# 第七章 一阶电路和二阶电路的时域分析

1. 动态电路方程的建立及初始条件的确定；
2. 一阶电路的零输入响应、零状态响应；
3. 一阶电路的全响应（三要素法）；
4. 一阶电路的阶跃响应、冲激响应；
5. 二阶电路的零输入响应、零状态响应。

**重点** 初始条件的确定

三要素法

下 页

# 7.1 动态电路的方程及其初始条件

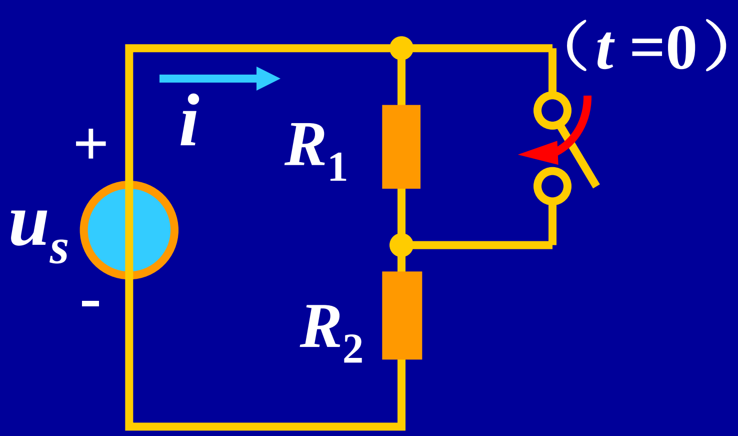
## 1. 动态电路

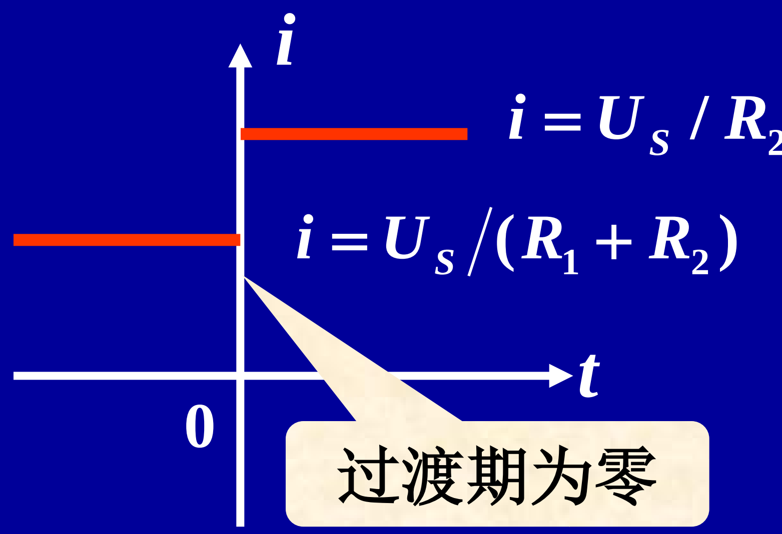
含有动态元件电容和电感的电路称动态电路。

**特点**

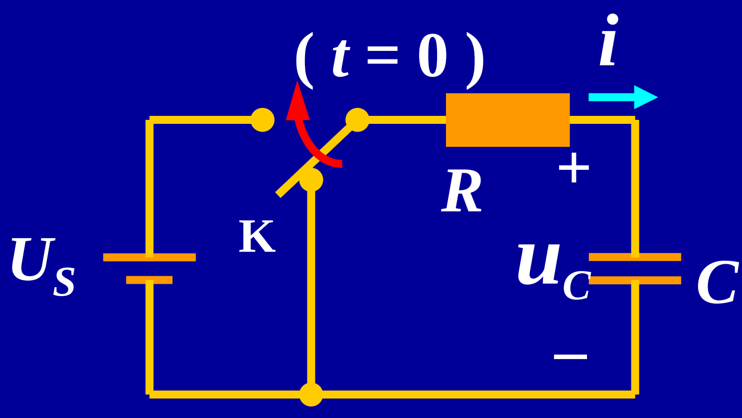
当动态电路状态发生改变时（换路）需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

