

北京师范大学 2024 ~ 2025 学年第二学期期中考试试卷A卷

课程名称: 数学分析II 任课老师姓名: _____

卷面总分: 100 分 考试时长: 100 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系): _____ 专业: _____ 年级: _____

姓名: _____ 学号: _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

(注: (1) 所有记号均同课本; (2) 不得直接引用书中的习题及课外书; (3) 本试卷共6题(含1附加题), 总计110分, 得分上限为100; (4) 本试卷共1页.)

一. (44分) (1) 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(\sin x) dx$.

(2) 利用定积分求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right)$.

(3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin t)^{1/t} dt$.

(4) 求广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

二. (14分) 判断 $\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right] dx$ 的敛散性.

三. (14分) 计算曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 绕 x 轴一周所得旋转曲面的面积.

四. (14分) 设 f 为 $[0, 1]$ 上递减连续函数. 证明: 对 $\alpha \in (0, 1)$, $\int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx$.

五. (14分) (i) 设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 证: 若 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(ii) 试给出反例说明若无一致连续条件, 上述结论未必成立.

六. (附加题, 10分) 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$