1、

(a) 证明：

令L为分配格

取$\forall a,b,c\in L$，满足$b\le a$

$\therefore a\wedge b=b$

$\therefore a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=b\vee(a\wedge c)$

即$b\vee(a\wedge c)$ ~~$=b\vee(c\wedge a)=$~~

$=b\vee(c\wedge a)$

$=(b\vee c)\wedge a=a\wedge(b\vee c)$

$\therefore$ L为模格，得证

(b) 证明：

$\because a\vee(b\wedge c)=a$

$(a\vee b)\wedge(a\vee c)=1\wedge 1=1$

$a\vee(b\wedge c)\ne(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$\therefore$ 图中为非分配格

$\{1,a,b,c,0\}$中任取三个元素x,y,z

当满足$x\le y$时，依次验证会发现

都满足$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z$

$\therefore$ 图中为模格

得证

2、证明：

对完备格L，~~任意$L_1\subseteq L$~~

~~有L_1中的下确界$GLB(L_1)\in L$~~

$L\subseteq L$ $\therefore$ L存在下确界

$\therefore$ $GLB(L)$为L的最小元

若$\exists 0\in L$，则对$\forall x\in L$，有$x\vee 0=x$

而$GLB(L)\vee x=x$ 对$\forall x\in L$成立

$\therefore GLB(L)$为零元

对完备格L，$L\subseteq L$

$\therefore$ L存在上确界

$\therefore LUB(L)$为L最大元

而$LUB(L)\wedge x=x$对$\forall x\in L$成立

$\therefore LUB(L)$为~~幺~~单位元

$\therefore$ ~~完备格~~ 完备格有~~唯一~~一个0和一个1。

3、证明:

设∵L有1元，∴L有最大元

∴ ∃$L_1 \subseteq L$ ($L_1 \neq \varnothing$),

L_1在L中有上界

~~设所有上的~~

设L_1上界的集合为C，∴$C \subseteq L$

而$C \neq \varnothing$ (L_1有上界)

∴ C存在 $glB(C) \in L$

∴ L_1存在上确界 $GLB(C)$

∴ $\forall L_1 \subseteq L$, $L_1 \neq \varnothing$, L_1既有上确界又有下确界

∴ L为一个完备格

4、证明:

设有界分配格 $\langle A, \leq \rangle$

$a \in A$，若a有至少两个补元$a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$

则有 $a \vee a_1 = 1$, $a \wedge a_1 = 0$

$a \vee a_2 = 1$, $a \wedge a_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
\therefore a_1 &= a_1 \wedge 1 = a_1 \wedge (a \vee a_2) \\
&= (a_1 \wedge a) \vee (a_1 \wedge a_2) \\
&= 0 \vee (a_1 \wedge a_2) \\
&= (a_2 \wedge a) \vee (a_1 \wedge a_2) \\
&= a_2 \wedge (a \vee a_1) \\
&= a_2 \wedge 1 \\
&= a_2
\end{aligned}
$$

$a_1 = a_2$，与假设矛盾

∴ a最多可有1个补元

得证

5. 证明：

(a)与(e)等价：

若 $a\le b$,

∴ b为同时满足$x\in L, x\ge b, x\ge a$的最小x

∴ b为$\{a,b\}$上确界

$a\cup b=b$

若 $a\cup b=b$

∴ $a\le b$

综上(a)与(e)等价

同理,(b)与(e)等价

∴(a)(b)(e)等价

~~(e)与(a)等价~~：证明(a)与(c)等价：

若 $a\cup b=b$

∴ $a'\cup b=a'\cup(a\cup b)=a'\cup a\cup b=1$

若 $a'\cup b=1$

$a=a\cap 1=a\cap(a'\cup b)=(a\cap a')\cup(a\cap b)$

$=0\cup(a\cap b)$

$=a\cap b$

由之前步骤知, $a=a\cap b \Leftrightarrow b=a\cup b$

∴ $b=a\cap b$

∴(a)与(c)等价

同理(b)与(d)等价

综上所述,(a),(b),(c),(d),(e)结论等价

6.

(a) 最小元为d,最大元为e, ∴ $d=0, e=1$ ~~$e\cap d=0$, $e\cap d=1$, $e\cup d=1$ ∴ e,d互为对补~~

$e\cap d=0, e\cup d=1$, ∴(e,d)为一对补

$a\cap h=0, a\cup h=1$, ∴(a,h)为一对补

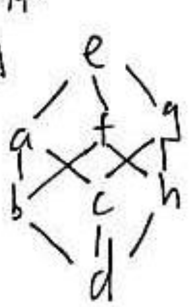
$f\cap c=0, f\cup c=1$, ∴(f,c)为一对补

$g\cap b=0, g\cup b=1$, ∴(g,b)为对补

∴所有元素都有一个补元, ∴(A,R)为complemented

(b) 证明：

作哈斯图



$\langle A,R\rangle$对$\forall a,b\in A$, 存在LUB(a,b)和GLB(a,b)

∴$\langle A,R\rangle$为格

由(a)知$\langle A,R\rangle$任何元素都有补元

∴$\langle A,R\rangle$为补格

元素d满足对$\forall x\in A$, $d\le a$,

元素e满足对$\forall x\in A$, $a\le e$

∴$\langle A,R\rangle$有0和1

∵$\langle A,R\rangle$中不包含与钻石格或五角格同构的子格

∴$\langle A,R\rangle$为分配格

综上 $\langle A,R\rangle$为布尔代数

7. 证明：

$\because$ R为环且R的所有元素都为~~幂等~~幂等元

$\therefore \langle R, \cup, \cap \rangle$ 为一个布尔代数

其中 $a \cup b = a+b-ab,\ a \cap b = a \cdot b$

$\therefore a+b = (a \cap b') \cup (a' \cap b)$

$\therefore$ 对 $\forall r \in R$

$$
\begin{aligned}
2r = r+r &= (r' \cap r) \cup (r' \cap r) \\
&= 0 \cup 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

得证

8. 证明：

对于布尔环 $\langle R, +, \cdot \rangle$

定义 $a \cup b = a+b-a \cdot b,\ a \cap b = a \cdot b$

$\therefore a \cap b = b \cap a$

$a \cup b = b \cup a$

$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c),\ (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$

$a \cap a = a,\ a \cup a = a$ (幂等)

$(a \cup b) \cap a = a,\ (a \cap b) \cup a = a$

又 布尔环有1元、0元

布尔环对 $\forall a \in R$，$\exists\, a' = 1+a$，满足补元性质

$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

$\therefore$ 布尔环等价于布尔代数