25 秋- 常微分方程期中（回忆版）

November 30, 2025

---

1. (20') 求解初值问题

$$\frac{dy}{dx} = Ax + F(x),\ y(0) = (1,1,1)^T$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix},\ F(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (20') 求初值问题的解：

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 1 \\ 0 & \sin x & 1 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. (15') 求方程通解：

$$x(yy'' + (y')^2) + 3yy' = 2x^3$$

4. (15') 求通解，并求出可能的奇解且说明理由.

$$\frac{y^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{3^2} = 1$$

5. (10') 求

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{2}}$$

的通解，并作出积分曲线族的草图。如有奇解，求出并说明理由。

6. (20')

(a) 设 $y = \varphi(x)$ 满足

$$y' + a(x)y \leqslant 0,\ (x \geqslant 0)$$

证明

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(0)e^{-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s},\ \forall x \geqslant 0$$

(b) 设 n 欧氏空间中的向量 γ 满足 $(A-\lambda I_n)^k\gamma=0$，$A$ 为 n 阶实方阵, k 为正整数. 求 $e^{xA}\gamma$

7. 求方程通解

   (a) $x\dfrac{dy}{dx}-y=x\tan\dfrac{y}{x}$

   (b) $e^y\mathrm{d}x-x(2xy+e^y)\mathrm{d}y=0$

注：满分 120 分，超过 100 分按 100 分计.