两对已匹配平面时的部分实验结果

目标函数为

$$J(\boldsymbol{\theta})=\sum_{j=1}^{N^2}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right]$$

其中，

$$\mathbf{p}_i=(x,y,z)$$

$$\boldsymbol{\theta}=(\alpha,\beta,\gamma,t_x,t_y,t_z)$$

$${}^2\mathbf{p}_j^{'}=T\left({}^2\mathbf{p}_j,\boldsymbol{\theta}\right)$$

n_j 为 ${}^2\mathbf{p}_j^{'}$ 邻域内点的个数。

对于两对已匹配平面

$$J(t_2)=\sum_{j=1}^{N^2}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{q}(i,j,t_2)^T\mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{q}(i,j,t_2)\right]$$

其中

$$\mathbf{q}=\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)=\mathbf{HR}\cdot{}^2\mathbf{p}_j+\mathbf{Ht}_1\cdot{}^2\mathbf{p}_j+\mathbf{Ht}_2\cdot{}^2\mathbf{p}_j-\mathbf{H}\cdot{}^1\mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{Ht}_2=\begin{bmatrix}t_2\\0\\0\end{bmatrix}$$

则其梯度向量与 Hessian 矩阵（都为一维）分别为

$$g=\frac{\partial J}{\partial t_2}=-\sum_{j=1}^{N^2}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}}\mathbf{q}(i,j,t_2)^T\mathbf{C}_i^{-1}\frac{\partial\mathbf{q}(i,j,t_2)}{\partial t_2}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{q}(i,j,t_2)^T\mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{q}(i,j,t_2)\right]$$

$$H=\frac{\partial^2 J}{\partial t_2^2}=-\sum_{j=1}^{N^2}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{q}(i,j,t_2)^T\mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{q}(i,j,t_2)\right]\cdot\left[-\mathbf{q}(i,j,t_2)^T\mathbf{C}_i^{-1}\frac{\partial^2\mathbf{q}(i,j,t_2)}{\partial t_2^2}-\left(\frac{\partial\mathbf{q}(i,j,t_2)}{\partial t_2}\right)^T\mathbf{C}_i^{-1}\frac{\partial\mathbf{q}(i,j,t_2)}{\partial t_2}+\left(\mathbf{q}(i,j,t_2)^T\mathbf{C}_i^{-1}\frac{\partial\mathbf{q}(i,j,t_2)}{\partial t_2}\right)^2\right]$$

其中

$$\frac{\partial\mathbf{q}(i,j,t_2)}{\partial t_2}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

优化用 Newton-Raphson 算法。
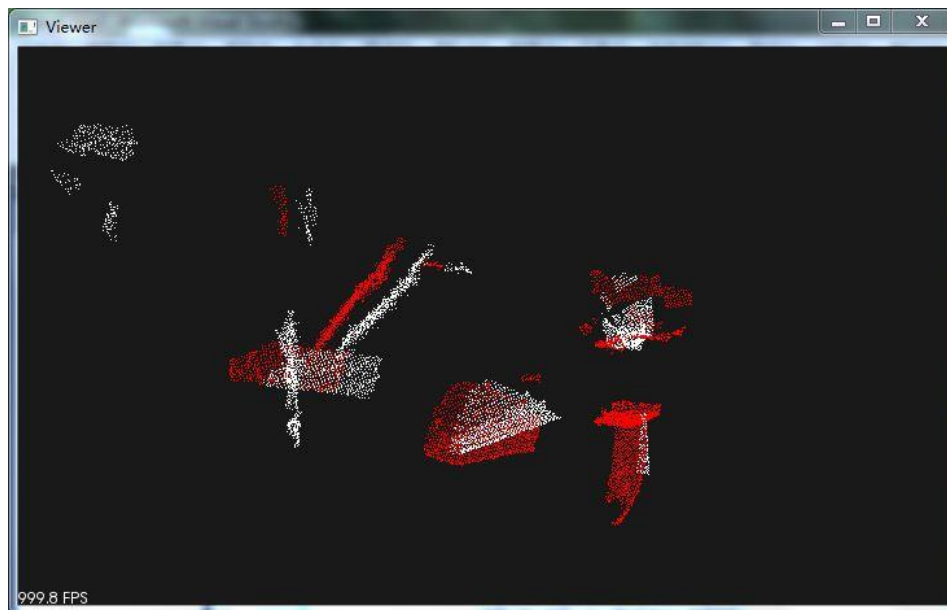
初值为 0，迭代 5 次后收敛：

t2	0	0.0145813	0.0328292	0.0622077	0.101979
J	1.0172	1.01822	1.01861	1.0172	1.01574
Gradient	7.33636	9.64707	17.1325	27.7926	-1.86055
Hessian	-2515.67	-2643.34	-2915.82	-3494.09	-3556.76
Delta_t2	0.00291626	0.00364958	0.00587569	0.00795418	-0.0005231

选择匹配平面附近一定区域（0.1m~0.3m）内的点集。

优化前（已经过平面匹配）：

优化后：