Probability-2021 期末测试 II

注意事项：

- 闭卷测试。禁止使用计算器、手机等电子设备。请提前静音手机。
- 间隔座位。邻桌无人。
- 测试时间 100 分钟：10：00 – 11：40 am. 不可提前交卷。
- 学号姓名。答题纸上明确标注学号和姓名。请将学生卡作为准考证放在桌面左上角，以供查验。

1 Version A

Exercise 1 基本题

1. 请复述随机变量的定义。
2. 请复述 *Borel-Cantelli* 引理。
3. 请完整写出强大数定律。
4. 请完整写出中心极限定理。

Exercise 2 假设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一列**非负**随机变量，且存在 $0 < \alpha < \beta < \infty$ 使得

$$\mathbf{E}[X_n^\alpha] \to 1, \quad \mathbf{E}[X_n^\beta] \to 1.$$

（注意：可以承认并使用问题 $1, \cdots, k$ 的结果来回答第 $k+1$ 题。）

1. 请证明 $\mathbf{E}[X_n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}] \to 1$.（提示：可使用 *Jensen* 不等式或者 *Cauchy-Schwartz* 不等式）
2. 请证明 $X_n^{\alpha/2} - X_n^{\beta/2}$ 依概率收敛到零。
3. 请证明 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 的紧性 *(Tightness)*，即
$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n| \geq M) = 0.$$
4. 如果一个子列 $\{X_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 依分布收敛到 X，那么 $\mathbf{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$。
5. 请证明 *(*提示：可用 *Cauchy-Schwartz* 不等式*)*
$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n^\alpha; X_n \geq M] = 0$$
6. 如果一个子列 $\{X_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 依分布收敛到 X，那么
   (a) 对于任意的固定常数 $M > 0$，请证明 $\mathbf{E}[(X_{n_k} \wedge M)^\alpha] \to \mathbf{E}[(X \wedge M)^\alpha]$. *(*提示：*Helly-Bray* 定理*)*

(b) 请证明 $\mathbf{E}[X^\alpha] = 1$. (提示：问题 5)

7. 如果一个子列 $\{X_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 依分布收敛到 X，那么 $X \overset{a.s.}{=} 1$。

8. 问题 2 和问题 7 说明 X_n 依分布收敛于 1。基于此，请证明 X_n 依**概率**收敛到 1。

Exercise 3 连续型随机向量计算题：令 X 和 Y 为独立同分布的随机变量，其分布为标准正态分布。令 (R, Θ) 为 (X, Y) 的极坐标，即

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, X = R\cos(\Theta), Y = R\sin(\Theta).$$

1. 请计算 (R, Θ) 的联合密度函数，并证明 R 与 Θ 独立。
2. 请计算 $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布。
3. 请证明 R 与 Z 是独立的。
4. 请计算 $\mathbf{E}[R^2|X = x]$.

Exercise 4 假设 X 和 Y 是独立的随机变量，使得 X 满足参数为 α 的几何分布，Y 满足参数为 β 的几何分布。

1. 请计算 $X + Y$ 的母函数 (*generating function*)。
2. 请证明

$$\mathbf{P}(X + Y = z) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}\{(1-\beta)^{z-1} - (1-\alpha)^{z-1}\}, \forall z \geq 2.$$

Exercise 5 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，其分布均为参数为 1 的指数分布。其对应的单调增的顺序统计量为 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$.

1. 请计算顺序统计量的联合分布密度函数。
2. 请计算 $X_{(k)}$ 的边缘分布密度函数。
3. 令 $Y_1 = nX_{(1)}, Y_r = (n+1-r)(X_{(r)} - X_{(r-1)}), \forall 1 < r \leq n$. 请证明 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的独立性并计算它们的联合分布密度。
4. 请计算 $\mathbf{E}[X_{(n)} - X_{(n-1)}|X_{(1)}]$. （提示：问题 3）
5. 请计算 $\mathbf{E}[X_{(n)}|X_{(1)}]$.

