厦门大学《概率统计 I》试卷

________学院________系________年级________专业

主考教师：________试卷类型：（A 卷）

解题过程可能用到如下数据： $\Phi(1.36)=0.9131$，$\Phi(1.65)=0.9500$，$\Phi(1.96)=0.9750$，$\Phi(2.326)=0.99$，$\chi^2_{0.05}(1)=3.843$，$\chi^2_{0.025}(1)=5.025$，$\chi^2_{0.05}(2)=5.992$，$\chi^2_{0.025}(2)=7.378$，$\chi^2_{0.05}(3)=7.815$，$\chi^2_{0.025}(3)=9.348$，$\chi^2_{0.025}(10)=20.483$，$\chi^2_{0.975}(10)=3.247$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，$\chi^2_{0.05}(10)=18.307$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$t_{0.025}(10)=2.2281$，$t_{0.05}(10)=1.8125$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.05}(8)=1.8595$，$F_{0.05}(9,3)=8.81$，$F_{0.025}(9,3)=14.5$，$F_{0.05}(3,9)=3.86$，$F_{0.025}(3,9)=5.08$

分数	阅卷人

1、(12分)设某电子元件的寿命服从均值为100小时的指数分布，寿命超过200小时的电子元件属于一等品。从大批该电子元件中任取1000件，问其中一等品超过150件的概率是多少？（利用中心极限定理计算 ）

解：电子元件为一等品的概率为：$e^{-2}\approx 0.1353$

设1000件中该电子元件的一等品数为X，则

$$X\sim b(1000,0.1353)$$

由中心极限定理，$\dfrac{X-1000\times 0.1353}{\sqrt{1000\times 0.1353\times 0.8647}}\sim N(0,1)$

$$P\{X>150\}$$

$$\approx P\left\{\frac{X-1000\times 0.1353}{\sqrt{1000\times 0.1353\times 0.8647}}>1.36\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(1.36)$$

$$=0.0869$$

分数	阅卷人

2、 （15分）设随机变量 $X \sim U(-3,3)$，随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}3y^{-4}, & y>1\\ 0, & 其它\end{cases},$$

而且 X 与 Y 相互独立。记 $Z_1 = X/Y,\ Z_2 = XY$，试求 Z_1 与 Z_2 的相关系数 ρ.

解：$EZ_1 = E(X)\cdot E(\frac{1}{Y}) = 0$

$EZ_2 = E(X)\cdot E(Y) = 0$

$E(Z_1\cdot Z_2) = E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = 3 + 0^2 = 3$

$cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - EZ_1\cdot EZ_2 = 3$

$E(\frac{1}{Y^2}) = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cdot 3x^{-4}dx = \int_1^\infty 3x^{-6}dx = \frac{3}{5}$

$E(Z_1^2) = E(X^2)\cdot E(\frac{1}{Y^2}) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

$E(Y^2) = \int_1^\infty x^2\cdot 3x^{-4}dx = \int_1^\infty 3x^{-2}dx = 3$

$E(Z_2^2) = E(X^2)\cdot E(Y^2) = 3 \times 3 = 9$

$D(Z_1) = E(Z_1^2) - (EZ_1)^2 = \frac{9}{5} - 0^2 = \frac{9}{5}$

$D(Z_2) = E(Z_2^2) - (EZ_2)^2 = 9$

$$\rho = \frac{cov(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)\cdot D(Z_2)}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{5}\times 9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

分数	阅卷人

3、 (12 分) 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x\theta^{-1}\exp\{-x^2\theta^{-1}\}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases},$$

其中 $\theta(\theta>0)$ 为未知参数。设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求 θ 最大似然估计量 $\hat{\theta}$；　　（2）问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量，为什么？

解：(1) 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为样本观测值，则

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(2x_i\theta^{-1}\exp\{-x_i^2\theta^{-1}\}\right)$$

$$=2^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\theta^{-n}\exp\left\{-\theta^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$$

$$\ln L(\theta)=\left(n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)-n\ln\theta-\theta^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

令 $(\ln L(\theta))'=-\frac{n}{\theta}+\theta^{-2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$，解得

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}$$

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$.

(2) $E(X^2)=\int_0^{\infty}2x^3\cdot\theta^{-1}\exp\{-x^2\theta^{-1}\}\,dx.$

$$\xlongequal{y=x\cdot\theta^{-\frac{1}{2}}}2\theta\int_0^{\infty}y^3\exp\{-y^2\}\,dy.$$

$$\xlongequal{t=y^2}\theta\int_0^{\infty}t\,e^{-t}\,dt.$$

$$=\theta$$

故 $E\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)}{n}=E(X^2)=\theta.$

即 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

分数	阅卷人

4、（12 分）某种内服药有使病人血压增高的副作用，已知血压的增高服从正态分布。现测得 10 名服用此药的病人的血压，记录血压增高的数据如下：

18， 27， 23， 15， 18， 15， 18， 20， 17， 19

试分别求药物导致血压增高的均值和标准差的置信水平 95%的置信区间。

解：$\bar{x} = 19$，$S^2 = \frac{40}{3} \approx 13.3333$

$S = 3.65$，$n=10$，$\alpha = 0.05$.

