且

$$\lim_{t\to b}\gamma(t)=\infty=\gamma(b),$$

则称γ是一条过∞的曲线. 如果过点∞处, 有两条有向光滑曲线

$$\gamma_1: z=\gamma_1(t)\ \ (a\leqslant t<b) \quad 和 \quad \gamma_2: z=\gamma_2(t)\ \ (a\leqslant t<b),\ \ \gamma_1(b)=\gamma_2(b)=\infty.$$

则存在$a_0\in[a,b)$使得当$t\in[a_0,b)$时, 有$|\gamma_1(t)|\geqslant 1, |\gamma_2(t)|\geqslant 1$, 设

$$\gamma_{1,\infty}(t)=\frac{1}{\gamma_1(t)}\ \ (a_0\leqslant t\leqslant b) \quad 和 \quad \gamma_{2,\infty}(t)=\frac{1}{\gamma_2(t)}\ \ (a_0\leqslant t\leqslant b),$$

如果曲线$\gamma_{1,\infty}$ 和曲线$\gamma_{2,\infty}$是两条光滑的有向曲线, $\gamma_{1,\infty}'(b)\neq 0$, $\gamma_{2,\infty}'(b)\neq 0$, 则定义过点$\infty$处从曲线$\gamma_1$到曲线$\gamma_2$在点$\infty$处的夹角为从曲线$\gamma_{1,\infty}$在0点切线反时针方向到曲线$\gamma_{2,\infty}$在点0处切线反时针方向的夹角$=\arg\gamma_{2,\infty}'(b)-\gamma_{1,\infty}'(b)$. 特别当$\gamma_1(t)=\frac{b-a}{b-t}-1\ \ (a\leqslant t<b)$为实轴上从0到$+\infty$的射线时, 实轴上从0到$+\infty$的射线到$\gamma_2$在点$\infty$处的夹角定义为$\gamma_2$在$\infty$处的夹角$=\arg\gamma_{2,\infty}'(b)-\pi$.

例如设a,b,θ_1和θ_2为实数且$a<b, 0\leq\theta_1<\theta_2<2\pi$,

$$\gamma_1(t)=\frac{(b-a)e^{i\theta_1}}{b-t}-e^{i\theta_1}\ \ (a\leqslant t<b),\ \ \gamma_2(t)=\frac{(b-a)e^{i\theta_2}}{b-t}-e^{i\theta_2}\ \ (a\leqslant t<b)$$

为两条分别从0经过$e^{i\theta_1}$到∞和从0经过$e^{i\theta_2}$到∞的射线. 射线γ_1到射线γ_2在点∞处的夹角为$-(\theta_2-\theta_1)$, 它等于从γ_2到γ_1在0点顺时针方向的夹角.

由定理5.1.3 和定理5.1.4, 有如下定理.

定理5.1.6 (保角定理)　设Ω 为扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$上的区域, 如果f是区域Ω上的单叶解析函数, 则映射$w=f(z)$在Ω 中的每点是保角的(此时称区域Ω上的单叶解析函数为区域Ω上的保形映射).

§5.2　分式线性映射

定义5.2.1 有理函数

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{5.2.1}$$

称为分式线性映射, 也称为Möbius 变换, 其中a, b, c, d都是复数, 满足$ad-bc \neq 0$.

当$c=0$时, 则$ad \neq 0$, 此时分式线性映射是线性变换$w = T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, 它在复平面上解析, 并且$T(\infty) = \infty$.

如果$c \neq 0$, 分式线性映射$w = T(z)$在$\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$中是解析的,

$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad \left(z \neq -\frac{d}{c}\right),$$

∞ 是$T(z)$的可去奇点, $T(\infty) = \frac{a}{c}$, $w = T(z)$在∞点也是解析的. $T(-\frac{d}{c}) = \infty$.

如果

$$w = T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad w = T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \tag{5.2.2}$$

都是分式线性映射, 则其复合

$$w = T_1(T_2(z)) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{5.2.3}$$

也是分式线性映射, 其中a, b, c, d可以用如下矩阵相乘得到

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由于矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$和逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$分别是

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = (\det \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^*,$$

其中$\det \boldsymbol{A} = ad - bc$ 是矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式. 由于分式线性映射在其分子和分母同乘一个不为零的复数时不变, 所以映射$w = T(z)$ 的逆映射是

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

因此分式线性映射是扩充复平面到扩充复平面上的一一映射, 其逆映射也是分式线性映射. 由定理5.1.6, 有如下定理.

定理5.2.2 (分式线性映射的保角性定理) 分式线性映射在扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$上的每点是保角的.

下面的分式线性映射称为基本分式线性映射:

(1)**平移** $w = z + a$ (a为一复数);

(2) **旋转** $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ (θ是一实数);

(3) **伸缩** $w = rz$ (r为一正实数);

(4) **反演** $w = \frac{1}{z}$.

定理5.2.3 (分式线性映射的分解定理) 任意分式线性映射都可以分解为有限个基本分式线性映射的复合.

证明 设$w = T(z)$ 是由(5.2.1)式给出的分式线性映射. 当$c = 0$时, 则$ad \neq 0$, 分式线性映射是线性变换$w = (z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, 分解是显然的. 如果$c \neq 0$, 分式线性映射$w = T(z)$可以写为

$$w = T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}},$$

它是平移、旋转、伸缩和反演复合得到的.

我们约定, 把扩充复平面上任一直线看成半径为无穷大的圆.

定理5.2.4 (分式线性映射的保圆定理) 在扩充复平面上, 任意分式线性映射都把圆映射为圆.

证明 设$w = T(z)$ 是由(5.2.1)式给出的分式线性映射. 由于圆和直线的方程可统一表示为

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0,$$

其中A, C 为实数, B为复数, 且$B\bar{B} - AC > 0$, 这一形式的方程显然在平移、旋转和伸缩变换下不变, 即圆和直线的像仍然是圆和直线. 对于反演变换$w = \frac{1}{z}$, 上面方程变为

$$A + \bar{B}\bar{w} + Bw + Cw\bar{w} = 0,$$

仍然是圆或直线. 而任意分式线性映射可以分解为有限个基本分式线性映射的复合, 因而定理对一般分式线性映射也成立.

定义5.2.5 设z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$)是复数, L是直线, $C = \partial D(z_0, R) : |z - z_0| = R$是中心为$z_0$, 半径为$R > 0$的圆.

(1) 如果直线L是由方程

$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

给出, 即直线L 是连接z_1和z_2的线段$[z_1,z_2]$的垂直平分线, 则称z_1和z_2关于直线L对称;

(2) 如果

$$(z_1-z_0)\overline{(z_2-z_0)}=R^2,$$

则称z_1和z_2关于圆$C:|z-z_0|=R$对称.

由于当$z_1\to z_0$时, $z_2\to\infty$, 规定圆心z_0和∞关于圆$C:|z-z_0|=R$对称.

条件$(z_1-z_0)\overline{(z_2-z_0)}=R^2$, 等价于

$$\mathbf{Arg}\ (z_1-z_0)=\mathbf{Arg}\ (z_2-z_0)\ \ 且\ \ |z_1-z_0||z_2-z_0|=R^2,$$

即z_1和z_2 位于由圆心z_0出发的同一射线上, 并且其到圆心z_0的距离的乘积为圆半径的平方.

结合例1.2.8和例1.2.9, 直线和圆周的方程可统一地表示为方程

$$Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0, \tag{5.2.4}$$

其中$A,C\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{C},|B|^2-AC>0$. 当$A=0$时, (5.2.4)式为直线方程; 当$A\neq 0$时, (5.2.4)式可改写成

$$\left|z-\left(-\frac{B}{A}\right)\right|=\frac{\sqrt{|B|^2-AC}}{|A|}.$$

(5.2.4)式表示一个以$z_0=-\frac{B}{A}$为圆心, $R=\frac{\sqrt{|B|^2-AC}}{|A|}$为半径的圆周. 由对称的定义, z_1和z_2关于圆$C:|z-z_0|=R$对称等价于条件$(z_1-z_0)\overline{(z_2-z_0)}=R^2$, 或

$$z_1\overline{z_2}-\overline{z_0}z_1-z_0\overline{z_2}+|z_0|^2-R^2=0. \tag{5.2.5}$$

由于$z_0=-\frac{B}{A}$, $R=\frac{\sqrt{|B|^2-AC}}{|A|}$, (5.2.5)式等价于

$$Az_1\overline{z_2}+\overline{B}z_1+B\overline{z_2}+C=0.$$

设方程

$$\overline{B}z+B\overline{z}+C=0 \tag{5.2.6}$$

表示直线L, 其中$C \in \mathbb{R}$, $B = |B|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} \in \mathbb{C}, |B| > 0$. 设$z_0 \in L$, 则(5.2.6)式可改写成

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0}(z - z_0) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}(\overline{z - z_0}) = 0,$$

即直线L可由方程

$$\mathrm{Re}\ (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0}(z - z_0)) = 0$$

表示. 设

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_3 = \frac{z_2 - z_1}{2} \neq 0, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

由定义, z_1和z_2关于直线L对称的充要条件是直线L 是连接z_1和z_2的线段$[z_1, z_2]$的垂直平分线. 设$\zeta = T(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0}(z - z_0)$ 是平移和旋转的复合, 则$L_1 = T(L) = \{(z - z_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0} : z \in L\}$是虚轴, $T(z_0) = 0$, $T(z_1) = z_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0}$和$T(z_2) = -z_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0}$关于$T(L)$对称. 所以$z_1$和$z_2$关于直线$L$对称的充要条件是 $z_0 = \frac{z_1+z_2}{2} \in L$且$\mathrm{Im}\,(z_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0}) = 0$, 即

$$\begin{cases} \overline{B}(z_1 + z_2) + B\overline{(z_1 + z_2)} + 2C = 0, \\ \overline{B}(z_2 - z_1) - B(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = 0, \end{cases}$$

这等价于

$$\overline{B}z_1 + B\overline{z}_2 + C = 0.$$

综上所述, 得到如下定理.

定理5.2.6 设直线或圆周C的方程为

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0,$$

其中$A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}, |B|^2 - AC > 0$.则$z_1$和$z_2$关于直线或圆周$C$对称的充要条件是

$$Az_1\overline{z}_2 + \overline{B}z_1 + B\overline{z}_2 + C = 0.$$

定理5.2.7 (保对称性) 设C为直线或圆周, 设$w = T(z)$ 是由(5.2.1)式给出的分式线性映射, 则z_1和z_2关于直线或圆周C对称的充要条件是$w_1 = T(z_1)$和$w_2 = T(z_2)$关于直线或圆周$T(C)$ 对称.

证明 设$w = T(z)$ 是由(5.2.1)式给出的分式线性映射. 直线或圆周C由方程(5.2.4)式给出, 其中$A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}, |B|^2 - AC > 0$. 由于$z_1$和$z_2$关于直线或圆周$C$对称的充要条件是

$$Az_1\overline{z_2} + \overline{B}z_1 + B\overline{z_2} + C = 0.$$

对于反演变换$w=T(z)=\frac{1}{z}$, 上式变为

$$A+\bar{B}\bar{w}_2+Bw_1+Cw_1\bar{w}_2=0,$$

从而w_1和w_2关于直线或圆周$T(C)$对称. 对称点显然在平移、旋转和伸缩变换下不变, 即对称点像仍然是对称点. 而任意分式线性映射可以分解为有限个基本分式线性映射的复合, 因而定理对一般分式线性映射也成立. □

设$w=T(z)$是由(5.2.1)式给出的分式线性映射, 在扩充复$z-$平面上满足$z=T(z)$的点z称为分式线性映射$T(z)$的*不动点*. 在复$z-$平面上分式线性映射$T(z)$的不动点满足方程

$$cz^2+(d-a)z-b=0.$$

因此如果分式线性映射$T(z)$不是恒等映射, 则分式线性映射$T(z)$在扩充复$z-$平面上至多只有两个不同的不动点.

定义5.2.8 对于扩充复$z-$平面上不同的4点z_1,z_2,z_3,z_4, 比值

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \tag{5.2.7}$$

称为依序不同的4点z_1,z_2,z_3,z_4的**交比**.

若上式中有一点$z_k=\infty$, 则上式理解成$z_k\to\infty$的极限, 所以当z_1,z_2,z_3,z_4分别为无穷大时, 上式右端分别成为

$$\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3},\quad \frac{z_4-z_1}{z_4-z_3},\quad \frac{z_4-z_1}{z_2-z_1},\quad \frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}. \tag{5.2.8}$$

我们记(5.2.7)式或(5.2.8)式为(z_1,z_2,z_3,z_4).

分式线性映射$T(z)=(z_1,z_2,z_3,z)$将z_1,z_2,z_3依次映射为$0,1,\infty$.

定理5.2.9 (保定向性) *对于扩充复$z-$平面上不同的三点z_1,z_2,z_3和扩充复$w-$平面上不同的三点w_1,w_2,w_3, 存在唯一的分式线性映射$w=T(z)$ 满足$T(z_k)=w_k,\ k=1,2,3$.*

证明 设$T_1(z)=(z_1,z_2,z_3,z)$和$T_2(w)=(w_1,w_2,w_3,w)$, 由于分式线性映射$T_1(z)=(z_1,z_2,z_3,z)$和分式线性映射$T_2(w)=(w_1,w_2,w_3,w)$ 分别将z_1,z_2,z_3及w_1,w_2,w_3 映射为$0,1,\infty$, 所以由$T_2(w)=T_1(z)$ 定义的分式线性映射

$$w=T_2^{-1}(T_1(z))$$

满足$T(z_k)=w_k,\ k=1,2,3$, 其中$w=T(z)=T_2^{-1}(T_1(z))$.

如果分式线性映射$w=S(z)$也满足$S(z_k)=w_k$, $k=1,2,3$, 则分式线性映射$S^{-1}(T(z))$也满足$S^{-1}(T(z_k))=z_k$, $k=1,2,3$,于是分式线性映射$S^{-1}(T(z))$有3个不同的不动点, 所以分式线性映射$S^{-1}(T(z))$是恒等映射. $S^{-1}(T(z))\equiv z$, 从而$S(z)\equiv T(z)$. □

定理5.2.10 (保交比性) 设z_1,z_2,z_3,z_4 是扩充复$z-$平面上不同的4点, $w=T(z)$ 是由(5.2.1)给出的分式线性映射, 则

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=(T(z_1),T(z_2),T(z_3),T(z_4)).$$

例5.2.11 设z_1,z_2 是不同的复数, $R>0$, 证明集合

$$C_R=\left\{z:\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=R\right\}$$

是圆或直线, z_1,z_2关于C_R对称, 当$R\neq 1$时, C_R是圆心为$z_2+\frac{z_1-z_2}{1-R^2}$, 半径为$\frac{|z_1-z_2|}{|1-R^2|}R$ 的圆.

证明 设$\Gamma:|w|=R$是圆心为原点, 半径为R 的圆,

$$w=T(z)=\frac{z-z_1}{z-z_2},\quad \zeta=S(w)=\frac{1}{1-w}$$

为分式线性映射, 则$C_R=T^{-1}(\Gamma)$ 是圆或直线, $0,\infty$关于Γ对称, 所以$z_1=T^{-1}(0)$, $z_2=T^{-1}(\infty)$关于C_R对称. 当$R\neq 1$时, 由于圆Γ与实轴$\mathbb{R}$正交, 所以圆$S(\Gamma)$与$S(\mathbb{R})$正交, 从而$S(\Gamma)$的圆心为

$$\frac{S(-R)+S(R)}{2}=\frac{1}{1-R^2},$$

半径为

$$\frac{|S(-R)-S(R)|}{2}=\frac{R}{|1-R^2|}.$$

由于

$$T^{-1}(w)=\frac{-z_2w+z_1}{1-w}=z_2+\frac{z_1-z_2}{1-w}=z_2+(z_1-z_2)S(w),$$

所以$C_R=T^{-1}(\Gamma)$是圆心为$z_2+\frac{z_1-z_2}{1-R^2}$, 半径为$\frac{|z_1-z_2|}{|1-R^2|}R$ 的圆. □

例5.2.12 求把上半平面$\mathbb{C}_+:\mathrm{Im}\ z>0$ 保形映射为单位圆盘$D(0,1):|w|<1$上的分式线性映射$w=T(z)$.

