MATHEMATIK III FÜR INFORMATIKER

Wintersemester 2018/19

Rüdiger Zeller

Mitschrift von Dominique Wernado

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume

1.1. bis 1.17. ist identisch mit Mathe II 8.1. bis 8.17.

Basis und Dimension

Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis:

1.1 Definition (Basis)

V endl. erzeugter VR. Eine endliche Menge $B \subseteq V$ heißt Basis von V, falls

(1) $V = \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$

(2) B l.u.

1.2 Bsp.

a) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

kanonische Basis / Standardbasis von $\mathbb{R}^n$

b) Basis nicht eindeutig:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ erzeugen}$$

beide den $\mathbb{R}^2$.

1.3 Satz (Existenz von Basen)

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR. $\Rightarrow$ Jedes endliche Erzeugendensystem von V enthält eine Basis.

Beweis: Sei $\langle M \rangle_\mathbb{R} = V$, M endlich.

- M l.u. $\rightsquigarrow$ fertig (M Basis)
- M l.a. $\overset{1.17.}{\Rightarrow}$ Man kann aus M Vektor $v \in M$ weglassen, sodass $\langle M \backslash \{v\} \rangle_\mathbb{R} = \langle M \rangle_\mathbb{R} = V$

  Nach endlich vielen Schritten liefert Verfahren Basis.

$\square$

Fragen:

- Basis nicht eindeutig. Sind alle Basen gleich groß?
- Geg.: $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, S = \{e_1, e_2, e_3\}$ Basis

  Wie kann w zu einer Basis ergänzt werden?

  Welche Vektoren aus S sind dazu geeignet?

Idee: $w = \frac{1}{3}e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\{w, e_1, e_3\}}_{\text{l.a.}}$ keine Basis.

Aber: $\{e_1, e_2, w\}$ und $\{w, e_2, e_3\}$ Basen.

1.4 Austauschlemma

V endl. erzeugter $\mathbb{R}$-VR. Geg.: $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \neq 0$, wobei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V

$\Rightarrow \underbrace{(B\backslash\{v_j\}) \cup \{w\}}_{(*)}$ Basis von V, falls $\lambda_j \neq 0$

Beweis: Z.z.: (*) ist Basis

1) (*) erzeugt V: $w = \lambda_j v_j + \sum_{i\neq j} \lambda_i v_i$

$\Leftrightarrow v_j = \frac{w}{\lambda_j} - \sum_{i\neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i$

$\Rightarrow v_j \in \langle B\backslash\{v_j\} \cup \{w\}\rangle_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \langle B\backslash\{v_j\} \cup \{w\}\rangle_{\mathbb{R}} = \langle B \cup \{w\}\rangle_{\mathbb{R}} = V$

2) (*) ist l.u.: Z.z.: $\begin{cases} \sum_{i\neq j} \mu_i v_i + \mu w = \vec{0} \\ \Rightarrow \mu_i = 0 \ \forall i \neq j \text{ und } \mu = 0 \end{cases}$

$\sum_{i\neq j} \mu_i v_i + \mu w = \sum_{i\neq j} \mu_i v_i + \mu \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)}_{w}$

$= \sum_{i\neq j} (\mu_i + \mu\lambda_i) \underbrace{v_i}_{\text{EB}} + \mu\lambda_j \underbrace{v_j}_{\text{EB}} = \vec{0}$

$\underset{\text{B Basis}}{\Rightarrow} \mu_i + \mu\lambda_i = 0 \ \forall i \neq j$ und $\mu\lambda_j = 0$

$\lambda_j \neq 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_i + \mu\lambda_i = \mu_i = 0 \; \forall i \neq j$

$\square$

1.5 Steinitzscher Austauschsatz

Geg.:

- $w_1, ..., w_m \in V$ l.u.

- $\{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V

Es folgt:

a) Aus den n Basisvektoren kann man n-m auswählen, die mit $w_1, ..., w_m$ eine Basis von V bilden

b) $m \leq n$

Beweis:

a) **1)** $w_1 \in V$

$\Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

Wären alle $\lambda_i = 0$, so wäre $w_1 = \vec{0}$

Da $\vec{0}$ l.a., wäre auch $w_1, ..., w_m$ l.a. ↯

Also: (min.) ein $\lambda_i \neq 0$

O.B.d.A.: $\lambda_i \neq 0$ (sonst umnummerieren)

$\overset{1.20}{\Rightarrow} \{w_1, v_2, ..., v_n\}$ Basis