**例** 电阻电路



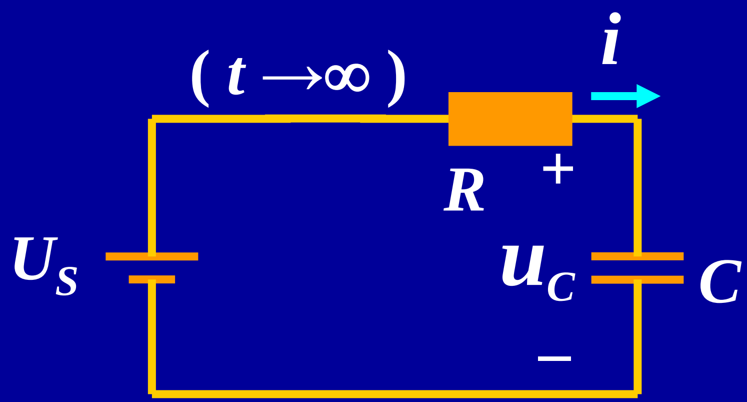
# 电容电路



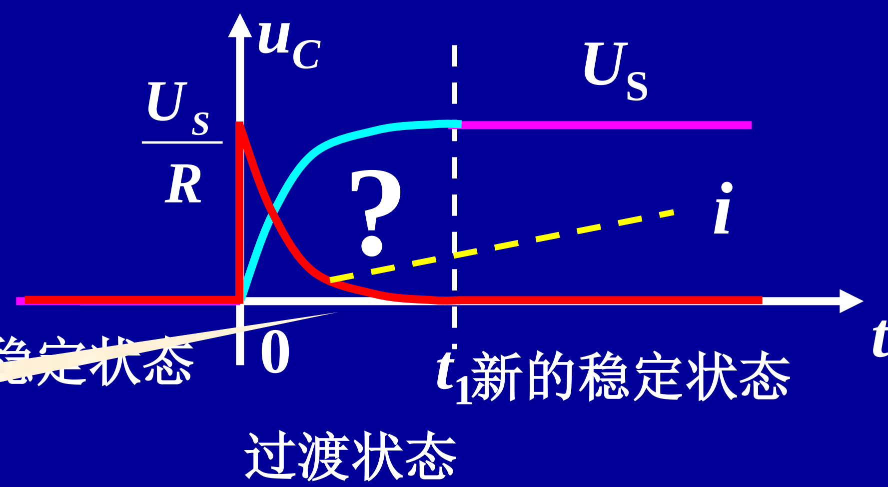

$K$未动作前，电路处于稳定状态

$$i = 0,\quad u_C = 0$$

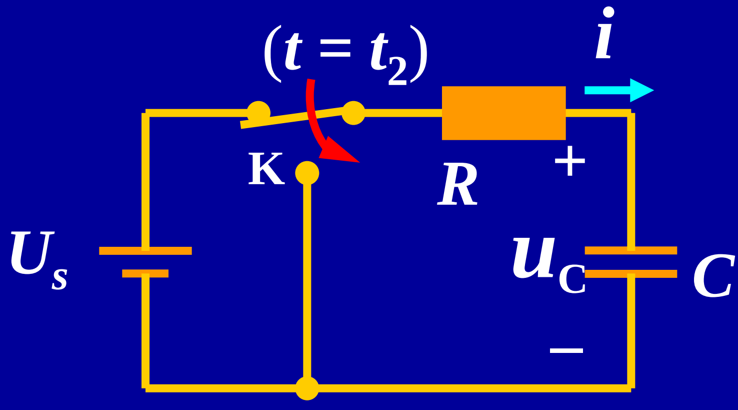
$K$ 接通电源后很长时间，电容充电完毕，电路达到新的稳定状态




$$i = 0,\quad u_C = U_S$$




有一过渡期



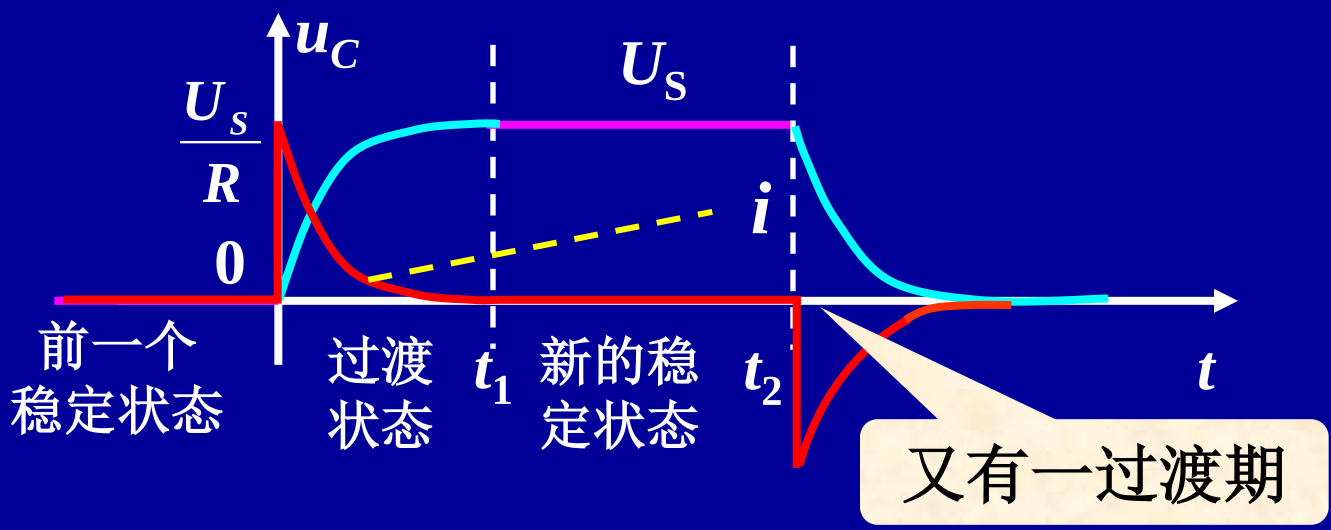

K 未动作前，电路处于稳定状态

$$i = 0, \quad u_C = U_S$$

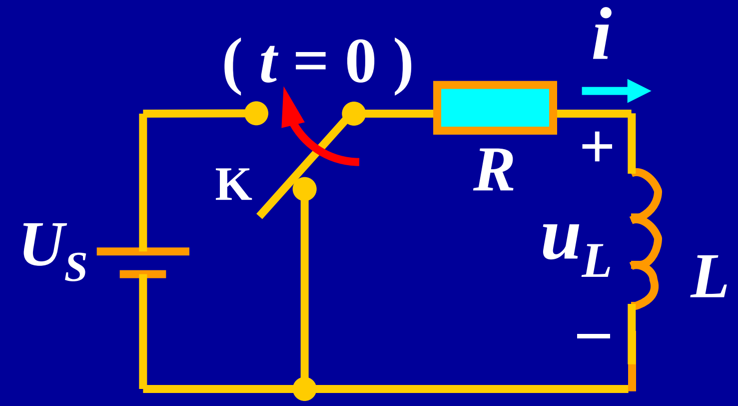
K 动作后很长时间，电容放电完毕，电路达到新的稳定状态

第三个稳定状态

$$i = 0, \quad u_C = 0$$

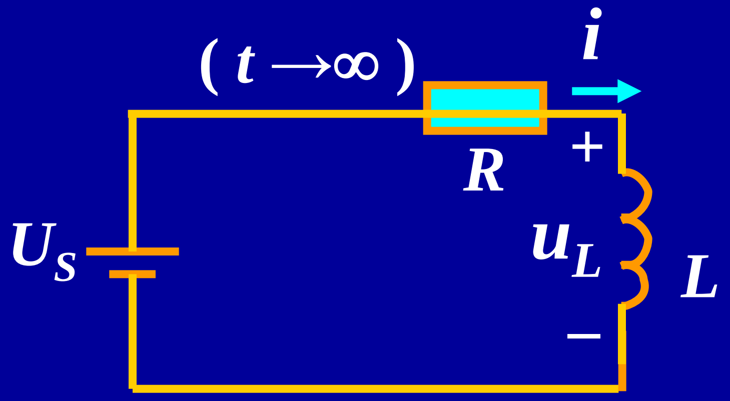


# 电感电路



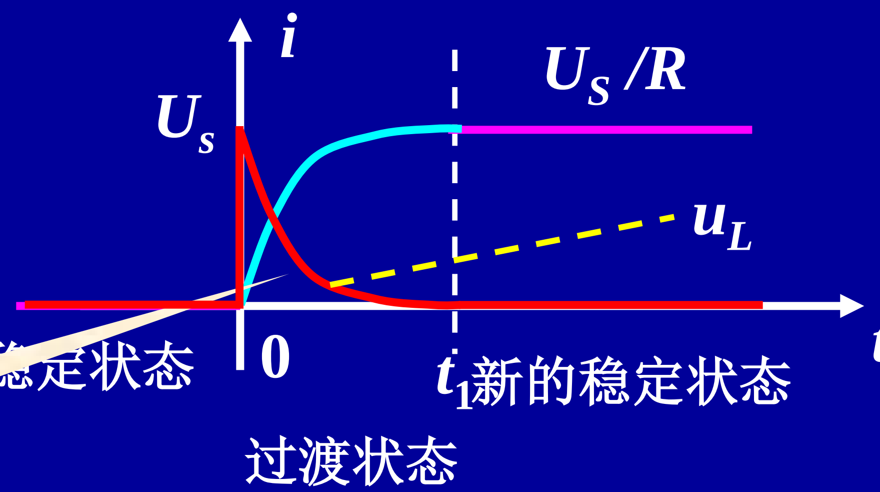

**K 未动作前，电路处于稳定状态**

$$i = 0, \quad u_L = 0$$

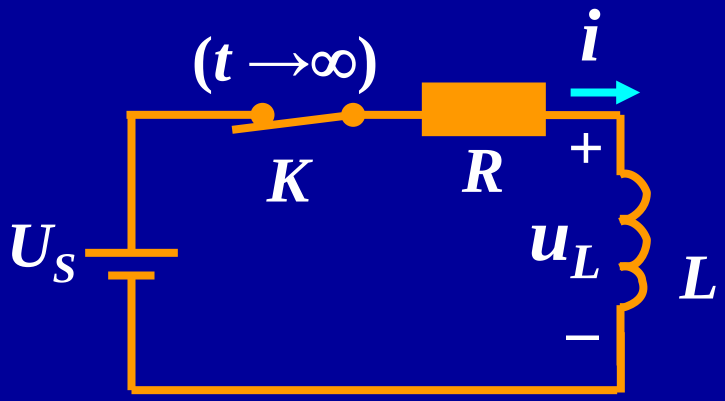



**K 接通电源后很长时间，电路达到新的稳定状态，电感视为短路**

$$i = U_S / R, \quad u_L = 0$$

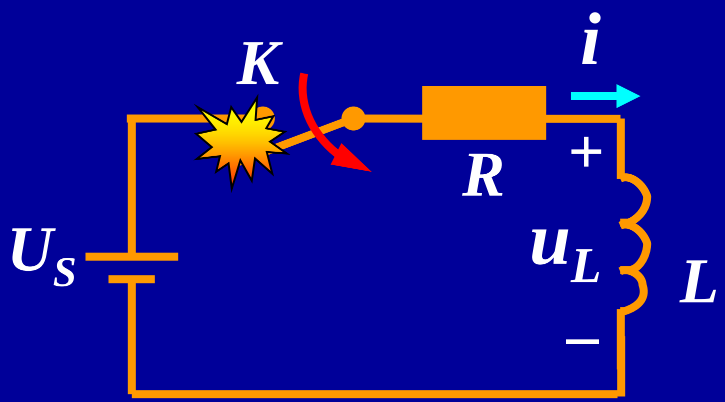



有一过渡期




**$K$ 未动作前，电路处于稳定状态**

$$i = U_S / R,\quad u_L = 0$$




**$K$ 断开瞬间**

$$i = 0,\quad u_L = \infty$$

**注意工程实际中的过电压过电流现象**

**换路** → 电路结构、状态发生变化 $\begin{cases} \text{支路接入或断开} \\ \text{电路参数变化} \end{cases}$

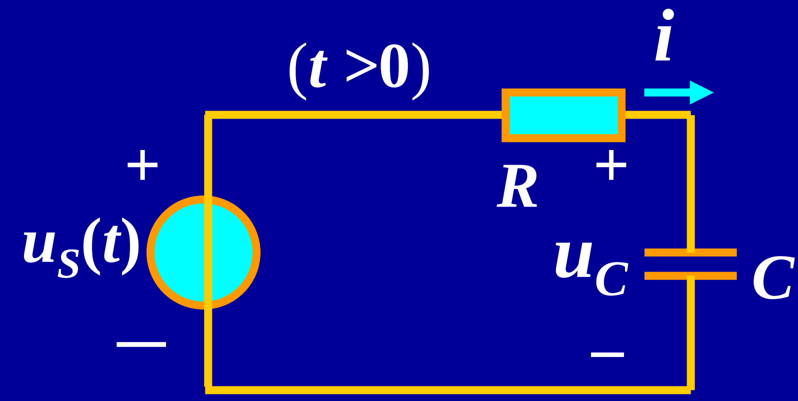
**过渡过程产生的原因** →

电路内部含有储能元件 $L$ 、$C$，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \Delta t \to 0 \qquad p \to \infty$$