解 存在$z_0\in\mathbb{C}_+$使得$T(z_0)=0$. 由于z_0和$\bar{z}_0$关于实轴直线$\partial\mathbb{C}_+$对称, 0和∞关于单位圆周$|w|=1$对称, 由分式线性映射的保对称性, 有$T(\bar{z}_0)=\infty$, 因此存在

非零复数λ 使得

$$w = T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

如果$z = x$是实数, 则

$$|T(x)| = |\lambda| \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| = |\lambda| = 1,$$

于是存在实数θ_0使得$\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. 因此$T(z)$应是

$$w = T(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.2.9}$$

现证明由(5.2.9)式确定的映射是把上半平面$\mathbb{C}_+ : \mathrm{Im}\, z > 0$ 保形映射为单位圆盘$D(0,1) : |w| < 1$上的分式线性映射. 当$z = x$是实数, 则$|T(x)| = 1$, 所以$w = T(z)$把实轴直线$\partial\mathbb{C}_+$映射为单位圆周$|w| = 1$且$T(z_0) = 0$, 从而映射$w = T(z)$是把上半平面$\mathbb{C}_+ : \mathrm{Im}\, z > 0$ 保形映射为单位圆盘$D(0,1) : |w| < 1$上的分式线性映射.

例5.2.13 求把单位圆盘$D(0,1) : |z| < 1$保形映射为单位圆盘$D(0,1) : |w| < 1$ 上的分式线性映射$w = T(z)$.

解 存在$z_0 \in D(0,1)$使得$T(z_0) = 0$. 由于z_0和$\frac{1}{\bar{z}_0}$关于单位圆周$|z| = 1$对称, 0和∞关于单位圆周$|w| = 1$对称, 由分式线性映射的保对称性, 有$T(\frac{1}{\bar{z}_0}) = \infty$, 因此存在非零复数$\lambda$ 使得

$$w = T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = \lambda_1 \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

其中$\lambda_1 = -\lambda \bar{z}_0$. 如果$|z| = 1$, 则

$$|T(z)| = |\lambda_1| \left| \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \right| = |\lambda_1| \left| \frac{z - z_0}{z\bar{z} - z\bar{z}_0} \right| = |\lambda_1| = 1.$$

于是存在实数θ_0使得$\lambda_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. 因此$T(z)$应是

$$w = T(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.2.10}$$

现证明由(5.2.10)式确定的映射是把单位圆盘$D(0,1) : |z| < 1$ 保形映射为单位圆盘$D(0,1) : |w| < 1$上的分式线性映射. 当$|z| = 1$时, $|T(z)| = 1$, 所以$w = T(z)$把单位圆周$|z| = 1$映射为单位圆周$|w| = 1$, 且$T(z_0) = 0$, 从而映射$w = T(z)$把单位圆盘$D(0,1) : |z| < 1$保形映射为单位圆盘$D(0,1) : |w| < 1$上的分式线性映射.

例5.2.14 求把偏心圆环$\{z:|z-3|>9,|z-8|<16\}$映射为同心圆环$\{w:1<|w|<R\}$ 的分式线性映射$w=T(z)$且求出R值.

解 先找圆周$|z-3|=9$和圆周$|z-8|=16$的一对公共对称点, 这一对公共对称点在以这两个圆的圆心中的一个为起点的射线上, 所以这一对公共对称点必为实数. 设它们是x_1和x_2, 按对称点的定义, 有

$$\begin{cases}(x_1-3)(x_2-3)=9^2=81,\\(x_1-8)(x_2-8)=16^2=256,\end{cases}$$

解得$x_1=0, x_2=-24$. 故所求的分式线性映射$w=T(z)$一定为

$$T(z)=\lambda\frac{z}{z+24},$$

其中λ为一待定复常数. 取$T(12)=1$, 则得$\lambda=3$,于是

$$T(z)=\frac{3z}{z+24},$$

从而$R=|T(24)|=\frac{3}{2}$.

例5.2.15 求把区域$\{z:|z+2|>1,|z-3|>2\}$映射为同心圆环$\{w:1<|w|<R\}$ 的分式线性映射$w=T(z)$且求出R值.

解 设所求的分式线性映射$w=T(z)$ 把区域$\{z:|z+2|>1,|z-3|>2\}$映射为同心圆环$\{w:1<|w|<R\}$满足

$$T(1)=R,\ \ T(5)=-R,\ \ T(-3)=-1,\ \ T(-1)=1.$$

由分式线性映射下交比的不变性得$(R,-R,-1,1)=(1,5,-3,-1)$, 化简得$R^2-10R+1=0$, 解得$R=5\pm\sqrt{24}$, 由于$R>1$, 所以$R=5+\sqrt{24}$即为所求. 所求的分式线性映射$w=T(z)$满足$(5+\sqrt{24},-(5+\sqrt{24}),-1,T(z))=(1,5,-3,z)$. 化简得

$$w=T(z)=\frac{(7+3\sqrt{6})z+13+5\sqrt{6}}{-(1+\sqrt{6})z+5+\sqrt{6}}=-\frac{11+4\sqrt{6}}{5}\frac{z-\frac{1-4\sqrt{6}}{5}}{z-\frac{1+4\sqrt{6}}{5}}.$$

圆周$|z+2|=1$和圆周$|z-3|=2$的一对公共对称点是$z_1=\frac{1-4\sqrt{6}}{5}, z_2=\frac{1+4\sqrt{6}}{5}$, 分式线性映射$w=T(z)$满足$T(z_1)=0, T(z_2)=\infty$.

例5.2.16 设$w=T(z)=\frac{2z+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}\,z}$, $D=\{z:|z|<1,\operatorname{Im}z>0\}$为上半单位圆, 求出像区域$T(D)$.

解 设$L=\{z:\operatorname{Im}z=0\}$为实轴, $\partial D(0,1)$为单位圆周. 2i和-2i 关于实轴对称, 所以$T(2\mathrm{i})=\infty$和$T(-2\mathrm{i})=-\frac{3\mathrm{i}}{4}$ 关于$T(L)$对称, 而∞和圆周$T(L)$的圆心对称, 所以$-\frac{3\mathrm{i}}{4}$ 是$T(L)$的圆心, $T(L)$的半径是$|T(0)-T(-2\mathrm{i})|=\frac{5}{4}$.

2i和$\frac{\mathrm{i}}{2}$ 关于单位圆周$\partial D(0,1)=\{z:|z|=1\}$对称, 所以$T(2\mathrm{i})=\infty$和$T(\frac{\mathrm{i}}{2})=\frac{4\mathrm{i}}{3}$ 关于$T(L)$对称, 而∞和圆周$T(\partial D(0,1))$的圆心对称, 所以$\frac{4\mathrm{i}}{3}$ 是$T(\partial D(0,1))$的圆心, $T(\partial D(0,1))$的半径是$|T(1)-T(\frac{\mathrm{i}}{2})|=\frac{5}{3}$. 从而

$$T(D)=\left\{w:\left|w-\frac{4\mathrm{i}}{3}\right|<\frac{5}{3},\ \left|w+\frac{3\mathrm{i}}{4}\right|>\frac{5}{4}\right\}.$$

例5.2.17 设$w=T(z)=\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}$, $D=\{z:|z|<1,|z-(1+\mathrm{i})|<1\}$, 求出像区域$T(D)$.

解 由于$\mathrm{i},1\in(\partial D(1+\mathrm{i},1))\bigcap(\partial D(0,1))$, $T(\mathrm{i})=\infty$, $T(1)=0$, 所以$T(\partial D(0,1))$和$T(\partial D(1+\mathrm{i},1))$均为过原点的直线. 由于0和$\infty$ 关于单位圆周$\partial D(0,1)=\{z:|z|=1\}$对称, 所以$T(0)=-\mathrm{i}$和$T(\infty)=1$ 关于$T(\partial D(0,1))$对称, 从而

$$T(\partial D(0,1)\setminus\{\mathrm{i}\})=\{t\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}}:t\in\mathbb{R}\}.$$

同理, 因$1+\mathrm{i}$和∞ 关于圆周$\partial D(1+\mathrm{i},1)$对称, 故$T(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}$和$T(\infty)=1$ 关于$T(\partial D(1+\mathrm{i},1))$对称, 所以

$$T(\partial D(1+\mathrm{i},1)\setminus\{\mathrm{i}\})=\{t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{4}}:t\in\mathbb{R}\}.$$

由于$\frac{1+\mathrm{i}}{2}\in D$, $T(\frac{1+\mathrm{i}}{2})=-1$, $T(D)$是区域, 所以

$$T(D)=\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:r>0,\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\}.$$

§5.3　单连通区域的保形映射

引理5.3.1 (Schwarz(施瓦兹)引理)　如果函数$f(z)$ 在单位圆$D(0,1)=\{z:|z|<1\}$ 内解析, 并且满足条件$f(0)=0$, $|f(z)|\leqslant 1$ $(|z|<1)$, 则在单位圆$D(0,1)$内, 有

$$|f(z)|\leqslant |z| \quad (|z|<1), \tag{5.3.1}$$

且有

$$|f'(0)|\leqslant 1. \tag{5.3.2}$$

如果对某点$z_0\in D(0,1), z_0\neq 0, |f(z_0)|=|z_0|$, 或者$|f'(0)|=1$, 则存在$\lambda$, $|\lambda|=1$ 使得$f(z)=\lambda z$.

证明 由于$f(z)$ 在单位圆$D(0,1)$ 内解析, 并且满足条件$f(0)=0$, $f(z)$ 在$|z|<1$中有Taylor展式

$$f(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

令

$$g(z)=c_1+c_2z+\cdots+c_nz^{n-1}+\cdots \quad (|z|<1),$$

则$g(z)$在$D(0,1)$上解析且$f(z)=zg(z)$ $(|z|<1)$. 对函数$g(z)$在$D(0,1-\varepsilon)=\{z:|z|<1-\varepsilon\}(0<\varepsilon<1)$上应用最大模原理, 得到

$$|g(z)|\leqslant \frac{\max\{|f(z)|:|z|=1-\varepsilon\}}{1-\varepsilon}\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

令$\varepsilon\to 0$, 即得$|g(z)|\leqslant 1$在$D(0,1)$上成立. 故当$z\neq 0$时, $|f(z)|\leqslant |z|$成立, 而当$z=0$时, $|g(0)|=|f'(0)|\leqslant 1$. 这就证明了(5.3.1)式和(5.3.2)式.

设$|f(z_0)|=|z_0|$在$D(0,1)$中一点$z_0\neq 0$处成立, 即$|g(z)|=1$在$D(0,1)$中一点$z_0\neq 0$处成立. 由最大模原理, $|g(z)|=1$ 对所有$z\in D(0,1)$都成立. 故存在$\lambda\in\partial D(0,1)$ 使得$g(z)\equiv\lambda$, 即$f(z)=\lambda z$. 同样可证当$|f'(0)|=1$成立时, 存在$\lambda\in\partial D(0,1)$ 使得$f(z)=\lambda z$. □

定义5.3.2 (单位圆盘的解析自同构群的定义) 若 $f(z)$ 将单位圆盘 $D(0,1)$ 单叶解析地映射到自身且 $f(D(0,1))=D(0,1)$, 则称 $f(z)$ 为 $D(0,1)$ 的解析自同构. $D(0,1)$ 上的所有解析自同构组成群, 称这个群为 $D(0,1)$ 的 Möbius 变换群, 记作 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$.

由Schwarz引理立即可以得到单位圆$D(0,1)$的解析自同构群$\mathrm{Aut}(D(0,1))$的构造.

对$\alpha \in D(0,1)$, 令

$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},$$

则有$\phi_\alpha(z) \in \mathrm{Aut}(D(0,1))$. 事实上, 当$z \in D(0,1)$时, $\phi'_\alpha(z) = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-\bar{\alpha}z)^2} \neq 0$, 因此$\phi_\alpha(z)$ 是$D(0,1)$上的保形映射. 当$|z|=1$时,

$$|\phi_\alpha(z)| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = \frac{|z-\alpha|}{|z||\bar{z}-\bar{\alpha}|} = 1.$$

由最大模原理, 当$z \in D(0,1)$时,

$$|\phi_\alpha(z)| \leqslant \max_{|z|=1} |\phi_\alpha(z)| = 1.$$

注意到$\phi_\alpha(D(0,1))$是区域, 于是对任意的$z \in D(0,1)$, $|\phi_\alpha(z)| < 1$, 即$\phi_\alpha(z)$将$D(0,1)$ 映射成$D(0,1)$. 另一方面, 由于$\phi_\alpha(\phi_{-\alpha}(z)) = \phi_{-\alpha}(\phi_\alpha(z)) = z$, 易知$\phi_\alpha(z)$是双射, 从而$\phi_\alpha(z)$是$D(0,1)$上的解析自同构映射. 显然, $\phi_\alpha(z)$ 有两个简单性质: (1) $\phi_\alpha(\alpha)=0$; (2) $\phi_\alpha^{-1} = \phi_{-\alpha}$.

定理5.3.3 (单位圆盘中的Möbius变换群) *若 $f \in$Aut$(D(0,1))$, 则存在复数$a, |a|<1$及$\tau \in \mathbb{R}$ 使得*

$$f(z) = \phi_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} z). \tag{5.3.3}$$

证明 若$f(0)=b$. 令$g(z) = \phi_b(f(z))$, 则$g(z)$ 在$D(0,1)$ 上单叶解析, 将$D(0,1)$映到$D(0,1)$上, 且$g(0) = \phi_b(f(0)) = \phi_b(b) = 0$. 由Schwarz引理, $|g'(0)| \leqslant 1$. 由于g 在$D(0,1)$ 上单叶解析, 且将$D(0,1)$ 映到$D(0,1)$ 上, 故g^{-1} 在$D(0,1)$ 上存在, 在$D(0,1)$上单叶解析, 且$g^{-1}(0)=0$, 同样可应用Schwarz引理于g^{-1}, 可得$\left|\dfrac{1}{g'(0)}\right| = |(g^{-1})'(0)| \leqslant 1$, 于是$|g'(0)|=1$. 由Schwarz引理可知, 存在 τ 使得 $g(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\xi = \rho_\tau(\xi)$, 即 $\phi_b(f(z)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}z$, 所以 $f(z) = \phi_{-b}(\mathrm{e}^{i\tau}z)$. 取$-b=a$, 即得(5.3.3)式. □

由定理5.3.3可以导出如下的Schwarz−Pick引理.

定理5.3.4 (Schwarz−Pick引理) *若f为将单位圆盘$D(0,1)$映入$D(0,1)$内的解析函数, $z_1, z_2 \in U$且$w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$, 则*

$$\left|\frac{w_1-w_2}{1-w_1\bar{w}_2}\right| \leqslant \left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}\right| \tag{5.3.4}$$

及

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2} \quad (|z|<1) \tag{5.3.5}$$

成立, (5.3.4)式或(5.3.5)式中等号成立当且仅当$f \in$Aut$(D(0,1))$.

证明 令

$$\phi_{-z_1}(z)=\frac{z+z_1}{1+\overline{z}_1 z},\qquad \phi_{w_1}(z)=\frac{z-w_1}{1-\overline{w}_1 z},$$

显然$\phi_{-z_1},\phi_{w_1}\in$Aut$(D(0,1))$, 且

$$\phi_{w_1}(f(\phi_{-z_1}(0)))=\phi_{w_1}(f(z_1))=\phi_{w_1}(w_1)=0.$$

故函数$F(z)=\phi_{-z_1}(f(\phi_{w_1}(z)))$满足Schwarz引理的条件. 因此, 当$z\in D(0,1), z\neq 0$时, $|\phi_{w_1}(f(\phi_{-z_1}(z)))|\leqslant |z|$ 成立. 令$z=\phi_{-z_1}^{-1}(z_2)$, 则有

$$|\phi_{w_1}(f(z_2))|\leqslant|\varphi^{-1}(z_2)|=|\phi_{z_1}(z_2)|,$$

或$|\phi_{w_1}(w_2)|\leqslant|\phi_{z_1}(z_2)|$, 这就是(5.3.4)式.

