

算法基础（二十九）：数学基础 - 博弈论 - Nim 游戏

公平组合游戏定义：

如果一个游戏满足：

- 由两名玩家交替行动
- 在游戏进行的任意时刻，可以执行的合法行动与轮到哪位玩家无关
- 不能行动的玩家判负

那么我们就称这个游戏为一个公平组合游戏，尼姆游戏 (NIM) 属于公平组合游戏，但常见的棋类游戏，比如围棋就不是公平组合游戏,因为不能满足第二条和第三条

问题举例：

给定 n 堆石子，两位玩家轮流操作，每次操作可以从任意一堆石子中拿走任意数量的石子（可以拿完，但不能不拿），最后无法进行操作的人视为失败。

问如果两人都采用最优策略，先手是否必胜。

输入格式

第一行包含整数 n 。

第二行包含 n 个数字，其中第 i 个数字表示第 i 堆石子的数量。

输出格式

如果先手方必胜，则输出 **Yes**。

否则，输出 **No**。

数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5,$$

$$1 \leq \text{每堆石子数} \leq 10^9$$

输入样例：

```
2
2 3
```

输出样例：

```
Yes
```

必败状态和必胜状态：

必胜状态：比如先手进行某一个操作，留给后手是一个必败状态时，对于先手来说是一个必胜状态，这时也称为先手必胜状态，也就是说先手**可以走到一个必败状态留给后手**

必败状态：先手无论如何操作，留给后手都是一个必胜状态时，对于先手来说是一个必败状态，先手走不到一个必败状态留给后手

这个问题先说结论：

如果有 n 堆石子，每堆石子的个数分别为： $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ ，若：

$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \dots \oplus a_n \neq 0$ 则先手必胜，否则先手必输

下面来证明：

- 我们操作到最后的时候有（必败状态）： $0 \oplus 0 \oplus 0 \dots 0 = 0$
- 若当前的异或和不为 0 即 $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \dots \oplus a_n = x \neq 0$ 则我们一定可以通过某种方式使他们的异或和变成 0，也就是说一定可以通过某种方式从某一堆里面拿走若干个石子，让剩下的这些数的异或值变成 0
 - 假设 x 的二进制表示中最高的一位是第 k 位，那么就说明， $a_1 \sim a_n$ 中一定至少存在某一个数 a_i 它的二进制第 k 位为 1，如果不存在，那很显然不会出现 x 的第 k 位为 1
 - 那么就一定会有： $a_i \oplus x < a_i$ ，因为 x 第 k 位之前的位全为 0 与 a_i 进行异或的时候数值不变，但是第 k 位异或后一定变成 0，所以结果会减小
 - 于是接下来我们从 a_i 这一堆中拿走 $a_i - (a_i \oplus x)$ 这么多的石子，那么此时 a_i 这一堆的石子个数就变成了 $a_i \oplus x$
 - 那么剩下的所有堆的石子进行异或就是 $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \dots \oplus a_i \oplus x \dots \oplus a_n = x \oplus x = 0$
- 若当我们遇到 $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \dots \oplus a_n = x = 0$ ，那么我们无论不管怎么拿，最后得到剩下石子堆进行异或的结果一定不是 0
 - 假设我们从 a_i 中拿了一些石子变成 a_i' 使得
$$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \dots \oplus a_i' \oplus a_{i+1} \dots \oplus a_n = x = 0$$
 - 将 $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \dots \oplus a_n = x = 0$ 与
$$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \dots \oplus a_i' \oplus a_{i+1} \dots \oplus a_n = x = 0$$
 的等式两边分别进行异或，于是我们两两异或消掉可以得到： $a_i \oplus a_i' = 0$ ，但是很显然这两个数是不一样的，所以出现矛盾
 - 所以不管我们怎么拿最后剩下的石子异或的结果一定不是 0
- 当先手遇到的异或的值不为 0 的话，一定可以拿走一些石子使得后手面对的局面异或值为 0，且后手不管怎么拿留给先手的异或值必然不为 0，而由于游戏一定可以结束，从而到最后的时候先手拿走最后一些石子，留给后手无石子可拿，先手必赢
- 那么反过来，如果先手遇到的异或值为 0，则留给后手的异或值一定不是 0，后手一定可以拿走一些石子把接下来的异或值为 0 留给先手，在整个游戏过程中先手遇到的都是异或值为 0 的状态，到最后先手必输

代码实现

代码及其简单

```
1  #include<iostream>
2  #include<algorithm>
3  using namespace std;
4
5  int main()
6  {
7      int n;
8      int res = 0;
9      scanf("%d", &n);
10     while(n --)
11     {
```

```
12     int x;  
13     scanf("%d",&x);  
14     res ^= x;  
15 }  
16 if(res) puts("Yes");  
17 else puts("No");  
18  
19 return 0;  
20 }
```