厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷解答

一、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

（1）设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,2,2)$，求 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$ 和 $(2\vec{a}-\vec{b})$ 与 $\vec{a}$ 的夹角 θ.

（2）求以 $A(4,7,-1)$、$B(5,5,1)$ 和 $C(3,7,-2)$ 为顶点的三角形的面积.

二、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

三、计算下列各题：（共 10 分）

四、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

五、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2}, & (x-1)^2+y^2\neq 0,\\ 0, & (x-1)^2+y^2=0,\end{cases}$ ，（8 分）

.

六、设 $z=f\left(y,\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.（8 分）

七、求过点 $M(1,3,1)$，且平行于平面 $\pi: 2x+y-2z+6=0$，又与直线 $L: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 相交的直线的方程.（8 分）

八、求曲线$\begin{cases} x^2+2y^2+z^2-x-1=0, \\ 2x+6y+z-3=0 \end{cases}$在点$(1,0,1)$处的切线方程和法平面方程. （8分）

九、求曲线$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,\pi]$与x轴围成的图形绕直线$x=2$旋转所产生的旋转体的体积. （8 分）

十、设 $x=f(u,t,y)$，$g(u,t,y)=0$，其中 $f(u,t,y)$，$g(u,t,y)$ 在 R^3 具有一阶连续偏导数，且在点 (u_0,t_0,y_0) 处有 $g(u_0,t_0,y_0)=0$，$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,t)}\right|_{(u_0,t_0,y_0)}\neq 0$，① 证明：方程组 $x=f(u,t,y)$，$g(u,t,y)=0$ 可以确定一对具有连续偏导数的隐函数 $u=u(x,y),t=t(x,y)$。② 设 $z=\varphi(x^2,u,t)$（函数 φ 具有一阶连续偏导数），而 $u=u(x,y),t=t(x,y)$ 为①中由方程组所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.（10 分）

十一、① 证明旋转抛物面$\Sigma: x^2+y^2-2z=0$的任意切平面与该抛物面只有一个交点（即切点）. ② 求通过直线$L:\begin{cases} x-y-1=0, \\ 4y-8z-9=0 \end{cases}$的旋转抛物面$\Sigma$的切平面方程.（8 分）

十二、求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在部分球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=5r^2$ $(x>0,y>0,z>0)$ 上的最大值，并利用此结果证明：当 $a>0,b>0,c>0$ 时，有 $abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.（8 分）