备注：

- 对于自然数取值的随机变量 X，其母函数定义为

$$g_X(s) := \mathbf{E}[s^X], \forall s \in [0, 1].$$

- Cauchy-Schwartz 不等式: 对于任意的随机变量 X 和 Y, 对于满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的正常数 p, q,

$$\mathbf{E}[|XY|] \leq \mathbf{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbf{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}.$$

2 Version B

Exercise 6 基本题

1. 请复述随机变量的定义。
2. 请复述分布函数的三个基本性质。
3. 请复述 *Helly-Bray* 定理。
4. 请完整写出强大数定律，中心极限定理。

Exercise 7 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是单调增的非负随机变量序列，且存在 $\alpha > 0, 0 \leq \beta < 2\alpha, a, B \in (0,\infty)$ 使得，

$$\frac{\mathbf{E}[X_n]}{n^\alpha} \to a \in (0,\infty); \quad Var(X_n) \leq Bn^{2\beta},$$

1. 请证明 $\forall \delta > 0$,
$$\mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E}[X_n]| \geq \delta n^a) \to 0.$$
2. 由此推出
$$\frac{X_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\mathbf{P}} a.$$
3. 设 $\gamma = \frac{2}{2\alpha-\beta}$ 且 $n_k = \lfloor k^\gamma \rfloor$。请用 *Borel-Cantelli* 引理证明
$$\frac{X_{n_k}}{n_k^\alpha} \xrightarrow{a.s.} a.$$
4. 请利用 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 的单调性证明
$$\frac{X_n}{n^a} \xrightarrow{a.s.} a.$$

Exercise 8 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一列随机变量。请证明

1. 若 X_n 依概率收敛到 X，那么 X_n 依分布收敛到 X.
2. 若 X_n 依分布收敛到常数 1，那么 X_n 依概率收敛到 1.
3. 若 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一个列独立的随机变量，那么 $\sup_n X_n < \infty$, *a.s.* 当且仅当 $\sum_n \mathbf{P}(X_n > A) < \infty$ 对于某个实数 A 成立.

Exercise 9 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，其分布均为参数为 2 的指数分布。其对应的单调增的顺序统计量为 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$.

1. 请计算顺序统计量的联合分布。
2. 请计算 $X_{(k)}$ 的边缘分布。

3. 令 $Y_1 = nX_{(1)}, Y_r = (n+1-r)(X_{(r)} - X_{(r-1)}), \forall 1 < r \le n$. 请证明 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的独立性。

4. 请计算 $\mathbf{E}[X_{(n)} - X_{(n-1)} | X_{(1)}]$. (提示：可以使用 3 的结论。)

5. 请计算 $\mathbf{E}[X_{(n)} | X_{(1)}]$.

Exercise 10 假设 X 是一个连续随机变量，且满足期望为 $\mu = 0$, 中位数为 m, 方差为 $\sigma^2 = 1$。中位数满足 $\mathbf{P}(X \ge m) \ge \frac{1}{2}$ 且 $\mathbf{P}(X \le m) \ge \frac{1}{2}$。那么，

$$(\mu - m)^2 \le \sigma^2.$$

1. 我们采用反证法。不妨假定 $m > 1$。那么

$$\mathbf{E}[X; X \ge m] \ge 1/2 \text{ 且} \mathbf{E}[X; X < m] \le -1/2$$

2. 进一步，证明 $\mathbf{E}[X^2; X \ge m] \ge 1/2$ 且 $\mathbf{E}[X^2; X < m] \le 1/2$。

3. 请证明 $\mathbf{E}[X; X < m] = -1/2$（提示：*Cauchy-Schwartz* 不等式）。

4. 请证明 $\mathbf{E}[X; X \ge m] = 1/2$ 且由此推出矛盾。

备注:

- 对于自然数取值的随机变量 X，其母函数定义为

$$g_X(s) := \mathbf{E}[s^X], \forall s \in [0,1].$$

- Cauchy-Schwartz 不等式: 对于任意的随机变量 X 和 Y, 对于满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的正常数 p, q,

$$\mathbf{E}[|XY|] \le \mathbf{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbf{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}.$$