

24 秋- 数学分析 1 (回忆版)

February 10, 2025

1. $\{x_n\}$ 是无穷小量, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n + 4}{3x_n + 2} = \frac{2}{3}$
2. 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, $\{x_n\}$ 是否为 Cauchy 列? 若不是请给出反例
3. 求 $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ 的 n 阶导数
4. 求不定积分
 - (a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+x}} dx$
 - (b) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
5. A 是数集, 记 $y = \sup A \notin A$, 求证存在单调递增数列 $\{x_n\} \subset A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$
6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 n 个正数, 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 证明 $[0, 1]$ 内存在一组互不相同的点 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1$
7. 证明有界函数 $f \in R[a, b]$ 的充要条件是 $\forall \varepsilon, \eta > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分划 P , 是振幅不小于 η 的子区间长度之和小于 ε

附加题

1. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微, 证明对每个 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f(b)}{b-a}(x-a) + \frac{f(a)}{a-b}(x-b) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$