2015-2016 学年第二学期《微积分 I-2》期中试卷解答

一、计算下列各题：（每小题 5 分，20 分）

1. 求曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$在 zox 面上的投影曲线方程.

2. 将 $I=\int_0^{\frac{R}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为先对 x 后对 y 的二次积分.

3. 曲线 $y=f(x)$ 通过原点，且在 $[0,x]$ 上的弧长等于终点函数值 $f(x)$ 的 2 倍，求 $f(x)$.

4. 求圆盘 $(x-2)^2+y^2\le 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积.

二、（12 分）已知函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，（1）求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$，并说明函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续；（2）求在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 的偏导数；（3）问在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 是否可微？

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 计算二重积分$\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由$x=2, y=-1, y=1$，曲线$x^2+y^2=1\ (x\geq 0)$所围成的平面区域.

2. 已知$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$和$|2\vec{a}-\vec{b}|$.

3. 设$y=y(x), z=z(x)$是由方程$\begin{cases} z=xf(x+y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$所确定的函数，其中$f(x)$具有一阶连续导数，

4. 求由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分.

5. 求过点 $P(1,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都平行的直线方程.

四、计算下列各题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 设直线 $L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$，平面 $\Pi:2x-y+z-2=0$，求直线 L 与平面 Π 的夹角.

2. 在曲面 $z = xy$ 上求出一点，使曲面 $z = xy$ 在该点的法向量与函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $P(1,2,1)$ 处的梯度平行，并写出过该点的切平面方程.

3. 计算 $\iint\limits_D \left| x^2 + y^2 - 2y \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2 + y^2 \le 4$.

4. 求点$(1,1,\frac{1}{2})$到曲面$z=x^2+y^2$的最短距离.

五、证明题：（本题 6 分）

设$F(u,v)$可微，试证明曲面$F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$上任一点处的切平面都通过一定点.