# 2. 动态电路的方程

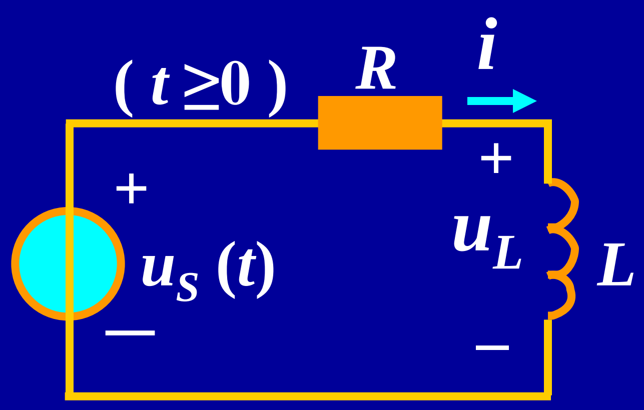
应用KVL和电容的VCR得：




$$Ri + u_C = u_S(t)$$

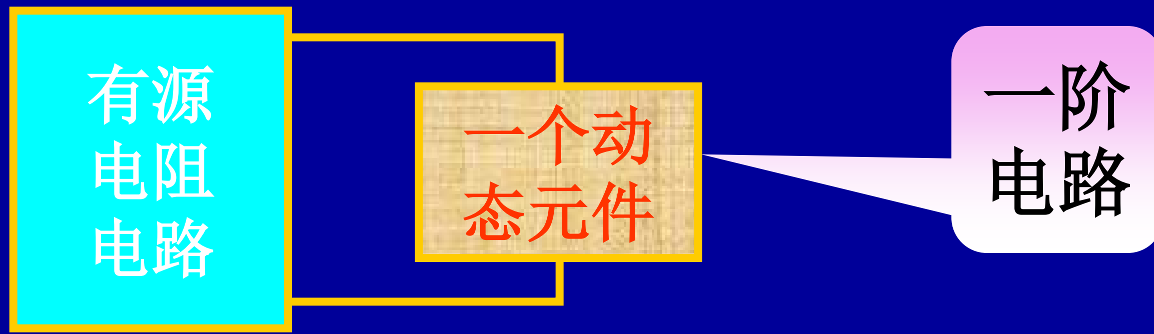
$$i = C\frac{du_C}{dt} \longrightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S(t)$$

应用KVL和电感的VCR得：

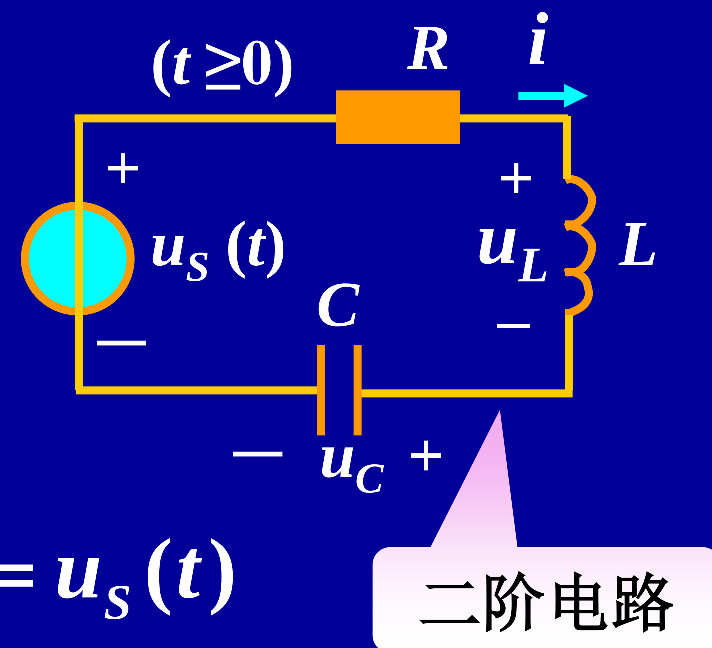



$$Ri + u_L = u_S(t)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} \longrightarrow Ri + L\frac{di}{dt} = u_S(t)$$




$$Ri + u_L + u_C = u_S(t)$$




$$i = C\frac{du_C}{dt} \qquad u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S(t)$$

**结论**

（1）描述动态电路的电路方程为微分方程；

（2）动态电路方程的阶数等于电路中动态元件的个数

一阶电路 → 一阶电路中只有一个动态元件，描述电路的方程是一阶线性微分方程。

$$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t) \quad t\geq 0$$

二阶电路 → 二阶电路中有二个动态元件，描述电路的方程是二阶线性微分方程。

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t) \quad t\geq 0$$

高阶电路 → 电路中有多个动态元件，描述电路的方程是高阶微分方程。

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t) \quad t\geq 0$$

## 动态电路的分析方法

（1）根据KVL、KCL和VCR建立微分方程

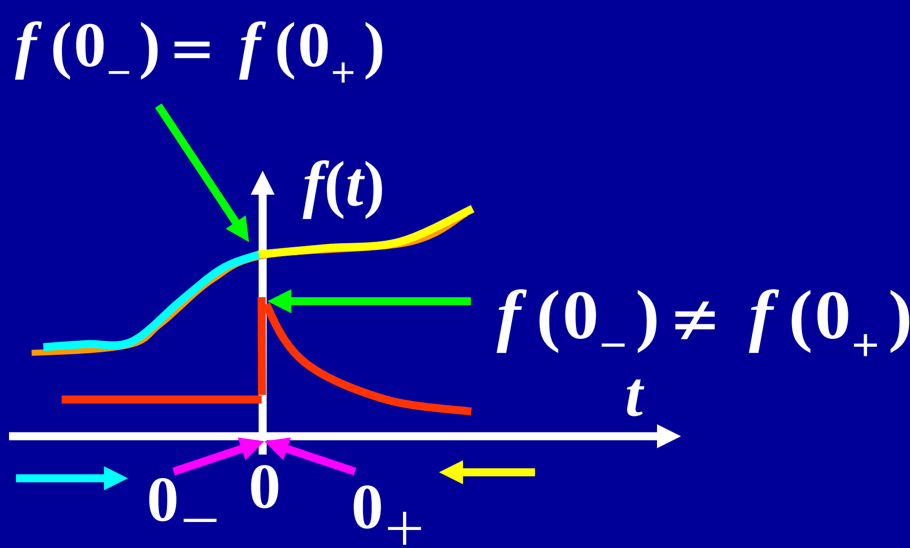
（2）求解微分方程

## 稳态分析和动态分析的区别

| 稳态分析 | 动态分析 |
| --- | --- |
| 换路发生很长时间后状态 | 换路发生后的整个过程 |
| 微分方程的特解 | 微分方程的一般解 |
| 恒定或周期性激励 | 任意激励 |

## 3. 电路的初始条件

### (1) $t = 0_+$ 与 $t = 0_-$ 的概念




认为换路在 $t = 0$ 时刻进行

$0_-$　换路前一瞬间

$0_+$　换路后一瞬间

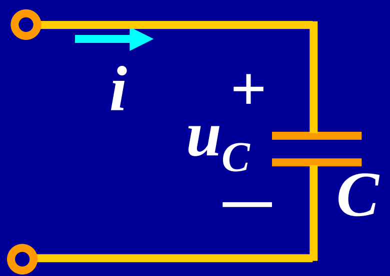
$$f(0_-) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} f(t)$$

$$f(0_+) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} f(t)$$

**初始条件为 $t = 0_+$ 时 $u$，$i$ 及其各阶导数的值**

上 页　下 页

## (2) 电容的初始条件




$$u_C(t)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$t=0_+$时刻 $$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\cancelto{0}{\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

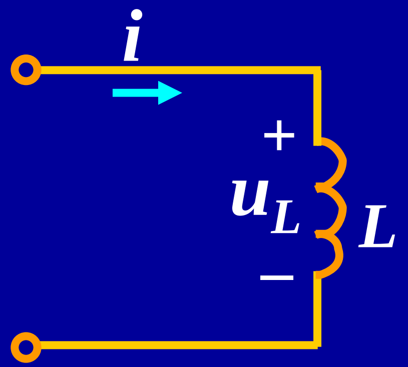
当 $i(\xi)$ 为有限值时 $$u_C(0_+)=u_C(0_-)$$

**结论**

换路瞬间，若电容电流保持为有限值， 则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

上 页 下 页

## (3) 电感的初始条件




$$i_L(t) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u(\xi)d\xi$$

$t = 0_+$时刻 $\quad i_L(0_+) = i_L(0_-) + \cancelto{0}{\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u(\xi)d\xi}$

当$u\,(\xi)$为有限值时 $\quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$

**结论**

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，电感电流（磁链）换路前后保持不变。

## （4）换路定律

换路瞬间，若电容电流（或电感电压）保持为有限值，则电容电压（或电感电流）换路前后保持不变。

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \qquad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

