2017-2018 学年第二学期《微积分 I-2》期中试卷解答

一、（每小题 8 分,共 16 分）求下列微分方程的通解：

1. $yy'' + (y')^2 = 0$；

2. $y'' + 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^x + 6\sin x$ 。

二、（本题 8 分）设函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可微，且满足以下关系式$\int_0^x [3f(t)-1]\mathrm{d}t = f(x)-5$，求 $f(x)$。

三、（本题 8 分）设$\vec{a}=(-1,3,2)$，$\vec{b}=(2,-4,3)$，$\vec{c}=(4,-6,13)$，试证明这三个向量在同一平面上，并求$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影。

四、（本题 8 分）设$w=f(x+\varphi(y),xy)$，其中函数φ可微，函数 f 具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial w}{\partial y}$以及$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$。

五、（本题 **8** 分）求曲线$\begin{cases}(x+1)^2-z^2=1\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$在 yoz 平面上的投影曲线方程。

六、（本题 **8** 分）求直线$\begin{cases}x+y-z=1\\-x+y-z=1\end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程。

七、（本题 **8** 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$ 确定，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$ 。

证明：方程 $F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$ 两边对 x 求导，得 $F_1'(1+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x})+F_2'\cdot(-\dfrac{z}{x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x})=0$，

八、（本题 12 分）讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ **点处的连续性、可偏导性、可微性。**

九、（本题 8 分）设$\begin{cases} xu+yv=2 \\ yu-xv=0 \end{cases}$**,求**$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$**。**

十、（本题 8 分）设有曲面$S:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$**，平面**$\Pi:2x+2y+z-5=0$**， (1)在**$S$**上求一点，使其切平面与**$\Pi$**平行；(2)求曲面**$S$**与**$\Pi$**的最短距离。**

十一、（本题 8 分）抛物面 $z = x^2 + y^2$ **被平面** $x + y + z = 4$ **截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值。**