

1. 引言(Introduction)

室内环境是机器人工作的重要场所,而室内三维环境建图对于机器人在室内环境中的定位[1][2]、导航[3][4]、路径规划[5][6]等任务而言都具有重要意义。目前室内三维环境建图研究中被广泛应用的方法主要分为两类,即基于特征的方法和基于扫描匹配(Scan Matching)的方法。其中,基于特征的方法通常通过提取环境中的点[7][8]、线[9],平面[10][11]或环境中指定路标或物体[12]作为特征,并使用基于贝叶斯概率估计的方法对特征以及传感器位姿进行估计,进而构建环境地图。基于特征的方法所构建的环境地图通常是特征地图,特征地图对环境中的指定特征进行描述,便于进行闭环检测,但由于特征的稀疏性,往往不能对环境结构与细节进行描绘。而基于扫描匹配的方法[13]通常通过寻找连续两帧的扫描数据的匹配关系,计算传感器的位姿变换,进而构建环境地图。基于扫描匹配的方法所构建的环境地图通常是点云地图或者栅格地图,与特征地图相比,这一类环境地图的特点是可以细致地描绘环境中的物体,便于机器人完成避障或路径规划等任务,但由于该类地图中不存在具有标识性的特征信息,给闭环检测或场景识别等任务带来了很大的挑战。

室内三维环境建图常用的传感器包括视觉传感器[14][15],激光传感器[16],RGB-D 传感器[17][18],以及多传感器融合,例如激光传感器与视觉传感器融合[19][20]、激光传感器与 RGB-D 传感器融合[21][22]等。其中视觉传感器信息量丰富,有利于环境中特征的提取,且因其体积小重量轻的特点,在手持传感器建图[23]与轻型飞行器的定位与建图[24][25]中得到了较好的应用。但由于单目视觉无法直接测量深度信息,只能通过立体视觉标定或运动恢复结构(structure from motion)获取稀疏的深度信息(sparse distance information),所以其建立的环境地图通常是用环境中的特征来表征环境的相关信息,不会对环境的具体轮廓及细节加以描绘,所以在如避障和路径规划等任务中的应用中受到一定限制。激光传感器有着较高的精度,但由于扫描速度慢,重量大,成本高等原因,在一些应用场合如手持传感器建图或轻型机载传感器建图中的应用受到了一定的限制。由于视觉传感器和激光传感器各自的特点,目前有很多研究选择同时配置这两种传感器,并对其信息进行融合的方法来实现环境地图的创建。而在基于激光传感器与视觉传感器融合的应用中,上述激光传感器在某些应用场合中的限制性仍然存在,另外其标定过程也比较复杂。

而近年来出现的 RGB-D 传感器很快就因其成本低,重量小,信息量丰富等优势,广泛应用于虚拟现实,人机交互,三维物体重构,室内三维环境建图等诸多领域。目前常用的 RGB-D 传感器有 Microsoft Kinect, Asus Xtion 和 Carmine 等。因为 RGB-D 传感器可以同时获取 RGB 图像和深度图像,既可以获得丰富的环境特征,同时又可以利用深度图像生成的三维点云来描绘环境的结构和细节。RGB-D 传感器位姿估计与室内三维环境建图的常用方法主要分为三类,分别为基于扫描匹配的方法、基于特征的方法以及基于特征与扫描匹配结合的方法。

基于扫描匹配的方法根据其误差度量的不同又可以分为两类,即基于几何误差度量(Geometric Error Metric)的方法和基于光测误差度量(Photometric Error Metric)的方法。在基于几何误差度量的方法中,其误差是通过定义两帧扫描数据之间的某种几何距离来度量的,如欧氏距离和马氏距离等,而目前为止扫描匹配中应用最广泛的 ICP(Iterative Closest Point)算法[26]便是基于欧氏距离误差度量的扫描匹配方法。在文献[13]中,首先利用两帧点云的局部法向量信息得到扩展高斯图像(Extended Gaussian Image, EGI),求解 3-DoF 旋转变换使得两帧扩展高斯图像的相关函数最小化,再通过 ICP 算法进一步优化 3-DoF 旋转变换,同时得到 3-DoF 平移变换,进而完成传感器 6-DoF 位姿变换的求解。文献[27]通过计算图像特征在三维空间中的位置坐标,形成稀疏的特征点集,并用 ICP 算法来完成当前帧的稀疏点集与历史扫描帧生成的模型集的匹配。文献[28]中则是先提出一种三维边缘提取方法,将提取

出的边缘点作为原三维点云的下采样结果，并对其使用 ICP 算法完成扫描匹配。而基于光测误差度量的方法是基于真实空间中一点在不同图像平面上成像的亮度值(brightness)相同，即成像一致性(photo-consistency)的假设，由于 RGB-D 传感器能获取图像平面每个像素点深度信息的特性，以图像平面上所有像素点均满足成像一致性为约束条件来求解传感器位姿，如文献[29]、文献[30]与文献[31]，均是使用基于光测误差度量的扫描匹配方法来完成传感器位姿估计的。而文献[32]则是通过同时最小化几何误差与光测误差的扫描匹配方法来完成 RGB-D 传感器的位姿估计。基于扫描匹配的方法不依赖于特征的提取与匹配，但通常是依靠非线性优化方法来完成 RGB-D 传感器位姿的求解，在传感器运动速度较快，导致位姿变换幅度较大时，容易陷入局部最优解。

基于特征的方法是通过从 RGB-D 传感器在不同位置处采集到的扫描数据中提取出具有位姿变换不变性的特征，并计算其匹配关系，从而求解位姿变换。对于室内三维环境，其常用特征有点特征、平面特征或多种特征结合等。在文献[7]提出的 RGB-D SLAM 系统中，从 RGB 图像中提取图像特征描述符，并与其在传感器坐标系下的坐标一起作为地标来进行 RGB-D 传感器位姿估计。文献[33]提出三维点特征提取方法，并计算其特征描述符来完成点特征的匹配，从而完成两帧扫描数据的匹配。在文献[34]提出的方法中，同时提取扫描数据中的平面特征和点特征，并通过 RANSAC 算法来完成特征的匹配并计算 RGB-D 传感器的相对位姿变换。基于特征的方法利用特征的匹配关系直接求解位姿变换，其性能优劣严重依赖于其中的特征提取与匹配算法。另外，对于平面特征而言，由于 RGB-D 传感器观测范围和有效深度范围均较小，所以有时难以提取足够多的平面特征来完成位姿变换的求解，所以通常需要辅以其他特征，如文献[34]中的点特征，或者借助里程计等传感器，例如在文献[10]提出的基于平面特征的 RGB-D 传感器位姿估计方法中，假设机器人里程计或 IMU 等传感器已经提供两帧之间的初始变换。

基于特征和扫描匹配结合的方法也是 RGB-D 传感器位姿估计与建图的常用方法。如文献[17]提出的 RGBD-ICP 算法中，首先从 RGB 图像中提取图像特征点，并用 RANSAC 算法完成其匹配以及传感器位姿变换的初始估计，然后再对匹配结果与三维点云一起使用 ICP 算法得到帧间位姿变换。而在文献[35]中则是先对 RGB 图像和深度图像提取边缘特征，并对其进行匹配与初始位姿变换的计算，然后对密集点云进行 ICP 算法来优化该初始位姿变换，从而完成 RGB-D 传感器的位姿估计。基于特征和扫描匹配结合的方法中通常利用匹配的特征来解决扫描匹配中存在的局部最小值问题，同时用扫描匹配方法来减小算法对特征提取和匹配算法的依赖性，相应的整体算法复杂度也会有增加。

针对上述问题，面向基于手持 RGB-D 传感器的室内三维环境建图，本文提出一种基于平面参数空间和分层网格结构的平面特征提取和匹配算法，以及基于平面特征和平面参数空间扫描匹配的 RGB-D 传感器位姿估计算法。为了完成 RGB-D 传感器相邻扫描帧间位姿变换的计算，本文首先提出平面参数空间的概念，以及其中的点与笛卡尔空间中平面的投影关系。然后对平面参数空间进行不同尺度网格化处理形成分层网格结构，并对网格参数进行定义，来描述网格中的点在平面参数空间以及 RGB 空间中的分布情况。基于该分层网格结构完成平面特征的提取，并根据网格参数来定义平面特征，然后用相邻两帧提取出的平面特征生成平面关联关系图，进而完成平面特征的匹配。在进行 RGB-D 传感器位姿估计时，首先对匹配平面特征为位姿变换求解提供约束的情况进行分析，并根据约束个数将其分为三种情况，即 6-DoF(3 rotational DoF and 3 translational DoF)约束，5-DoF(3 rotational DoF and 2 translational DoF)约束和 3-DoF(2 rotational DoF and 1 translational DoF)约束。在 6-DoF 约束的情况下，直接用平面特征完成位姿变换的计算。在 5-DoF 和 3-DoF 约束的情况下，基于平面参数空间点集以及分层网格结构在平面参数空间中完成扫描匹配来提供另外 1-DoF 和 3-DoF 约束，进而完成位姿变换的计算。本文的主要贡献包括

- 1) 本文提出的方法在进行 RGB-D 传感器位姿变换的求解时只使用平面特征这一种特征，而不依赖任何其他特征或里程计等传感器。与文献[34]中提出的平面特征结合点特征完成扫描匹配的方法相比，本文提出的方法不再依赖于图像特征点的提取与匹配，对于难以提取足够多特征点的室内环境，例如颜色和纹理较单一的桌面或墙面，有着更强的适用性。与文献[10]相比，本文方法在平面特征无法为位姿变换计算提供足够约束时不需要使用额外的传感器来提供位姿变换的估计值，既避免了传感器信息融合或者传感器标定复杂的问题，也使得本文方法适用于手持 RGB-D 传感器的应用，例如具有 RGB-D 摄像头的智能手机或平板电脑[36]等。
- 2) 对于平面特征无法确定位姿变换求解所需 6-DoF 约束的两种情况，本文先利用匹配平面的平面参数确定位姿变换的五个(三个)自由度，从而将传感器位姿变换求解问题约束为 1-DoF(3-DoF)求解问题，在此基础上通过在平面参数空间中使用 NDT 算法来进行计算。与文献[13]中通过 EGI 的相关函数最大化来求解 3-DoF 旋转变换，再通过 ICP 算法确定 3-DoF 平移变换的方法相比，本文提出的方法用平面特征的匹配关系增加了扫描匹配问题求解时的约束，从而大大降低了扫描匹配方法在传感器位姿变换幅度较大时无法收敛到全局最优解的概率。而与文献[17]中点特征结合扫描匹配的方法相比，本文方法是在平面参数空间中进行扫描匹配过程，而平面参数空间中点的位置坐标即为笛卡尔空间中局部平面的平面参数，所以本文方法不仅平面特征的运用上，而且在扫描匹配的过程中也更多地考虑了笛卡尔空间中原始点集的表面结构信息，增加了传感器位姿估计的准确性。
- 3) 本文在平面参数空间中建立分层网格结构，对网格内的点在平面参数空间以及 RGB 颜色空间中的分布进行拟合，并用网格参数来描述拟合结果。不仅基于该分层网格结构完成了平面的提取及其特征描述，而且平面特征无法为传感器位姿变换求解提供足够的约束时，使用网格参数来拟合参考帧中平面参数空间点集的分布，并在平面特征提供的约束下，通过在平面参数空间中使用 NDT 算法来求解传感器位姿变换。本文使用 STING[37]并对其进行标量形式到向量形式的推广，来完成该分层网格结构的描述。

本文结构安排如下：在第 2 节中介绍了本文方法的总体框架，在第 3 节中提出基于平面参数空间和分层网格结构的平面提取与匹配方法，在第 4 节中提出基于平面特征和平面参数空间扫描匹配的 RGB-D 传感器位姿估计方法，在第 5 节中对本文方法进行实验验证，第 6 节对本文进行总结。

2. System Overview

本文算法的总体框图如图 1 所示。本文首先提出平面参数空间的概念，并介绍了平面参数空间中的点与笛卡尔空间中的平面之间的投影关系。然后利用 RGB-D 传感器获取到的深度数据得到笛卡尔空间中带有法向量信息的点集，将每一点在笛卡尔空间的位置坐标及其法向量所描述的局部平面投影到平面参数空间中得到平面参数空间点集。对平面参数空间进行不同尺度的网格化操作，形成分层的网格结构(STING)。利用网格中包含的点在平面参数空间中的坐标以及 RGB-D 传感器获取到的 RGB 数据，拟合网格中所有点在平面参数空间以及 RGB 空间中的分布，将其分布参数作为该网格的网格参数，对该网格结构进行描述。基于该分层网格结构完成平面的提取，并根据网格参数来定义平面特征。在进行平面的匹配时，先利用平面特征形成平面关联关系图，通过图节点之间相似度的计算来完成平面的匹配。

在进行 RGB-D 传感器位姿估计时，根据平面特征为位姿变换求解提供的约束个数，分为三种情况，即 6-DoF 约束，5-DoF 约束和 3-DoF 约束。在 6-DoF 约束的情况下，直接用平面特征完成位姿变换的计算。在 5-DoF 和 3-DoF 约束的情况下，用网格参数来拟合参考帧中平面参数空间点集的分布，通过在平面参数空间中使用 NDT 算法来提供另外 1-DoF 和 3-DoF 约束，完成位姿变换的计算。

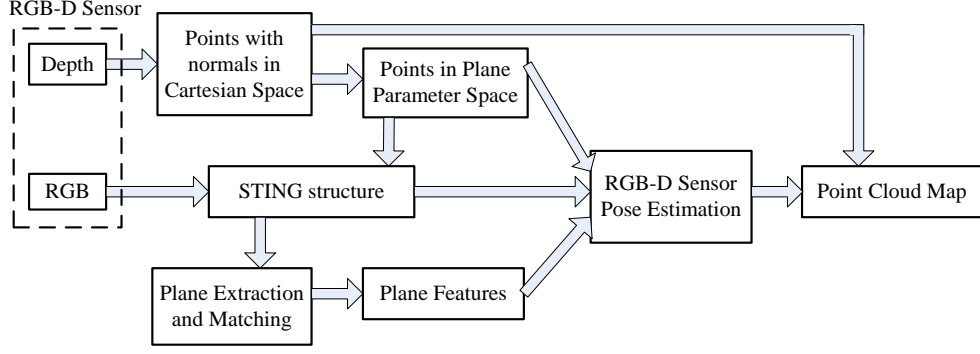


图 1 系统框图

3. 平面特征提取与匹配

3.1 平面参数空间(Plane Parameter Space)

对于笛卡尔空间中的一点 ${}^c\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ ，若满足平面方程 ${}^c\mathbf{n}^T {}^c\mathbf{p} + {}^c d = 0$ ，则点 ${}^c\mathbf{p}$ 位于以 $\boldsymbol{\pi} = [{}^c\mathbf{n}^T, {}^c d]^T$ 为参数的平面上，其中 ${}^c\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T \in \mathbb{R}^3$ 表示该平面的法向量，本文中平面的法向量均指向坐标系原点且满足 ${}^c\mathbf{n}^T {}^c\mathbf{n} = 1$ ， ${}^c d \in \mathbb{R}$ 表示原点到该平面的垂直距离。将法向量 ${}^c\mathbf{n}$ 转换到球坐标系，设其坐标为 $[\theta, \varphi, r]^T$ ，其中

$$\begin{cases} \theta = \arccos(n_z) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{n_y}{n_x}\right) \\ r = 1 \end{cases} \quad (1)$$