当$z=0$时, 由引理5.3.1, 有$|F'(0)|\leqslant 1$, 即$|\phi'_{w_1}(w_1)f'(z_1)\phi'_{-z_1}(0)|\leqslant 1$. 由于

$$\phi'_{-z_1}(z)=\frac{1-z_1\overline{z}_1}{(1+\overline{z}_1 z)^2},\qquad \varphi'_{-z_1}(0)=1-|z_1|^2;$$

$$\phi'_{w_1}(z)=\frac{1-w_1\overline{w}_1}{(1-\overline{w}_1 z)^2},\qquad \phi'_{w_1}(w_1)=\frac{1}{1-|w_1|^2},$$

所以有

$$|f'(z_1)|\leqslant\frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2},$$

即(5.3.5)式成立. 由Schwarz引理, 等号成立当且仅当存在实数τ使得$F(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}z$, 故$f(z)=\phi_{w_1}^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}(\phi_{-z_1}^{-1}(z)))\in$Aut$(D(0,1))$. □

定理5.3.5 设$\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通区域, $\alpha\notin\Omega, z_0\in\Omega$, 则存在$\Omega$中单叶解析函数$\psi(z)$, 满足$\psi(\Omega)\subset D(0,1),\psi(z_0)=0$.

证明 由于$z-\alpha$在Ω上解析, 并且没有零点而Ω是单连通的, 由定理2.4.8, 存在Ω的解析函数$\varphi_0(z)$, $\varphi_0(z)$ 在Ω 上无零点, 使得$(\varphi_0(z))^2=z-\alpha$. 对任意的$z_1,z_2\in\Omega$, 如果$\varphi_0(z_1)=\pm\varphi_0(z_2)$, 则$\varphi_0(z_1)^2=\varphi_0(z_2)^2$, 从而$z_1=z_2$, 由此可知, φ_0是单射. 因此$\varphi_0(\Omega)$ 是非空区域, $\varphi_0(\Omega)$必然包含一个圆盘$D(a,r)$ $(0<r<|a|)$, 易知$\varphi_0(\Omega)\bigcap D(-a,r)$是空集. 事实上, 若存在 $w'\in\varphi_0(\Omega)\bigcap D(-a,r)$, 则由$w'\in\varphi_0(\Omega)$知, 存在$z_1\in\Omega$, 使得$w'=\varphi_0(z_1)$, 由$w'\in D(-a,r)$知, $-w'\in\varphi_0(\Omega)$, 于是存在$z_2\in\Omega$, 使得$-w'=\varphi_0(z_2)$, 则有$\varphi_0(z_1)=-\varphi_0(z_2)$, 从而$z_1=z_2$, 由此可知, $\varphi_0(z_1)=0$, 于是$z_1=\alpha\notin\Omega$, 矛盾.

令$\psi_0(z)=r/(\varphi_0(z)+a)$. 由于$\varphi_0(\Omega)\bigcap D(-a,r)$是空集, 则对任意的$z\in\Omega$, 有$|\varphi_0(z)+a|\geqslant r>0$, 从而$\psi_0(z)$ 是Ω中单叶解析函数, 并且

$$|\psi_0(z)|=\left|\frac{r}{\varphi_0(z)+a}\right|\leqslant 1,\quad z\in\Omega.$$

由于$\psi_0(\Omega)$是区域, 所以对任意的$z\in\Omega$, $|\psi_0(z)|<1$, 于是

$$\psi(z)=\frac{\psi_0(z)-\psi_0(z_0)}{1-\overline{\psi_0(z_0)}\psi(z)}$$

是Ω中单叶解析函数, 满足$\psi(\Omega)\subset D(0,1),\psi(z_0)=0$. □

定理5.3.6　设$\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通区域, $\alpha\notin\Omega, z_0\in\Omega$, $\psi(z)$是Ω中单叶解析函数$\psi(z)$, 满足$\psi(z_0)=0$, $\psi(\Omega)\subset D(0,1)$. 如果$\psi(\Omega)\neq D(0,1)$, 则存在$\Omega$中单叶解析函数$\varphi(z)$, 满足$\varphi(z_0)=0$, $\varphi(\Omega)\subset D(0,1)$ 且$|\varphi'(z_0)|>|\psi'(z_0)|$.

证明　如果$\psi(\Omega)\neq D(0,1)$, 存在$\beta\in D(0,1)\setminus\psi(\Omega)$, 则

$$\psi_1(z)=\frac{\psi(z)-\beta}{1-\bar{\beta}\psi(z)}$$

是Ω中单叶解析函数, 满足$\psi_1(\Omega)\subset D(0,1)$并且$\psi_1(z)$在$\Omega$上无零点. 由定理2.4.8, 存在$\Omega$的解析函数$g(z)$, $g(z)$在Ω上无零点, 使得$g^2(z)=\psi_1(z),(g(z_0))^2=-\beta$. 易知$g$是单射, 这是因为若$g(z_1)=g(z_2)$, 则$\psi_1(z_1)=\psi_1(z_2)$, 由此推出$z_1=z_2$. 函数

$$\varphi(z)=\frac{g(z)-g(z_0)}{1-\overline{g(z_0)}g(z)}$$

是Ω中单叶解析函数, 满足$\varphi(z_0)=0,\varphi(\Omega)\subset D(0,1)$且

$$|\varphi'(z_0)|=\frac{|g'(z_0)|}{1-|\beta|},\ 2g(z_0)g'(z_0)=\psi_1'(z_0)=(1-|\beta|^2)\psi'(z_0).$$

所以

$$|\varphi'(z_0)|=\frac{1+|\beta|}{2|\beta|}|\psi'(z_0)|.$$

由于$\psi'(z_0)\neq 0$, $0<|\beta|<1$, 从而$1+|\beta|>2|\beta|$, 因而$|\varphi'(z_0)|>|\psi'(z_0)|$. □

1851年Riemann 提出了如下的Riemann 映射定理:

定理5.3.7* (Riemann 映射定理)　设$\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通区域且存在$\alpha\notin\Omega,\alpha\in\mathbb{C}$. 如果$z_0\in\Omega$, 则存在唯一的从$\Omega$到单位圆盘$D(0,1)$上的共形映射$f$, 满足条件$f(z_0)=0,f'(z_0)>0$.

证明 存在性 见下一节.

唯一性 设$w=f(z)$和$\zeta=g(z)$是满足指定条件的两个共形映射. 令

$$w=h(\zeta)=f(g^{-1}(\zeta)).$$

它是单位圆盘$D(0,1)$到单位圆盘$D(0,1)$的共形映射, 且满足$h(0)=0, h'(0)>0$.于是$h\in\mathrm{Aut}(D(0,1))$, 由定理5.3.3, 存在复数$a, |a|<1$及$\tau\in\mathbb{R}$ 使得$h(\zeta)=\varphi_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\zeta)$. $h(0)=0$ 说明$a=0$, 从而$h(\zeta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\zeta$. $h'(0)>0$ 说明$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}=1$. 于是$h(\zeta)=\zeta$, 从而$f(z)=g(z)$, 唯一性得证. □

例5.3.8 求把区域$D=\{z:|z|>1,|z-\sqrt{3}\mathrm{i}|<2\}$映射为单位圆盘$D(0,1)=\{w:|w|<1\}$ 的单叶解析函数$f(z)$且使$f(\sqrt{3}\mathrm{i})=0$, $f'(\sqrt{3}\mathrm{i})>0$.

解 先将两圆周$\partial D(0,1)$和$\partial D(\sqrt{3}i,2)$的交点1和-1用分式线性映射$T_1(z)=\frac{z-1}{z+1}$ 分别映射为0和∞, 于是$T_1(\partial D(\sqrt{3}\mathrm{i},2))$和$T_1(\partial D(0,1))$均是过原点的直线. 由于0和$\infty$关于$\partial D(0,1)$ 对称, 根据分式线性映射的保对称性定理, $T_1(0)=-1$和$T_1(\infty)=1$关于$T_1(\partial D(0,1))$对称, 从而$T_1(\partial D(0,1))$ 是虚轴.

由于$\sqrt{3}\mathrm{i}$和∞关于$\partial D(\sqrt{3}\mathrm{i},2)$对称和分式线性映射的保对称性定理,

$$T_1(\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$$

和$T_1(\infty)=1$关于$T_1(\partial D(\sqrt{3}\mathrm{i},2))$对称, 从而$T_1(\partial D(0,1))$ 为过原点和$\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{6}}$的直线. 由于$T_1(\mathrm{i})=\mathrm{i}$, $T_1(0)=-1$, 所以

$$G_1=T_1(D)=\left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:r>0,\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

函数$\lambda=g(\zeta)=(\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}}\zeta)^3=-\mathrm{i}\zeta^3$ 把区域G_1保形映射为上半平面$G_2=g(G_1)$, $g(\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}})=\mathrm{i}$. 最后分式线性映射函数

$$w=T_2(\lambda)=\mathrm{e}^{\vartheta_0\mathrm{i}}\frac{\lambda-\mathrm{i}}{\lambda+\mathrm{i}}$$

把上半平面G_2保形映射为单位圆盘$D(0,1)=T_2(G_2)$, $T_2(\mathrm{i})=0$, 于是函数

$$w=f(z)=T_2(g(T_1(z)))=-\mathrm{e}^{\vartheta_0\mathrm{i}}\frac{z^3+3z}{3z^2+1},$$

把区域D保形映射为单位圆盘$D(0,1)$, 且使$f(\sqrt{3}\mathrm{i})=0$, 为使$f'(\sqrt{3}\mathrm{i})>0$, 即

$$f'(\sqrt{3}\mathrm{i})=-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{\vartheta_0\mathrm{i}}>0,$$

应取$e^{\vartheta_0 i} = -1$, 故所求函数为

$$w = f(z) = T_2(g(T_1(z))) = \frac{z^3 + 3z}{3z^2 + 1}.$$

例5.3.9 求把上半圆盘$D = \{z = x + iy : |z| < 1, y > 0\}$映射为上半平面$\mathbb{C}_+ = \{w = u + iv : v > 0\}$ 的单叶解析函数$f(z)$.

解 如图12, 先将单位圆周$\partial D(0,1)$和实轴的交点1和-1用分式线性映射$\zeta = T_1(z) = \frac{z-1}{z+1}$分别映射为0和$\infty$. 于是$T_1(\mathbb{R})$和$T_1(\partial D(0,1))$均是过原点的直线. 由于0和$\infty$关于$\partial D(0,1)$对称和分式线性映射的保对称性定理, $T_1(0) = -1$和$T_1(\infty) = 1$关于$T_1(\partial D(0,1))$对称, 从而$T_1(\partial D(0,1))$ 是虚轴.

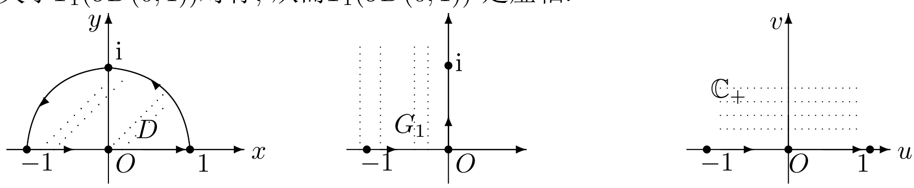

图12

由于$T_1(i) = i$, $T_1(0) = -1$, 所以T_1 把实轴映射为实轴. 从而$G_1 = T_1(D) = \{re^{i\theta} : r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\}$. 函数$w = g(\zeta) = (e^{-\frac{\pi i}{2}}\zeta)^2 = -\zeta^2$ 把区域G_1 保形映射为上半平面$\mathbb{C}_+ = g(G_1)$, 故所求函数为$w = f(z) = g(T_1(z)) = -\zeta^2 = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$.

例5.3.10 求把带形区域$D = \{z = x + iy : 0 < y < \pi\}$映射为单位圆盘$D(0,1) = \{w : |w| < 1\}$ 的单叶解析函数$f(z)$且使$f(\frac{\pi i}{2}) = 0$, $f'(\frac{\pi i}{2}) > 0$.

解 先用指数函数$\zeta = g(z) = e^z$ 把区域D保形映射为上半平面, 满足$\mathbb{C}_+ = g(D)$, $g(\frac{\pi i}{2}) = i$. 分式线性映射函数

$$w = T(\zeta) = e^{\vartheta_0 i}\frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

把上半平面$\mathbb{C}_+$保形映射为单位圆盘$D(0,1) = T(\mathbb{C}_+)$, $T(i) = 0$, 于是函数

$$w = f(z) = T(g(z)) = e^{\vartheta_0 i}\frac{e^z - i}{e^z + i},$$

把区域D保形映射为单位圆盘$D(0,1)$, 且使$f(\frac{\pi i}{2}) = 0$, 为使$f'(\frac{\pi i}{2}) > 0$, 即

$$f'(\frac{\pi i}{2}) = \frac{1}{2}e^{\vartheta_0 i} > 0,$$

应取$e^{\vartheta_0 i} = 1$, 故所求函数为

$$w = f(z) = T(g(z)) = \frac{e^z - i}{e^z + i}.$$

例5.3.11　求把单位圆盘$D(0,1)=\{z:|z|<1\}$映射为区域$G=\mathbb{C}_\infty\setminus[-1,1]$的单叶解析函数$f(z)$ (G为扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$去掉割线$[-1,1]$而得的区域).

解　如图13所示, 先将单位圆周$\partial D(0,1)$和实轴的交点-1和1用分式线性映射

$$\zeta=T(z)=\frac{z+1}{z-1}$$

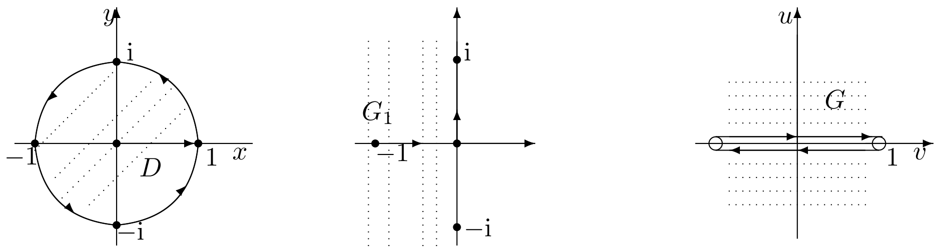

图13

分别映射为0和∞. 由于$T(0)=-1$, $T(\mathrm{i})=-\mathrm{i}, T(-\mathrm{i})=\mathrm{i}$, 所以$G_1=T(D(0,1))=\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:r>0,\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\}$是左半平面. 函数$\xi=g(\zeta)=\zeta^2$ 把区域G_1保形映射为复平面$\mathbb{C}_\infty$去掉割线$(-\infty,0]$ 而得的区域$G_2=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, 分式线性映射

$$w=T(\xi)=\frac{\xi+1}{\xi-1}$$

把∞和0分别映射为1和-1, $T(-1)=0$. 故所求函数为

$$w=f(z)=T(g(T(z)))=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

函数$w=J(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 称为Jukouwski(儒可夫斯基)函数, 记为$J(z)$.

若设$w=u+\mathrm{i}\,v, z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则Jukouwski函数的实部$u$和虚部$v$可表为

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta;\quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

由此可见, Jukouwski函数把圆周$\partial D(0,r)=\{z:|z|=r\}$ $(r>1)$ 映射为椭圆

$$\Gamma_r:\frac{u^2}{a^2(r)}+\frac{v^2}{b^2(r)}=1.$$

其中

$$a(r)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right);\quad b(r)=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right).$$

当r在$(1,+\infty)$中连续变化时, $w=J(z)$将圆周$\partial D(0,r)$ 映成的椭圆Γ_r 将扫遍区域$G=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. 当$r>1$且$r\to 1$时, 它对应的椭圆将压成区间$[-1,1]$, 当$r\to+\infty$时, 它对应的椭圆将压成一点$\infty$.

Jukouwski函数把上半平面中的射线$L_{\theta_0} = \{z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} : t \geqslant 0\}$ $(0 < \theta_0 < \pi)$映射为双曲线

$$\Lambda_{\theta_0} : \frac{u^2}{\cos^2\theta_0} - \frac{v^2}{\sin^2\theta_0} = 1.$$

它是$w = u + \mathrm{i}\,v$平面中双曲线的一支.

例5.3.12 求把半带形区域$D = \{z = x + \mathrm{i}\,y : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$映射为上半平面$\mathbb{C}_+ = \{w : \mathrm{Im}\,w > 0\}$ 的单叶解析函数$f(z)$且使$f(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$, $f(0) = 0$.