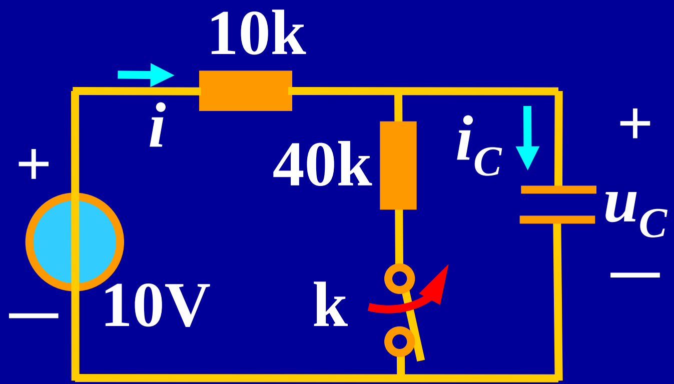
注意

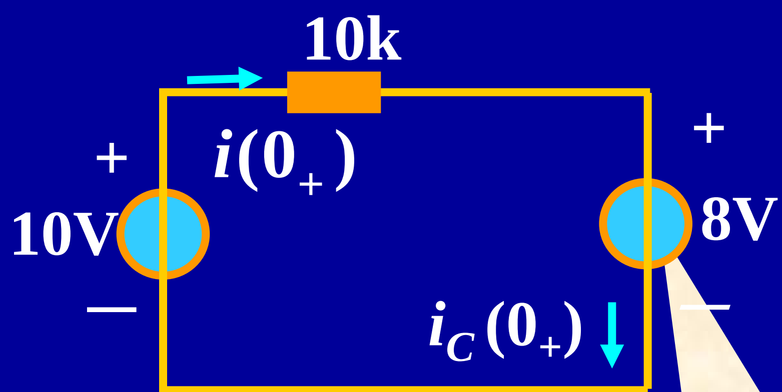
（1）电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。

（2）换路定律反映了能量不能跃变。

# 5.电路初始值的确定

**例1** 求 $i_C(0_+)$

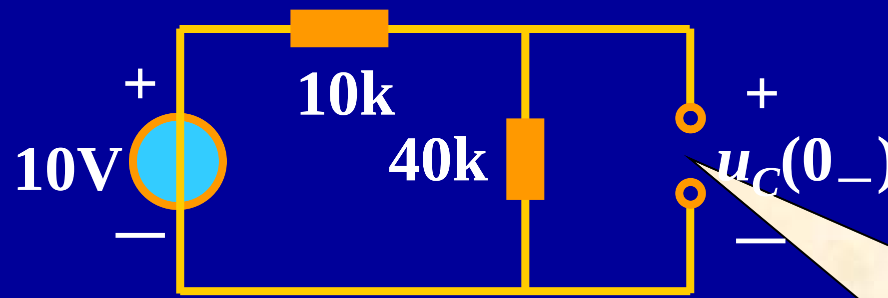



$0_+$等效电路

电容用电压源替代

(1) 由$0_-$电路求 $u_C(0_-)$或$i_L(0_-)$




电容开路

$$u_C(0_-) = 8V$$

(2) 由换路定律

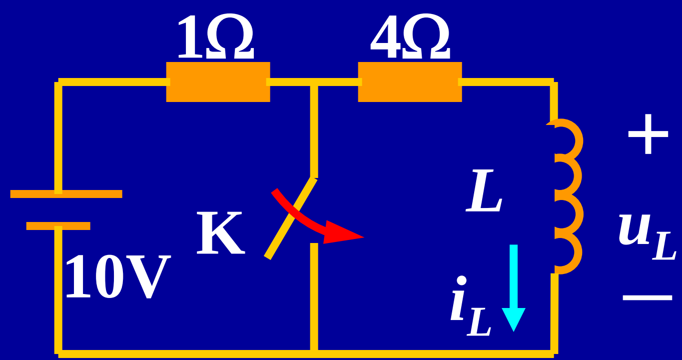
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8V$$

(3) 由$0_+$等效电路求 $i_C(0_+)$

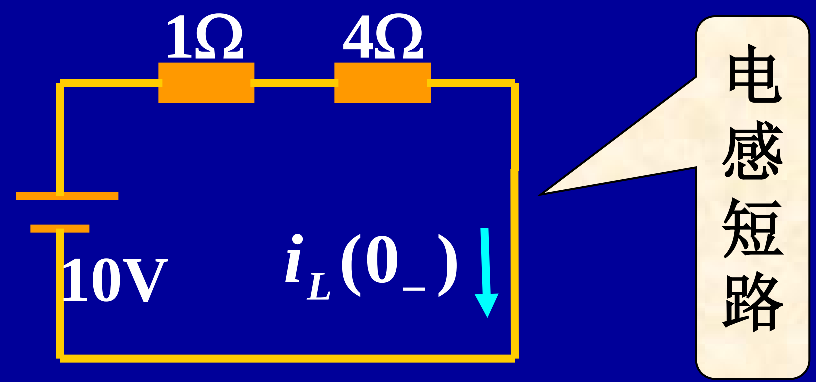
$$i_C(0_+) = \frac{10-8}{10} = 0.2\text{mA}$$

$$i_C(0_-) = 0 \quad \neq i_C(0_+)$$

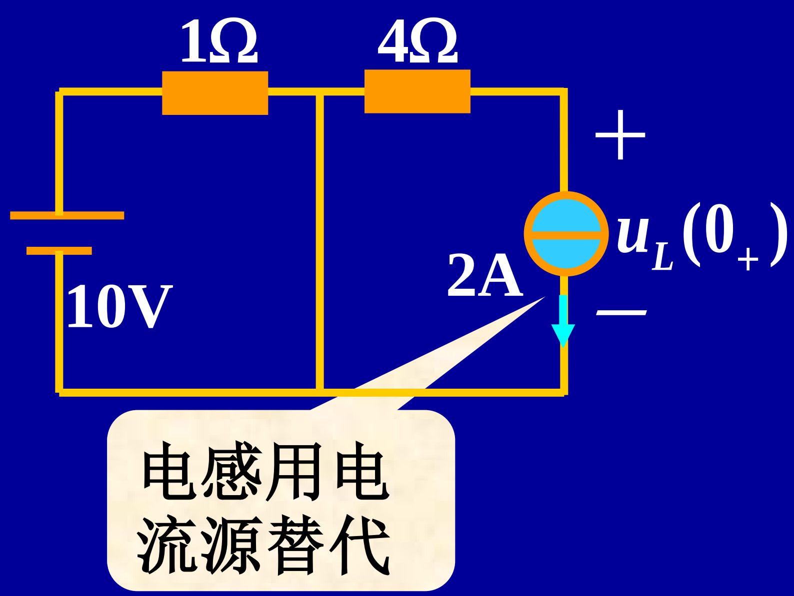
**例 2**　$t=0$时闭合开关k，求 $u_L(0_+)$




**解**　先求 $i_L(0_-)$




$0_+$电路




$$\because u_L(0_-)=0 \quad \therefore u_L(0_+) \cancel{=} 0$$

$$i_L(0_-)=\frac{10}{1+4}=2A$$

由换路定律:

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2A$$

$$u_L(0_+)=-2\times 4=-8V$$

## 求初始值的步骤:

1. 由换路前电路（一般为稳定状态）求$u_C(0_-)$和$i_L(0_-)$;

2. 由换路定律得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$。

3. 画$0_+$等效电路。

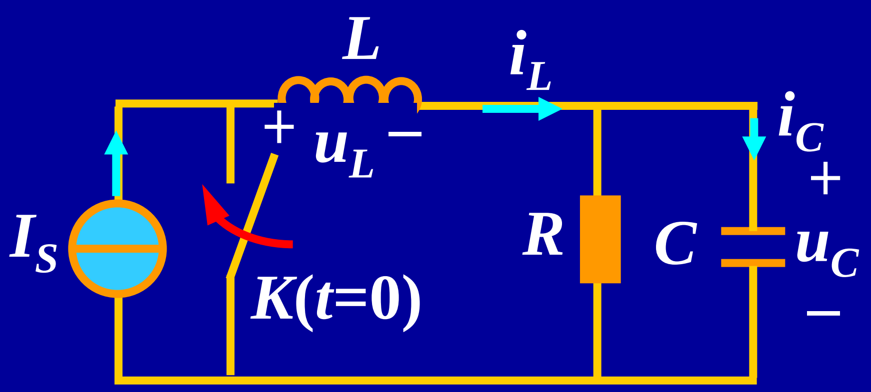
a. 换路后的电路

b. 电容（电感）用电压源（电流源）替代。

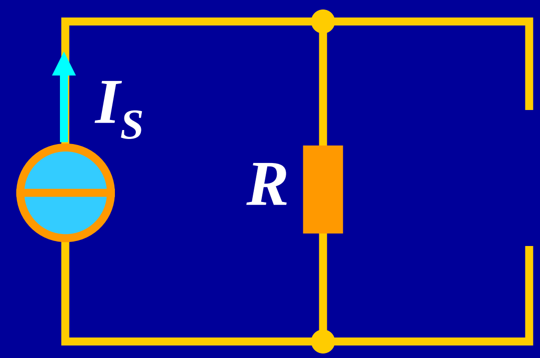
（取$0_+$时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）。