由此定义平面参数空间 $\Theta - \Phi - D$ ，任取该空间中一点 ${}^p\mathbf{p} = [{}^p\theta, {}^p\varphi, {}^p d]^T \in \mathbb{R}^3$ ， ${}^p\theta \in [0, \pi]$ ， ${}^p\varphi \in [-\pi, \pi]$ 其中 $[{}^p\theta, {}^p\varphi]^T$ 表示将平面法向量 ${}^c\mathbf{n}$ 由笛卡尔坐标系转换到球坐标系后的俯仰角坐标和方位角坐标， ${}^p d$ 表示原点到平面的垂直距离。由定义可知，平面参数空间中的点对应笛卡尔空间中的平面，如图 2 所示。

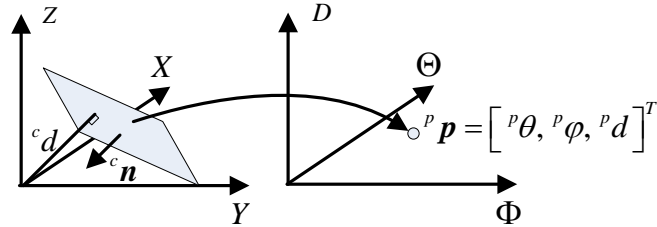


图 2 笛卡尔空间中平面与平面参数空间中点的投影关系

在本文方法中，先将笛卡尔空间中的点通过局部平面拟合得到局部平面(local plane patch)，再将局部平面投影到平面参数空间中成为点。假设笛卡尔空间中的一帧扫描点集合为 ${}^c\Omega = \{{}^c\mathbf{p}_i, i=1, \dots, N\}$ ，其中 ${}^c\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ 是扫描点在当前帧摄像机坐标系下的坐标， N 为

一帧中扫描点的个数。对于集合 ${}^c\Omega$ 中任一扫描点 ${}^c\mathbf{p}_i$ ，取其最近邻的 N_n 个点(本文实验取 $N_n = 20$)进行主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)，其协方差矩阵最小特征值对应的特征向量即为该点所在局部平面的法向量 ${}^c\mathbf{n}_i$ ，原点距该局部平面的距离为 ${}^cd_i = -{}^c\mathbf{p}_i^T {}^c\mathbf{n}_i$ ，则点 ${}^c\mathbf{p}_i$ 所在局部平面参数为 ${}^c\boldsymbol{\pi}_i = [{}^c\mathbf{n}_i^T, {}^cd_i]^T$ ，将其投影到平面参数空间后的坐标为 ${}^p\mathbf{p}_i = [{}^p\theta_i, {}^p\varphi_i, {}^pd_i]^T$ ，其中 $[{}^p\theta_i, {}^p\varphi_i]^T$ 与 ${}^c\mathbf{n}_i$ 的关系满足式(1)， pd_i 满足 ${}^pd_i = {}^cd_i$ 。对集合 $\{{}^c\mathbf{p}_i, i=1, \dots, N\}$ 中每一点进行上述的局部平面拟合过程，并投影到平面参数空间，得到平面参数空间点集，记为

$${}^p\Omega = \left\{ {}^p\mathbf{p}_i = [{}^p\theta_i, {}^p\varphi_i, {}^pd_i]^T, i=1, \dots, N \right\} \quad (2)$$

由笛卡尔坐标系和球坐标系之间的转换关系可知，若给定平面参数空间中的点坐标 ${}^p\mathbf{p}_i = [{}^p\theta_i, {}^p\varphi_i, {}^pd_i]^T$ ，则其在笛卡尔空间中对应该平面的平面参数 ${}^c\boldsymbol{\pi}_i = [{}^c\mathbf{n}_i^T, {}^cd_i]^T$ 可由式(3)直接得到

$$\boldsymbol{\pi}_i = \begin{bmatrix} {}^c\mathbf{n}_i \\ {}^cd_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin {}^p\theta_i \cos {}^p\varphi_i \\ \sin {}^p\theta_i \sin {}^p\varphi_i \\ \cos {}^p\theta_i \\ {}^pd_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

因此，平面参数空间坐标 ${}^p\mathbf{p}_i$ 和其对应笛卡尔空间局部平面法向量 ${}^p\mathbf{n}_i$ 与原点距该平面的距离 pd_i 存在相互转换的关系，而后文中为计算方便，有时会以 ${}^c\boldsymbol{\pi}_i = [{}^c\mathbf{n}_i^T, {}^cd_i]^T$ 的形式直接参与计算。

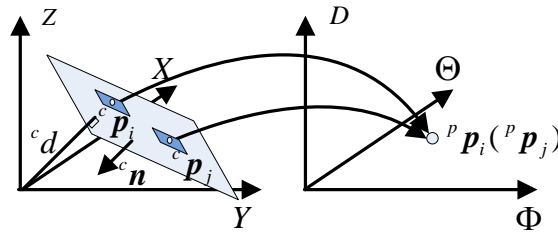


图3 笛卡尔空间中局部平面与平面参数空间中点的投影关系

综上所述，点 ${}^p\mathbf{p}_i$ 在平面参数空间中的位置表征了点 ${}^c\mathbf{p}_i$ 所在局部平面在笛卡尔空间中的位姿。对于笛卡尔空间中位于同一平面上的点 ${}^c\mathbf{p}_i$ 和 ${}^c\mathbf{p}_j$ ，在没有噪声干扰的情况下，其所在局部平面与其当前所在平面的平面参数相同，即其局部平面投影到平面参数空间后的数据点坐标满足 ${}^p\mathbf{p}_i = {}^p\mathbf{p}_j$ ，如图3所示。然而，由于传感器噪声的影响，笛卡尔空间中 ${}^c\mathbf{p}_i$ 和

${}^c p_j$ 不会严格位于同一平面上, 所以其局部平面对应的平面参数空间数据点 ${}^p p_i$ 和 ${}^p p_j$ 同样不会严格位于同一点, 其分布也会受到噪声的影响, 如图 4 所示, 其中图 4(a)为笛卡尔空间中受噪声影响的平面, 图 4(b)为图 4(a)中每个点所在局部平面投影到平面参数空间中所得到的点集。从图 4(b)中可以看出, 笛卡尔空间中位于一个平面上的各点所在的局部平面, 投影到平面参数空间中后点坐标的集中分布在某一坐标位置处。所以, 对于一帧平面参数空间数据点集合 Ω , 若存在足够多的数据点呈现集中分布于某一坐标位置附近的状态, 则这些数据点对应的笛卡尔空间局部平面很有可能处于同一平面。基于此, 本文对平面参数空间进行不同尺度的网格化处理, 在平面参数空间中建立分层网格结构, 并对每个网格内的数据点进行正态分布拟合来描述其分布状态, 并基于该分层网格结构完成平面的提取。

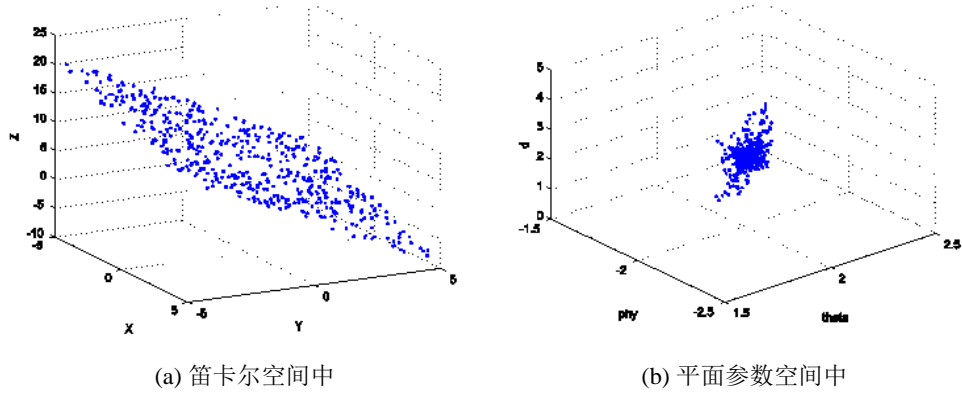


图 4 笛卡尔空间中受噪声影响的平面与平面参数空间点的投影关系

3.2 分层网格结构的构建

由于平面参数空间中点的位置坐标即为笛卡尔空间中局部平面的平面参数, 而笛卡尔空间中位于同一平面的局部平面, 其投影到平面参数空间中的点集呈现集中分布的状态, 如图 4 所示。因此, 本文在平面参数空间中建立分层网格结构, 并对网格中点在平面参数空间以及 RGB 空间中的分布进行拟合, 并根据其分布参数来定义网格参数。本文使用统计信息网格(Statistical INformation Grid, STING)[37]来进行该分层网格结构的构建。

STING 是一种基于网格单元的多层聚类技术, 将空间区域分割成网格单元, 并形成分层结构(hierarchical structure), 每一层网格分辨率不同, 代表了对该空间的不同细分程度, 高层的每个网格单元由多个低一层的网格单元组成。在 STING 的构建过程中, 只需要对最低层网格单元中点的分布参数进行计算, 而高层网格中的分布参数都可以由低一层的信息计算得到。

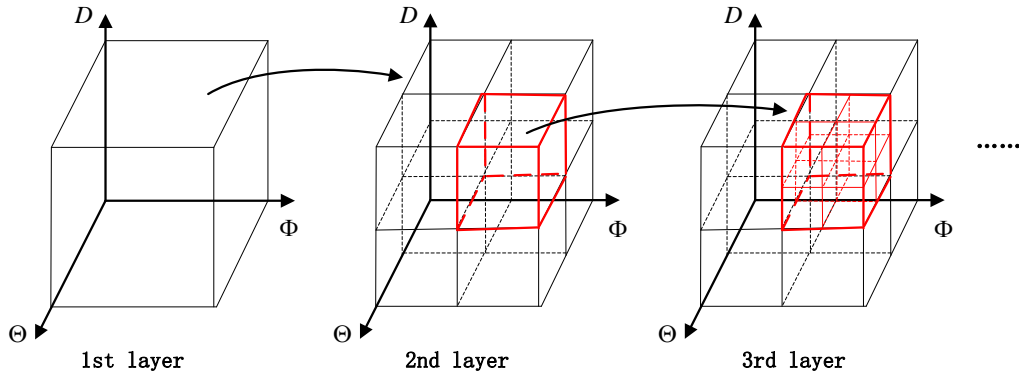


图 5 STING 分层结构

假设统计信息网络的层数为 L ，第 1 层为最高层，只有一个网格，也称为根网格(root)，第 l 层 ($l=2, \dots, L-1$) 中的每个网格单元都划分成 N_s (本文实验中取 $N_s=8$) 个第 $l+1$ 层的网格单元，即为该网格单元的子网格(children)，而该网格单元则称为父网格(parent)，其空间关系如图 5 所示。第 L 层为最低层，该层的网格称为叶子网格(leaf)。文献[37]中给出了分布参数为标量时连续两层网格的分布参数递推计算方法，假设第 l 层第 k 个网格中分布的均值为 m_{lk} ，方差为 s_{lk} ，而该网格的第 j 个子网格中属性值的均值为 m_{lkj} ，方差为 s_{lkj} ，其中 $j=1, 2, \dots, N_s$ ，则其递推方法如式(4)~式(6)所示

$$c_{lk} = \sum_{j=1}^{N_s} c_{lkj} \quad (4)$$

$$m_{lk} = \frac{\sum_{j=1}^{N_s} m_{lkj} c_{lkj}}{c_{lk}} \quad (5)$$

$$s_{lk} = \frac{1}{c_{lk}} \sum_{j=1}^{N_s} \left(s_{lkj} + (m_{lkj})^2 \right) c_{lkj} - (m_{lk})^2 \quad (6)$$

本文在平面参数空间 $\Theta-\Phi-D$ 中建立 STING 结构，并拟合每个网格中的点在平面参数空间中坐标 ${}^p\mathbf{p} = [{}^p\theta, {}^p\varphi, {}^p d]^T \in R^3$, ${}^p\theta \in [0, \pi]$, ${}^p\varphi \in [-\pi, \pi]$ ，以及 RGB 空间中坐标 ${}^r\mathbf{p} = [{}^r r, {}^r g, {}^r b]^T \in R^3$, ${}^r r, {}^r g, {}^r b \in [0, 1]$ 的分布参数。令 Γ 表示 STING 结构中所有网格的集合

$$\Gamma = \left\{ o_{lk} = ({}^p\mathbf{m}_{lk}, {}^p\mathbf{S}_{lk}, {}^r\mathbf{m}_{lk}, {}^r\mathbf{S}_{lk}, c_{lk}), k=1, 2, \dots, (N_s)^{l-1}, l=1, 2, \dots, L \right\} \quad (7)$$

其中， o_{lk} 表示第 l 层第 k 个网格的参数， ${}^p\mathbf{m}_{lk}$ 和 ${}^p\mathbf{S}_{lk}$ 分别为该网格中点在平面参数空间中坐标 ${}^p\mathbf{p}$ 分布的均值向量和协方差矩阵， ${}^r\mathbf{m}_{lk}$ 和 ${}^r\mathbf{S}_{lk}$ 分别为 RGB 空间中坐标 ${}^r\mathbf{p}$ 分布的均值向量和协方差矩阵， c_{lk} 为该网格单元中点的数目。

由于本文的方法中网格中点的分布参数均是向量的形式，所以在这里将分布参数为标量时，连续两层网格的参数递推方法进行推广，给出分布参数为向量时的计算方法。假设第 l 层 ($l=1, 2, \dots, L-1$) 第 k 个网格 o_{lk} 的第 j 个子网格参数为 $o_{lkj} = ({}^p\mathbf{m}_{lkj}, {}^p\mathbf{S}_{lkj}, {}^r\mathbf{m}_{lkj}, {}^r\mathbf{S}_{lkj}, c_{lkj})$ ，其中 $j=1, 2, \dots, N_s$ 。以 ${}^p\mathbf{m}_{lk}$ 和 ${}^p\mathbf{S}_{lk}$ 为例，其中均值向量 ${}^p\mathbf{m}_{lk}$ 直接可以得到

$${}^p\mathbf{m}_{lk} = \frac{\sum_{j=1}^{N_s} {}^p\mathbf{m}_{lkj} c_{lkj}}{c_{lk}} \quad (8)$$

对于协方差矩阵 ${}^p\mathbf{S}_{lk}$ ，假设子网格 o_{lkj} 中第 i_j 个点的平面参数空间坐标为 ${}^p\mathbf{p}_{i_j}$ ，则 o_{lkj} 中协方差矩阵 ${}^p\mathbf{S}_{lkj}$ 的计算方法为

$${}^p\mathbf{S}_{lkj} = \frac{1}{c_{lkj}} \sum_{i_j=1}^{c_{lkj}} \left({}^p\mathbf{p}_{i_j} - {}^p\mathbf{m}_{lkj} \right) \left({}^p\mathbf{p}_{i_j} - {}^p\mathbf{m}_{lkj} \right)^T = \frac{1}{c_{lkj}} \sum_{i_j=1}^{c_{lkj}} \left({}^p\mathbf{p}_{i_j} {}^p\mathbf{p}_{i_j}^T \right) - {}^p\mathbf{m}_{lkj} \left({}^p\mathbf{m}_{lkj} \right)^T \quad (9)$$

由此可得

$$\sum_{i_j=1}^{c_{lkj}} \left({}^p\mathbf{p}_{i_j} {}^p\mathbf{p}_{i_j}^T \right) = c_{lkj} \left({}^p\mathbf{S}_{lkj} + {}^p\mathbf{m}_{lkj} \left({}^p\mathbf{m}_{lkj} \right)^T \right) \quad (10)$$

再假设网格 o_{lk} 中第 i 个点的平面参数空间坐标为 ${}^p\mathbf{p}_i$ ，则结合式(10)可计算出网格 o_{lk} 中协方差矩阵 ${}^p\mathbf{S}_{lk}$ 为