解 先用指数函数$\zeta = g(z) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 把区域D保形映射为上半单位圆盘$g(D)$, 且使得$g(\pm\frac{\pi\mathrm{i}}{2}) = \pm 1, g(0) = \mathrm{i}$. 利用例5.3.9 给出映射函数

$$\lambda = g_1(\zeta) = -\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2.$$

把上半圆盘$g(D)$映射为上半平面$\mathbb{C}_+$且$g_1(1) = 0, g_1(\mathrm{i}) = 1, g_1(-1) = \infty$, 分式线性映射

$$w = T(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

把∞和0分别映射为1和-1, $T(1) = 0$. 故所求函数为

$$w = f(z) = T(g_1(g(z))) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = \sin z.$$

例5.3.13 设$\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Im}\,z > 0\}$为上半平面, $I = \{x+\mathrm{i}\,y : x = 0, 0 \leqslant y \leqslant h\}$, 其中$h > 0$, 求把区域$D = \mathbb{C}_+ \setminus I$映射为上半平面$\mathbb{C}_+ = \{w : \mathrm{Im}\,w > 0\}$ 的单叶解析函数$f(z)$.

解 函数$\zeta = z^2$ 把区域D保形映射为复平面$\mathbb{C}$去掉射线$[-h^2, \infty)$而得的区域$G = \mathbb{C}\setminus[-h^2, \infty)$, 函数$h^2+\zeta$在单连通区域$G$中解析,不取零值, 所以存在$G$中单叶解析函数$g(\zeta)$, 它是$\sqrt{h^2 + \zeta}$ 在G中的解析分支, 满足$g(-1-h^2) = \mathrm{i}$. 故所求函数为$w = f(z) = g(z^2)$, 它是$\sqrt{h^2 + z^2}$ 在D的单叶解析分支, 满足$f(\sqrt{1 + h^2}\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

§5.4 Riemann 映射定理的证明*

定义5.4.1 设$f_n(z)$ 是定义在开集Ω内的函数($n\in\mathbb{N}$). 如果它在Ω内的任一紧集K上是一致有界的,则称$\{f_n(z)\}$是在开集Ω 中内闭一致有界的, 即对于任意紧集$K\subset\Omega$, 都存在$M>0$, 使得不等式$|f_n(z)|\leqslant M$ 对于一切$n\geqslant 0$与K上的任意点z成立.

定义5.4.2 设$f_n(z)$ 是定义在开集Ω内的连续函数($n\in\mathbb{N}$). 如果它在Ω内的任一紧集K上是等度连续的, 则称$\{f_n(z)\}$是在开集Ω中内闭等度连续的, 即对于任意紧集$K\subset\Omega$ 和任意的$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$ 使得不等式$|f_n(z)-f_n(z')|<\varepsilon$ 对于一切$n\geqslant 0$与K上满足$|z-z'|<\delta$的任意点z和z'成立.

定理5.4.3 设$f_n(z)$ 是定义在开集Ω内的解析函数($n\in\mathbb{N}$). 若$\{f_n(z)\}$ 在开集Ω中内闭一致有界, 则$\{f_n(z)\}$在Ω 中内闭等度连续.

证明 设K是Ω内的任意有界闭集, ρ_0是K到Ω的边界的距离, ρ是一个正数, 满足$0<\rho<\rho_0$. 设$K_0=\{z:d(z,K)\leqslant\rho\}$. 显然$K_0$也是有界闭集, $K\subset K_0$. 由假设, $\{f_n(z):n\geqslant 0\}$ 在K_0上是一致有界的, 即存在M, 使得$|f_n(z)|\leqslant M$ 对于一切$n\geqslant 0$ 和K_0 上的任意点z 成立. 对K中满足条件$|z_1-z_2|<\rho/12$的z_1和z_2, 我们来估计$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|$. 以z_1为圆心作圆周$\partial D(z_1,\frac{\rho}{6})=\{\zeta:|\zeta-z_1|=\frac{\rho}{6}\}$. 易见, $\partial D(z_1,\frac{\rho}{6})$ 及其内部均在K_0内, 故由Cauchy 公式,

$$\begin{aligned}|f_n(z_1)-f_n(z_2)|&=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(z_1,\frac{\rho}{6})}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(z_1,\frac{\rho}{6})}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z_2}d\zeta\right|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z_1,\frac{\rho}{6})}\frac{|f_n(\zeta)||z_1-z_2|}{|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}|d\zeta|.\end{aligned}$$

因为在$\partial D(z_1,\frac{\rho}{6})$上, $|\zeta-z_2|\geqslant|\zeta-z_1|-|z_1-z_2|\geqslant\frac{\rho}{6}-\frac{\rho}{12}=\frac{\rho}{12}$, 所以

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|\leqslant\frac{1}{2\pi}M|z_1-z_2|\frac{1}{\frac{\rho}{6}\cdot\frac{\rho}{12}}2\pi\frac{\rho}{6}=\frac{12M}{\rho}|z_1-z_2|.$$

于是, 对于任意给定$\varepsilon>0$, 若取$\delta=\min\{\frac{\rho}{12},\frac{\rho\varepsilon}{12M}\}$, 那么当$z_1,z_2\in K$, 且$|z_1-z_2|<\delta$ 时, 有$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\varepsilon\ \ (n\geqslant 1)$. 所以$\{f_n(z)\}$在$\Omega$ 中内闭等度连续. □

定理5.4.4 设$f_n(z)$ 是定义在开集Ω内的解析函数($n\in\mathbb{N}$). 若$\{f_n(z)\}$ 在Ω中内闭等度连续, 并且在Ω的稠密点集B上是收敛的, 则$\{f_n(z)\}$在Ω中内闭一致收敛.

证明 对于任意紧集$K \subset \Omega$ 和任意的$\varepsilon > 0$, 都存在$\delta > 0$ 使得

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geqslant 0, z, z' \in K,\ |z - z'| < \delta). \tag{5.4.1}$$

以K中的任一点z为中心, 以$\frac{\delta}{3}$为半径作圆盘$D(z, \frac{\delta}{3})$, 这些圆盘的全体构成K的一个开覆盖. 由有限覆盖定理, 可从中选出有限个圆盘$D(z_k, \frac{\delta}{3})$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, l)$ 组成K 的一个覆盖. 由于B在Ω内稠密, 所以每个$D(z_k, \frac{\delta}{3})$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, l)$ 上必有属于B的一点z'_k. 因为$\{f_n(z)\}$在点z'_k处收敛, 所以存在正整数$N \geqslant 0$, 使得对于任意的$m, n > N$及所有的$z'_k (1 \leqslant k \leqslant l)$ 有

$$|f_m(z'_k) - f_n(z'_k)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.4.2}$$

设z是K中的任意一点, 它必属于某一个圆盘$D(z_k, \frac{\delta}{3})$, 从而$|z'_k - z| < \delta$. 由(5.4.1)式, 对于任意$m, n > N$ 有

$$|f_n(z) - f_n(z'_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_m(z) - f_m(z'_k)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$m, n > N$时, $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$. 所以$\{f_n(z)\}$在$K$上一致收敛. □

定理5.4.5 (Montel (蒙特尔)定理) *设$f_n(z) (n \in \mathbb{N})$ 是定义在开集Ω内的解析函数. 若$\{f_n(z)\}$ 在开集Ω 中内闭一致有界, 则必有$\{f_n(z)\}$的一个子序列$\{f_{n_k}(z) : k \in \mathbb{N}\}$ 在Ω中内闭一致收敛.*

由定理3.1.9 , 子序列的极限函数在Ω中是解析的.

证明 设B是Ω内的所有有理点(实部和虚部都是有理数的点) 组成的点集. B 在Ω内是稠密的, 且是可列的, B中的点可记为$z_0, z_1, z_2, \cdots$ 由定理5.4.3和定理5.4.4, 我们只要证明从$\{f_n(z)\}$ 中可以选出子序列, 它在点$z_0, z_1, z_2, \cdots$处收敛. 因为依假设数列$\{f_n(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$ 是有界的, 所以存在$\{f_n(z)\}$ 的子序列, 记作$\{f_{0,n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$, 它在点$z = z_0$处是收敛的. 同样, 数列$\{f_{0,n}(z_1) : n \in \mathbb{N}\}$是有界的, 又可从序列$\{f_{0,n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$选出一子序列, 记为$\{f_{1,n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$, 它在点$z = z_1$处是收敛的. 如果继续下去, 我们得到一串函数序列

$$\{f_{k,n}(z) : n \in \mathbb{N}\} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

其中后一个序列$\{f_{k,n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$是前一个序列$\{f_{k-1,n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$ 的子序列, 且第k个序列在点z_k处收敛. 最后取对角线序列$\{f_{n,n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$, 显然它是$\{f_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$的子序列, 并且在每一个点$z_k$处都是收敛的. □

引理5.4.6 (Hurwitz(赫尔维茨)定理) *设f_n 是区域Ω 上的解析函数$(n \in \mathbb{N})$且$\{f_n\}$ 在Ω上内闭一致收敛于f. 则*

(a) 如果f_n 在Ω 上不取值b_n 且f在Ω中不恒为b, 其中$b_n \in \mathbb{C}$, 且$b_n \to b(n \to \infty)$, 则f在Ω 上不取值 b.

(b) 如果f_n 在Ω 上是单叶解析函数且f在Ω中不恒为常数, 则f在Ω中是单叶解析函数.

证明 (a) 由定理3.1.9 知f在Ω中解析. 如果f在Ω 上取值b, 则存在$a \in \Omega$, 使得$f(a) = b$. 令$g_n(z) = f_n(z) - b_n$. 由于$\{f_n\}$ 在Ω中内闭一致收敛于f, 则$\{g_n\}$ 在Ω中内闭一致收敛于$f(z) - b = g(z)$. 由于f在Ω中不恒为b, 所以g在Ω中不恒为零, 从而a是g的孤立零点. 因此存在$R > 0$, 使得闭圆盘$\overline{D(a, R)} \subset \Omega$且$g$在$\partial D(a, R) \setminus \{a\}$上没有零点. 于是$\inf\{|g(z)| : z \in \partial D(a, R)\} = 2\delta > 0$且存在$N$使得当$n \geqslant N$时, $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$. 由于在$\partial D(a, R)$上, $\{g_n(z)\}$一致收敛于$g(z)$, 所以存在$N_1 \geqslant N$, 当$n > N_1$时, 在$\partial D(a, R)$上有$|g_n(z) - g(z)| < \delta < |g(z)|$, 由Rouché 定理, $g(z)$与$g_n(z)$在$D(a, R)$中有相同的零点个数, 而$g_n(z)$在$D(a, R)$中没有零点, 因此$g(z)$ 也在$D(a, R)$中没有零点, 这与$g(a) = 0$矛盾. 于是对任意的$z \in \Omega$, 有$g(z) \neq 0$, 即$f(z) \neq b$. 这证明了f在Ω中不取值b.

(b) 由于f_n 在Ω 上是单叶解析的, 任取$a \in \Omega$, 则$f_n(z)$在区域$\Omega \setminus \{a\}$ 上不取值$f_n(a)$, 且由于$f_n(a) \to f(a)$ $(n \to \infty)$, f在Ω中不为常数, 于是f在Ω中不恒为$f(a)$, 则由(a), f在$\Omega \setminus \{a\}$中不取值$f(a)$, 即对任意的$c \in \Omega \setminus \{a\}$, 有$f(c) \neq f(a)$. 这证明了$f$在$\Omega$中是单叶解析函数. □

定理5.3.7 存在性的证明 现在我们来证明Riemann 映射的存在. 设$\Omega \subset \mathbb{C}$是单连通区域, 存在$\alpha \notin \Omega, \alpha \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. 记Σ 为所有从Ω 到单位圆盘$D(0, 1)$中的单叶解析函数且满足$\psi(z_0) = 0$的解析函数$\psi(z)$构成的解析函数族. 由定理5.3.5, Σ非空. 令$\eta = \sup\{|\psi'(\alpha)| : \psi \in \Sigma\}$. 由于存在$\psi_0 \in \Sigma$, 从而由定理5.1.2, $|\psi_0'(\alpha)| > 0$, 于是$\eta \geqslant |\psi_0'(\alpha)| > 0$. 由于存在$r_0 > 0$ 使得圆盘$D(z_0, r_0) \subset \Omega$, 对任意的$\psi \in \Sigma$, $\psi_0(z) = \psi(z_0 + r_0 z)$, 在单位圆盘$D(0, 1)$解析, 且$|\psi_0(z)| \leqslant 1$ $(|z| < 1)$, 由引理5.3.1 推出$|\psi_0'(0)| = |r_0\psi'(z_0)| \leqslant 1$, 所以$|r_0\psi'(z_0)| \leqslant 1/r_0$, 从而$\eta \leqslant 1/r_0$. 选取$\{\psi_n\} \subset \Sigma$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n'(z_0)| = \eta.$$

对任意的$h \in \Sigma$, 有$|h(z)| < 1$ $(z \in \Omega)$, 由定理5.4.5, $\{\psi_n\}$中有子列$\{\psi_{n_k}\}$在Ω中内闭一致收敛, 记其极限函数为$f(z)$, 由定理3.1.9, $f(z)$在Ω中解析, 并且

$$|f'(z_0)| = \lim_{k\to\infty} |\psi_{n_k}'(z_0)| = \eta.$$

由于$|f'(z_0)| > 0$, 故$f(z)$不是常数. 由引理5.4.6知, $f(z)$是Ω中的单叶解析函数. 由于对任意的$z \in \Omega$, 有$|\psi_n(z)| < 1$, 于是$|f(z)| \leqslant 1$. 由于$f(D(0, 1))$是区域,

有$f(\Omega) \subset D(0,1)$, 于是$f \in \Sigma$, 由定理5.3.6可知, $f(\Omega) = D(0,1)$是满射, 否则存在$\tilde{\psi} \in \Sigma$, 使得$|\tilde{\psi}'(z_0)| > |f'(z_0)| = \eta$, 矛盾. □

定理5.4.7* (边界对应定理) 设Ω 为有界的单连通区域, Ω的边界$\partial\Omega$是Jordan 闭分段光滑简单曲线, 则从Ω 到单位圆盘$D(0,1)$上的每个保形映射$f(z)$均可以延拓成闭区域$\overline{\Omega}$ 到闭单位圆盘$\overline{D(0,1)}$上的同胚映射f, 即f 为从$\overline{\Omega}$ 到$\overline{D(0,1)}$上的一一的连续映射且反函数是从$\overline{D(0,1)}$ 到$\overline{\Omega}$上的连续映射.

定理5.4.8* (边界对应定理之逆定理) 设Ω 为有界的单连通区域, Ω的边界$C = \partial\Omega$是Jordan 闭分段光滑简单曲线, $w = f(z)$在闭区域$\overline{\Omega} = \Omega \cup C$上解析, $f(z)$ 在C为一一的映射且$f(\partial\Omega) = \Gamma$为单位圆周. 则$f(z)$为从$\Omega$ 到单位圆盘$D(0,1)$上的保形映射, 并使C的正向对应到单位圆周Γ的正向.

证明 对任意的$w_0 \notin f(C)$, 由于$f(z)-w_0$ 在C上及C之内部均解析, 且$f(z)-w_0$ 在C上不为零, 则由辐角原理, $f(z)-w_0$在C内部的零点个数N 等于当z沿C之正向绕行一周后$\arg(f(z)-w_0)$ 的改变量$\triangle_C \arg(f(z)-w_0)$ 除以2π, 即

$$N = \frac{\triangle_C \arg(f(z)-w_0)}{2\pi}.$$

但$f(\partial\Omega) = \Gamma$为单位圆周, 且$\Gamma = \partial D(0,1)$或$\Gamma^- = \partial D(0,1)$. 所以

$$\triangle_C \arg(f(z)-w_0) = \triangle_\Gamma \arg(w-w_0).$$

由辐角原理, $w-w_0$在Γ内部$D(0,1)$的零点个数等于$\triangle_{\partial D(0,1)} \arg(w-w_0)$ 除以2π, $w-w_0$在Γ内部$D(0,1)$的零点个数, 当$|w_0| < 1$时, 为1; 当$|w_0| > 1$时,为0. 所以C的正向对应到单位圆周Γ的正向, 即$\Gamma = \partial D(0,1)$. 对任意$w_0 \in D(0,1)$, 存在$z_0 \in \Omega$, 使得$w_0 = f(z_0)$, 所以$D(0,1) \subset f(\Omega)$; 对任意$w_0, |w_0| > 1$, 不存在$z_0 \in \Omega$, 使得$w_0 = f(z_0)$, 所以$\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)} \subset \mathbb{C} \setminus f(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \overline{D(0,1)}$. $f(\Omega)$为区域, $f(\Omega) \subset D(0,1)$. 因此$f(\Omega) = D(0,1)$. □

习 题 五

1. 设点z_0不在直线$\gamma: x = a\ (a \in \mathbb{R})$上, 求点$z_0$关于直线$\gamma$的对称点.