4. 由$0_+$电路求所需各变量的$0_+$值。

**例3** 求 $i_C(0_+)$ ，$u_L(0_+)$




**解**



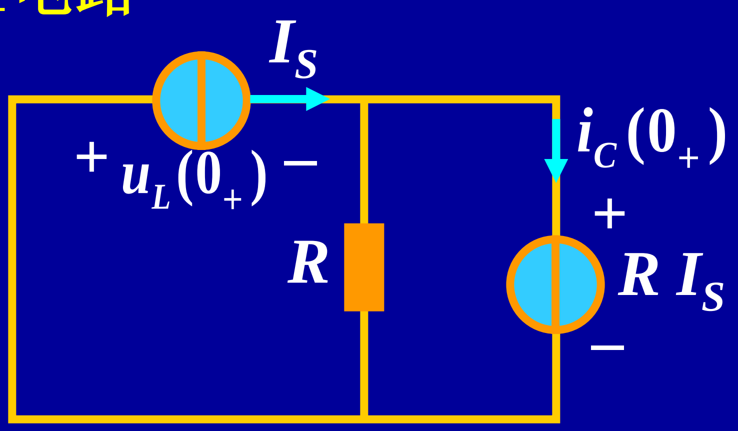

0_电路

由0_电路得:

$$i_L(0_+) = i_L(0\_) = I_S$$

$$u_C(0_+) = u_C(0\_) = RI_S$$

$0_+$电路

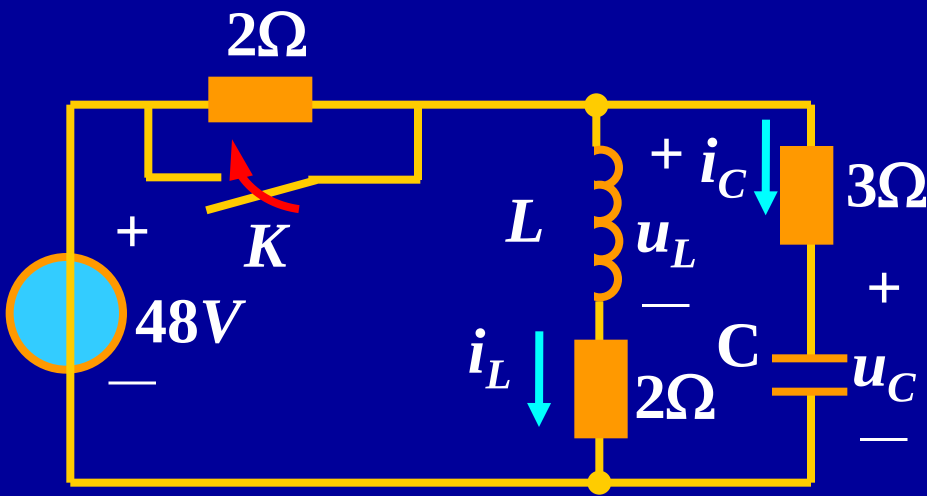



由$0_+$电路得:

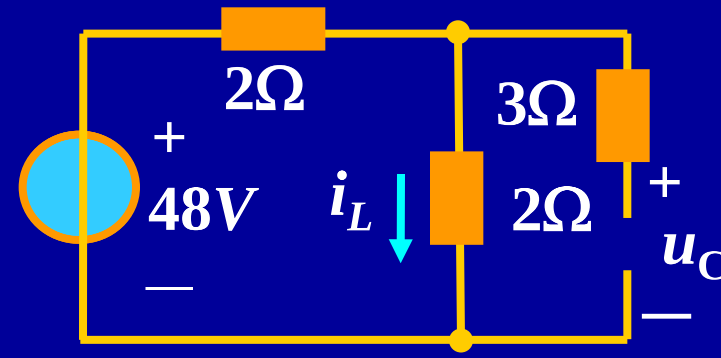
$$i_C(0_+) = I_S - \frac{RI_S}{R} = 0$$

$$u_L(0_+) = -RI_S$$

## 例4 求$K$闭合瞬间各支路电流和电感电压




**解**




由$0_-$电路得：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 48/4 = 12A$$

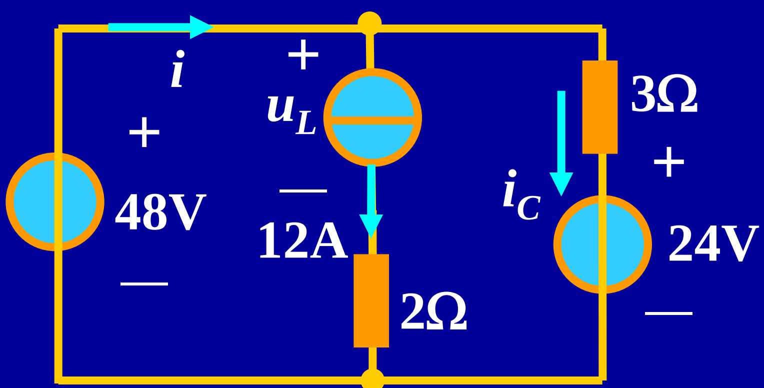
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\times 12 = 24V$$

由$0_+$电路得：

$$i_C(0_+) = (48-24)/3 = 8A$$

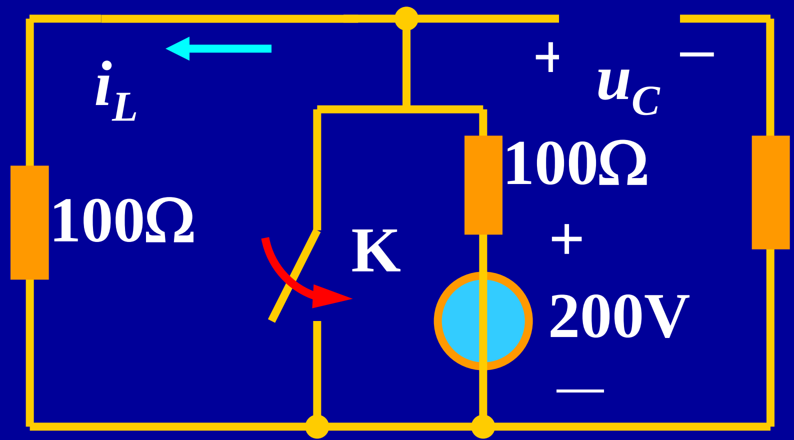
$$i(0_+) = 12+8 = 20A$$

$$u_L(0_+) = 48 - 2\times 12 = 24V$$




$0_+$电路

**例5** 求K闭合瞬间流过它的电流值。

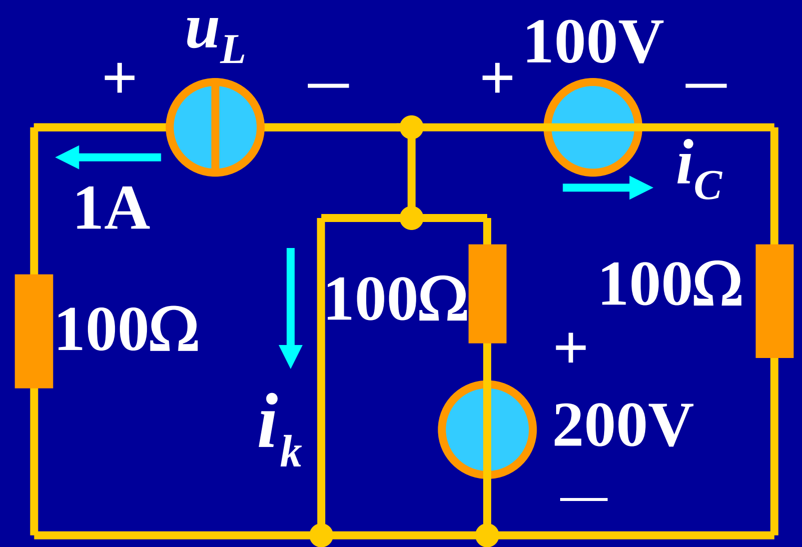



**解** （1）确定0_值

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{200}{200}=1A$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=100V$$

（2）给出$0_+$等效电路




$$i_k(0_+)=\frac{200}{100}+\frac{100}{100}-1=2A$$

$$u_L(0_+)=1\times100=100V$$

$$i_C(0_+)=-u_C(0_+)/100=-1A$$

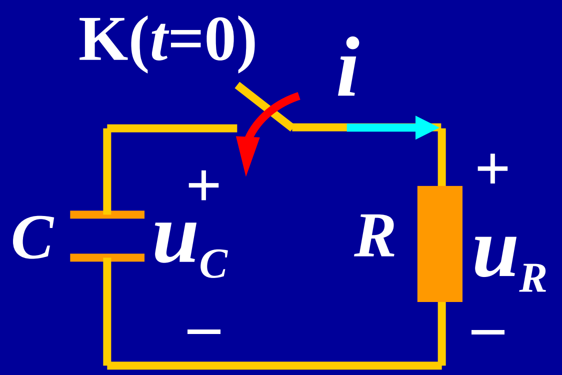
# 7.2 一阶电路的零输入响应

**零输入响应** ➡ 换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能所产生的电压和电流。

## 1. *RC*电路的零输入响应

已知 $u_C(0_-)=U_0$

$$-u_R+u_C=0$$




$$\begin{cases} i=-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ u_R=Ri \end{cases}$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