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{S}_{lk} &= \frac{1}{c_{lk}} \sum_{i=1}^{c_{lk}} \left({}^p\mathbf{p}_i - {}^p\mathbf{m}_{lk} \right) \left({}^p\mathbf{p}_i - {}^p\mathbf{m}_{lk} \right)^T \\ &= \frac{1}{c_{lk}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i_j=1}^{c_{lkj}} \left({}^p\mathbf{p}_{i_j} {}^p\mathbf{p}_{i_j}^T \right) - {}^p\mathbf{m}_{lk} \left({}^p\mathbf{m}_{lk} \right)^T \\ &= \frac{1}{c_{lk}} \sum_{j=1}^{N_s} c_{lkj} \left({}^p\mathbf{S}_{lkj} + {}^p\mathbf{m}_{lkj} \left({}^p\mathbf{m}_{lkj} \right)^T \right) - {}^p\mathbf{m}_{lk} \left({}^p\mathbf{m}_{lk} \right)^T \end{aligned} \quad (11)$$

与式(6)中分布参数为标量时方差的递推计算方法有着相似的形式。对于 ${}^r\mathbf{m}_{lk}$ 和 ${}^r\mathbf{S}_{lk}$ ，同理可得

$${}^r\mathbf{m}_{lk} = \frac{\sum_{j=1}^{N_s} {}^r\mathbf{m}_{lkj} c_{lkj}}{c_{lk}} \quad (12)$$

$${}^r\mathbf{S}_{lk} = \frac{1}{c_{lk}} \sum_{j=1}^{N_s} c_{lkj} \left({}^r\mathbf{S}_{lkj} + {}^r\mathbf{m}_{lkj} \left({}^r\mathbf{m}_{lkj} \right)^T \right) - {}^r\mathbf{m}_{lk} \left({}^r\mathbf{m}_{lk} \right)^T \quad (13)$$

由以上计算过程可知，文献[37]中所提出的针对网格中分布参数为标量时的计算方法可以推广到分布参数为向量的情况。所以，对于第 l 层 ($l=1,2,\dots,L-1$) 第 k 个网格 o_{lk} ，可以由该网格在 $l+1$ 层的子网格的参数计算得到。

对于最底层，即第 L 层的网格参数 $o_{Lk}, k=1,2,\dots,(N_s)^{L-1}$ 是由网格内的点直接计算得到的，设第 L 层第 k 个网格中的第 i 个 ($i=1,2,\dots,c_{Lk}$) 点在平面参数空间和 RGB 空间的坐

标分别为 ${}^p\mathbf{p}_i = [{}^p\theta_i, {}^p\varphi_i, {}^p d_i]^T$ 和 ${}^r\mathbf{p}_i = [{}^r r_i, {}^r g_i, {}^r b_i]^T$ ，则 ${}^p\mathbf{m}_{Lk}, {}^p\mathbf{S}_{Lk}, {}^r\mathbf{m}_{Lk}, {}^r\mathbf{S}_{Lk}$ 的计算方法如式(14)~式(17)所示

$${}^p\mathbf{m}_{Lk} = \frac{1}{c_{Lk}} \sum_{i=1}^{c_{Lk}} {}^p\mathbf{p}_i \quad (14)$$

$${}^p\mathbf{S}_{Lk} = \frac{1}{c_{Lk}} \sum_{i=1}^{c_{Lk}} ({}^p\mathbf{p}_i - {}^p\mathbf{m}_{Lk})({}^p\mathbf{p}_i - {}^p\mathbf{m}_{Lk})^T \quad (15)$$

$${}^r\mathbf{m}_{Lk} = \frac{1}{c_{Lk}} \sum_{i=1}^{c_{Lk}} {}^r\mathbf{p}_i \quad (16)$$

$${}^r\mathbf{S}_{Lk} = \frac{1}{c_{Lk}} \sum_{i=1}^{c_{Lk}} ({}^r\mathbf{p}_i - {}^r\mathbf{m}_{Lk})({}^r\mathbf{p}_i - {}^r\mathbf{m}_{Lk})^T \quad (17)$$

3.3 平面提取

由第 3.1 节内容可知，平面参数空间中的一点对应笛卡尔空间中的一个平面，所以在没有噪声干扰的情况下，笛卡尔空间中处于一个平面上的点所在的局部平面投影到平面参数空间后应具有相同的坐标值。因此，本文提出基于平面参数空间分层网格结构的平面特征提取方法，即通过对第 3.2 节中建立的 STING 结构进行自顶向下的查询过程，寻找网格中的点足够多且在平面参数空间中分布足够集中的网格，并利用其网格参数 o_{lk} 来定义提取出的平面特征。

定义平面特征为 $P_\pi = P(o_{lk}) = ({}^c\mathbf{n}_\pi, {}^c d_\pi, {}^r\mathbf{p}_\pi, {}^r\mathbf{S}_\pi, c_\pi)$ ，其中，若令 ${}^p\mathbf{m}_{lk} = [{}^p\theta_{lk}, {}^p\varphi_{lk}, {}^p d_{lk}]^T$ ，则由式(3)可得 ${}^c\mathbf{n}_\pi$ 和 ${}^c d_\pi$ ，分别表示该平面在笛卡尔空间中的法向量以及距原点的垂直距离， ${}^r\mathbf{p}_\pi = {}^r\mathbf{m}_{lk}$ 和 ${}^r\mathbf{S}_\pi = {}^r\mathbf{S}_{lk}$ 分别表示位于该平面上的点在 RGB 空间中分布的均值和协方差，表征了该平面的颜色以及不确定性， $c_\pi = c_{lk}$ 表示位于该平面上点的个数。

在进行平面特征的提取时，对 STING 结构进行由高层到低层的查询，Algorithm 1 给出了具体的算法流程，其中第 2~8 行表示选择 STING 的第 l_0 层作为起始层，遍历第 l_0 层中所有网格，并将网格中数据点数量 c_{lk} 满足 $c_{lk} > \varepsilon_n$ 的网格标记为“relevant”，否则标记为“not relevant”。第 9~24 行中，遍历第 l 层($l = l_0, \dots, L-1$)中所有标记为“relevant”的网格单元在第 $l+1$ 层对应的子网格，找出数据点数量 c_{lkj} 满足 $c_{lkj} > \varepsilon_n$ 的子网格 o_{lkj} ，若 ${}^p\mathbf{S}_{lkj}$ 的最大特征值 λ_{lkj} 满足 $\lambda_{lkj} < \varepsilon_s$ 则确定网格 o_{lkj} 可以用来描述一个平面特征 $P_{\pi,i} = P(o_{lkj})$ ，否则标记该网格为“relevant”。

Algorithm 1 中的阈值 ε_n 的设置会影响在环境中提取到平面的数量，若 ε_n 值设得过大，会导致环境中面积较小的平面或者当前视角下无法完整观测到的平面无法被提取出来；但若 ε_n 值设得过小，则会导致环境中一些本来不属于一个平面的点被当作平面提取出来，进而产生不必要的干扰。经过测试，本文实验中取 $\varepsilon_n = 500$ 。而阈值 ε_s 则关系到提取出平面的不确定性，其值的设置决定了提取出的平面对噪声的容忍程度，本文实验中取 $\varepsilon_s = 0.15$ 。

平面提取算法过程结束时，可得到当前扫描帧中所有平面特征的集合，记作 $\Pi = \{P_{\pi,i} = ({}^c n_{\pi,i}, {}^c d_{\pi,i}, {}^r p_{\pi,i}, {}^r S_{\pi,i}, c_{\pi,i}), i=1, \dots, N_p\}$ ，其中 N_p 表示从当前帧提取到的平面的总数。

Algorithm 1: Plane extraction

Input: STING structure of the points in plane parameter coordinate.

Output: Plane set $\Pi = \{P_{\pi,i} = ({}^c n_{\pi,i}, {}^c d_{\pi,i}, {}^r p_{\pi,i}, {}^r S_{\pi,i}, c_{\pi,i}), i=1, \dots, N_p\}$.

```

1 Choose the  $l_0$ -th layer to start. Set  $l = l_0, i = 0, \Pi = \emptyset$ 

2 for  $k = 1, \dots, (N_s)^{l-1}$  do

3   if  $c_{lk} > \varepsilon_n$  then

4     Label the  $k$ -th cell  $o_{lk}$  in  $l$ -th layer as ‘relevant’

5   else

6     Label the  $k$ -th cell  $o_{lk}$  in  $l$ -th layer as ‘not relevant’

7   end

8 end

9 for  $l = l_0, \dots, L-1$  do

10  for  $k = 1, \dots, (N_s)^{l-1}$  do

11    if the  $k$ -th cell  $o_{lk}$  in  $l$ -th layer is labeled ‘relevant’ then

12      for  $j = 1, \dots, N_s$  do

13        if  $c_{lkj} > \varepsilon_n$  then

14          if  $\lambda_{lkj} < \varepsilon_s$  then

15             $i \leftarrow i + 1$ 

16            Add  $P_{\pi,i} = P(o_{lkj}) = ({}^c n_{\pi,i}, {}^c d_{\pi,i}, {}^r p_{\pi,i}, {}^r S_{\pi,i}, c_{\pi,i})$  to set  $\Pi$ 

```

```

17         else
18             label the  $j$ -th child  $o_{lkj}$  of the  $k$ -th cell in  $l$ -th layer as
            'relevant'
19         end
20     end
21 end
22 end
23 end
24 end

```

3.4 平面匹配

完成连续两帧的平面提取之后，为了进行 RGB-D 传感器位姿变换的计算，首先需要知道两帧平面特征之间的匹配关系。为此，本文提出基于平面关联关系图的平面特征匹配方法。平面关联关系图是以平面为节点，以平面之间的几何关系为边形成的图结构。而两帧平面之间的匹配关系，则是通过两帧平面所构成的平面关联关系图节点之间的相似度来确定的。下面给出平面关联关系图具体的构建方法，并对其节点相似度进行定义。

本文将 RGB-D 传感器的连续两个扫描帧分别称为当前帧(current frame)和参考帧(reference frame)，假设两帧扫描数据中提取出的平面集合分别为

$$\Pi_c = \{P_{\pi c, i} = ({}^c \mathbf{n}_{\pi c, i}, {}^c d_{\pi c, i}, {}^r \mathbf{p}_{\pi c, i}, {}^r \mathbf{S}_{\pi c, i}, c_{\pi c, i}), i = 1, \dots, N_{\pi c}\} \quad (18)$$

与

$$\Pi_r = \{P_{\pi r, j} = ({}^c \mathbf{n}_{\pi r, j}, {}^c d_{\pi r, j}, {}^r \mathbf{p}_{\pi r, j}, {}^r \mathbf{S}_{\pi r, j}, c_{\pi r, j}), j = 1, \dots, N_{\pi r}\} \quad (19)$$

来自于同一帧扫描数据的任意两个平面之间的几何关系可以分为两类，平行或者相交，平行关系可以通过两个平面之间的距离来描述，相交关系则可以通过法向量夹角来描述。以平面集合 Π_c 为例，任取其中的两个平面 $P_{\pi c, i}$ 和 $P_{\pi c, j}$ ，其法向量夹角 $\alpha_{c, ij}$ 为

$$\alpha_{c, ij} = \arccos({}^c \mathbf{n}_{\pi c, i}^T {}^c \mathbf{n}_{\pi c, j}) \quad (20)$$

当两个平面间的法向量夹角 $\alpha_{c, ij}$ 满足 $\alpha_{c, ij} < \varepsilon_{\alpha 1}$ （本文实验中 $\varepsilon_{\alpha 1}$ 取 15° ）时，则可判断两个平面特征之间是平行的几何关系，否则，判断为相交。若两个平面之间的几何关系判断为平行，则其平面之间的距离差 $d_{c, ij}$ 为

$$d_{c, ij} = {}^c d_{\pi c, i} - {}^c d_{\pi c, j} \quad (21)$$

通过上述方法，可以在平面集合 Π_c 中的任意两个平面之间建立几何关系的描述，进而建立平面关联关系图 $G_c = (V_c, E_c)$ ，其中 $V_c = \{v_{c, i} = P_{\pi c, i}, i = 1, \dots, N_{\pi c}\}$ 表示节点的集合，即为提取出平面的集合， $E_c = \{e_{c, ij}, i, j = 1, \dots, N_{\pi c}, i \neq j\}$ 表示边的集合，其中 $e_{c, ij}$ 定义为

$$e_{c, ij} = (\omega_{c, ij}, \alpha_{c, ij}, d_{c, ij}), i, j = 1, \dots, N_{\pi c}, i \neq j \quad (22)$$

其中 $\omega_{c,ij} \in \{parallel, not\ parallel\}$ 为一枚举量，满足

$$\omega_{c,ij} = \begin{cases} parallel & \text{if } \alpha_{c,ij} < \varepsilon_{\alpha 1} \\ not\ parallel & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

而 $\alpha_{c,ij}$ 的计算方法如式(20)所示， $d_{c,ij}$ 满足

$$d_{c,ij} = \begin{cases} {}^c d_{\pi c, i} - {}^c d_{\pi c, j} & \text{if } \omega_{c,ij} = parallel \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

同理，在平面集合 Π_r 中用同样的方法建立平面关联关系图 $G_r = (V_r, E_r)$ 。

对于两帧平面关联关系图 $G_c = (V_c, E_c)$ 与 $G_r = (V_r, E_r)$ ，任取两个边 $e_{c,ij} \in E_c$ 与 $e_{r,kl} \in E_r$ ，其中 $i, j \in \{1, \dots, N_{\pi c}\}$ ， $k, l \in \{1, \dots, N_{\pi r}\}$ ，且 $i \neq j, k \neq l$ ，定义 $e_{c,ij}$ 与 $e_{r,kl}$ 的相似关系为

$$\begin{cases} e_{c,ij} = e_{r,kl} & \text{if } \omega_{c,ij} = \omega_{r,kl} \text{ and } |\alpha_{c,ij} - \alpha_{r,kl}| < \varepsilon_{\alpha 2} \text{ and } |d_{c,ij} - d_{r,kl}| < \varepsilon_d \\ e_{c,ij} \neq e_{r,kl} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

即当满足 $\omega_{c,ij} = \omega_{r,kl}$ and $|\alpha_{c,ij} - \alpha_{r,kl}| < \varepsilon_{\alpha 2}$ and $|d_{c,ij} - d_{r,kl}| < \varepsilon_d$ 的条件时(本文实验中 $\varepsilon_{\alpha 2}$ 取 5° ， ε_d 取 $0.06m$)， $e_{c,ij}$ 与 $e_{r,kl}$ 为相似边，记作 $e_{c,ij} = e_{r,kl}$ ，否则为不相似边，记作 $e_{c,ij} \neq e_{r,kl}$ 。

在两个图中任取两个节点 $v_{c,i} \in V_c$ 与 $v_{r,i} \in V_r$ ，其中 $i \in \{1, \dots, N_{\pi c}\}$ ， $k \in \{1, \dots, N_{\pi r}\}$ ，定义其相似度为

$$s(v_{c,i}, v_{r,k}) = s_c(v_{c,i}, v_{r,k}) + s_g(v_{c,i}, v_{r,k}) \quad (26)$$

其中 $s_c(v_{c,i}, v_{r,k})$ 和 $s_g(v_{c,i}, v_{r,k})$ 分别表示两个节点之间的颜色相似度和几何相似度。下面分别对颜色相似度 $s_c(v_{c,i}, v_{r,k})$ 和几何相似度 $s_g(v_{c,i}, v_{r,k})$ 进行定义。