2. 求出关于虚轴和圆周$\gamma: |z-2| = 1$的公共对称点.

3. 设$f(z)$在单位圆盘$D(0,1) = \{z: |z| < 1\}$中解析, $f(0) = 1$, 且当$z \in D(0,1)$时, 有$\mathrm{Re} f(z) \geqslant 0$,

(1) 证明对所有$z \in D(0,1)$有

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \mathrm{Re}\, f(z) \quad \text{和} \quad |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|};$$

(2) 如果上述不等式中某个不等式对某个$z \neq 0, z \in D(0,1)$成立等号, 证明此时$f(z)$是分式线性变换.

4. 设

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

为分式线性映射, 满足$T(T(z)) \equiv z$, 试确定$T(z)$的系数a, b, c, d应满足的条件.

5. 下列分式线性映射将指定区域映射为什么区域? (作图标明原像区域和像区域.)

(1) $w = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$, $\Omega = \{z: \mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$;

(2) $w = \frac{2z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+2}$, $\Omega = \{z: |z| < 1, \mathrm{Im}\, z < 0\}$;

(3) $w = \frac{z}{z-1}$, $\Omega = \{z: 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$;

(4) $w = \frac{z+1}{z-2}$, $\Omega = \{z: 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$;

(5) $w = \frac{z-1}{z+1}$, $\Omega = \{z: \mathrm{Re}\, z < 0, |z+\frac{5}{3}| > \frac{4}{3}\}$;

(6) $w = \frac{1}{z}$, $\Omega = \{z: \mathrm{Re}\, z > 1, \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

6. 求把点$z_1 = 2, z_2 = \mathrm{i}, z_3 = -2$ 分别映成点$w_1 = 1, w_2 = \mathrm{i}, w_3 = -1$ 的分式线性映射.

7. 求把点$z_1 = -\mathrm{i}, z_2 = 0, z_3 = \mathrm{i}$ 分别映成点$w_1 = -1, w_2 = \mathrm{i}, w_3 = 1$ 的分式线性映射. 虚轴$x = 0$映成了什么曲线?

8. 映射$w = f(z)$的不动点z_0是指满足$f(z_0) = z_0$的点.证明每一分式线性映射除恒等映射$w = z$ 外在扩充复平面上至多有两个不动点.

9. 求下列映射的不动点:

(1) $w = \frac{z-1}{z+1}$;　　　(2) $w = \frac{6z-9}{z}$.

10. 证明如果原点是一个分式线性映射的不动点,那么该映射可写成$w = z/(cz+d)$, 这里$d \neq 0$.

11. 求把区域$\{z:\operatorname{Re}z>0,|z-R|>1\}$ $(R>1)$映射为同心圆环$\{w:1<|w|<2\}$的分式线性映射$w=T(z)$且求出R值.

12. 求把区域$\{z:|z-3\mathrm{i}|>2,|z-4|>2\}$映射为同心圆环$\{w:1<|w|<R\}$ 的分式线性映射$w=T(z)$且求出R值.

13. 求把区域$\{z:|z|>1,\operatorname{Re}z<2\}$映射为同心圆环$\{w:1<|w|<R\}$ 的分式线性映射$w=T(z)$且求出R值.

14. 设$D=D(0,1)\setminus[\frac{1}{2},1)$ 是单位圆盘$D(0,1)=\{z:|z|<1\}$ 除去实轴上的半闭区间$[\frac{1}{2},1)$ 所得区域, 试作一单叶解析函数$w=f(z)$把D 映射到单位圆盘$D(0,1)=\{w:|w|<1\}$ 并且$f(0)=0,f'(0)>0$.

15. 如果函数$f(z)$ 在圆$D(0,1)=\{z:|z|<1\}$ 内解析,在闭圆$\overline{D(0,1)}=\{z:|z|\leqslant 1\}$ 中连续, $M(r)$和$A(r)$分别为$|f(z)|$及$\operatorname{Re}f(z)$在圆周$|z|=r$上的最大值$(0\leqslant r\leqslant 1)$. 证明:

(1) $M(r)$和$A(r)$在$[0,1]$上单调上升;

(2) 当$r=|z|<1$和$f(0)=0$时,

$$|f(z)|\leqslant\frac{2r}{1-r}A(1);$$

(3) 当$r=|z|<1$时,

$$|f(z)|\leqslant\frac{2r}{1-r}A(1)+\frac{1+r}{1-r}|f(0)|.$$

16. 设$f(z)$在单位圆盘$D(0,1)=\{z:|z|<1\}$中解析, 且当$z\in D(0,1)$时, 有$|f(z)|\leqslant 1$, 证明

(1)

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right|\leqslant|z|$$

对所有$z\in D(0,1)$都成立, 且

$$|f'(0)|\leqslant 1-|f(0)|^2,$$

(2) 如果

$$|f'(0)|=1-|f(0)|^2,$$

则$w=f(z)$ 是分式线性映射.

17. 设$f(z)=u(z)+\mathrm{i}\,v(z)$是一个整函数, 且假设存在两个正数$R$和$M$, 使得当$|z|\geqslant R$时, $f(z)$的实部$u(z)$ 满足$|u(z)|\leqslant M|z|$. 证明$f(z)$是一个次数至多为1次的多项式或一个常数.

18. 设n为正整数, 证明$w = z + \frac{1}{n}z^n$在单位圆盘$|z| < 1$内单叶.

19. 证明$w = \frac{z}{(2-z)^3}$在单位圆盘$|z| < 1$内单叶.

20. 求带形区域$\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$到单位圆盘$\{w : |w| < 1\}$的保形映射.

21. 求把单位圆盘$\{z : |z| < 1\}$除去实轴上$(-1, \frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2}, 1)$ 的区域保形映射为单位圆盘.

22. 求把双曲线$x^2 - y^2 = 1$右半支所围区域(不含原点)保形映射为上半平面.

23. 求把抛物线$v^2 = 4(1 + u)$左方的区域保形映射为上半平面.

24. 求把双曲线$x^2 - y^2 = 1$两支之间所围区域(含原点)保形映射为上半平面.

25. 求把椭圆$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$的外部保形映射为单位圆盘.

26. 求把平面除去线段$[-\mathrm{i}, \mathrm{i}]$和正实轴的区域保形映射为上半平面.

27. 求把平面除去线段$[-\mathrm{i}, \mathrm{i}]$和$[-1, 1]$的区域保形映射为上半平面.

28. 证明Koebe(克贝)函数

$$w = \frac{z}{(1+z)^2}$$

把单位圆盘内部保形映射为平面除去实轴上的射线$[\frac{1}{4}, +\infty)$的区域.

第六章　解析开拓和无穷乘积

在这一章我们介绍解析开拓理论和解析函数的无穷乘积的展式, 用Γ 函数, Beta 函数和Riemann zeta 函数作为无穷乘积的例子.

§6.1　解析开拓

定义6.1.1 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, 区域$D\supset\Omega$, 如果存在D上解析函数$F(z)$, $F(z)$ 在Ω 内与$f(z)$ 恒等, 则称$f(z)$可以解析开拓到区域D中, F 称为f在区域D上的解析开拓.

定理6.1.2 (Painlevé(班拉卫)连续开拓原理)　设$f(z)$在区域Ω上连续,C 是一条分段光滑Jordan曲线. 如果$f(z)$在$\Omega\setminus C$ 上解析, 则$f(z)$在Ω上解析.

证明 只要证明对任意的$z_0\in C\cap\Omega$, $f(z)$在z_0点解析. 对任意的$z_0\in C\cap\Omega$, 存在z_0的邻域$D(z_0,r)$, 使得$\overline{D(z_0,r)}\subset\Omega$, 且对$D(z_0,r)$ 中的任意闭长方形$\Box\subset D(z_0,r)$, $\Box\bigcap C$是一条分段光滑Jordan曲线C_1, 于是$\mathrm{int}(\Box)\backslash C_1$ 由两个区域D_1,D_2组成, 边界∂D_1和∂D_2都是分段光滑闭Jordan曲线, 从而有

$$\int_{\partial\Box}f(z)dz=\int_{\partial D_1}f(z)dz+\int_{\partial D_2}f(z)dz=0.$$

由Morera 定理, $f(z)$在$D(z_0,r)$中解析.　□

定理6.1.3 (Schwarz对称原理)　设$\mathbb{C}$中的区域Ω 关于实轴对称 (即若$z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega$, 则$\overline{z}=x-\mathrm{i}y\in\Omega$).设$\Omega_+=\{z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega:y>0\}$,$I=\{z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega:y=0\}$和$\Omega_-=\{z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega:y<0\}$. 如果$f(z)$在$\Omega_+$内解析, 在$\Omega_+\bigcup I$中连续且在$I$上取实值, 则

$$F(z)=\begin{cases}f(z), & z\in\Omega_+\cup I,\\ \overline{f(\overline{z})}, & z\in\Omega_-\end{cases}\tag{6.1.1}$$

是Ω内的解析函数.

证明 因为$f(z)$在Ω_+内解析,所以对任意的$z_0\in\Omega_+$,存在$\delta>0$使得$D(z_0,\delta)\subset\Omega_+$, 且$f(z)$ 在$D(z_0,\delta)$有Taylor展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\quad(|z-z_0|<\delta).$$

由对称性, 有$D(\overline{z_0},\delta)\subset\Omega_-$, 且$F(z)=\overline{f(\overline{z})}$ 在$D(\overline{z_0},\delta)$中有Taylor展式

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}(z-\overline{z_0})^n\quad(|z-\overline{z_0}|<\delta).$$

所以$F(z)$在Ω_-内也解析. 任取$a\in I$, 因为$f(z)$在$\Omega_+\cup I$中连续且$f(a)=\overline{f(a)}$, 所以$F(z)=\overline{f(\overline{z})}$在$\Omega_-\bigcup I$中连续且$F(a)=f(a)$. 从而$F(z)$在$\Omega$中连续. 由Painlevé连续开拓原理, $F(z)$在Ω中解析. □

从如上的证明可以看出如下定理成立.

定理6.1.4 (Schwarz对称原理)　设$\mathbb{C}_+=\{z=x+\mathrm{i}\,y:y>0\}$是上半平面, $\mathbb{C}$中的区域Ω 关于实轴对称 (即若$z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega$, 则$\overline{z}=x-\mathrm{i}y\in\Omega$). 设$\Omega_+=\{z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega:y>0\}, I=\{z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega:y=0\}$和$\Omega_-=\{z=x+\mathrm{i}\,y\in\Omega:y<0\}$. 如果$f(z)$在$\Omega_+$内单叶解析且$f(z)$ 在Ω_+上的值在$\mathbb{C}_+$中, $f(z)$ 在$\Omega_+\bigcup I$中单叶连续且在I上取实值, 则由(6.1.1)式定义的函数是Ω内的单叶解析函数.

利用分式线性映射, 可以将Schwarz对称原理推广为:

定理6.1.5 (推广的Schwarz对称原理)　设$\mathbb{C}$中的区域Ω 关于实轴对称(即若$\zeta\in\Omega$, 则$\overline{\zeta}\in\Omega$). $z=T(\zeta), w=S(\xi)$ 均为分式线性映射, 设$\Omega_+=\{\zeta\in\Omega:\mathrm{Im}\,\zeta>0\}, I=\{\zeta\in\Omega:\mathrm{Im}\,\zeta=0\}$和 $\Omega_-=\{\zeta\in\Omega:\mathrm{Im}\,\zeta<0\}$. 如果$f(z)$在$T(\Omega_+)$内解析, 在$T(\Omega_+\cup I)$中连续且$f(z)$ 在$T(I)$上的值在$S(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$中, 则$f(z)$ 可以延拓为$T(\Omega)$上的解析函数$F(z)$, 且$F(z)$满足: 如果$z,z^*\in T(\Omega)$关于$T(I)$对称, 则$F(z)$和$F(z^*)$关于$S(\mathbb{R})$对称.

证明　只要对函数$S^{-1}(f(T(z)))$应用定理6.1.3 就可以了. □

定理6.1.6　(单叶解析函数的Schwarz对称原理)　设$\mathbb{C}_+=\{z=x+\mathrm{i}\,y:y>0\}$ 是上半平面, $\mathbb{C}$中的区域Ω 关于实轴对称(即若$\zeta\in\Omega$, 则$\overline{\zeta}\in\Omega$). $z=T(\zeta), w=S(\xi)$ 均为分式线性映射, 设$\Omega_+=\{\zeta\in\Omega:\mathrm{Im}\,\zeta>0\}, I=\{\zeta\in\Omega:\mathrm{Im}\,\zeta=0\}$和 $\Omega_-=\{\zeta\in\Omega:\mathrm{Im}\,\zeta<0\}$. 如果$f(z)$在$T(\Omega_+)$内单叶解析, 在$T(\Omega_+\bigcup I)$中单叶连续且$f(z)$ 在$T(\Omega_+)$上的值在$S(\mathbb{C}_+)$中, $f(z)$ 在$T(I)$上的值在$S(\mathbb{R}\bigcup\{\infty\})$中, 则$f(z)$ 可以延拓为$T(\Omega)$上的单叶解析函数$F(z)$, 且$F(z)$满足: 如果$z,z^*\in T(\Omega)$关于$T(I)$对称, 则$F(z)$和$F(z^*)$关于$S(\mathbb{R})$对称.

例6.1.7　设$\mathbb{C}_+=\{z=x+\mathrm{i}\,y:y>0\}$是上半平面. 如果$f(z)$在$\mathbb{C}_+$内单叶解析, $f(\mathbb{C}_+)\subseteq\mathbb{C}_+$, 在闭上半平面$\overline{\mathbb{C}_+}$中单叶连续且在实轴$\mathbb{R}$ 上取实值, 则$f(z)$是线性函数$az+b$, 其中a,b是实数, $a\neq 0$.

解 由对称原理, 可以把$w=f(z)$的定义域越过$z-$平面的实轴扩充为下半平面, 得到整个平面上的单叶解析函数$w=f(z)$, 它是一个整函数, 并把平面保形映射为整个平面, $w=f(z)$的反函数$z=f^{-1}(w)$也是整函数.

对任意$M>0$, 闭圆盘$\overline{D(0,M)}$为有界闭集, 所以$f^{-1}(\overline{D(0,M)})$ 也是有界闭集, 所以存在$R>0$,使得当$|z|>R$时, $|f(z)|>M$. 这说明

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty.$$

∞是$f(z)$的极点, 所以$f(z)$为次数大于零的多项式.设多项式$f(z)$的次数为n, 则$n \geqslant 1$.由于$w=f(z)$ 是整个平面上的单叶解析函数, 所以$f'(z)$处处不等于零, 从而如果$n>1$,则$n-1$次多项式$f'(z)$必有零点, 从而矛盾. 所以$f(z)$是线性函数$az+b$, 其中a,b是复数, $a\neq 0$. $f(z)$ 在实轴$\mathbb{R}$上取实值, a,b必为实数.

例6.1.8 设$\mathbb{C}_+=\{z=x+\mathrm{i}\,y:y>0\}$是上半平面, $I_k=\{x+\mathrm{i}\,y:x=k\pi-\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant a\}$, 其中$a>0$ 和$L=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} I_k$. 求把区域$D=\mathbb{C}_+\setminus L$映射为上半平面$\mathbb{C}_+=\{w:\mathrm{Im}\,w>0\}$ 的单叶解析函数$f(z)$.