设 $u_C=\mathrm{A}e^{pt}=\mathrm{A}e^{-\frac{1}{RC}t}$

特征方程 $RCp+1=0$ 特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$

$$u_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$ 代入初始值 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

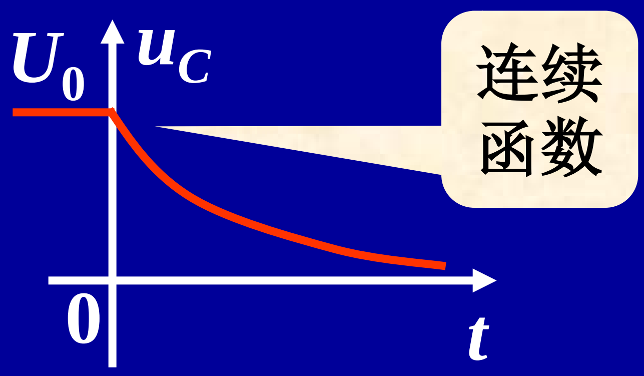
$A=U_0$ $\longrightarrow$ $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$

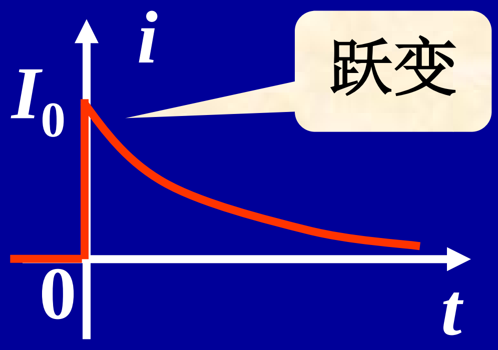
$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

或 $$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CU_0 e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

## 从以上各式可以得出：

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；




（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与*RC*有关；

令 $\tau = RC$ ，称$\tau$为一阶电路的时间常数

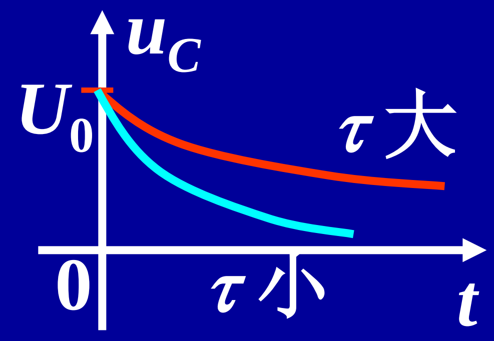
$$[\tau]=[RC]=[欧][法]=[欧]\left[\frac{库}{伏}\right]=[欧]\left[\frac{安秒}{伏}\right]=[秒]$$

$\tau = RC$ $\qquad p = -\dfrac{1}{RC} = -\dfrac{1}{\tau}$

时间常数 $\tau$ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

$\tau$大 → 过渡过程时间长

$\tau$小 → 过渡过程时间短




**物理含义** → 电压初值一定:

$C$ 大（$R$一定） $\quad W=Cu^2/2 \quad$ 储能大

$R$ 大（$C$一定） $\quad i=u/R \quad$ 放电电流小

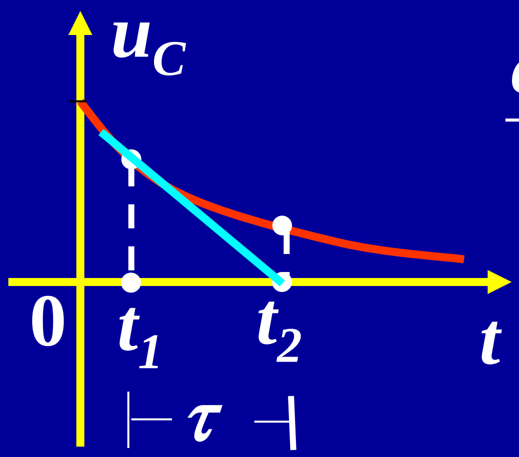
} 放电时间长

| $t$ | 0 | $\tau$ | $2\tau$ | $3\tau$ | $5\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $U_0$ | $U_0 e^{-1}$ | $U_0 e^{-2}$ | $U_0 e^{-3}$ | $U_0 e^{-5}$ |
| | $U_0$ | $0.368\ U_0$ | $0.135\ U_0$ | $0.05\ U_0$ | $0.007\ U_0$ |

$\tau$：电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。

工程上认为, 经过 $3\tau$—$5\tau$, 过渡过程结束。

时间常数 $\tau$ 还可以用次切距来获得：

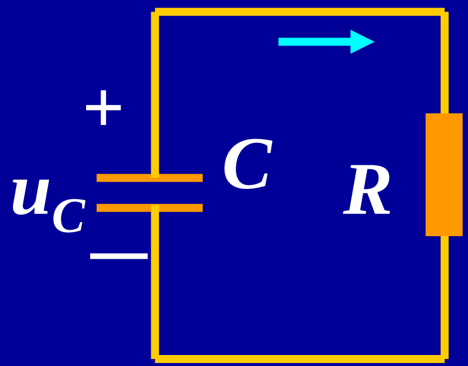



$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t_1} = -\frac{1}{\tau} U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t_1} = -\frac{1}{\tau} u_C(t_1)$$

$$k = \frac{u_C(t_1) - 0}{t_1 - t_2} \qquad \tau = t_2 - t_1$$

上 页　下 页

（3）能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。




设$u_C(0_+)=U_0$

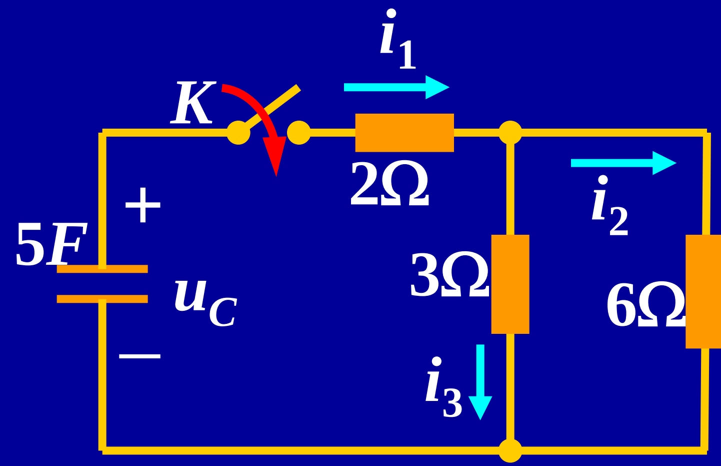
电容放出能量： → $\frac{1}{2}CU_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^\infty i^2 R dt \quad =\int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R dt$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt=\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}CU_0^2$$

**例** 已知图示电路中的电容原本充有24V电压，求K闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。




**解** 这是一个求一阶*RC*零输入响应问题，有：

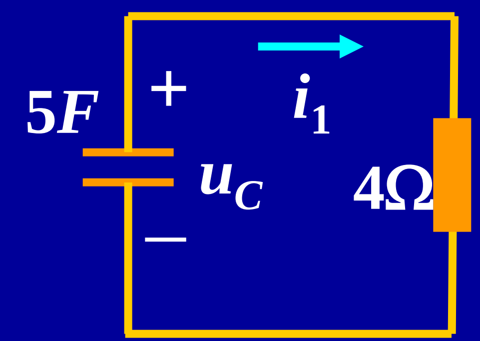
$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

代入 $U_0 = 24V \quad \tau = RC = 5\times4 = 20\,s$

等效电路

t >0

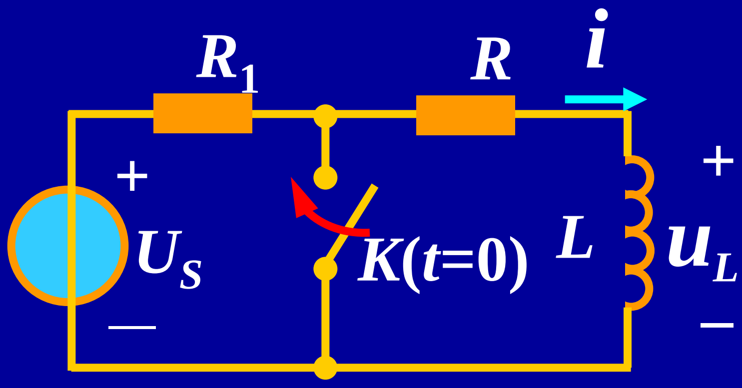
$$\Longrightarrow \quad u_C = 24e^{-\frac{t}{20}}V \quad t \geq 0$$