两个节点 $v_{c,i} \in V_c$ 与 $v_{r,i} \in V_r$ 之间的颜色相似度 $s_c(v_{c,i}, v_{r,k})$ 定义为 ${}^r \mathbf{p}_{\pi c, i}$ 和 ${}^r \mathbf{p}_{\pi r, i}$ 之间的马式距离，表征两个平面 $P_{\pi c, i}$ 和 $P_{\pi r, k}$ 颜色的相似程度，如式(27)所示

$$s_c(v_{c,i}, v_{r,k}) = \sqrt{({}^r \mathbf{p}_{\pi c, i} - {}^r \mathbf{p}_{\pi r, k})^T ({}^r \mathbf{S}_{\pi r, k})^{-1} ({}^r \mathbf{p}_{\pi c, i} - {}^r \mathbf{p}_{\pi r, k})} \quad (27)$$

两个节点 $v_{c,i} \in V_c$ 与 $v_{r,i} \in V_r$ 之间的几何相似度 $s_g(v_{c,i}, v_{r,k})$ 定义为[38]

$$s_g(v_{c,i}, v_{r,k}) = \frac{1}{|I_{v_{c,i}|v_{r,k}}|} \sum_{r=1}^{|I_{v_{c,i}|v_{r,k}}|} s_c(I_{v_{c,i}|v_{r,k}}[r], I_{v_{r,k}|v_{c,i}}[r]) \quad (28)$$

其中 $I_{v_{c,i}|v_{r,k}}$ 和 $I_{v_{r,k}|v_{c,i}}$ 为两个有序集合(indexed set), 对于 V_c 中除 $v_{c,i}$ 之外的其他节点 $\{v_{c,j}, j=1, \dots, N_{\pi c}, j \neq i\}$ 以及 V_r 中除 $v_{r,k}$ 之外的其他节点 $\{v_{r,l}, l=1, \dots, N_{\pi r}, l \neq k\}$, 若边 $e_{c,ij}$ 与 $e_{r,kl}$ 满足 $e_{c,ij} = e_{r,kl}$, 则将 $v_{c,j}$ 和 $v_{r,l}$ 分别加入 $I_{v_{c,i}|v_{r,k}}$ 和 $I_{v_{r,k}|v_{c,i}}$, 即 $I_{v_{c,i}|v_{r,k}}$ 中第 r 个元素 $I_{v_{c,i}|v_{r,k}}[r]$ 与 $I_{v_{r,k}|v_{c,i}}$ 中第 r 个元素 $I_{v_{r,k}|v_{c,i}}[r]$ 表示图 G_c 和图 G_r 中与 $v_{c,i}$ 和 $v_{r,k}$ 以相似边连接的节点。 $|I_{v_{c,i}|v_{r,k}}|$ 和 $|I_{v_{r,k}|v_{c,i}}|$ 表示 $I_{v_{c,i}|v_{r,k}}$ 和 $I_{v_{r,k}|v_{c,i}}$ 的元素个数, 且满足 $|I_{v_{c,i}|v_{r,k}}| = |I_{v_{r,k}|v_{c,i}}|$ 。

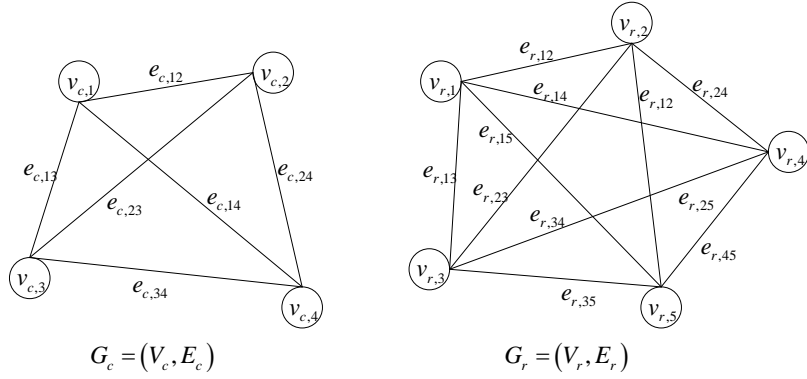


图 6 平面关联关系图

以图 6 所示的平面关联关系图中节点 $v_{c,1}$ 和 $v_{r,3}$ 为例, 假设与其连接的所有边中满足相似边条件的有 $e_{c,12} = e_{r,23}$ 和 $e_{c,13} = e_{r,34}$, 则有序集合 $I_{v_{c,1}|v_{r,3}}$ 和 $I_{v_{r,3}|v_{c,1}}$ 分别为

$I_{v_{c,1}|v_{r,3}} = \{v_{c,2}, v_{c,3}\}$ 和 $I_{v_{r,3}|v_{c,1}} = \{v_{r,2}, v_{r,4}\}$, 由此可得节点 $v_{c,1}$ 和 $v_{r,3}$ 的几何相似度为

$$s_g(v_{c,1}, v_{r,3}) = \frac{1}{|I_{v_{c,1}|v_{r,3}}|} \sum_{r=1}^{|I_{v_{c,1}|v_{r,3}}|} s_c(I_{v_{c,1}|v_{r,3}}[r], I_{v_{r,3}|v_{c,1}}[r]) = \frac{1}{2} (s_c(v_{c,2}, v_{c,3}) + s_c(v_{r,2}, v_{r,4})) \quad (29)$$

平面关联关系图节点相似度 $s(v_{c,i}, v_{r,k})$ 的定义既考虑到来自两帧扫描数据的待匹配平面之间的颜色相似性, 还利用几何相似度加入了与待匹配平面具有相同位置关系的平面之间的颜色相似性。在本文中, 颜色相似度是根据 RGB 空间的马氏距离来定义的, 但其不止限于这一种定义方式, 还可以使用其他颜色空间如 HSV 空间中的距离, 以及颜色直方图距离等。在进行平面匹配时, 取一适当阈值 ε_{sim} , 若 $s(v_{c,i}, v_{r,k}) < \varepsilon_{sim}$, 则两个平面之间存在匹配关系; 否则, 不存在匹配关系。其中, 阈值 ε_{sim} 的设置首先与所选择的颜色相似度定义方式有关, 其次也关系到了平面匹配的结果对其颜色相似程度的容忍度。若其值设置过大, 则可能会出现错配的情况; 若设置过小, 在因光照变化等因素导致获取到平面颜色信息不稳定的时候, 可能会出现本具有对应关系却无法匹配上的情况。经过测试, 本文实验中取 $\varepsilon_{sim} = 1.0$ 时平面匹配的效果最好。

4. 传感器位姿估计

假设通过上述平面提取与匹配过程, 得到两帧具有匹配关系(correspondence)的平面集合分别为

$$\Pi_{mc} = \left\{ P_{\pi c, i} = \left({}^c \mathbf{n}_{\pi c, i}, {}^c d_{\pi c, i}, {}^r \mathbf{p}_{\pi c, i}, {}^r \mathbf{S}_{\pi c, i}, c_{\pi c, i} \right), i = 1, \dots, N_{\pi} \right\} \quad (30)$$

与

$$\Pi_{mr} = \left\{ P_{\pi r, j} = \left({}^c \mathbf{n}_{\pi r, j}, {}^c d_{\pi r, j}, {}^r \mathbf{p}_{\pi r, j}, {}^r \mathbf{S}_{\pi r, j}, c_{\pi r, j} \right), j = 1, \dots, N_{\pi} \right\} \quad (31)$$

其中 $P_{\pi c, i}$ 和 $P_{\pi r, j}$ 表示有着匹配关系的平面对, N_{π} 表示匹配平面对的总数。

两帧之间的位姿变换由旋转矩阵 \mathbf{R} 和平移向量 \mathbf{t} 构成, 对于集合 Π_{mc} 和 Π_{mr} , 存在 \mathbf{R} 和 \mathbf{t} 分别使式(32)和式(33)最小化

$$J_R(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N_{\pi}} \left\| {}^c \mathbf{n}_{\pi r, i} - \mathbf{R} \cdot {}^c \mathbf{n}_{\pi c, i} \right\|^2 \quad (32)$$

$$J_t(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{N_{\pi}} \left({}^c d_{\pi r, i} - \left({}^c d_{\pi c, i} + {}^c \mathbf{n}_{\pi r, i}^T \mathbf{t} \right) \right)^2 \quad (33)$$

令矩阵 $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N_{\pi}} {}^c \mathbf{n}_{\pi c, i} {}^c \mathbf{n}_{\pi r, i}^T$ [39], 对其进行奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)可得

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^T \quad (34)$$

其中 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ 均为单位正交阵 (orthonormal matrix),

$\mathbf{A} = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \}$, 且满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ 。因为对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, N_m\}$, $P_{\pi c, i}$ 和 $P_{\pi r, i}$ 有匹配关系, 所以其法向量 ${}^c \mathbf{n}_{\pi c, i}$ 和 ${}^c \mathbf{n}_{\pi r, i}$ 的分布情况是一致的, 即, 若存在 $\mathbf{u}_j, j \in \{1, 2, 3\}$,

使得对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, N_m\}$ 都有 ${}^c \mathbf{n}_{\pi c, i}^T \mathbf{u}_j = 0$, 则一定有 ${}^c \mathbf{n}_{\pi r, i}^T \mathbf{v}_j = 0$ 。

根据矩阵 \mathbf{H} 的奇异性, 可以将匹配的平面集合为传感器位姿估计提供的约束分为以下三种情况:

(1) \mathbf{H} 为非奇异矩阵, 即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, 则对于三个正交的方向 $\mathbf{u}_j (\mathbf{v}_j), j \in \{1, 2, 3\}$

和任意 $i \in \{1, 2, \dots, N_{\pi}\}$, 都有 ${}^c \mathbf{n}_{\pi c, i}^T \mathbf{u}_j \neq 0$ (${}^c \mathbf{n}_{\pi r, i}^T \mathbf{v}_j \neq 0$), 即笛卡尔空间中平面的法向量

$\{ {}^c \mathbf{n}_{\pi c, i}, i = 1, 2, \dots, N_{\pi} \}$ ($\{ {}^c \mathbf{n}_{\pi r, i}, i = 1, 2, \dots, N_{\pi} \}$) 不共面, 此时 Π_{mc} 和 Π_{mr} 可以为 \mathbf{R} 和 \mathbf{t} 的求解提供全部六个自由度的约束。

(2) \mathbf{H} 为奇异矩阵, 且满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3 = 0$, 则对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, N_{\pi}\}$ 有

${}^c\mathbf{n}_{\pi c,i}^T \mathbf{u}_3 = 0$ (${}^c\mathbf{n}_{\pi r,i}^T \mathbf{v}_3 = 0$)，即在笛卡尔空间中平面的法向量 $\{{}^c\mathbf{n}_{\pi c,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$ ($\{{}^c\mathbf{n}_{\pi r,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$) 共面但不共线，且均垂直于 $\mathbf{u}_3(\mathbf{v}_3)$ 方向，此时 Π_{mc} 和 Π_{mr} 可以为 \mathbf{R} 和 \mathbf{t} 的求解提供五个自由度的约束，即三个旋转自由度和两个平移自由度。

(3) \mathbf{H} 为奇异矩阵，且满足 $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ，则对于任意 $i \in \{1,2,\dots,N_\pi\}$ 有 ${}^c\mathbf{n}_{\pi c,i}^T \mathbf{u}_2 = 0$ (${}^c\mathbf{n}_{\pi r,i}^T \mathbf{v}_2 = 0$) 以及 ${}^c\mathbf{n}_{\pi c,i}^T \mathbf{u}_3 = 0$ (${}^c\mathbf{n}_{\pi r,i}^T \mathbf{v}_3 = 0$)，所以在笛卡尔空间中平面的法向量 $\{{}^c\mathbf{n}_{\pi c,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$ ($\{{}^c\mathbf{n}_{\pi r,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$) 共线，即只分布在 $\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1)$ 方向，此时 Π_{mc} 和 Π_{mr} 可以为 \mathbf{R} 和 \mathbf{t} 的求解提供三个自由度的约束，即两个旋转自由度和一个平移自由度。

下面对以上三种情况分别进行分析并给出具体求解方案。

4.1 \mathbf{H} 为非奇异(nonsingular)矩阵

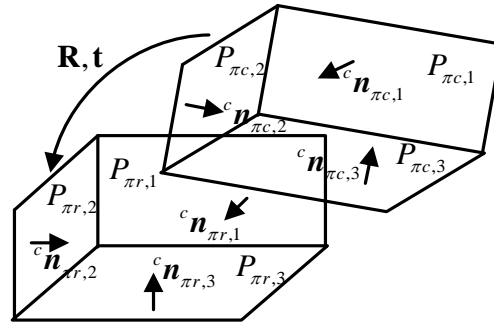


图7 平面特征为位姿求解提供六自由度约束

若 \mathbf{H} 为非奇异矩阵，即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ ，则 $\{{}^c\mathbf{n}_{\pi c,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$ 和 $\{{}^c\mathbf{n}_{\pi r,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$ 均不共面，如图7所示的三个两两之间相交的平面即属于这种情况。此时旋转矩阵 \mathbf{R} 为[39]

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T \quad (35)$$

而平移向量 \mathbf{t} 可直接用最小二乘算法计算得到

$$\mathbf{t} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d} \quad (36)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} {}^c\mathbf{n}_{\pi r,1}^T \\ {}^c\mathbf{n}_{\pi r,2}^T \\ \vdots \\ {}^c\mathbf{n}_{\pi r,N_\pi}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} {}^c d_{\pi r,1} - {}^c d_{\pi c,1} \\ {}^c d_{\pi r,2} - {}^c d_{\pi c,2} \\ \vdots \\ {}^c d_{\pi r,N_\pi} - {}^c d_{\pi c,N_\pi} \end{bmatrix} \quad (37)$$

4.2 \mathbf{H} 为奇异(singular)矩阵且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3 = 0$

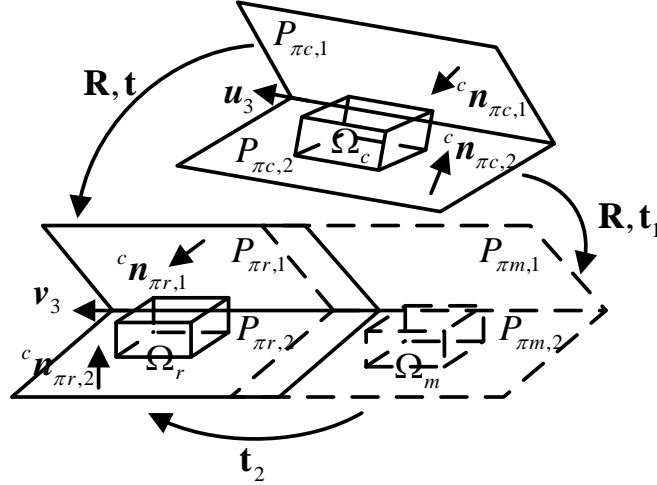


图 8 平面特征为位姿求解提供五自由度约束

若 \mathbf{H} 为奇异矩阵，且满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3 \neq 0$ ，则 $\{^c \mathbf{n}_{\pi c,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$ ($\{^c \mathbf{n}_{\pi r,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$) 共面但不共线，且均垂直于 \mathbf{u}_3 (\mathbf{v}_3) 方向，如图 8 所示的两个相交平面即属于这种情况，此时 \mathbf{R} 和 \mathbf{t} 的求解缺少 \mathbf{v}_3 方向平移自由度的约束。另外，由于实际数据受噪声影响， λ_3 并不会完全满足 $\lambda_3 = 0$ ，在本文实验中若 $\lambda_2 > 10\lambda_3$ 时即认为 $\lambda_3 = 0$ 。这种情况下旋转矩阵 \mathbf{R} 有两个可能的解[39]

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T \quad \text{or} \quad \mathbf{U}'\mathbf{V}'^T \quad (38)$$

其中 $\mathbf{U}' = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_3]$ 。此时若 \mathbf{R} 满足 $\det(\mathbf{R}) = 1$ 则为所求的旋转变换，若 $\det(\mathbf{R}) = -1$ 则为反射(reflection)变换。

