

北京师范大学 2019 ~ 2020 学年第一学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 偏微分方程 任课老师姓名:

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院(系): _____ 专业: _____ 年级: _____

姓名: _____ 学号: _____

题号	一	二	三	四	总分
得分					

阅卷老师(签字): _____

一. 填空题(16分):

经过近300年的发展, 偏微分方程紧密联系 (1)、(2) 等方面的需要, 对一阶方程和二阶线性方程的适定性(即解的 (3)、(4) 和 (5)) 已经有了系统的了解, 形成了广泛使用的有效方法, 比如 (6)、(7) 和 (8) 等.

二. 简答题(18分):

1. 写出下列热传导方程Cauchy问题的线性叠加原理:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2. 对Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty, y > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

关于 x 进行Fourier变换, 写出得到的常微分方程初值问题.

3. 设 u 是弦振动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

的解, 求

$$\int_0^1 (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)) dx.$$

三. 计算题(54分):

1. 求解一阶线性偏微分方程Cauchy问题

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = u, \\ u(s, 3s) = 1 + s^2, \quad s > 0. \end{cases}$$

2. 化简二阶线性偏微分方程

$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (1 - \sin x - \cos x) u_y = 0,$$

并求出它的通解.

3. 求解Laplace方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, 1) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 是已知函数.

四. 证明题(12分):

1. 设 u 是弦振动方程Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

的解, 其中 a 是一个正常数, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是光滑函数, 且当 $|x| \geq M$ 时, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$.

证明: 当 $|x| \geq M + at$ 时, $u(x, t) = 0$.

2. 已知 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 满足Poisson方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

试证: 对任意的 $x_0 \in \Omega$, 有

$$\frac{1}{2n} \min_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2 \leq u(x_0) \leq \frac{1}{2n} \max_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2.$$