MATHEMATIK II FÜR INFORMATIKER

Sommersemester 2018

Rüdiger Zeller

Mitschrift von Dominique Wernado

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

Grundbegriffe und Beispiele

1.1 Definition (Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von der Menge $\mathbb{N}$ in eine Menge M (oft $M \in \mathbb{R}$.

a_n ist n-tes Folgenglied

n ist Index

Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1, sondern z.B. a_7.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder (a_n).

1.2 Beispiel

a) $a_n = c \forall n \in \mathbb{N}$ konstante Folge

b) $a_n = n$ *Zeichnung fehlt*

c) $a_n = (-1)^n n \in \mathbb{N}$ alternierende Folge

d) $a_n = \frac{1}{n}$ Nullfolge

e) Rekursive Folgen, z.B. Fibonacci-Folge

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = \underbrace{f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5$, usw.

f) Exponentielles Wachstum (z.B. von Bakterien)

Rekursiv: $x_{n+1} = q * x_n$ mit

n ist Generation

x_n ist Anzahl der Individuen in Generation n

q ist Wachstumsfaktor

x_0 ist Startpopulation

Explizit: $x_n = q^n * x_0$

z.B.: $x_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 40, x_4 = 80, ...$

g) Logistisches Wachstum

$x_{n+1} = r * x_n(1 - x_n)$

$r \in [o, 4]$ ist Wachstums - bzw. Sterbefaktor

$\underbrace{x_n}_{\in[0,1]}$ ist relative/prozentuale Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n + 1$ hängt ab von aktueller Populationsgröße x_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - x_n)$.

1.3 Definition (Beschränkte und alternierende Folgen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) heißt beschränkt $\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$

b) (a_n) heißt alternierend, falls die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiel

i) 1.2 a), c), d) und g) sind beschränkt. b) und e) sind unbeschränkt.

ii) 1.2 c) ist alternierend.

1.5 Definition (Konvergenz)

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängen darf), so dass

$|a_n - a| < \epsilon \forall n \geq \mathbb{N}$

Kurschreibweise: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$.

b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ oder $a_n \to a$.

c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.

d) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \to a$ bedeutet anschaulich:

Gibt mindestens eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieer weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ, desto größer muss i.A. N gewählt werden.

Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiel

a) $a_n = \frac{1}{n}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge:

- z.B.: Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist f¿ür $N > 10$

  $|a_n - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \underset{(N\leq n)}{\leq} \frac{1}{N} \underset{(N>10)}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$

- Allgemein (für beliebiges ϵ):

  Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$ $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \quad \forall n \geq N$.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{3\epsilon}$

$|a_n - a| = |\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{(n\leq N)}{\leq} \frac{1}{3N}$

c) N muss nicht optimal gewählt werden:

$\frac{1}{n^3+n+5} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Sei $\epsilon > 0$ für $N > *?*$

$|a_n - a| = \frac{1}{n^3+n+5} \underset{(n\geq N)}{\leq} \frac{1}{N^3+N+5} < \frac{1}{N} < \epsilon$