对于平移向量 \mathbf{t} 的求解，由于 $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0$ ，所以无法直接用式(36)进行计算。以图 8 所示情况为例，若给平面 $P_{\pi c,1}$ 和 $P_{\pi c,2}$ 施加 \mathbf{u}_3 方向的平移变换，其平面参数均不会发生变化，所以当 $\{^c \mathbf{n}_{\pi c,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$ ($\{^c \mathbf{n}_{\pi r,i}, i=1,2,\dots,N_\pi\}$) 共面但不共线时，无法提供 \mathbf{v}_3 方向平移自由度的约束。此时令所求平移变换在 \mathbf{v}_3 方向的投影量为零，将式(33)调整为

$$J_t'(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{N_\pi} \left({}^c d_{\pi r,i} - ({}^c d_{\pi c,i} + {}^c \mathbf{n}_{\pi r,i}^T \mathbf{t}) \right)^2 + (\mathbf{v}_3^T \mathbf{t})^2 \quad (39)$$

同样可以使用最小二乘算法使 $J_t'(\mathbf{t})$ 最小化计算平移向量 \mathbf{t}_1 为

$$\mathbf{t}_1 = (\mathbf{A}'^T \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{A}'^T \mathbf{d}' \quad (40)$$

其中

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3^T \\ {}^c\mathbf{n}_{\pi r,1}^T \\ \vdots \\ {}^c\mathbf{n}_{\pi r,N_\pi}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}' = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^cd_{\pi r,1} - {}^cd_{\pi c,1} \\ \vdots \\ {}^cd_{\pi r,N_\pi} - {}^cd_{\pi c,N_\pi} \end{bmatrix} \quad (41)$$

通过上述方法计算得到平移向量 \mathbf{t}_1 使得两帧匹配平面集合 Π_{mc} 和 Π_{mr} 中的平面参数得到配准, 但对于传感器位姿变换来说, 还需要确定 \mathbf{v}_3 方向的平移自由度, 即确定平移量 $\mathbf{t}_2 = \mu \mathbf{v}_3$, 其中 $\mu \in R$, 如图 8 所示。

本文在平面参数空间中使用扫描匹配方法来计算 \mathbf{t}_2 , 图 8 中所示两帧平面参数空间的点集分别为

$$\Omega_c = \left\{ {}^p\mathbf{p}_{c,i} = \begin{bmatrix} {}^p\theta_{c,i}, {}^p\varphi_{c,i}, {}^pd_{c,i} \end{bmatrix}^T, i=1, \dots, N_c \right\} \quad (42)$$

和

$$\Omega_r = \left\{ {}^p\mathbf{p}_{r,i} = \begin{bmatrix} {}^p\theta_{r,i}, {}^p\varphi_{r,i}, {}^pd_{r,i} \end{bmatrix}^T, i=1, \dots, N_r \right\} \quad (43)$$

令 $\Omega_m = \left\{ {}^p\mathbf{p}_{m,i} = \begin{bmatrix} {}^p\theta_{m,i}, {}^p\varphi_{m,i}, {}^pd_{m,i} \end{bmatrix}^T, i=1, \dots, N_m \right\}$ 表示 Ω_c 经过旋转变换 \mathbf{R} 和平移变换 \mathbf{t}_1 后得到的点集, Ω_c , Ω_r 以及 Ω_m 的位置关系如图 8 所示。任取 ${}^p\mathbf{p}_{m,i} \in \Omega_m$, 其对应笛卡尔空间平面参数为 ${}^c\boldsymbol{\pi}_{m,i} = \begin{bmatrix} {}^c\mathbf{n}_{m,i}, {}^cd_{m,i} \end{bmatrix}^T$, 经过平移变换 \mathbf{t}_2 后得到 ${}^p\mathbf{p}'_{m,i}$, 其对应笛卡尔空间平面参数为 ${}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i} = \begin{bmatrix} {}^c\mathbf{n}'_{m,i}, {}^cd'_{m,i} \end{bmatrix}^T$, 则有

$${}^c\mathbf{n}'_{m,i} = {}^c\mathbf{n}_{m,i} \quad (44)$$

$${}^cd'_{m,i} = {}^cd_{m,i} + {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{t}_2 = {}^cd_{m,i} + \mu \cdot {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3 \quad (45)$$

由式(44)和式(45)可知, 平移变换 \mathbf{t}_2 作用于 ${}^c\boldsymbol{\pi}_{m,i}$ 时不会改变 ${}^c\mathbf{n}_{m,i}$, 只会引起 ${}^cd_{m,i}$ 的变化, 其变化量为 $\mu \cdot {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3$ 。当 ${}^c\mathbf{n}_{m,i}$ 满足 ${}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3 = 0$ 时, 则 ${}^c\boldsymbol{\pi}_{m,i}$ 对平移变换 \mathbf{t}_2 的计算没有约束作用, 所以令

$$\Omega_{m,sel} = \left\{ {}^p\mathbf{p}_{m,i}, i=1, 2, \dots, N_{m,sel} \mid {}^p\mathbf{p}_{m,i} \in \Omega_m, {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3 > \varepsilon_{sel} \right\} \quad (46)$$

其中阈值 ε_{sel} 的设置需要考虑扫描数据点的局部平面拟合受噪声影响的情况, 如果其设置的值过小, 则 $\Omega_{m,sel}$ 中可能包含很多对 \mathbf{t}_2 的计算约束作用很小的数据点, 如果其设置的值过大, Ω_m 中有可能不存在足够多满足条件的数据点, 导致 $\Omega_{m,sel}$ 中元素个数太少而无法继续下面

的计算，在本文实验中 ε_{sel} 取 0.5。同理可得

$$\Omega_{r,sel} = \left\{ {}^c \mathbf{p}_{r,i}, i=1,2,\dots,N_{r,sel} \mid {}^c \mathbf{p}_{r,i} \in \Omega_r, {}^c \mathbf{n}_{r,i}^T \mathbf{v}_3 > \varepsilon_{sel} \right\} \quad (47)$$

接下来对集合 $\Omega_{m,sel}$ 和 $\Omega_{r,sel}$ 使用 NDT 算法[40]来计算平移变换 \mathbf{t}_2 。由于在第 3.2 节建立分层网格结构时已经对每个网格内的数据点进行分布拟合并得到了分布参数，在这里直接取参考帧中第 L 层即最低层的网格

$$\{o_{Lk} = ({}^c \mathbf{n}_{Lk}, {}^c d_{Lk}, {}^r \mathbf{m}_{Lk}, {}^r S_{Lk}, c_{Lk}), k=1,2,\dots,(N_s)^{L-1}\} \quad (48)$$

对于 ${}^p \mathbf{p}_{m,i} \in \Omega_{m,sel}$ ，使其经过平移变换 \mathbf{t}_2 得到 ${}^p \mathbf{p}'_{m,i}$ ，其计算方法见式(44)和式(45)。

假设 ${}^p \mathbf{p}'_{m,i}$ 所在网格为 o_{Lk_i} ，用牛顿迭代法求解 μ 使式(49)最小化

$$f(\mu) = - \sum_{i=1}^{N_{r,sel}} \exp \frac{- \left({}^p \mathbf{p}'_{m,i} - {}^p \mathbf{m}_{Lk_i} \right)^T \left({}^p S_{Lk_i} \right)^{-1} \left({}^p \mathbf{p}'_{m,i} - {}^p \mathbf{m}_{Lk_i} \right)}{2} \quad (49)$$

4.3 H 为奇异(singular)矩阵且 $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

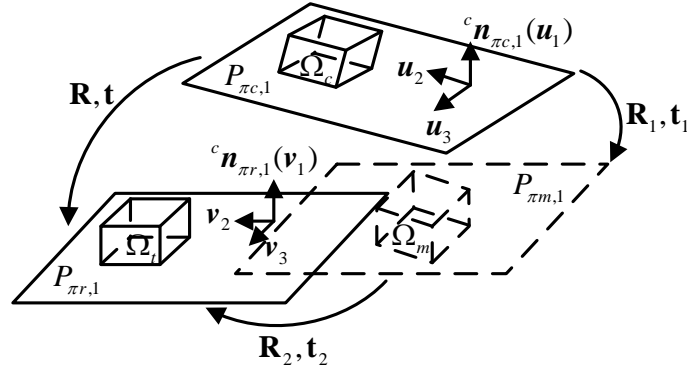


图 9 平面特征为位姿求解提供三自由度约束

若 H 为奇异矩阵，且满足 $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ，则 $\{ {}^c \mathbf{n}_{\pi c,i}, i=1,2,\dots,N_{\pi} \}$ ($\{ {}^c \mathbf{n}_{\pi r,i}, i=1,2,\dots,N_{\pi} \}$) 共线，即只分布在 $\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1)$ 方向，如图 9 所示只有一个匹配的平面即属于这种情况，此时 R 和 t 的求解缺少 \mathbf{v}_1 方向旋转自由度以及 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 方向平移自由度的约束。

对于 R 的求解，由于此时 Π_{mc} 和 Π_{mr} 无法约束 \mathbf{v}_1 方向的旋转变换，所以理论上存在无数个旋转矩阵使式(32)取得最小值[39]，为了确定一个能使平面集合 Π_{mc} 和 Π_{mr} 得到配准的旋转矩阵 R_1 ，将式(32)调整为

$$J_R(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N_\pi} \left\| {}^c \mathbf{n}_{\pi r, i} - \mathbf{R} \cdot {}^c \mathbf{n}_{\pi c, i} \right\|^2 + \left\| \mathbf{v}_2 - \mathbf{R} \mathbf{u}_2 \right\|^2 \quad (50)$$

令 $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N_\rho} {}^c \mathbf{n}_{\pi s, i} {}^c \mathbf{n}_{\pi t, i}^T + \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T = \mathbf{H} + \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$ ，其 SVD 分解为 $\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}^T$ ，此时存在旋

转矩阵 \mathbf{R}_1 使式(50)取得最小值，其计算方法与第 4.2 节相同。

而平移向量 \mathbf{t}_1 的求解方法与 4.2 节类似，将式(33)调整为

$$J_t(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{N_\pi} \left({}^c d_{\pi r, i} - \left({}^c d_{\pi c, i} + {}^c \mathbf{n}_{\pi r, i}^T \mathbf{t} \right) \right)^2 + \left(\mathbf{v}_2^T \mathbf{t} \right)^2 + \left(\mathbf{v}_3^T \mathbf{t} \right)^2 \quad (51)$$

使用最小二乘算法使 $J_t(\mathbf{t})$ 最小化可得平移向量 \mathbf{t}_1 为

$$\mathbf{t}_1 = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d} \quad (52)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \\ {}^c \mathbf{n}_{\pi r, 1}^T \\ \vdots \\ {}^c \mathbf{n}_{\pi r, N_\pi}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^c d_{\pi r, 1} - {}^c d_{\pi c, 1} \\ \vdots \\ {}^c d_{\pi r, N_\pi} - {}^c d_{\pi c, N_\pi} \end{bmatrix} \quad (53)$$

同样地，通过上述方法计算得到的旋转矩阵 \mathbf{R}_1 和平移向量 \mathbf{t}_1 使得两帧匹配平面集合 Π_{mc} 和 Π_{mr} 中的平面参数得到配准，但对于传感器位姿变换来说，还需要确定旋转矩阵 \mathbf{R}_2 和平移向量 \mathbf{t}_2 ，即 \mathbf{v}_1 方向上的旋转自由度和 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 方向上的平移自由度，如图 9 所示。令 $\mathbf{w} = [\phi, x, y]^T$ ， $\phi \in [0, 2\pi]$ 表示 \mathbf{v}_1 方向上的旋转角度， $x, y \in \mathbb{R}$ 分别表示 \mathbf{t}_2 在 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 方向上的投影量，则 \mathbf{R}_2 和 \mathbf{t}_2 分别可以表示为

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} v_{1,x}^2 \cdot k\phi + c\phi & v_{1,x} v_{1,y} \cdot k\phi - v_{1,z} \cdot s\phi & v_{1,x} v_{1,z} \cdot k\phi + v_{1,y} \cdot s\phi \\ v_{1,x} v_{1,y} \cdot k\phi + v_{1,z} \cdot s\phi & v_{1,y}^2 \cdot k\phi + c\phi & v_{1,y} v_{1,z} \cdot k\phi - v_{1,x} \cdot s\phi \\ v_{1,x} v_{1,z} \cdot k\phi - v_{1,y} \cdot s\phi & v_{1,y} v_{1,z} \cdot k\phi + v_{1,x} \cdot s\phi & v_{1,z}^2 \cdot k\phi + c\phi \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\mathbf{t}_2 = x \mathbf{v}_2 + y \mathbf{v}_3 \quad (55)$$

其中 $s\phi = \sin \phi$ ， $c\phi = \cos \phi$ ， $k\phi = 1 - \cos \phi$ ， $\mathbf{v}_1 = [v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,z}]^T$ 。

与 4.2 节类似地，仍然在平面参数空间中使用扫描匹配方法来计算 \mathbf{w} 。任取 ${}^p \mathbf{p}_{m,i} \in \Omega_m$ ，

其对应笛卡尔空间平面参数为 ${}^c\boldsymbol{\pi}_{m,i} = [{}^c\mathbf{n}_{m,i}, {}^cd_{m,i}]^T$ ，经过位姿变换 \mathbf{w} 后得到 ${}^p\mathbf{p}'_{m,i}$ ，其对应笛卡尔空间平面参数为 ${}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i} = [{}^c\mathbf{n}'_{m,i}, {}^cd'_{m,i}]^T$ ，则有

$${}^c\mathbf{n}'_{m,i} = \mathbf{R}_2 \cdot {}^c\mathbf{n}_{m,i} \quad (56)$$

$${}^cd'_{m,i} = {}^cd_{m,i} + (\mathbf{R}_2 \cdot {}^c\mathbf{n}_{m,i})^T \mathbf{t}_2 \quad (57)$$

当 \mathbf{w} 变化很小时，旋转矩阵 \mathbf{R}_2 可以近似为

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -v_{1,z}\phi & v_{1,y}\phi \\ v_{1,z}\phi & 1 & -v_{1,x}\phi \\ -v_{1,y}\phi & v_{1,x}\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

为了表示 \mathbf{w} 的变化对 ${}^c\boldsymbol{\pi}_{m,i}$ 的影响，计算 ${}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i}$ 对 \mathbf{w} 的Jacobian矩阵为

$$\frac{\partial {}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^c\mathbf{n}'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}} \\ \frac{\partial {}^cd'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_z v_{1,y} - n_y v_{1,z} & 0 & 0 \\ n_x v_{1,z} - n_z v_{1,x} & 0 & 0 \\ n_y v_{1,x} - n_x v_{1,y} & 0 & 0 \\ 0 & {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_2 & {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

其中 $\mathbf{n}_{m,i} = [n_x, n_y, n_z]^T$ ，则对于微量位姿变换 $\Delta\mathbf{w}$ 有

$$\begin{bmatrix} {}^c\mathbf{n}'_{m,i} - {}^c\mathbf{n}_{m,i} \\ {}^cd'_{m,i} - {}^cd_{m,i} \end{bmatrix} = \frac{\partial {}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \quad (60)$$

令

$$D({}^c\mathbf{n}_{m,i}) = \begin{bmatrix} {}^c\mathbf{n}'_{m,i} - {}^c\mathbf{n}_{m,i} \\ {}^cd'_{m,i} - {}^cd_{m,i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} {}^c\mathbf{n}'_{m,i} - {}^c\mathbf{n}_{m,i} \\ {}^cd'_{m,i} - {}^cd_{m,i} \end{bmatrix} = \Delta\mathbf{w}^T \left(\frac{\partial {}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}} \right)^T \frac{\partial {}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \quad (61)$$