解 已知单叶解析函数$\zeta=f_1(z)=\sin z$ 把半带形区域$G=\{z=x+\mathrm{i}\,y: -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, y>0\}$映射为上半平面$\mathbb{C}_+=\{\zeta:\mathrm{Im}\,\zeta>0\}$, $f_1(z)$满足$f_1(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$, $f_1(\pm\frac{\pi \mathrm{i}}{2}+\mathrm{i}\,a)=\pm\cosh(a)$, $f_1(0)=0$. 因此$w=f_2(z)=\arcsin\frac{\sin z}{\cosh a}$便将$G$保形映射为自己且

$$f_2(\{x+\mathrm{i}\,y:x=-\frac{\pi}{2}, y>a\})=\{w=u+\mathrm{i}\,v:u=-\frac{\pi}{2}, v>0\}$$

和

$$f_2(\{x+\mathrm{i}\,y:x=\frac{\pi}{2}, y>a\})=\{w=u+\mathrm{i}\,v:u=\frac{\pi}{2}, v>0\}.$$

反复利用单叶解析函数的Schwarz对称原理无穷多次, 便可将函数

$$w=f_2(z)=\arcsin\frac{\sin z}{\cosh a}$$

单叶解析开拓到D上, 成为D上单叶解析函数$w=f(z)$, 并且解析开拓后单叶解析函数$w=f(z)$把区域$D=\mathbb{C}_+\setminus L$映射为上半平面$\mathbb{C}_+=\{w:\mathrm{Im}\,w>0\}$.

例6.1.9 设$D(R)=\{z:1<|z|<R\}$和$D(\rho)=\{w:1<|w|<\rho\}$是圆环, 其中$R>1, \rho>1$. 则存在$D(R)$上的单叶解析且在$\overline{D(R)}$上是一一的连续的函数$w=f(z)$: 满足$f(D(R))=D(\rho)$和$f(\partial D(R))=\partial D(\rho)$的充要条件是$R=\rho$.

证明 如果$R=\rho$, 则恒等映射$w=f(z)$是$D(R)$上的单叶解析函数, 且在$\overline{D(R)}$上是一一的, 连续的, 满足$f(D(R))=D(\rho)$和$f(\partial D(R))=\partial D(\rho)$.

现证明$R=\rho$是必要的. 如果$w=f(z)$是$D(R)$上的单叶解析函数, 且在$\overline{D(R)}$上是一一的, 连续的, 满足$f(D(R))=D(\rho)$和$f(\partial D(R))=\partial D(\rho)$.

先考虑$f(\partial D(0,R))=\partial D(0,\rho)$和$f(\partial D(0,1))=\partial D(0,1)$的情况. 利用单叶解析函数的Schwarz对称原理, 可将函数$w=f(z)$ 单叶解析开拓到圆环$\{z:R<|z|<R^2\}$上, 成为$\{z:1<|z|<R^2\}$上单叶解析函数$w=f(z)$, 并且$w=f(z)$把区域$\{z:1<|z|<R^2\}$保形映射为区域$\{w:1<|w|<R^2\}$.这个过程可继续进行, 于是得到$\{z:1<|z|<\infty\}$上的单叶解析函数$w=f(z)$, 并且$w=f(z)$把区域$\{z:1<|z|<\infty\}$保形映射为区域$\{w:1<|w|<\infty\}$. 再利用单叶解析函数的Schwarz对称原理, 便可将函数$w=f(z)$ 单叶解析开拓到$\mathbb{C}\setminus\{0\}$上, 成为$\mathbb{C}\setminus\{0\}$上单叶解析函数, 并且$w=f(z)$把区域$\mathbb{C}\setminus\{0\}$保形映射为$\mathbb{C}\setminus\{0\}$且

$$\lim_{z\to 0} f(z)=0.$$

所以函数$w=f(z)$ 单叶解析开拓到$\mathbb{C}$上, 成为$\mathbb{C}$上单叶解析函数, 并且$w=f(z)$把$\mathbb{C}$保形映射为$\mathbb{C}$ 和$f(0)=0$, 于是由例6.1.8, 存在$a\neq 0$, 使得$f(z)=az$. 由于$f(\partial D(0,1))=\partial D(0,1)$, 所以$|a|=1$, 由于$f(\partial D(0,R))=\partial D(0,\rho)$, 从而$R=\rho$.

对$f(\partial D(0,R))=\partial D(0,1)$和$f(\partial D(0,1))=\partial D(0,\rho)$的情况. 这时函数$g(z)=\frac{\rho}{f(z)}$是$D(R)$上的单叶解析且在$\overline{D(R)}$是一一的, 连续的, 满足 $g(D(R))=D(\rho)$ 和 $g(\partial D(R))=\partial D(\rho)$ 以及$g(\partial D(0,R))=\partial D(0,\rho)$和$g(\partial D(0,1))=\partial D(0,1)$, 由上面的证明知$R=\rho$. □

§6.2 幂级数的解析开拓

定理6.2.1 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, $c\in\partial\Omega$为$f(z)$的奇点. 则对任意$z_0\in\Omega$, 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{6.2.1}$$

的收敛半径$R(z_0)$有限且对任意$a,b\in\Omega$, 有

$$|R(a)-R(b)|\leqslant|a-b|. \tag{6.2.2}$$

证明 由于$c\in\partial\Omega$为$f(z)$的奇点, 对任意$z_0\in\Omega$, 幂级数(6.2.1) 的收敛半径$R(z_0)\leqslant|z_0-c|$为有限. 对任意$a,b\in\Omega$, 可不妨设$R(b)\geqslant R(a)$, 由于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ 在收敛圆周$\partial D(a,R(a)):|z-a|=R(a)$上至少有一奇点, 和$D(a,R(a))\subset D(b,R(a)+|b-a|)$, 所以幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$ 的收敛半径为$R(b)\leqslant R(a)+|b-a|$. 这说明(6.2.2)式成立. □

定义6.2.2 设$f(z)$ 在区域Ω内解析, $\partial\Omega$中每点均为$f(z)$的奇点, 则称$\partial\Omega$ 为$f(z)$的自然边界.

定理6.2.3 设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

的收敛半径为$R>0, R<+\infty$, 如果$c_n\ (n\in\mathbb{N})$均为非负实数, 则R为$f(z)$ 在收敛圆周$\partial D(0,R)$上的奇点.

证明 任取$a\in(0,R)$, 如果R不是$f(z)$ 在收敛圆周$\partial D(0,R):|z|=R$的奇点, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

的收敛半径$R(a)>R-a$, 即

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}}=\frac{1}{R(a)}<\frac{1}{R-a}.$$

但

$$f^{(n)}(a)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)c_ka^{k-n},$$

从而对任意满足$|b| = a$的b, 有

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(b)| &= \left|\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k b^{k-n}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k a^{k-n} = f^{(n)}(a).\end{aligned}$$

所以幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

的收敛半径$R(b)$ 满足

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(b)|}{n!}} = \frac{1}{R(b)} \leqslant \frac{1}{R(a)} < \frac{1}{R-a}.$$

从而$R(b) > R-a = R-|b|$. 这说明$Re^{\mathrm{i}\arg b}$不是$f(z)$的奇点, 由于$b \in \partial D(0,a)$是任意的, 所以$f(z)$ 在收敛圆周$\partial D(0,R) : |z| = R$上没有奇点, 矛盾, 所以$R$为$f(z)$在收敛圆周$\partial D(0,R)$上的奇点. □

例6.2.4 幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

的收敛半径为$R = 1$. 证明收敛圆周$\partial D(0,1)$ 是$f(z)$的自然边界.

证明　由定理6.2.3, 1 是$f(z)$的奇点. 设$\alpha = \frac{q}{p}$是有理数, p, q没有公因子, $p > 0$, 令$g(z) = f(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha})$, 则

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha n} z^{n!} = \sum_{n=0}^{p-1} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha n} z^{n!} + \sum_{n=p}^{\infty} z^{n!}.$$

由定理6.2.3, 1 是$g(z)$的奇点, 因而$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha}$ 是$f(z)$的奇点. 现在证明$\partial D(0,1)$上的每点均为$f(z)$的奇点. 如果$b \in \partial D(0,1)$不是$f(z)$的奇点, 则存在圆盘$D(b,R)$, 使得$f(z)$能解析开拓到$D(b,R)$, 故$D(b,R)\bigcap \partial D(0,1)$中每个点均不是$f(z)$的奇点, 而$D(b,R)\bigcap\partial D(0,1)$中必有形如$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha}$的点($\alpha$为有理数), 这和上面的结论相矛盾.
□

§6.3 无穷乘积

定义6.3.1 设$\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是复数列, 如果存在$N \geqslant 0$ 使得部分乘积序列

$$p_{_{N,n}} = \prod_{k=N}^{n}(1+u_k) \quad (n = N, N+1, \cdots)$$

收敛到一个非零常数$p_{_N}$, 则称无穷乘积

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+u_k) \tag{6.3.1}$$

是收敛的; 记为$p = \prod\limits_{k=0}^{\infty}(1+u_k) = p_{_N}(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_{N-1})$. 否则如果对任意$N \geqslant 0$, 部分乘积序列$\{p_{_{N,n}} : n = N, N+1, \cdots\}$ 不收敛或收敛到零, 则称无穷乘积(6.3.1)是发散的.

因此与无穷级数一样, 无穷乘积中改变其中有限项的数值不改变敛散性. 如果(6.3.1)式收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{6.3.2}$$

定理6.3.2 无穷乘积$\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1+|u_k|)$与无穷级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k|$ 的敛散性相同.

证明 当$t \geqslant 0$ 时, $1+t \leqslant \mathrm{e}^t$. 由此有

$$\sum_{k=0}^{n}|u_k| \leqslant \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|) \leqslant \exp\left\{\sum_{k=0}^{n}|u_k|\right\}. \tag{6.3.3}$$

所以无穷乘积$\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1+|u_k|)$与无穷级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k|$同时收敛或发散. □

若无穷级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k|$收敛, 则称无穷乘积$\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1+u_k)$是绝对收敛的.

引理6.3.3 设$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n$是复数, 令

$$p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k), \quad \widetilde{p}_n = \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|),$$

则

$$|p_n - 1| \leqslant \widetilde{p}_n - 1. \tag{6.3.4}$$

证明 对$n=0$, (6.3.4)式是显然的, 用归纳法证明(6.3.4)式. 设当$k=n$时, (6.3.4)式成立, 则当$k=n+1$时,

$$\begin{aligned}|p_{n+1}-1|&=|p_n(1+u_{n+1})-1|=|(p_n-1)(1+u_{n+1})+u_{n+1}|\\&\leqslant(\widetilde{p}_n-1)(1+|u_{n+1}|)+|u_{n+1}|=\widetilde{p}_{n+1}-1.\end{aligned}$$

得到(6.3.4)式. □

引理6.3.4 令$\{u_n(z)\}$是集合E上的有界复函数, 若无穷级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k(z)|$在$E$上一致收敛, 则无穷乘积

$$f(z)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+u_k(z)) \tag{6.3.5}$$

在E上一致收敛, 且对某点$z_0\in E, f(z_0)=0$的充要条件是存在n_0 使得$u_{n_0}(z_0)=-1$.

此外, 如果$\{n_0,n_1,n_2,\cdots\}$是$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$的置换, 则

$$f(z)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+u_{n_k}(z))\quad(z\in E). \tag{6.3.6}$$

证明 由于无穷级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k(z)|$在$E$上一致收敛,所以存在$c$, 使得对任意的$z\in E$, 有$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k(z)|\leqslant c$. 设

$$p_n(z)=\prod_{k=0}^{n}(1+u_k(z)),$$

则由(6.3.3)式, 有$|p_n(z)|\leqslant \mathrm{e}^c=C,\quad z\in S, n\in\mathbb{N}$. 设$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 则存在$N_0$, 使得

$$\sum_{k=N_0}^{\infty}|u_k(z)|<\varepsilon\quad(z\in E). \tag{6.3.7}$$

设$\{n_0,n_1,n_2,\cdots\}$是$\mathbb{N}$的置换, 则对任意的$N\geqslant N_0$ 存在$M>N$使得

$$\{0,1,2,\cdots,N\}\subset\{n_0,n_1,n_2,\cdots,n_M\}. \tag{6.3.8}$$

设

$$q_M(z)=\prod_{k=0}^{M}(1+u_{n_k}), \tag{6.3.9}$$

则

$$q_M(z) - p_N(z) = p_N(z)\left(\prod_{n_k > N, 0 \leqslant k \leqslant M}(1 + u_{n_k}(z)) - 1\right). \tag{6.3.10}$$

由引理6.3.3 和(6.3.7)式,

$$|q_M(z) - p_N(z)| \leqslant |p_N(z)|(\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1) \leqslant 2\varepsilon|p_N(z)| \leqslant 2\varepsilon C. \tag{6.3.11}$$

若$n_k = k$ $(k \in \mathbb{N})$, 则$q_M(z) = p_M(z)$. (6.3.11)式说明$\{p_M(z)\}$在E上一致收敛于$f(z)$. 同时

$$|p_M(z) - p_{N_0}(z)| \leqslant 2\varepsilon|p_{N_0}(z)| \quad (M > N_0), \tag{6.3.12}$$

因此$|p_M(z)| \geqslant (1 - 2\varepsilon)|p_{N_0}(z)|$. 从而

$$|f(z)| \geqslant (1 - 2\varepsilon)|p_{N_0}(z)|.$$

这说明对某点$z_0 \in S, f(z_0) = 0$的充要条件是存在N_0 使得$p_{N_0}(z_0) = 0$.

最后, (6.3.11)式说明$\{q_M(z)\}$在E上也一致收敛于$f(z)$. □

定理6.3.5 设$\{f_n(z)\}$是区域Ω上的解析函数列, 且在Ω上不恒等于-1. 若无穷级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|f_k(z)|$ 在Ω 的任一有界闭集上一致收敛, 则无穷乘积

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + f_k(z)) \tag{6.3.13}$$

在Ω 的任一紧集上一致收敛, 因而$f(z)$是区域Ω上的解析函数. 此外,

$$m(f, z) = \sum_{n=0}^{\infty} m(1 + f_n, z), \quad z \in \Omega, \tag{6.3.14}$$

其中$m(f,z)$表示f在点z的零点重数. (如果$f(z) \neq 0$, 则记$m(f,z) = 0$.)

证明 定理6.3.5 的第一部分可直接由定理6.3.4得出. 对于第二部分, 由于对于任意的$z_0 \in \Omega$, 存在$\delta > 0$ 使得$\overline{D(z_0, \delta)} = \{z : |z - z_0| \leqslant \delta\} \subset \Omega$, $\{f_n(z)\}$在$\overline{D(z_0,\delta)}$上一致收敛于零, 所以存在$N_0 > 0$,使得当$n \geqslant N_0$时, $|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}, z \in \overline{D(z_0, \delta)}$, 从而$m(f, z) = \sum\limits_{n=0}^{N_0} m(1 + f_n, z)$ $(z \in \overline{D(z_0, \delta)})$. □

定义6.3.6 令$E_0(z) = 1 - z$和当$p \in \mathbb{N}^{+}$时, 令

$$E_p(z) = (1 - z)\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

函数$E_p(z)$ 称为初等因子.

引理6.3.7 对$|z|\leqslant 1$和$p\in\mathbb{N}$, 有

$$|1-E_p(z)|\leqslant |z|^{p+1}.$$

证明 对$p=0$, 引理6.3.7 显然成立. 对$p\geqslant 1$, 直接计算有

$$-E_p'(z)=z^p\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\}.$$

所以当$|z|\leqslant 1$,

$$|1-E_p(z)|=\left|\int_0^1 E_p'(tz)zdt\right|\leqslant |z|^{p+1}\left|\int_0^1 E_p'(t)dt\right|=|z|^{p+1}.$$

这证明了引理. □

定理6.3.8 设$\{z_n\}$为一列非零趋向于∞的复数列. 如果$\{p_n\}$是非负整数列且对任意的$r>0$有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}<\infty, \tag{6.3.15}$$

则无穷乘积

$$P(z)=\prod_{n=0}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{6.3.16}$$

定义了一个整函数$P(z)$ 且$P(z)$的零点是z_n且没有其他零点.

更精确的说, 如果α在序列$\{z_n\}$中出现m次, 则$P(z)$在点α恰好有m重零点.

若$p_n=n-1$, 则(6.3.15)式成立.

