北京师范大学 2020～2021 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：高等代数　　　　任课教师姓

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ✓　　开卷 □　　其他 □

院（系）：＿＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿＿　年级：＿＿＿＿

姓　名：＿＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿＿

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	第八题	总分
得分									

阅卷教师（签字）：＿＿＿＿＿＿

装

订

线

一．根据下列陈述，给出一个相应的例子，无需证明（10 分）答案不唯一.

1) 有限非交换群

对称群 S_3

2) 无限交换群

整数加群 $\mathbb{Z}$

3) 不含有乘法单位元 1 的环

$(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 所有偶数，加法乘法为一般整数上的加法、乘法.

4) 不是域的整环

$R[x]$，多项式环.

5) 特征非零的域

$\mathbb{Z}_p$，其中 p 为素数.

二．解下列线性方程组（10 分）

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = -2k \\ x_3 = k \end{cases} \quad k \in R$$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+3x_3=6 \\ x_1-x_2-3x_3=2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 无解

三．计算下列行列式（20 分）

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$

$$= acfh - adeh - bcfg + bdeg$$

(3) $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & \ddots & ⋰ & & \\ & & ⋰ & \ddots & & \\ & b & & & a & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$

若$a=0$，则等于$(-1)^n b^{2n}$

若$a\neq 0$，则等于 $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & 0 & a-\frac{b^2}{a} & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ 0 & & & & & a-\frac{b^2}{a} \end{vmatrix}$

$$= (a^2-b^2)^n.$$

综上，原式 $= (a^2-b^2)^n$

(4) $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$，其中$s_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

$$原式 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2$$

四．设p是一个素数，证明整系数多项式$f(x)=\sum_{i=0}^{p-1}x^i$在$\mathbb{Q}[x]$中是不可约的（10 分）

令 $x=y+1$，则 $g(y)=f(y+1)$ 和 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 同时可约或不可约.

而$y\cdot g(y)=(x-1)f(x)=x^p-1=(y+1)^p-1=y^p+C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}y$

$\Rightarrow g(y)=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}$

由于 $p\nmid 1$

$p\mid C_p^1,\cdots,C_p^{p-1}$ $\Rightarrow$ $g(y)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

$p^2\nmid C_p^{p-1}=p$

五．计算下列矩阵或行列式（10 分）

(1) 已知n阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc}1&1&1&\cdots&1&1&&&\\&1&1&\cdots&1&&1&&\\&&1&&&&&\ddots&\\&&&\ddots&&&&&\\&&&&1&&&&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&&&&1&-1&&\\&1&&&&1&-1&\\&&\ddots&&&&\ddots&-1\\&&&1&&&&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&-1&\\&&\ddots&-1\\&&&1\end{pmatrix}.$$

(2) 设三阶方阵A的伴随矩阵为A^*，且$|A|=\frac{1}{2}$，计算$|(3A)^{-1}-2A^*|$。

$$(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}=\frac{1}{3}\frac{A^*}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}A^*$$

则原式$=\left|\frac{2}{3}A^*-2A^*\right|=\left|-\frac{4}{3}A^*\right|=-\frac{64}{27}|A|^2=-\frac{16}{27}$

六．（10 分）设f是群G到群H之间的一个群同态，即$\forall a,b\in G, f(ab)=f(a)f(b)$。

我们定义f的**像**为H的子集 $\mathrm{Im}f=\{f(a)|a\in G\}$，$f$的**核**为$G$的子集 $\mathrm{Ker}f=\{a\in G|f(a)=e_H\}$，其中$e_H$为$H$中的单位元。证明

(1) $\mathrm{Im}f$是H的子群，$\mathrm{Ker}f$为G的子群。

$f(e_G)=e_H$

(2) f是群G到群H的同构当且仅当 $\mathrm{Im}f=H$, $\mathrm{Ker}f=\{e_G\}$，其中e_G为G中的单位元。

由 $f(ab)=f(a)f(b)$ 知 $f(a)=f(a^{-1})$.

<1> $\forall\ f(a).\ f(b)\in \mathrm{Im}f$

$f(a)f^{-1}(b)=f(a)f(b^{-1})=f(ab^{-1})\in \mathrm{Im}f$

$\forall a.\ b\in G$ s.t. $f(a)=f(b)=e_H$

则 $f(ab^{-1})=f(a)f(b^{-1})=f(a)(f(b))^{-1}=e_H e_H^{-1}=e_H$

故 $\mathrm{Im}f\leq H$, $\mathrm{ker}f\leq G$.

<2> 只需证明f单且满

f满 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}f=H$.

若 $f(a)=f(b)$

则 $f(a)(f(b))^{-1}=e_H$

$\Rightarrow f(ab^{-1})=e_H$

即 $a=b \Leftrightarrow ab^{-1}=e_G$

$\Leftrightarrow \mathrm{ker}f=e_G$.

若 $\mathrm{ker}f\neq\{e_G\}$

若 $a\in\mathrm{ker}f$. 则 $a\neq e_G$

$f(a)=f(e_G)=e_H$

则f不单.

七．设A为n阶方阵，其中$n\geq 2$，记A^*为A的伴随矩阵，证明

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当 } r(A)=n,\\ 1, & \text{当 } r(A)=n-1,\\ 0, & \text{当 } r(A)\leq n-2.\end{cases}$$

这里r表示矩阵的秩。(15 分)

① 若 $r(A)=n$. 则 $|A|\neq 0 \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow r(A^*)=n$

② 若 $r(A)\leq n-1$. 则 $|A|=0 \Rightarrow AA^*=|A|E=0 \Rightarrow r(A)+r(A^*)\leq n$

(2.1) 又 $r(A)=n-1$. 则 $A^*\neq 0 \Rightarrow r(A^*)\geq 1 \Rightarrow r(A^*)=1$

(2.2) 若 $r(A)<n-1$. 则 $A^*=0 \Rightarrow r(A^*)=0$.

八. 设$n \geq 2$，且$a_1, a_2, \cdots, a_n$为互不相同的整数，证明$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$不能分解成两个次数都大于零的整系数多项式乘积。(15 分)

若 $f(x) = g(x)h(x)$ 其中 $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且次数 ≥ 1.

则 $g(a_i)h(a_i) = -1$ $\quad 1 \leq i \leq n$

又 $g(a_i), h(a_i) \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ $g(a_i)$、$h(a_i)$ 只能等于 $\pm 1, \mp 1$.

$\Rightarrow$ $g(a_i) + h(a_i) = 0$ $\quad 1 \leq i \leq n$

考虑 $f'(x) = g(x) + h(x)$ 则 $\deg f' < \deg f$

但 $f'(a_i) = 0$ $\quad 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = -h(x)$

即 $f(x) = -g^2(x)$

左侧首项系数为 $1 > 0$，右侧首项系数 < 0，矛盾!