则 $D({}^c\mathbf{n}_{m,i})$ 表征了对 ${}^c\boldsymbol{\pi}_{m,i}$ 施加位姿变换 $\Delta\mathbf{w}$ 后，其对应笛卡尔空间局部平面的平面参数的

变化程度。再令 $\Psi = \left(\frac{\partial {}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}} \right)^T \frac{\partial {}^c\boldsymbol{\pi}'_{m,i}}{\partial \mathbf{w}}$ ，并对其进行特征值分解 $\Psi = \mathbf{Q}\mathbf{A}_\Psi\mathbf{Q}^T$ ，其中

$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]^T$ ， $\mathbf{A}_\Psi = \text{diag}\{\lambda_{\Psi,1}, \lambda_{\Psi,2}, \lambda_{\Psi,3}\}$ ，其中各特征值与其对应的特征向量分别为

$$\lambda_{\Psi,1} = \|\mathbf{v}_1 \times {}^c\mathbf{n}_{m,i}\|^2 \quad \mathbf{q}_1 = [1, 0, 0]^T \quad (62)$$

$$\lambda_{\Psi,2} = ({}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_2)^2 + ({}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3)^2 \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\rho} [0, {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_2, {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3]^T \quad (63)$$

$$\lambda_{\Psi,3} = 0 \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\rho} [0, {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_3, -{}^c\mathbf{n}_{m,i}^T \mathbf{v}_2]^T \quad (64)$$

其中 ρ 表示归一化因子。由式(62)~式(64)可以看出, \mathbf{w} 中 ϕ 表示的旋转变换和 $[x, y]^T$ 表示的平移变换对 $D({}^c\mathbf{n}_{m,i})$ 的影响是相互独立的, 当 \mathbf{w} 沿 \mathbf{q}_1 方向的变化表示 \mathbf{v}_1 方向上的旋转变换, 而 \mathbf{w} 沿 \mathbf{q}_2 和 \mathbf{q}_3 方向的变化表示 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 所在平面上的平移变换, 如图 10 所示, 而 $\lambda_{\psi,1}$, $\lambda_{\psi,2}$, $\lambda_{\psi,3}$ 分别表示 \mathbf{w} 沿 \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 , \mathbf{q}_3 方向变化时 $D({}^c\mathbf{n}_{m,i})$ 的变化率。其中由式(64)可知, 对于任意 ${}^c\pi_{m,i}$, 当 \mathbf{w} 沿 \mathbf{q}_3 方向发生变化时, 均不会改变 $D({}^c\mathbf{n}_{m,i})$, 即 \mathbf{q}_3 方向上的平移变换无法引起平面参数 ${}^c\pi_{m,i}$ 变化。而由式(62)和式(63)可知, 当 ${}^c\pi_{m,i}$ 满足 ${}^c\mathbf{n}_{m,i}^T\mathbf{v}_2=0$ 且 ${}^c\mathbf{n}_{m,i}^T\mathbf{v}_3=0$ 时, 同时有 $\lambda_{\psi,1}=0$ 和 $\lambda_{\psi,2}=0$, 所以应从 ${}^m\Omega$ 中去除满足 ${}^c\mathbf{n}_{m,i}^T\mathbf{v}_2=0$ 且 ${}^c\mathbf{n}_{m,i}^T\mathbf{v}_3=0$ 条件的 ${}^p\mathbf{p}_{m,i}$, 得到集合

$$\Omega_{m,sel} = \left\{ {}^p\mathbf{p}_{m,i}, i=1,2,\dots,N_{m,sel} \mid {}^p\mathbf{p}_{m,i} \in \Omega_m, {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T\mathbf{v}_2 > \varepsilon_{sel}, {}^c\mathbf{n}_{m,i}^T\mathbf{v}_3 > \varepsilon_{sel} \right\} \quad (65)$$

同理可得

$$\Omega_{r,sel} = \left\{ {}^p\mathbf{p}_{r,i}, i=1,2,\dots,N_{r,sel} \mid {}^p\mathbf{p}_{r,i} \in \Omega_r, {}^c\mathbf{n}_{r,i}^T\mathbf{v}_2 > \varepsilon_{sel}, {}^c\mathbf{n}_{r,i}^T\mathbf{v}_3 > \varepsilon_{sel} \right\} \quad (66)$$

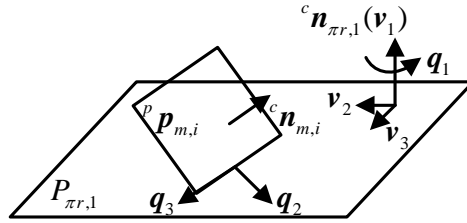


图 10 沿特征向量方向变换情况

接下来对集合 $\Omega_{m,sel}$ 和 $\Omega_{r,sel}$ 使用 NDT 算法[40]来计算变换 \mathbf{w} , 其处理方法与 4.2 节中相同。

5. 实验(Experiments)

本文实验所用 RGB-D 传感器为 Microsoft Kinect 传感器, 处理器为 Intel Pentium 处理器, CPU 主频 2.90GHz。首先对本文基于平面参数空间的平面提取算法进行验证。然后在 RGB-D 标准数据集上完成本文方法的定量实验, 并与另外两种方法进行对比, 充分验证本文方法的准确性和有效性。最后在另外两种算法都失效的极端实验环境下验证本文方法的鲁棒性。

5.1 平面提取实验

利用 Microsoft Kinect 传感器采集的 RGB 和深度数据完成笛卡尔空间中三维点云的生成, 其结果如图 11(a)所示。在笛卡尔空间中用 PCA 算法完成局部平面拟合, 将局部平面投影到平面参数空间中成为平面参数空间数据点, 其具体过程见本文第 3.1 节, 并根据 Algorithm 1 完成基于平面参数空间的平面提取, 其结果如图 11(b)所示, 其中相同颜色的彩色点表示该点对应笛卡尔空间中的局部平面处于同一平面上。将平面参数空间中平面提取的结果再投影到笛卡尔空间中, 其结果如图 11(c)所示。

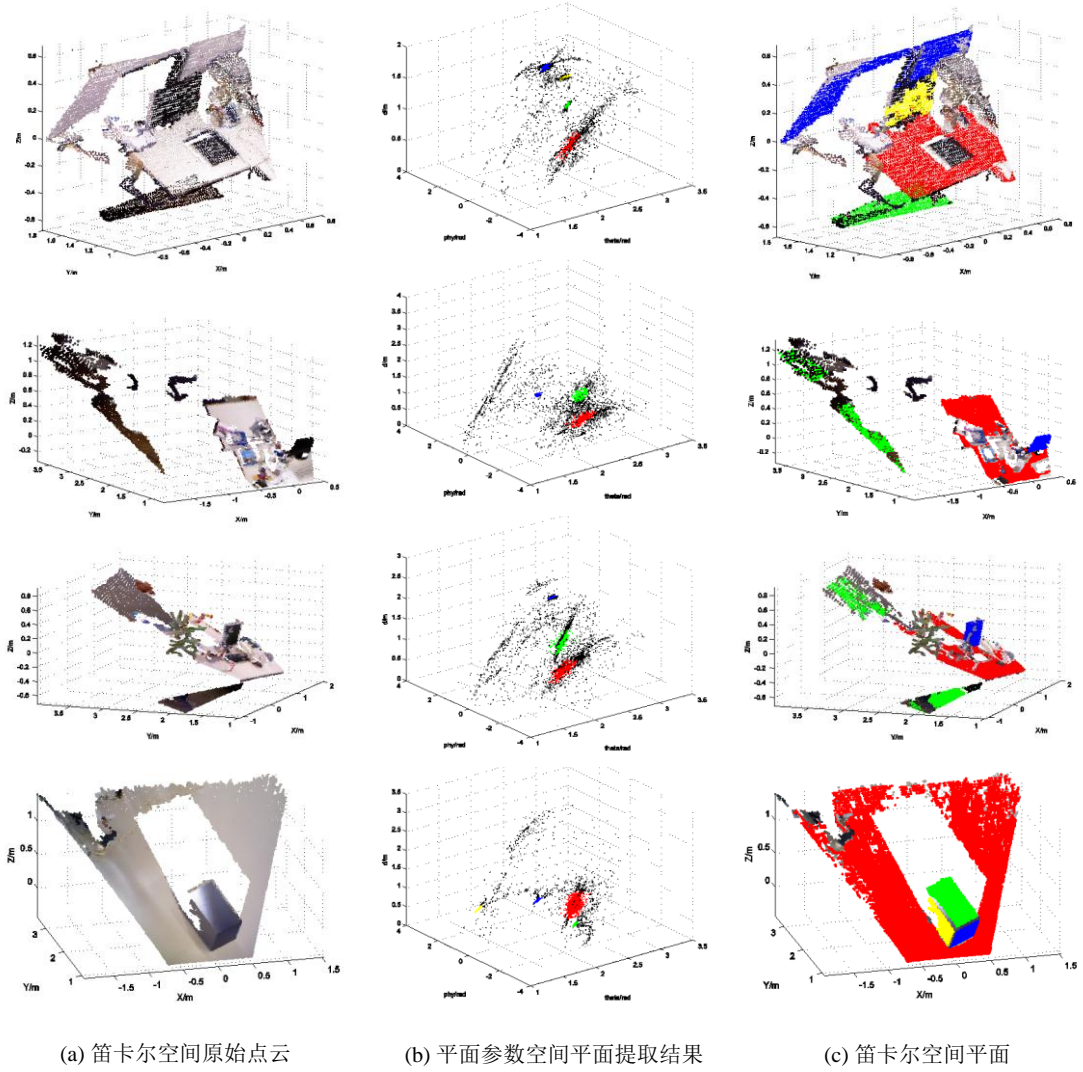


图 11 平面提取算法实验结果

5.2 RGB-D 标准数据集对比实验

本文所用数据集为 Freiburg RGB-D 标准数据集[41]。Freiburg RGB-D 标准数据集是专门用于 RGB-D SLAM 系统测试的标准数据集，在这个数据集中包含 39 个由 Kinect 传感器采集的图像序列(image sequences)以及与其采集过程中时间同步的 Kinect 传感器位姿真值(ground truth camera poses)。图像序列中包含以 30Hz 的帧率采集的彩色图像和深度图像，其图像分辨率均为 640×480 。数据集的图像序列采集环境主要分为办公室环境和工业大厅(industrial hall)环境，包含多种场景以及 Kinect 传感器运动模式。本文选择五个在不同场景下采集的图像序列，其详细信息见表 1，并利用文献[41]给出的两种测试评价指标，即绝对轨迹误差(Absolute Trajectory Error, ATE)和相对位姿误差(Relative Pose Error, RPE)，对本文算法以及两种对比算法的性能进行测试。

两种对比算法分别为基于平面特征和点特征结合的扫描匹配方法(Plane-point)[34]，以及基于点特征和 ICP 算法的扫描匹配方法(RGBD-ICP)[17]。其中 Plane-point 方法是针对 Kinect 传感器提出的对平面特征和点特征同时进行 RANSAC 算法来完成特征的匹配和传感器位姿估计的方法。而 RGBD-ICP 方法是针对 RGB-D 传感器提出的，对点特征使用 RANSAC 算法得到特征匹配结果和传感器位姿估计，并将其作为 ICP 算法的初值，保证 ICP 算法收敛

到全局最优解。两个对比方法中的点特征均是通过在图像中抽取 SURF 图像特征点，再利用深度信息计算得到的三维点特征。表 2 给出了三种方法在 Freiburg RGB-D 标准数据集中五个不同场景采集的图像序列上的实验结果，从表可以看出在各图像序列上的结果，本文方法不论是 ATE 还是 RPE 均小于两种对比方法。表 3 给出了本文方法应用于各图像序列时，RGB-D 传感器位姿变换求解中 6-DoF, 5-DoF 以及 3-DoF 三种情况出现的比例，由于 Kinect 传感器视野范围较小(水平视角 57°, 垂直视角 43°)，有效深度范围也较小(1.2~3.5m)，再加上室内环境中存在大量平行平面(如桌子和地面，柜子门和墙面等)，所以平面特征无法为位姿估计提供 6-DoF 约束的情况会以较高的概率出现，说明本文方法中以平面特征结合平面参数空间扫描匹配的方法来进行求解的必要性。下面结合各图像序列采集方式及其采集场景的特点，对实验结果进行说明。

表 1 五个图像序列采集相关信息

	Fr1/xyz	Fr2/desk	Fr1/room	Fr3/cabinet	Fr2/pioneer360
采集方式	手持	手持	手持	手持	机器人平台
持续时间 s	30.0	99.4	48.9	38.5	72.7
轨迹长度 m	7.11	18.8	15.9	8.11	16.1
平均速度 m/s	0.244	0.193	0.334	0.216	0.225
平均角速度 deg/s	8.92	6.33	29.8	10.2	12.0
传感器轨迹	0.46m	3.90m	2.54m	2.72m	4.24m
运动范围	×0.70m	×4.13m	×2.21m	×2.50m	×4.38m
m×m×m	×0.44m	×0.57m	×0.51m	×0.44m	×0.06m

表 2 Freiburg RGB-D 标准数据集定量实验结果

		Our method	Plane-point	RGB-D ICP
Fr1/xyz	ATE RMSE	0.0381m	0.0513m	0.0539m
	RPE RMSE	0.0224m, 0.771°	0.0259m, 0.956°	0.0233m, 1.11°
Fr2/desk	ATE RMSE	0.0987m	0.127m	0.305m
	RPE RMSE	0.0484m, 1.57°	0.0507m, 1.70°	0.0515m, 1.81°
Fr1/room	ATE RMSE	0.284m	0.341m	1.53m
	RPE RMSE	0.0418m, 1.81°	0.0668m, 2.44°	0.365m, 21.4°
Fr3/cabinet	ATE RMSE	0.0709m	0.760m	1.33m
	RPE RMSE	0.0113m, 1.02°	0.134m, 12.1°	0.599m, 19.6°
Fr2/pioneer360	ATE RMSE	0.0381m	Failed	Failed
	RPE RMSE	0.0224m, 0.771°		

表 3 各场景中位姿估计三种情况出现比例

	Fr1/xyz	Fr2/desk	Fr1/room	Fr3/cabinet	Fr2/pioneer360
6-DoF	44.6%	53.8%	44.7%	48.5%	2.1%
5-DoF	40.9%	35.1%	32.5%	47.4%	20.6%
3-DoF	14.5%	11.1%	22.8%	4.1%	77.3%

在图像序列 Fr1/xyz 的采集过程中，手持 Kinect 传感器指向办公室环境中的某个方向，其运动模式只包含沿 XYZ 三个坐标轴的简单平移运动，而传感器姿态方向基本不变，因此其扫描范围也较小。三种方法对 Fr1/xyz 图像序列的建图结果如图 12 所示，其中图 12(a)~(c)分别表示通过三种方法创建的增量式三维环境点云地图，图 12(d)~(f)分别表示三种方法的 ATE 投影到 X-Y 平面上的可视化结果。而在图像序列 Fr2/desk 中，桌子、显示器、键盘、

椅子等物构成典型办公室场景，而手持 Kinect 传感器绕着该场景从不同方向进行扫描。三种扫描匹配方法对 Fr1/xyz 图像序列的建图结果如图 13 所示，其中各个子图的含义与图 12 相同。从表 1 中可知，在这个图像序列中虽然 Kinect 传感器轨迹覆盖区域较大，但采集过程中移动速度较慢。从图 12 以及图 13 中可以看出，在这两个图像序列上，三种方法都能获得较好的地图创建结果，而从表 2 可知本文方法的 ATE 与 RPE 均低于其他两种方法。