证明 因为对任意$r>0$, 存在$N(r)$, 当$n\geqslant N(r)$时, $|z_n|\geqslant 2r$, 所以若$p_n=n-1$, 则(6.3.15)式成立. 对任意$r>0$, 当$|z|\leqslant r$时, 引理6.3.7 说明当$n\geqslant N(r)$时,

$$\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|\leqslant\left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n}\leqslant\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}.$$

条件(6.3.15)说明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

在平面中内闭一致收敛. 定理6.3.5 说明定理6.3.8 成立. □

定理6.3.9 (Weierstrass 因子分解定理) 设$f(z)$是整函数, 0 是$f(z)$的k重零点, $z_0, z_1, z_2, \cdots$ 是$f(z)$的非零零点(几重零点算几次), 且$0 < |z_0| \leqslant |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots$, 则存在整函数$h(z)$和非负整数列$\{p_n\}$使得(6.3.15)式对任意$r > 0$ 成立, 且

$$f(z) = z^k \mathrm{e}^{h(z)} \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{6.3.17}$$

证明 设$P(z)$是由(6.3.16)式定义的无穷乘积, 它的零点由$f(z)$的非零零点组成, 则函数$\frac{f(z)}{z^k P(z)}$在复平面只有可去奇点. 于是$\frac{f(z)}{z^k P(z)}$可以延拓成整函数, 且延拓后的整函数没有零点, 因此存在整函数$h(z)$使得(6.3.17)式成立. □

例6.3.10 应用上述定理写出函数$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$的因子分解形式.

解 易见$f(z)$的零点是$\pm 1, \pm 2, \cdots$, 而0 是其可去奇点, $f(0) = 1$, $f(z)$是整函数. 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^{p+1}$$

当$p > 0$时, 收敛. 取$p = 1 = p_n$, 则由定理6.3.8,

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{-n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

是一个整函数, 且$P(z)$的零点是$\pm 1, \pm 2, \cdots$, 于是由定理6.3.9,

$$\sin \pi z = \pi z \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

其中$g(z)$是整函数且$\mathrm{e}^{g(0)} = 1$. 下面证明$g(z) \equiv g(0)$. 事实上, 由于

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} = g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

由例4.4.1, 上述级数在区域$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$中内闭一致收敛, 并且$g'(z) \equiv 0$. 故$g(z) \equiv g(0)$, 从而

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

§6.4 Γ函数, Beta 函数和Riemann zeta 函数

定义6.4.1 (Γ函数的定义) 由积分

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt \tag{6.4.1}$$

定义的函数称为Γ 函数.

当$z = x > 0$时, 它与数学分析中的$\Gamma(x)$一致. 因此, $\Gamma(z)$是$\Gamma(x)$从实轴到复平面的延拓. 由于$\left|\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,(z = x + \mathrm{i}\,y)$, 所以当$\mathrm{Re}\, z > 0$时, 积分(6.4.1)绝对收敛, 则$\Gamma(z)$在$\mathrm{Re}\ z > 0$有定义且连续, 于是由Morera定理, 由(6.4.1)所定义的函数$\Gamma(z)$在$\mathrm{Re}\ z > 0$是解析的, 且

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \log t dt, \quad \mathrm{Re}\ z > 0.$$

由分部积分法,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z} dt = z\Gamma(z).$$

重复地应用分部积分法得到

$$\Gamma(n+z) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z) \quad (\mathrm{Re}\, z > 0), \tag{6.4.2}$$

特别地, 当$z = 1$时,

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1),$$

而$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} dt = 1$, 故

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{6.4.3}$$

根据(6.4.2)式, 我们可以将$\Gamma(z)$解析开拓到半平面$\mathrm{Re}\, z > -n$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0).$$

因为当$\mathrm{Re}\, z > -n$时, $\Gamma(z+n)$ 是解析的, 所以上式右边的函数在半平面$\mathrm{Re}\ z > -n$除去一阶极点$z = 0, -1, \cdots, -(n-1)$以外的区域内是解析的. 而$n$是任意正整数, 这样一来, $\Gamma(z)$便可解析开拓到全平面$\mathbb{C}$上, 它以$z = -n\,(n \in \mathbb{N})$为一阶极点, 其留数为

$$\mathrm{Res}(\Gamma(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{6.4.4}$$

设

$$f_n(z) = \int_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \quad (\mathrm{Re}\, z > 0), \tag{6.4.5}$$

作变量替换$s=\dfrac{t}{n}$ 并分部积分n次, 得到

$$f_n(z)=n^z\int_0^1(1-s)^n s^{z-1}ds=\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{6.4.6}$$

另一方面, 我们证明

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=\Gamma(z) \qquad (\mathrm{Re}\, z>0). \tag{6.4.7}$$

为此只要证明当$\mathrm{Re}\, z>0$时, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\right]\\ =&\lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\left[1-\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt=0.\end{aligned}$$

先证明当$0\leqslant t\leqslant n, n>1$时,

$$0\leqslant 1-\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\frac{\mathrm{e}t^2}{4n}. \tag{6.4.8}$$

事实上, 由于

$$\left\{\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}'=-\frac{1}{n}\mathrm{e}^t t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1},$$

所以

$$1-\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\int_0^t \mathrm{e}^x x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx.$$

而函数$\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$在区间$[0,n]$的$x=1$取得最大值,

$$\sup\left\{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}: n\geqslant x\geqslant 0\right\}=\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\leqslant \mathrm{e} \qquad (n\geqslant 1).$$

所以

$$1-\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\frac{\mathrm{e}}{n}\int_0^t x dx=\frac{\mathrm{e}t^2}{2n} \quad (n>1, 0\leqslant t\leqslant n).$$

此外, 当$x>0$时, $\mathrm{e}^{-x}\geqslant 1-x$, 则$\mathrm{e}^{-t/n}\geqslant 1-\dfrac{t}{n}$, 于是$\mathrm{e}^{-t}\geqslant\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$,故

$$1-\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\geqslant 0.$$

利用不等式(6.4.8), 得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\right|\\=&\left|\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\left[1-\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt\right|\\\leqslant&\frac{\mathrm{e}}{2n}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}dt\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2n}\Gamma(x+2),\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\left[1-\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt=0.$$

结合(6.4.6)和(6.4.7)式, 可得

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{6.4.9}$$

由于$\Gamma(z)$已经开拓到左半平面, 所以根据解析函数的唯一性定理, (6.4.9) 式对于$z\neq 0,-1,\cdots$成立. 这个式子称为Gauss(高斯)公式.

因为

$$\begin{aligned}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}&=\frac{\exp\{z\log n\}}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}\\&=\frac{\exp\{z\log n\}}{z\prod\limits_{k=1}^n\left(1+\frac{z}{k}\right)}=\frac{\exp\left\{z\log n-z\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k}\right\}}{z\prod\limits_{k=1}^n\left(1+\frac{z}{k}\right)\mathrm{e}^{-z/k}},\end{aligned}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma.$$

(γ 称为Euler常数, $\gamma=0.577\cdots$) 我们便有

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}=\mathrm{e}^{\gamma z}z\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}. \tag{6.4.10}$$

(6.4.10)式称为Weierstrass公式. 显然

$$z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}$$

是一个整函数, 记为$\varphi(z)$, 它恰以$z = 0, -1, -2, \cdots$为零点, 由此可知$\Gamma(z) \neq 0$. 由Weierstrass公式(6.4.10), 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(-z)} = -\mathrm{e}^{-\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{z/n},$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{-z}{\pi}\sin \pi z.$$

又由(6.4.2)式可知, $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, 所以

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{6.4.11}$$

(6.4.11)式称为余元公式. 特别地, 令$z = 1/2$, 有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{6.4.12}$$

另一方面, 由

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-1/2} dt = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx,$$

可得到熟悉的概率积分

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{6.4.13}$$

现在讨论当$z \to \infty$时, $\Gamma(z)$的渐近性质. 设

$$p_1(x) = x - [x] - 1/2,$$

其中$[x]$是不超过x的最大整数. 若$f(x)$是连续可微的函数$(0 \leqslant x < \infty)$, 那么下面的Euler求和公式成立:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n f'(x)p_1(x)dx. \tag{6.4.14}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^{k} f'(x)p_1(x)dx &= \int_{k-1}^{k} f'(x)\left(x - k + \frac{1}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}[f(k) + f(k-1)] - \int_{k-1}^{k} f(x)dx,\end{aligned}$$

对k从1到n求和, 可得

$$\int_0^n f'(x)p_1(x)dx=\sum_{k=0}^n f(k)-\frac{1}{2}[f(n)+f(0)]-\int_0^n f(x)dx,$$

即

$$\sum_{k=0}^n f(k)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}[f(n)+f(0)]+\int_0^n f'(x)p_1(x)dx.$$

令$f(x)=\log(x+z)$, 其中z满足条件: $-\pi+\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta(\delta>0)$, 则有

$$\begin{aligned}&\log z(z+1)\cdots(z+n)\\=&\int_0^n\log(t+z)dt+\frac{1}{2}[\log(z+n)+\log z]+\int_0^n\frac{p_1(t)}{t+z}dt\\=&z\log(n+z)-n-z\log z+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(z+n)+\\&\frac{1}{2}\log z+\int_0^n\frac{p_1(t)}{t+z}dt.\end{aligned}\tag{6.4.15}$$

若取$z=1$, 则有

$$\log n!=n\log(n+1)-n+\frac{1}{2}\log(1+n)+\int_0^n\frac{p_1(t)}{1+t}dt.\tag{6.4.16}$$

将(6.4.15)和(6.4.16)式相减得到

$$\begin{aligned}\log\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}=&z\log(n+z)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(z+n)-z\log z-\\\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(1+n)+&\frac{1}{2}\log z+\int_0^n\frac{p_1(t)}{1+t}dt-\int_0^n\frac{p_1(t)}{z+t}dt-z\log n.\end{aligned}$$

注意到

$$z\log(z+n)=z\log n+z\log\left(1+\frac{z}{n}\right)=z\log n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n+z}{n+1}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)=z-1+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

从Gauss公式(6.4.9)可得

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-(z-1)+\int_0^\infty\frac{p_1(t)}{1+t}dt-\int_0^\infty\frac{p_1(t)}{t+z}dt.\tag{6.4.17}$$

设$p_2(s)=\int_0^s p_1(t)dt$, 则$p_2(s)$是周期为1的连续函数, $-1/8\leqslant p_2(s)\leqslant 0$, 且$p_2'(s)=p_1(s)$. 由分部积分公式(其中$z=x+\mathrm{i}\,y$),

$$\left|\int_0^\infty\frac{p_1(t)}{t+z}dt\right|=\left|\int_0^\infty\frac{p_2(t)}{(t+z)^2}dt\right|\leqslant\frac{1}{8}\int_0^\infty\frac{dt}{(t+x)^2+y^2}.$$

所以

$$\left|\int_0^\infty \frac{p_2(t)}{(t+z)^2}dt\right| \leqslant \frac{1}{8|y|}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{x}{|y|}\right)\right) \leqslant \frac{\pi}{8|y|} \quad (y \neq 0). \tag{6.4.18}$$

由于$0 \leqslant t\left(\frac{\pi}{2}-\arctan t\right) \leqslant 1 \quad (t \geqslant 0)$, 所以

$$\left|\int_0^\infty \frac{p_2(t)}{(t+z)^2}dt\right| \leqslant \frac{1}{8x} \quad (x>0).$$

为了求出(6.4.17)式中的第一个积分值, 在(6.4.17)式中令$z=\mathrm{i}y$并取实部, 得到

$$1+\int_0^\infty \frac{p_1(t)}{1+t}dt = \log|\Gamma(\mathrm{i}y)| + \frac{1}{2}\log y + \frac{\pi}{2}y + \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{p_1(t)dx}{t+\mathrm{i}\,y}. \tag{6.4.19}$$

令$y \to \infty$, 结合(6.4.18)式可得

$$1+\int_0^\infty \frac{p_1(t)}{1+t}dt = \lim_{y\to+\infty}\left(\log|\Gamma(\mathrm{i}y)| + \frac{1}{2}(\log y + \pi y)\right). \tag{6.4.20}$$

另一方面, 由余元公式(6.4.11)得到

$$\Gamma(\mathrm{i}y)\Gamma(-\mathrm{i}y) = \frac{\pi}{y\sin\pi y\mathrm{i}}.$$

同时注意到$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z})$, 故有

$$|\Gamma(\mathrm{i}y)|^2 = \frac{2\pi}{y(\mathrm{e}^{\pi y}-\mathrm{e}^{-\pi y})},$$

则

$$\log|\Gamma(\mathrm{i}y)| + \frac{1}{2}\log y + \frac{\pi}{2}y = \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1-\mathrm{e}^{-2\pi y}).$$

故从(6.4.20)式有

$$1+\int_0^\infty \frac{p_1(t)}{1+t}dt = \frac{1}{2}\log(2\pi). \tag{6.4.21}$$

最后从(6.4.17) (6.4.18)和(6.4.21)式得到

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \int_0^\infty \frac{p_2(t)}{(t+z)^2}dt, \tag{6.4.22}$$

及

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (|\arg z| \leqslant \pi-\delta), \tag{6.4.23}$$

其中大O常数只与δ有关. 这两个式子均可称为Stirling(斯特林)公式. 由(6.4.23)式可以看出, $|\Gamma(z)| = O(\mathrm{e}^{|z|\log|z|})$, 并且这个阶是精确的.

定义6.4.2 (Beta 函数的定义) 称形如

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad (a,b\in\mathbb{R}) \tag{6.4.24}$$

的函数为Beta 函数, 其中 $\mathrm{Re}\, a>0, \mathrm{Re}\, b>0$. Γ函数和Beta 函数合称 Euler 积分.

利用积分的收敛性不难看到, Beta 函数的收敛域为$\mathrm{Re}\, a>0$, $\mathrm{Re}\, b>0$. 对于Γ函数和Beta 函数, 我们有如下定理.

命题6.4.3 对 $\mathrm{Re}\, a>0$, $\mathrm{Re}\, b>0$,

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{6.4.25}$$

证明 首先设$\mathrm{Re}\, a>1$, $\mathrm{Re}\, b>1$. 在

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}dx$$

中作变换$x=ty$ $(t>0)$ 得

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^\infty y^{a-1}\mathrm{e}^{-ty}dy \quad (t>0),$$

在上式中用$a+b$代换a, $1+t$代换t得到

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^\infty y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}dy,$$

再将上式两边同乘以t^{a-1}, 然后对t从0到∞积分得到

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}dy\right)dt.$$

等式左边积分

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=B(a,b),$$

这只需对$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$作变元替换$x=\dfrac{t}{1+t}$即可. 等式右边, 由Fubini 定理可以交换积分顺序

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}dydt=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}dtdy\\&=\int_0^\infty y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy=\Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}\mathrm{e}^{-y}dy=\Gamma(a)\Gamma(b).\end{aligned}$$

对于一般的$\mathrm{Re}\, a>0$, $\mathrm{Re}\, b>0$的情形, 由上面的结论, 有

$$B(a+1,b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

由Γ及B的递推公式, 有

$$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}=\frac{a\Gamma(a)b\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)},$$

且

$$(a+b+1)B(a+1,b+1)=aB(a,b+1)=\frac{ab}{a+b}B(a,b).$$

由此立即推得(6.4.25)式成立. 证毕. □

我们熟知当$x=\mathrm{Re}\ z\geqslant x_0>1$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$是一致收敛的. 注意到

$$\left|n^{-z}\right|=\left|\mathrm{e}^{-z\log n}\right|=n^{-x},$$

这样级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$在半平面$\mathrm{Re}\, z>1$中内闭一致收敛.

定义6.4.4 (Riemann zeta 函数的定义) 函数

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z} \tag{6.4.26}$$

称为 Riemann zeta 函数, 其中$\mathrm{Re}\ z>1$.

当$\mathrm{Re}\, z>1$时, Γ函数有积分表示(6.4.2)式, 用nt代换t,

$$n^{-z}\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

两边对n求和, 应用$\zeta(z)$的记号, 得

$$\zeta(z)\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}dt}{\mathrm{e}^t-1}=\int_{-\infty}^{\infty}g_z(s)ds, \tag{6.4.27}$$

其中

$$g_z(\zeta)=\frac{\mathrm{e}^{z\zeta}}{\exp\{\mathrm{e}^{\zeta}\}-1}.$$

因为当$x>1$时, 上述积分绝对收敛, 这保证了积分与求和可以交换顺序.