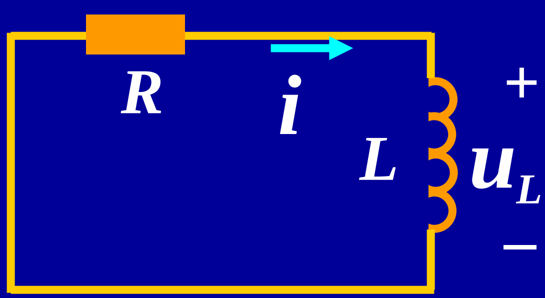

$$i_1 = u_C/4 = 6e^{-\frac{t}{20}}A$$

$$i_2 = \frac{1}{3}i_1 = 2e^{-\frac{t}{20}}\text{A} \qquad i_3 = \frac{2}{3}i_1 = 4e^{-\frac{t}{20}}\text{A}$$

## 2. *RL*电路的零输入响应




t >0




$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad t \geq 0$$

$$i(t) = Ae^{pt}$$

特征方程 $Lp + R = 0$

特征根 $p = -\dfrac{R}{L}$

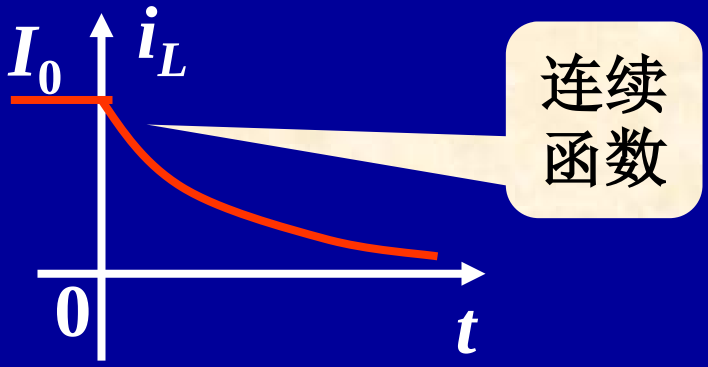
代入初始值 $i(0_+) = I_0$ → $A = i(0_+) = I_0$

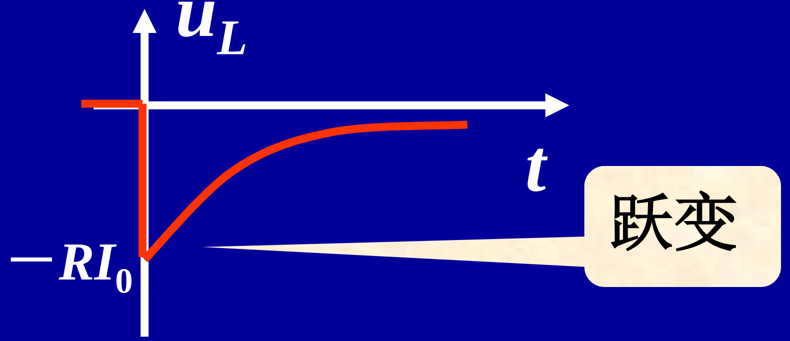
得 $i(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$

$$\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0} \qquad u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$$

**从以上式子可以得出：**

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；




（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与$L/R$有关；

令 $\tau = L/R$，称为一阶*RL*电路时间常数。

$$[\tau] = [\frac{L}{R}] = [\frac{亨}{欧}] = [\frac{韦}{安\cdot欧}] = [\frac{伏\cdot秒}{安\cdot欧}] = [秒]$$

$$\boxed{\tau = L / R} \qquad p = \frac{-1}{L/R} = \frac{-1}{\tau}$$

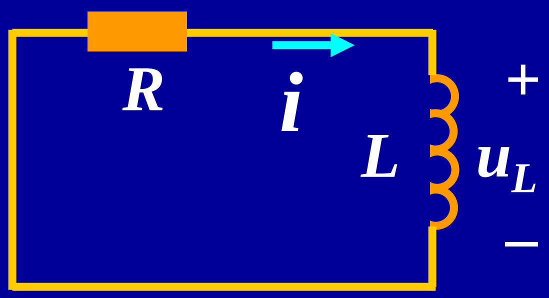
时间常数 $\tau$ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

$\tau$大 $\rightarrow$ 过渡过程时间长　　$\tau$小 $\rightarrow$ 过渡过程时间短

物理含义 → 电流初值$i(0)$一定：

$$\left.\begin{array}{l} L大\quad W = Li^2/2\ \text{起始能量大} \\ R小\quad P = Ri^2\ \text{放电过程消耗能量小} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{放电慢} \\ \tau大\end{array}$$

（3）能量关系 $\longrightarrow$ 电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。




设$i_L(0_+)=I_0$

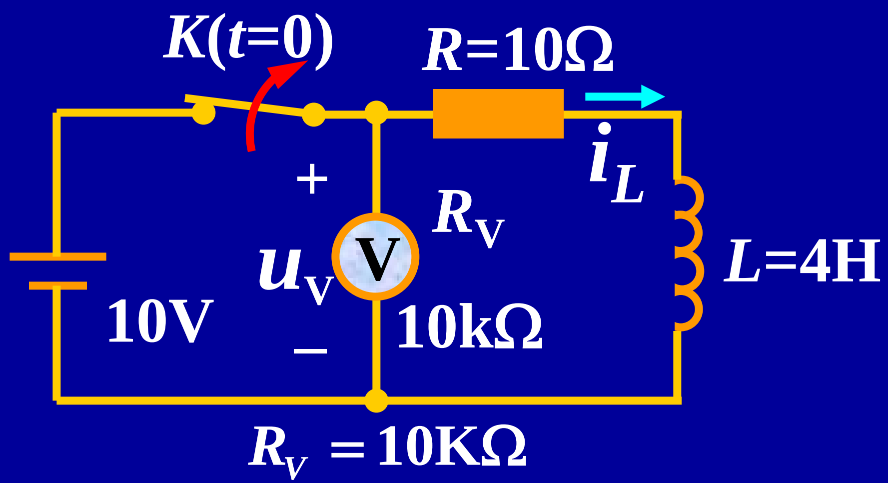
电感放出能量： $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}LI_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： $\longrightarrow$

$$W_R=\int_0^\infty i^2Rdt=\int_0^\infty (I_0e^{-\frac{t}{L/R}})^2Rdt$$

$$=I_0^2R\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{L/R}}dt=I_0^2R(-\frac{L/R}{2}e^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}LI_0^2$$

**例1** $t$=0时，打开开关K，求$u_V$。 电压表量程：50V




**解** $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\ \mathrm{A}$

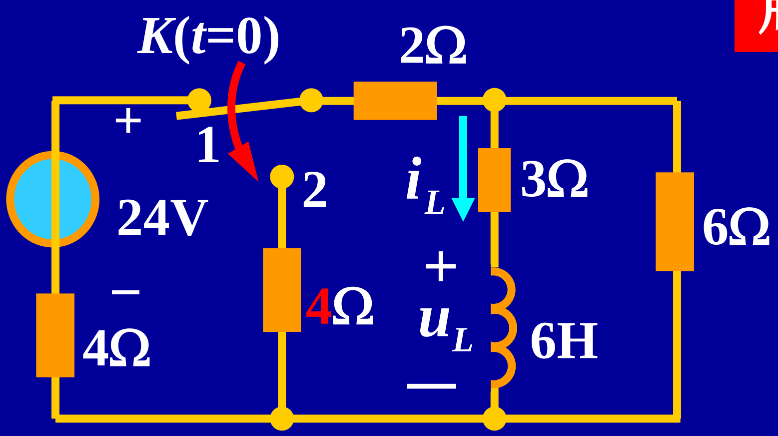
$$i_L = e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

$$\tau = \frac{L}{R+R_V} \approx \frac{4}{10000} = 4\times10^{-4}\,s$$

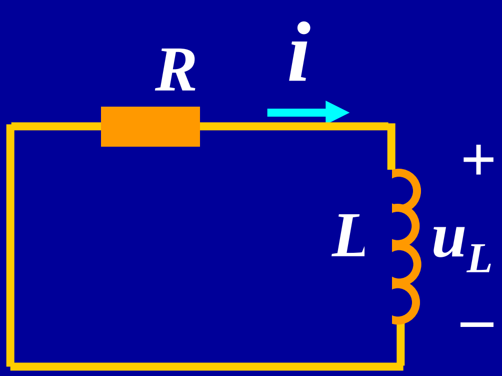
$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t} \qquad t \geq 0$$