在图像序列 Fr1/room 的采集过程中，手持 Kinect 传感器的扫描范围遍及整个办公室环境，包括屋子中的桌子、墙、天花板和地面等。三种扫描匹配方法对 Fr1/room 图像序列的建图结果如图 14 所示，其中各个子图的含义与图 12 相同。由表 1 中可知，该图像序列采集时 Kinect 传感器的移动速度相对较快，导致相邻两帧之间的重合区域(overlap)较小，这种情况下有效的匹配点特征数目也会减少，对于依赖于点特征来得到粗匹配结果的 RGBD-ICP 算法来说，可能会因为无法得到足够数量的有效匹配点特征而导致较大的位姿估计误差。从表 2 可知在这个图像序列的实验中，RGBD-ICP 算法的建图结果不论是 ATE 还是 RPE 均比较大，而图 14(c)中用其扫描匹配结果创建的三维点云地图直观上已无法还原环境原貌。本文方法和 Plane-point 算法均较好地完成了三维地图创建，但从表 2 中可以看出本文算法得到的 ATE 与 RPE 均小于 Plane-point 算法，而从图 14(d)~(f)中可以看出本文算法对 Kinect 传感器轨迹的还原要明显优于 Plane-point 方法。

在图像序列 Fr3/cabinet 的采集过程中，手持 Kinect 环绕桌面上的长方体进行扫描，桌面及长方体均为纯色，场景较单一。三种扫描匹配方法对 Fr1/room 图像序列的建图结果如图 15 所示，其中各个子图的含义与图 12 相同。从图 15(c)中可以看出通过 RGBD-ICP 算法创建的三维点云地图直观上无法还原环境原貌，从图 15(e)中可以看出 Plane-point 方法的 Kinect 传感器轨迹还原结果也很不理想，而由表 2 可知本文算法得到的 ATE 与 RPE 均小于另外两种算法，而从图 15(d)中可以看到，本文算法得到了较好的 Kinect 传感器轨迹还原结果。

而在图像序列 Fr2/pioneer360 采集时，则是将 Kinect 固定于 Pioneer 机器人上，由操作杆控制机器人进行运动，其采集环境为工业大厅(industrial hall)，与前四个场景所在的办公室环境相比面积较大，其扫描范围也较大。从表 2 中可以看出，在该场景下只有本文算法成功完成了环境地图的创建，其点云地图和 ATE 可视化结果如图 16(a)和图 16(b)所示。由于该图像序列的采集环境规模较大，多次出现如图 17 所示的情况，其中图 17(a)表示相信两帧的彩色图像上 SURF 图像特征点提取结果，图 17(b)表示其特征点在三维点云中的投影结果，由于 Kinect 传感器深度数据检测范围的限制，图像特征点投影到三维点云后得到的有效三维点特征数量不足以完成传感器位姿的计算。而 Plane-point 和 RGBD-ICP 两种对比算法都依赖于图像特征点的提取，所以在图像序列 Fr2/pioneer360 上均建图失败。

综上所述，本文方法在多种实验场景及 RGB-D 传感器扫描数据采集方法下，无论是 ATE 还是 RPE 均小于 Plane-point 方法和 RGBD-ICP 方法，得到优于另外两种方法的建图结果，甚至在另外两种方法都失效的实验环境下，也能够成功完成建图工作并维持较高的精度，充分证明了本文方法的准确性和鲁棒性。

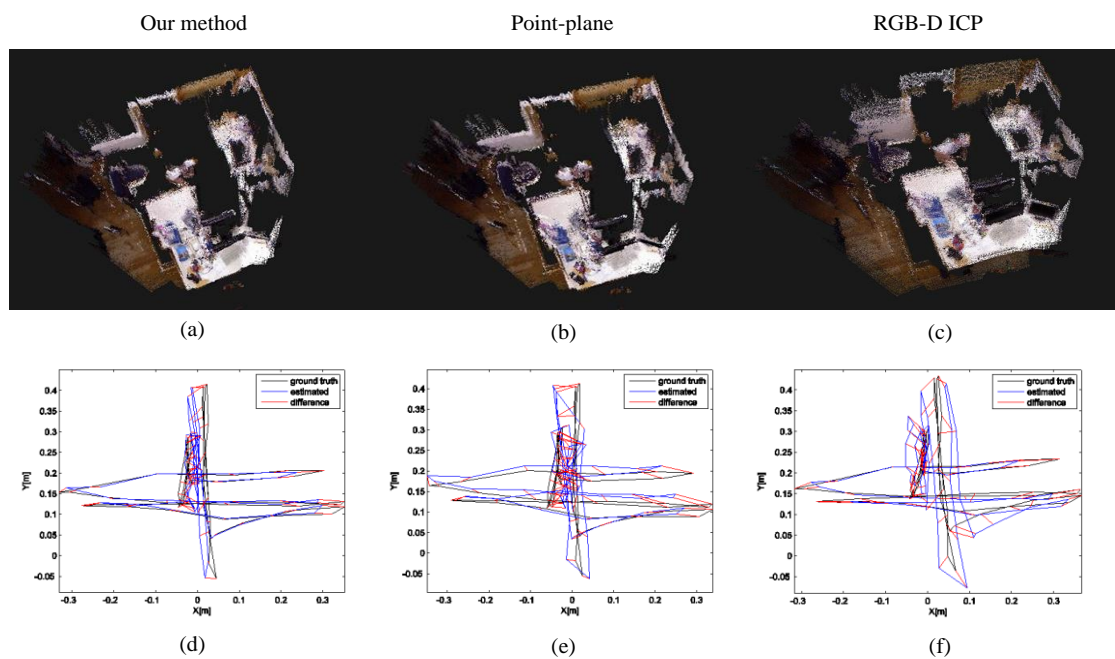


图 12 Fr1/xyz 实验结果

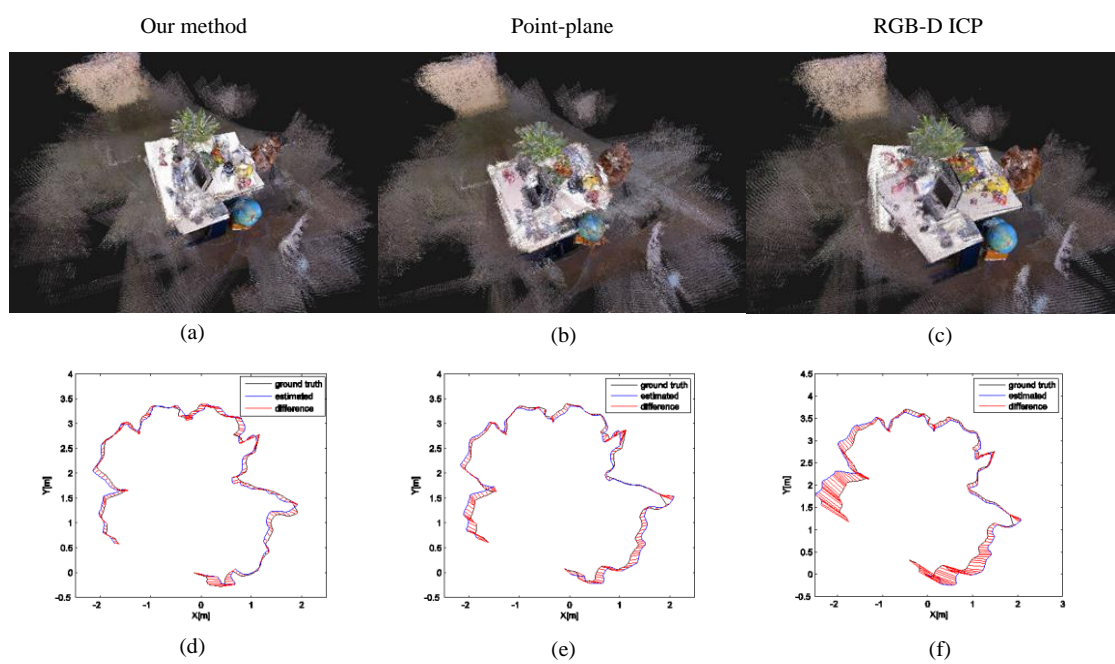


图 13 Fr2/desk 实验结果

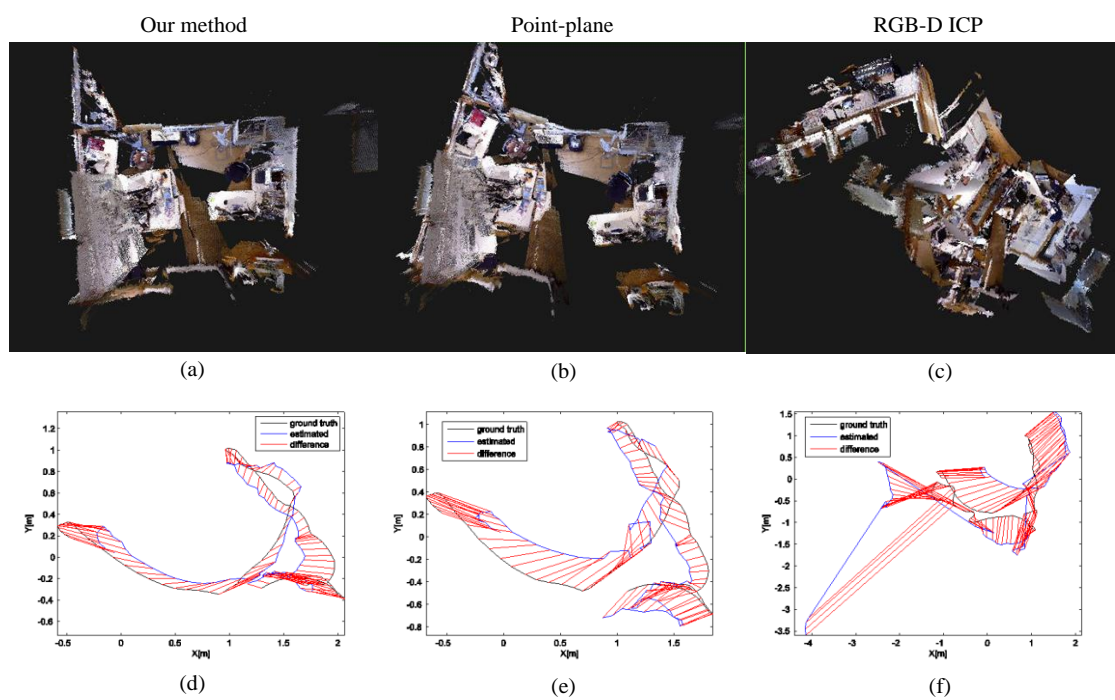


图 14 Fr1/room 实验结果

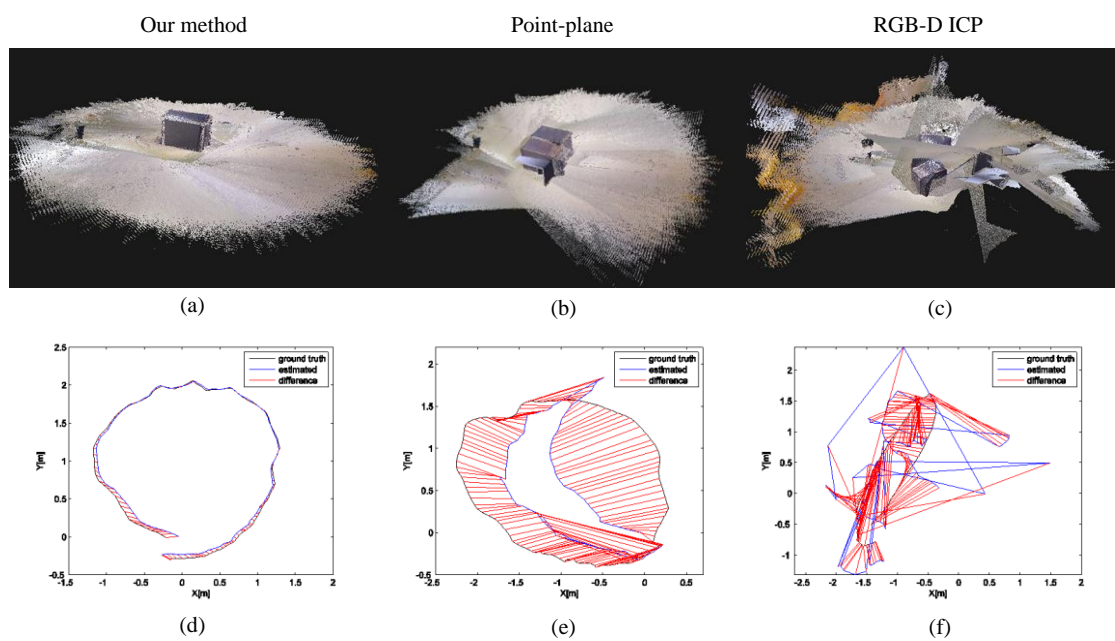


图 15 Fr3/cabinet 实验结果

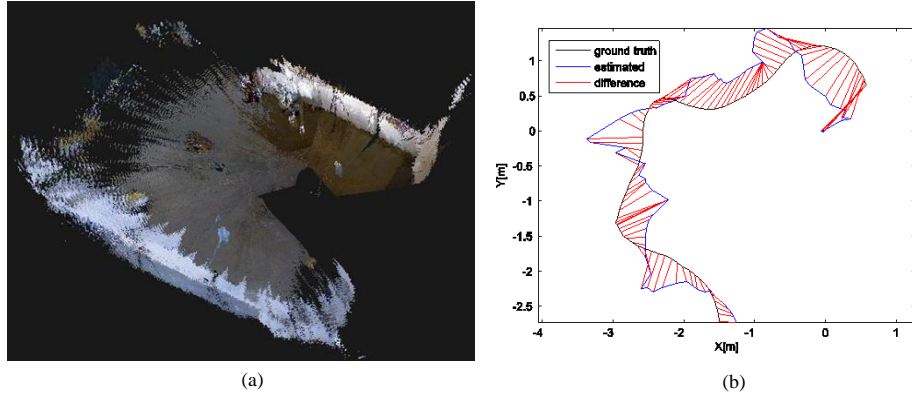


图 16 Fr2/pioneer360 本文算法建图结果

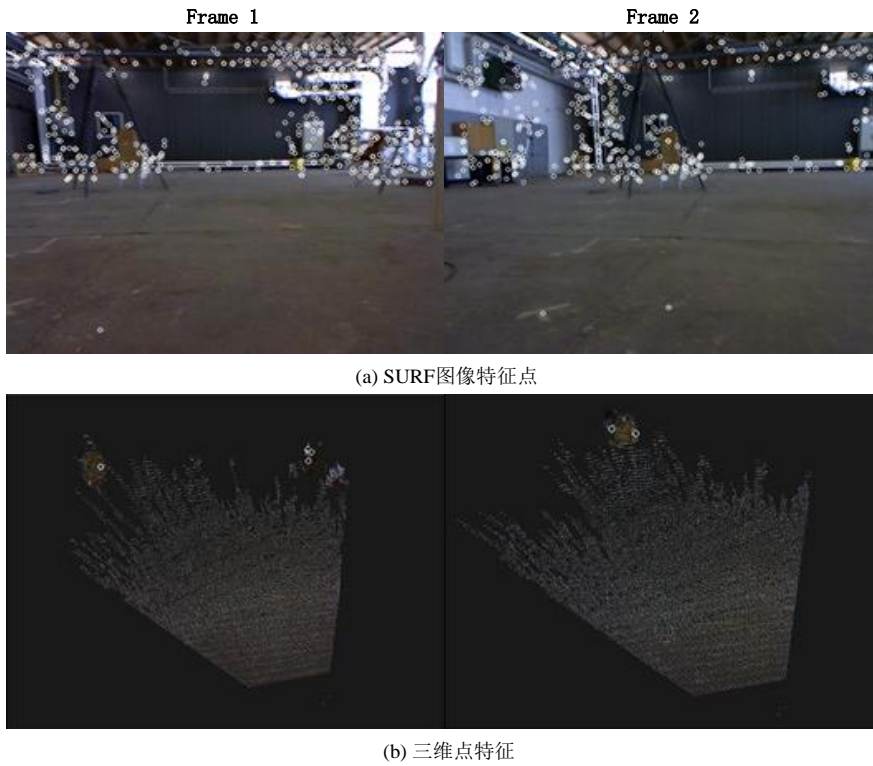


图 17 Fr2/pioneer360 相邻帧点特征提取情况

5.3 极端环境实验

为了充分验证本文算法的有效性和鲁棒性，本文在极端环境中进行实验。图 18 展示了本文算法的实验结果，其中图 18(a)~(c)为扫描过程中的三幅 RGB 图像，图 18(d)~(e)为在不同视角观察本文算法创建的点云地图的结果。该实验环境中无法提取出足够多的有效点特征，而两种对比算法都依赖于点特征的提取与匹配，所以均无法成功完成 RGB-D 传感器位姿的估计与环境地图的创建。实验证明，本文算法不仅在准确性上优于其他两种算法，而且其他两种算法均失效的实验环境中仍能够较好地完成环境建图的工作。