血压增高均值的95%置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

$$= \left(19 - \frac{3.65}{\sqrt{10}} \times 2.2622,\ 19 + \frac{3.65}{\sqrt{10}} \times 2.2622\right)$$

$$= (16.39,\ 21.61).$$

血压增高~~均值~~标准差的95%置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\,S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}\,S}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{9} \times 3.65}{\sqrt{19.022}},\ \frac{\sqrt{9} \times 3.65}{\sqrt{2.7}}\right)$$

$$= (2.51,\ 6.66).$$

分数	阅卷人

5、(10 分) 为比较两种农药残留时间（单位：天）的长短，现分别取 6 块地施甲种农药，4 块地施乙种农药，经一段时间后，分别测得结果为：

甲：$\bar{x}=12.35,\ s_1^2=3.52$; 乙：$\bar{y}=10.75,\ s_2^2=2.88$

假设两药的残留时间均服从正态分布且方差相等，试问两种农药的残留时间有无显著差异？$(\alpha=0.05)$？

$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

解：检验 $H_0: \mu_1=\mu_2$，$H_1: \mu_1\neq\mu_2$.

检验统计量：

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\ ，其中\ S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

拒绝域：

$$t<-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)，或\ t>t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$$

$\alpha=0.05$，$n_1=6$，$n_2=4$，

$t_{0.025}(8)=2.3060$

$S_w^2=3.28$，$S_w=\sqrt{3.28}=1.81$，

$t=1.37\in(-2.3060,\ 2.3060)$

未落入拒绝域，故两种农药残留时间无显著差异.

分数	阅卷人

6、(12分) 从同类产品中，任取200批，经质检结果如下表，其中x_i表示各批产品中次品数，f_i表示有x_i件次品的批数，试在显著性水平α=0.05下，检验次品件数X 是否服从泊松分布？

x_i	0	1	2	3	4	≥5
f_i	116	56	22	4	2	0

解：H_0: $P\{X=k\} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$

$\hat{\lambda} = \bar{x} = 0.6$ ， $n=200$

x_i	f_i		$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	
0	116		0.5488	109.76	
1	56		0.3293	65.76	
2	22		0.0988	19.76	
3	4		0.0198	3.96	
4	2	28	0.003	0.6	24.38
≥5	0		0.0003	0.06	

合并后组数为 $k=3$.

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{2}\frac{f_i^2}{n\hat{p}_i} - n = 2.37 < 3.843 = \chi^2_{0.05}(1)$$

无法拒绝原假设，故认为次品件数服从泊松分布.

分数	阅卷人

7、(15 分) 某建材实验室做混凝土试验时，考察一定体积混凝土的水泥用量 x（kg）对混凝土抗压强度 y（kg/cm^2）的影响，测得下列数据：

水泥用量 x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
抗压强度 y	57	58	64	65	63	72	70	72	82	83

计算得 n＝10，$\sum_{i=1}^{10} x_i=195$，$\sum_{i=1}^{10} x_i^2=3885$，$\sum_{i=1}^{10} y_i=686$，$\sum_{i=1}^{10} y_i^2=47784$，$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i=13610$

(1)求 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；　（2）检验一元线性回归的显著性（$\alpha=0.05$）。

解：(1) $\bar{x}=19.5$，$\bar{y}=\overset{68.6}{\cancel{69.5}}$，$n=10$

$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n\bar{x}^2=82.5$

$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}=233$

$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=2.8242$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx 13.53$

$\hat{y}=13.53+2.8242x$

(2) $H_0: b=0$，$H_1: b\neq 0$.

检验统计量：$t=\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}}$，

其中 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{Q_e}{n-2}}$，$Q_e=S_{yy}-\hat{b}S_{xy}$

拒绝域 $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$.

计算得 $S_{yy}=\sum_{i=1}^{n} y_i^2-n\bar{y}^2=724.4$

$Q_e=66.3614$，$\hat{\sigma}=2.88$，

$|t|=8.907>2.3060=t_{0.025}(8)$

落入拒绝域，故回归效果显著。

分数	阅卷人

8、（12 分） 粮食加工厂用 4 种不同的方法贮藏粮食，贮藏一段时间后，分别抽样化验，得到粮食含水率的数据如下：

贮藏方法	测量值数据				
Ⅰ	7.3	8.3	7.7	8.4	8.3
Ⅱ	5.8	7.4	7.2		
Ⅲ	8.1	6.5	7.0		
Ⅳ	7.9	9.1			

试检验这 4 种不同的贮藏方法对粮食的含水率是否有显著的影响？（$\alpha = 0.05$）

解：$\overline{y_1}=8$，$\overline{y_2}=6.8$，$\overline{y_3}=7.2$，$\overline{y_4}=8.5$

$\overline{y}=7.6154$.

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素	4.8139	3	1.6	3.2
误差	4.5	9	0.5	
总和	9.3139	12		

$F=3.2<3.86=F_{0.05}(3,9)$.

未落入拒绝域，故认为无显著影响.