设$R>0$, $D_R=\{\zeta:0<\mathrm{Im}\ \zeta<2\pi,\mathrm{Re}\ \zeta>-R\}$是宽为$2\pi$ 的半带形, 其边界∂D_R 由射线$L_{1,R}$的反向$L_{1,R}^{-}$, 线段I_R的反向和射线$L_{2,R}$组成,其中$L_{1,R}=\{s+2\pi\mathrm{i}:s\geqslant -R\}$, $L_{2,R}=\{s:s\geqslant -R\}$和$I_R=\{-R+\mathrm{i}\,t:0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$.函数

$$F_R(z)=\int_{\partial D_R}g_z(\zeta)d\zeta$$

是z 的整函数, 不依赖$R>0$且满足

$$F_R(z)=-\mathrm{i}\int_0^{2\pi} g_z(-R+\mathrm{i}\,t)dt+(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,z})\int_{-R}^{\infty} g_z(s)ds.$$

从而函数

$$F(z)=\lim_{R\to\infty} F_R(z)$$

是z 的整函数, 满足$F(n)=0,\ n=2,3,\cdots$ 和$F(1)=-2\pi\mathrm{i}$ 且当$\mathrm{Re}\ z>1$时, 有

$$F(z)=(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,z})\int_{-\infty}^{\infty} g_z(s)ds.$$

由(6.4.27)式, 有$F(z)=(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,z})\zeta(z)\Gamma(z)$. 而$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\,\pi z}$, 所以当$\mathrm{Re}\ z>1$时,

$$F(z)=\frac{-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi z\mathrm{i}}\zeta(z)}{\Gamma(1-z)}. \tag{6.4.28}$$

因此函数$\zeta(z)$可以从半平面$\mathrm{Re}\,z>1$解析开拓为复平面上的亚纯函数. 对解析开拓后的函数$\zeta(z)$, $z=1$是$\zeta(z)$的唯一一阶极点, 其留数为1. 现可以计算$\zeta(z)$在零及负整数处的值$\zeta(-n)$. 事实上, 由(6.4.28)式,

$$\zeta(-n)=\frac{(-1)^{n+1}n!F(-n)}{2\pi\mathrm{i}}=\frac{(-1)^n n!}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{R\to\infty}\mathrm{i}\int_0^{2\pi} g_{-n}(-R+\mathrm{i}\,t)dt,$$

从中可以看出

$$\zeta(-n)=\frac{(-1)^n n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{dz}{(\mathrm{e}^z-1)z^{n+1}}\quad(0<\varepsilon<1)$$

是函数$\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}$在$z=0$处的Laurent 展式中$z^n$的系数乘以$(-1)^n n!$. 再回顾一个已知的Laurent展式

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}, \tag{6.4.29}$$

式中的B_k称为伯努利(Bernoulli)常数.可以算出其中的几项, 例如

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\quad \zeta(-2n)=0,\quad \zeta(-2n+1)=(-1)^n\frac{B_n}{2n},$$

其中n为正整数. 零点$z=-2,-4,-6,\cdots$ 称为ζ 函数的平凡零点.

下面证明Riemann zeta 函数ζ满足如下函数方程,

$$\zeta(z)=2^z\pi^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\,\Gamma(1-z)\zeta(1-z). \tag{6.4.30}$$

事实上, 设

$$\Omega_{R,n}=\{\zeta:0<\mathrm{Im}\ \zeta<2\pi,-R<\mathrm{Re}\ \zeta<\ln(2n\pi+\pi)\}$$

是宽为2π, 长为$\ln(2n\pi+\pi)+R$ 的长方形$(R>0,n\in\mathbb{N}^+)$. 考虑如下函数

$$F_{R,n}(z)=\int_{\partial\Omega_{R,n}}g_z(\zeta)d\zeta.$$

在闭曲线$\partial\Omega_{R,n}$内, 每一点$\ln(2k\pi)+\mathrm{i}\,(\pi\pm\frac{\pi}{2})\ \ (1\leqslant k\leqslant n)$是$g_z(\zeta)$的一阶极点, 在这些极点处, 函数$g_z(\zeta)$ 具有留数

$$\left(2k\pi\mathrm{e}^{(\pi\pm\frac{\pi}{2})\mathrm{i}}\right)^{z-1}.$$

由留数定理,

$$\begin{aligned}F_{R,n}(z)&=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(2k\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}\right)^{z-1}+\left(2k\pi\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{2}}\right)^{z-1}\right)\qquad(6.4.31)\\&=-4\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\,z}\sin\frac{\pi z}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k\pi)^{z-1}.\end{aligned}$$

不难判断, 在$C_n=\{\ln(2n\pi+\pi)+\mathrm{i}\,t:0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$上, $|\exp(\mathrm{e}^{\zeta})-1|\geqslant\frac{1}{2}$. 事实上, 设

$$\varphi(t)=|\exp\{(2n+1)\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\}-1|,t\in\mathbb{R},$$

则

$$\varphi(t+2\pi)=\varphi(t),\ \ \varphi(-t)=\varphi(t)\ \ 和\ \ \varphi(\pi-t)=\exp\{-(2n+1)\pi\cos t\}\varphi(t).$$

于是

$$\min\{\varphi(t):t\in\mathbb{R}\}=\min\left\{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2}\right):t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

而当$2t(2n+1)\geqslant\log 2,t\leqslant\frac{\pi}{2}$时, 有$-(2n\pi+\pi)\sin t\leqslant-\log 2$, 从而

$$\varphi\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=|1-\exp\{(2n+1)\pi(-\sin t+\mathrm{i}\ \cos t)\}|\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

而当$0\leqslant 2t(2n+1)\leqslant\log 2$时, 有

$$(2n+1)\pi(1-\cos t)=2(2n+1)\pi\sin^2\frac{t}{2}\leqslant\frac{\pi}{2},$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi\left(t+\frac{\pi}{2}\right)&=|1+\exp\{(2n+1)\pi(-\sin t+\mathrm{i}\,(\cos t-1))\}|\\&\geqslant 1+\exp\{-(2n+1)\pi\sin t\}\cos\{(2n+1)\pi(\cos t-1)\}\geqslant 1.\end{aligned}$$

在$C_n = \{\ln(2n\pi+\pi)+\mathrm{i}\,t : 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$上,

$$|\mathrm{e}^{z\zeta}| \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)^x \exp\{2\pi|y| + x\log(2\pi)\},$$

所以

$$\left|\int_{C_n} \frac{\mathrm{e}^{z\zeta}d\zeta}{\exp(\mathrm{e}^{\zeta})-1}\right| \leqslant 4\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^x \exp\{2\pi|y| + x\log(2\pi)\}.$$

如果$x = \mathrm{Re}\ z < 0$, 则当$n \to \infty$时, 上式积分值趋向于0, (6.4.31)式的左端将趋向于

$$F_R(z) = F(z) = \frac{-2\pi\mathrm{i}\,\zeta(z)\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\,z}}{\Gamma(1-z)},$$

此时, 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{z-1}$$

收敛于$\zeta(1-z)$, 所以令$n\to\infty$, 从(6.4.31)式, 可得(6.4.30)式在$x = \mathrm{Re}\,z < 0$ 的条件下成立. 因为复平面上的两个亚纯函数在一个非空的开集上相等, 由解析函数的唯一性定理, 这两个函数必恒等, 所以(6.4.30)式对一切z成立.

由函数方程(6.4.30) 可求$\zeta(2n)$. 事实上, 由于

$$2\sin\frac{\pi z}{2}\cos\frac{\pi z}{2}\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi,$$

所以

$$\begin{aligned}\zeta(2n) &= 2^{2n}\pi^{2n-1}\zeta(1-2n)\lim_{z\to 2n}\left(\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\right)\\ &= 2^{2n}\pi^{2n-1}\frac{(-1)^n B_n}{2n}\frac{(-1)^n\pi}{2(2n-1)!} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2nB_n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

下面证明Legendre 加倍公式

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{6.4.32}$$

事实上, 令

$$\psi(z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)},$$

由于

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right),$$

则

$$\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

有

$$\left(\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right)' = 0,$$

所以存在两个常数α和β, 使得$\psi(z) = \beta \mathrm{e}^{\alpha z}$. 由于

$$\psi(1) = \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \psi(2) = \frac{\Gamma(2+1/2)}{\Gamma(4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{8},$$

从而$\mathrm{e}^{-\alpha} = 4, \beta = 2\sqrt{\pi}$. 因此$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}2^{-2z}\Gamma(2z)$. 这证明了(6.4.32)式.

命题6.4.5 Riemann zeta 函数ζ在半平面 Re $z > 1$上有 Euler乘积表示

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right), \tag{6.4.33}$$

其中p_n表示所有可能满足$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$的素数.

证明 如果Re $z > 1$, 则

$$\zeta(z)(1-2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^z} = \sum_{m\in\Theta_1}\frac{1}{m^z},$$

其中Θ_1 是所有正奇整数的集合, 即不被2整除的正整数集合. 同理

$$\zeta(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z}) = \sum_{m\in\Theta_2}\frac{1}{m^z},$$

其中Θ_2 是所有不被2和3 整除的正整数集合. 更一般地

$$\zeta(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z})\cdots(1-p_N^{-z}) = \sum_{m\in\Theta_N}\frac{1}{m^z}, \tag{6.4.34}$$

其中Θ_N 是所有不被$2, 3, \cdots, p_N$整除的正整数集合. 我们知道素数有无穷多个. 事实上, 如果素数只有有限多个$2 = p_1, p_2, \cdots, p_N \quad (2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_N)$, 由素数的定义, $p_N!+1$能被$p_1, p_2, \cdots, p_N$ 中的一个数整除, 于是1 能被$p_1, p_2, \cdots, p_N$ 中的一个数整除, 这是不可能的.

最后, 在(6.4.34)式中令$N \to \infty$, 得到

$$\zeta(z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right) = 1.$$

命题6.4.5证毕. □

从Euler乘积可知, $\zeta(z)$ 在半平面Re $z > 1$内没有零点. 根据这一点和函数方程(6.4.30)知, 在半平面Re $z < 0$内的零点均是平凡零点. 换言之, $\zeta(z)$的所有非平凡零点均在带形$0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1$内. 著名的Riemann猜想(见文献[15])称$\zeta(z)$的所有非平凡零点均在临界线Re $z = \frac{1}{2}$上. 这个猜测到现在既没有证明, 也没有反例.

习 题 六

1. 设$\mathbb{C}_+ = \{z = x + \mathrm{i}y : y > 0\}$是上半平面. 如果$f(z)$在$\mathbb{C}_+$内单叶解析, $f(\mathbb{C}_+) \subseteq D(0,1) = \{w : |w| < 1\}$, 在闭上半平面$\overline{\mathbb{C}}_+$中单叶连续且把实轴$\mathbb{R}$映射到单位圆周$|w| = 1$. 证明$f(z)$一定是分式线性函数.

2. 证明: 如果整函数$f(z)$在实轴上取实值, 在虚轴上取虚值, 那么$f(z)$是奇函数.

3. 证明: 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径$0 < R < \infty$, 其和函数$f(z)$在收敛圆周$|z| = R$上有一阶极点$z_0$, 无其他奇点, 则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = z_0$.

4. 证明: 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径$0 < R < \infty$, 其和函数$f(z)$在收敛圆周$|z| = R$上有极点, 则该幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在收敛圆周$|z| = R$上处处发散.

5. 设幂级数$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径为1, 幂级数

$$F(w) = f\left(\frac{w}{1+w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的收敛半径为R.证明:

(1) $R \geqslant \frac{1}{2}$, 且-1是$f(z)$的奇点的充要条件是$R = \frac{1}{2}$;

(2) 如果$\frac{1}{2} < R < 1$, 则$f(z)$能解析开拓到圆盘$D(\frac{-R^2}{1-R^2}, \frac{R^2}{1-R^2})$;

(3) 如果$R = 1$, 则$f(z)$能解析开拓到半平面$\{z : \mathrm{Re}\ z < \frac{1}{2}\}$;

(4) 如果$1 < R < +\infty$, 则$f(z)$能解析开拓到

$$\mathbb{C} \setminus \overline{D\left(\frac{R^2}{R^2-1}, \frac{R^2}{R^2-1}\right)};$$

(5) 如果$R = +\infty$, 则$f(z)$能解析开拓到$\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

6. 证明: 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$的收敛半径为1, 其收敛圆周$|z| = 1$上每点都是奇点.

7. 证明: 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3^n}}{3^n}$的收敛半径为1, 其收敛圆周$|z| = 1$上每点都是奇点.

8. 构造一个整函数$f(z)$ 使得$f(z)$的零点集是$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$且这些零点均为简单零点.

9. 设$f(z)$是一个整函数, 且对任意的$a \in \mathbb{C}$存在正整数$n = n(a)$ 使得$f^{(n)}(a) = 0$, 证明$f(z)$是一个多项式.

10. 设$f(z)$是一个整函数, 且$f(z)$在复平面$\mathbb{C}$上满足

$$|f(z)| \leqslant A + B|z|^k,$$

其中A, B 和k 是正常数. 证明$f(z)$是一个次数不超过k的多项式.

11. 设$f(z)$是一个不恒为常数的整函数, $f(z)$不取复数值α, 证明存在复数列$\{z_n\}$, 使得$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$.

12. 证明: 对于任意固定的x, 当$|y| \to +\infty$时,

$$|\Gamma(x + \mathrm{i}\, y)| \sim \sqrt{2\pi} \exp\left\{-\frac{\pi}{2}|y| + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log|y|\right\}.$$

13. 证明:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right),$$

$$\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

14. 证明:对$\mathrm{Re}\, z > 0$, 有

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)dt.$$

15. 证明: Legendre 加倍公式的推广$(n = 2, 3, \cdots)$

$$(2\pi)^{(n-1)/2} n^{-nz+1/2}\Gamma(nz) = \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right).$$

16. 证明: 当$\mathrm{Re}\ \alpha < 1$且α 不是整数时, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} = 2^{-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

17. 证明: 当$0 < \mathrm{Re}\ z < 1$时,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt.$$

18. 证明: 函数

$$\xi(z) = \frac{1}{2}z(z-1)(\pi)^{-z/2}\zeta(z)\Gamma(z/2)$$

是整函数, 且满足函数方程$\xi(1-z) = \xi(z)$.

19. 证明: 函数$(1 - 2^{1-z})\zeta(z)$ 是整函数, 且当$\mathrm{Re}\ z > 1$时,

$$(1 - 2^{1-z})\zeta(z) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^z}.$$

参考文献

[1] 方企勤. 复变函数教程. 北京: 北京大学出版社, 1996.

[2] 张南岳, 陈怀惠. 复变函数论选讲. 北京: 北京大学出版社, 1995.

[3] A.H.马库雪维奇. 解析函数论. 黄正中, 等译. 北京:高等教育出版社, 1957.

[4] 李锐夫, 戴崇基, 宋国栋. 复变函数续论.北京:高等教育出版社,1989.

[5] 龚升. 简明复分析. 北京: 北京大学出版社, 1999.

[6] 钟玉泉. 复变函数论(第二版). 北京: 高等教育出版社, 1992.

[7] 刘书琴. 单叶函数. 西安: 西北大学出版社, 1988.

[8] 钟玉泉. 复变函数学习指导书.北京: 高等教育出版社, 1996.

[9] Lars V. Ahlfors. Complex Analysis(Third Edition). 北京:机械工业出版社, 2004.

[10] 余家荣, 路见可. 复变函数专题选讲. 北京: 高等教育出版社, 1993.

[11] 余家荣. 复变函数(第四版). 北京: 高等教育出版社, 2007.

[12] V. Ahlfors. *Complex Analysis*(Third Edition).北京:机械工业出版社, 2004.

[13] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* Third edition. McGraw-Hill Publishing, New Delhi, 1987.

[14] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis, Princeton Lectures in Analysis II.* Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.

[15] E. C. Titchmarsh. *The Theorey of The Riemann Zeta-Function* . Second edition revised by D.R. Heath-Brown. Oxford Unversity Press , Oxford, 1986.

[16] C. Pommerenke. *Univalent Functions.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen Press, Princeton, 1975.

索　引