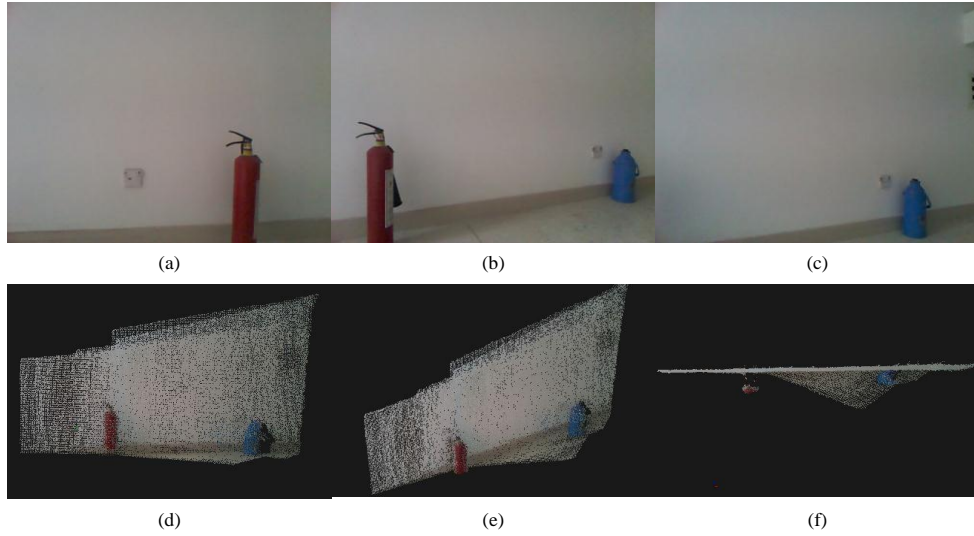


图 18 极端环境实验结果

6.4 实验结果分析(Discussion on experimental results)

从以上实验结果可以看出, 本文方法在多种实验环境及采集方法下, 无论是绝对路径误差或是相对位姿误差均能得到优于另外两种方法的建图结果, 甚至在另外两种方法都失效的实验环境下, 也能够成功完成建图工作并维持较高的精度。而本文方法之所以能在准确性和鲁棒性上都超越其他方法, 主要是由于本文方法与其他方法相比有以下优势

- 1) 本文方法只用到平面特征, 而不依赖于其他特征, 如点特征, 来完成传感器位姿的估计。因此, 在由 RGB 图像提取出的点特征因深度信息无效而无法得到三维点云中的有效点特征时, 如数据集 Fr2/pioneer360 中出现的情况, 以及因环境场景单一而无法提取到足够多有效点特征时, 如极端环境实验中出现的情况, 本文算法均可以成功完成 RGB-D 传感器位姿的估计进而完成室内三维环境建图, 而对于两个对比算法, 由于都依赖于点特征的提取, 所以都无法成功完成环境地图创建。
- 2) 本文方法通过提取环境中的平面特征而更好地对室内环境的结构特点进行描绘, 而且还用平面特征来对扫描匹配中非线性优化问题的求解自由度进行约束, 进而使得其在 RGB-D 传感器位姿变换幅度较大时也能更容易收敛到全局最优解, 与此同时扫描匹配还可以确定平面特征无法约束的自由度, 在实验过程中展现出比较好的鲁棒性, 如数据集 Fr1/room 和 Fr3/cabinet 上, 从表 2, 图 14 和图 15 中均可以看出本文方法在这两个数据集上得到了明显优于两种对比方法的结果。

综上所述, 本文方法既融合了基于平面特征的匹配与平面参数空间扫描匹配并发挥了各自的优势, 同时只依靠平面特征这一种特征的提取, 不依赖其他任何特征, 完成了 RGB-D 传感器位姿的估计, 实验证明本文方法相比于两种对比方法表现出了更好的准备性和鲁棒性。

6. 总结(Conclusion)

本文针对基于 RGB-D 传感器的室内三维环境建图问题, 提出一种基于平面参数空间和分层网格结构的平面特征提取与匹配算法, 以及基于平面特征和平面参数空间扫描匹配的 RGB-D 传感器位姿估计算法。首先提出平面参数空间的概念, 并利用分层网格结构对平面参数空间中的扫描数据进行组织和存储, 基于此来完成平面特征的提取和匹配。然后在从两帧扫描数据中得到具有匹配关系的平面后, 根据平面特征能够为位姿变换计算提供的约束个数, 将传感器位姿估计问题分为三维情况, 分别为 6-DoF 约束、5-DoF 约束以及 3-DoF 约束。当平面特征可以提供 6-DoF 约束时, 直接用平面特征来进行位姿变换的求解; 当平面特征提供 5-DoF(3-DoF)约束时, 先用平面特征确定五个(三个)自由度的变换, 再在平面参数空间中使用 NDT 算法来完成另外一个(三个)自由度的求解, 最终完成 RGB-D 传感器位姿的

估计。实验结果表明，对于多种实验场景，不论是手持 RGB-D 传感器的采集方式(数据集 Fr1/xyz, Fr2/desk, Fr1/room 和 Fr3/cabinet)还是机器人平台采集方式(数据集 Fr2/pioneer360)本文方法在准确性和有效性上都超越了 Plane-point 和 RGBD-ICP 这两种对比方法，表现出了较好的性能。甚至在两种对比方法均失效的极端环境下，本文方法也能够很好地完成传感器位姿估计进而实现环境地图的创建。

参考文献

- [1] H. Chen, D. Sun, J. Yang, and J. Chen, "localization for multirobot formations in indoor environment," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 15, no. 4, pp. 561-574, Aug. 2010.
- [2] K. Wang, Y. Liu, and L. Li, "A simple and parallel algorithm for real-time robot localization by fusing monocular vision and odometry/AHRS sensors," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 19, no. 4, pp. 1447-1457, Aug. 2014.
- [3] I. A. R. Ashokaraj, P. M. G. Silson, A. Tsourdos, and B. A. White, "Robust sensor-based navigation for mobile robots," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 58, no. 3, pp. 551-556, Mar. 2009.
- [4] B. A. Merhy, P. Payeur, and E. M. Petriu, "Application of segmented 2-D probabilistic occupancy maps for robot sensing and navigation," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 57, no. 12, pp. 2827-2837, Dec. 2008.
- [5] C. C. Tsai, H. C. Huang, and C. K. Chan, "Parallel elite genetic algorithm and its application to global path planning for autonomous robot navigation," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 10, pp. 4813-4821, Oct. 2011.
- [6] R. A. Gupta, A. A. Masoud, and M. Y. Chow, "A delay-tolerant, potential field-based, network implementation of an integrated navigation system," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 2, pp. 769-783, Feb. 2010.
- [7] F. Endres, J. Hess, J. Sturm, D. Cremers, and W. Burgard, "3-D mapping with an RGB-D camera," *IEEE Trans. Robot.*, vol. 30, no. 1, pp. 177-187, Feb. 2014.
- [8] S. M. Prakhya, L. Bingbing, L. Weisi, and U. Qayyum, "Sparse depth odometry: 3D keypoint based pose estimation from dense depth data," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, Seattle, USA, May. 2015, pp. 4216-4223.
- [9] D. Xu, H. Liwei, T. Min, and F. L. You, "Ceiling-based visual positioning for an indoor mobile robot with monocular vision," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 5, pp. 1617-1628, Jan. 2009.
- [10] T. Lee, S. Lim, S. Lee, S. An, and S. Oh, "Indoor mapping using planes extracted from noisy RGB-D sensors," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst.*, Vilamoura, Portugal, Oct. 2012, pp. 1727-1733.
- [11] K. Pathak, A. Birk, N. Vaskevicius, and J. Poppinga, "Fast registration based on noisy planes with unknown correspondences for 3-D mapping," *IEEE Trans. Robot.*, vol. 26, no. 3, pp. 424-441, Jun. 2010.
- [12] S. B. Han, J. H. Kim, and H. Myung, "Landmark-based particle localization algorithm for mobile robots with a fish-eye vision system," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 18, no. 6, pp. 1745-1756, Dec. 2013.
- [13] P. Osteen, J. Owens, and C. Kessens, "Online egomotion estimation of RGB-D sensors using spherical harmonics," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, Saint Paul, USA, May. 2012, pp. 1679 - 1684.
- [14] F. Fraundorfer, L. Heng, D. Honegger, G. H. Lee, L. Meier, P. Tanskanen, and M. Pollefeys, "Vision-based autonomous mapping and exploration using a quadrotor MAV," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst.*, Vilamoura, Portugal, Oct. 2012, pp. 4557-4564.
- [15] S. Weiss, M. W. Achtelik, S. Lynen, M. C. Achtelik, L. Kneip, M. Chli, and R. Siegwart, "Monocular vision for long-term micro aerial vehicle state estimation: A compendium," *Journal of Field Robotics*, vol. 30, no. 5, pp. 803-831, Sep. 2013.

- [16] H. Kretzschmar, C. Stachniss, and G. Grisetti, "Efficient informationtheoretic graph pruning for graph-based SLAM with laser range finders," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst., San Francisco, USA, Sep. 2011, pp. 865-871.
- [17] P. Henry, M. Krainin, E. Herbst, X. Ren, and D. Fox, "RGB-D mapping: Using kinect-style depth cameras for dense 3D modeling of indoor environments," Int. J. Robot. Res., vol. 31, no. 5, pp. 647-663, Apr. 2012.
- [18] J. Fabian and G. Clayton, "Error analysis for visual odometry on indoor, wheeled mobile robots with 3-D sensors," IEEE/ASME Trans. Mechatronics, vol. 19, no. 6, pp. 1896-1906, Dec. 2014.
- [19] R. C. Luo and C. C. Lai, "Enriched indoor map construction based on multisensor fusion approach for intelligent service robot," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 59, no. 8, pp. 3135-3145, Apr. 2011.
- [20] L. Wei, C. Cappelle, and Y. Ruichek, "Camera/laser/GPS fusion method for vehicle positioning under extended NIS-based sensor validation," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 62, no. 11, pp. 3110-3122, Nov. 2013.
- [21] M. Fallon, H. Johannsson, and J. Leonard, "Efficient scene simulation for robust Monte Carlo localization using an RGB-D camera," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Saint Paul, USA, May. 2012, pp. 1663-1670.
- [22] A. Ratter, C. Sammut, "Fused 2D/3D position tracking for robust SLAM on mobile robots," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Hamburg, Germany, Oct. 2015, pp. 1962 - 1969.
- [23] A. Davison, I. Reid, N. Molton, and O. Stasse, "MonoSLAM: Real-time single camera SLAM," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 29, no. 6, pp. 1052-1067, Jun. 2007.
- [24] X. Zhang, B. Xian, B. Zhao and Y. Zhang, "Autonomous flight control of a nano quadrotor helicopter in a GPS-denied environment using on-board vision," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 62, no. 10, pp. 6392-6403, Apr. 2015.
- [25] K. Tanaka, H. Ohtake, M. Tanaka, and H. O. Wang, "Wireless vision-based stabilization of indoor microhelicopter," IEEE/ASME Trans. Mechatronics, vol. 17, no. 3, pp. 519-524, Jun. 2012.
- [26] P. J. Besl and N. D. McKay, "A method for registration of 3-D shapes," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 14, no. 2, pp. 239-256, Feb. 1992.
- [27] I. Dryanovski, R. G. Valenti, and J. Xiao, "Fast visual odometry and mapping from RGB-D data," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Karlsruhe, Germany, Mar. 2013, pp. 2305-2310.
- [28] C. Choi, A. J. B. Trevor, and H. I. Christensen, "RGB-D edge detection and edge-based registration," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst., Tokyo, Japan, Oct. 2012, pp. 3342-3349.
- [29] C. Kerl, J. Sturm, and D. Cremers, "Robust odometry estimation for RGB-D cameras," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Karlsruhe, Germany, May. 2013, pp. 3748-3754.
- [30] F. Steinbrucker, J. Sturm, and D. Cremers, "Real-time visual odometry from dense RGB-D images," in Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vision Workshops, Barcelona, Spain, Nov. 2011, pp. 719-722.
- [31] S. Klose, P. Heise, and A. Knoll, "Efficient compositional approaches for real-time robust direct visual odometry from RGB-D data," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst., Tokyo, Japan, Nov. 2013, pp. 1100-1106.

- [32] D. Gutierrez-Gomez, W. Mayol-Cuevas, and J. Guerrero, "Inverse depth for accurate photometric and geometric error minimisation in RGB-D dense visual odometry," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Seattle, USA, May. 2015, pp. 83-89.
- [33] K. Yousif, A. Bab-hadiashar, and R. Hoseinnezhad, "Real-time RGB-D registration and mapping in texture-less environments using ranked order statistics," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst., Chicago, USA, Sep. 2014, pp. 2654-2660.
- [34] Y. Taguchi, Y. D. Jian, S. Ramalingam, and C. Feng, "Point-plane SLAM for hand-held 3D sensors," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Karlsruhe, Germany, Mar. 2013, pp. 5182-5189.
- [35] I. Dryanovski and R. G. Valenti, "Fast visual odometry and mapping from RGB-D data," in Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Saint Paul, USA, May. 2012, pp. 2305-2310.
- [36] W. Winterhalter, F. Fleckenstein, B. Steder, L. Spinello, W. Burgard, "Accurate indoor localization for RGB-D smartphones and tablets given 2D floor plans", in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst., Hamburg, Germany, Oct. 2015, pp. 3138-3143.
- [37] W. Wang and J. Yang, R. Muntz, "STING: A Statistical Information Grid Approach to Spatial Data Mining," in Proc. 23rd Conf. Very Large Data Bases, San Francisco, USA, 1997, pp. 186-195.
- [38] G. Jeh and J. Widom, "Simrank: A Measure of Structural-Context Similarity," in Proc. Eighth ACM SIGKDD Int. Conf. Knowledge Discovery and Data Mining, New York, USA, 2002, pp. 538-543.
- [39] K. S. Arun, T. S. Huang, and S. D. Blostein, "Least-squares fitting of two 3-D point sets," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 9, no. 5, pp. 698-700, May 1987.
- [40] P. Biber and W. StraBer, "The normal distributions transform: A new approach to laser scan matching," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst., Las Vegas, USA, Oct. 2003, pp. 2743-2748.
- [41] J. Sturm, N. Engelhard, F. Endres, W. Burgard, and D. Cremers, "A benchmark for the evaluation of RGB-D slam systems," in Proc. Int. Conf. Intell. Robot Syst., Vilamoura, Portugal, Oct. 2012, pp. 573-580.