$u_V(0_+)$=－10000V 造成 V 损坏。

**例2** $t$=0时，开关K由1→2，求电感电压和电流及开关两端电压$u_{12}$。




t >0




**解**

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

$$=\frac{24}{4+2+3//6}\times\frac{6}{3+6}=2A$$

$$R=3+(2+4)//6=6\Omega$$

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{6}{6}=1s$$

$$i_L=2e^{-t}A$$

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=-12e^{-t}V \quad t\geq 0$$

$$u_{12}=24+4\times(\frac{i_L}{2})=24+4e^{-t}V$$

## 小结

1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应, 都是由初始值按指数规律衰减为零的函数。

$$\boxed{y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$RC$电路 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$

$RL$电路 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$

2. 衰减快慢取决于时间常数$\tau$

$RC$电路 $\tau = RC$ ， $RL$电路 $\tau = L/R$

$R$ 是与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

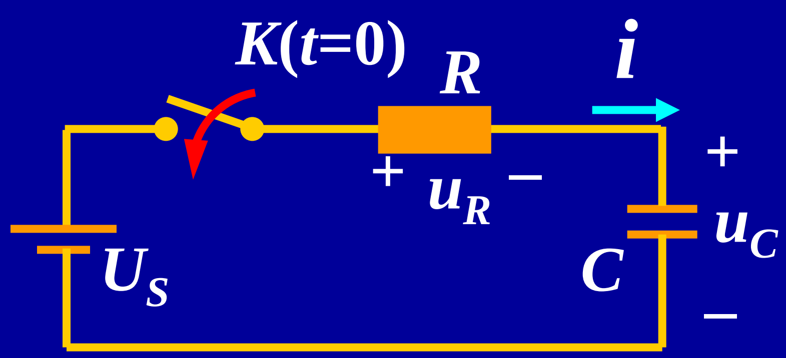
3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

4.一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

# 7.3 一阶电路的零状态响应

**零状态响应** → 动态元件初始能量为零，由$t \geq 0$时电路中外施激励作用所产生的响应。

## 1. *RC*电路的零状态响应




$u_C(0_-)=0$

列方程：

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$$

非齐次线性常微分方程

解的形式为：

$$u_C=u'_C+u''_C$$

非齐次方程特解

齐次方程通解

$\boxed{u_C'}$ → 特解（强制分量，稳态分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \quad \text{的特解} \longrightarrow u_C'=U_S$$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解

$\boxed{u_C''}$ → 通解（自由分量，暂态分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \quad \text{的通解} \longrightarrow u_C''=Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

变化规律由电路参数和结构决定

$\boxed{\text{全解}}$ $$u_C(t)=u_C'+u_C''=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件 $u_C(0_+)=0$ 定积分常数 $A$

$$u_C(0_+)=A+U_S=0 \longrightarrow A=-U_S$$

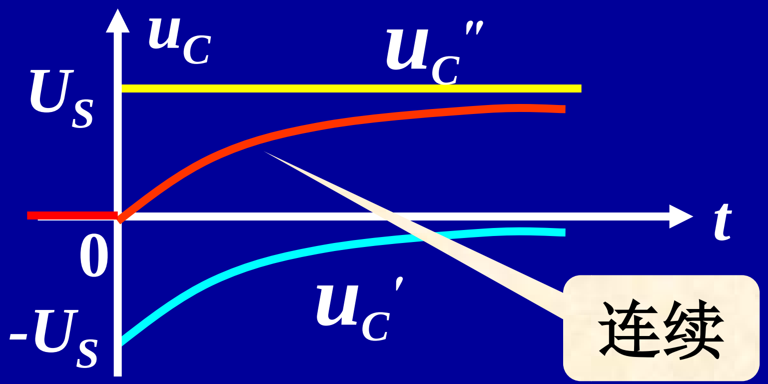
$$\boxed{u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0)}$$

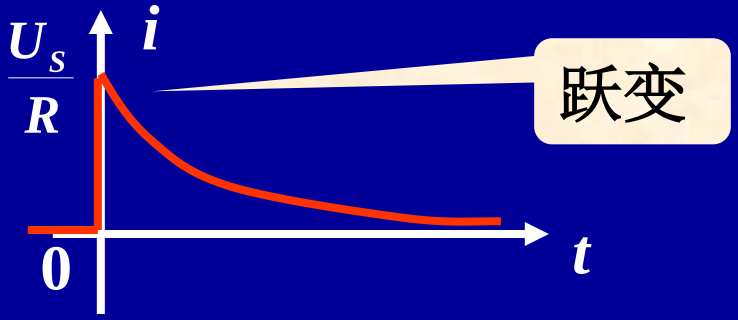
从以上式子可以得出：

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；
电容电压由两部分构成：

稳态分量（强制分量） + 暂态分量（自由分量）

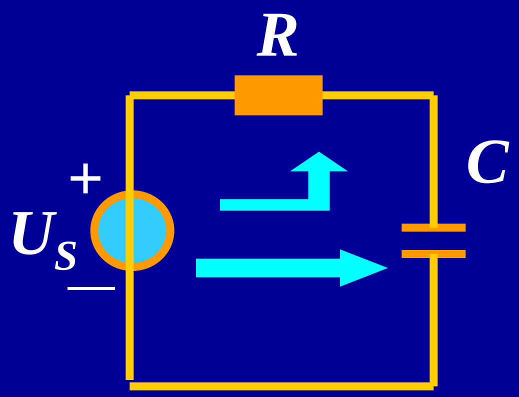


（2）响应变化的快慢，由时间常数$\tau = RC$决定；

$\tau$大，充电慢，$\tau$小充电就快。

（3）响应与外加激励成线性关系；




（4）能量关系

电容储存： $\frac{1}{2}CU_S^2$

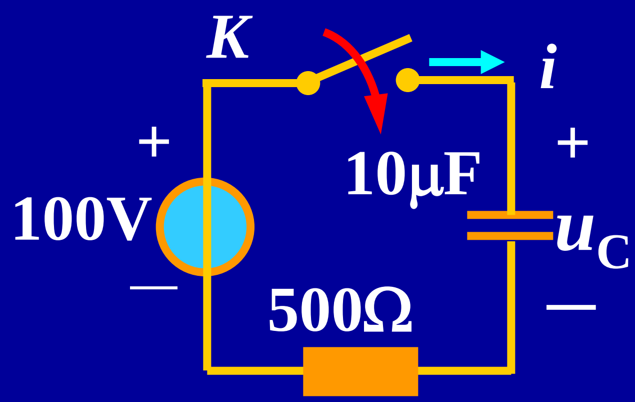
电阻消耗 $$\int_0^\infty i^2 R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_S^2$$

电源提供能量： $$\int_0^\infty U_S i\mathrm{d}t = U_S q = CU_S^2$$

电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

例 $t=0$时，开关$K$闭合，已知 $u_C$（$0_-$）=0，求（1）电容电压和电流，（2）$u_C$＝80V时的充电时间 $t$ 。

解 (1) 这是一个$RC$电路零状态响应问题。




$$\tau = RC = 500\times10^{-5} = 5\times10^{-3}\,s$$

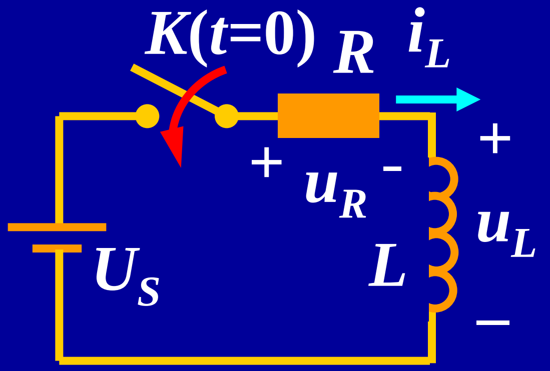
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1-e^{-200t})V \quad (t\geq 0)$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t}A$$

（2）设经过$t_1$秒，$u_C$＝80V

$$80 = 100(1-e^{-200t_1}) \rightarrow t_1 = 8.045\text{ms}$$

## 2. RL电路的零状态响应




已知 $i_L(0_-)=0$，电路方程为：

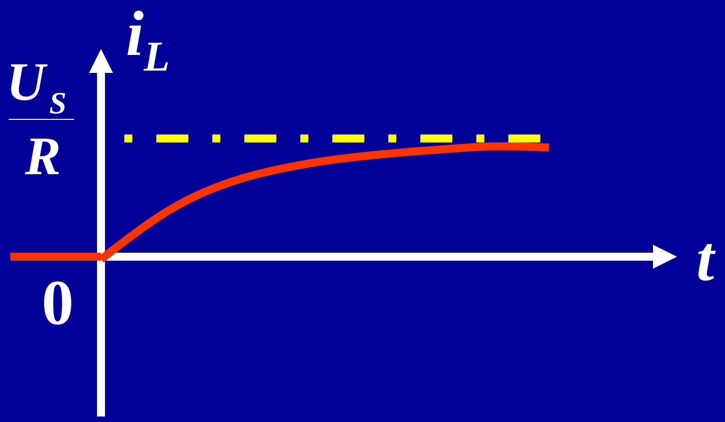
$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_S$$

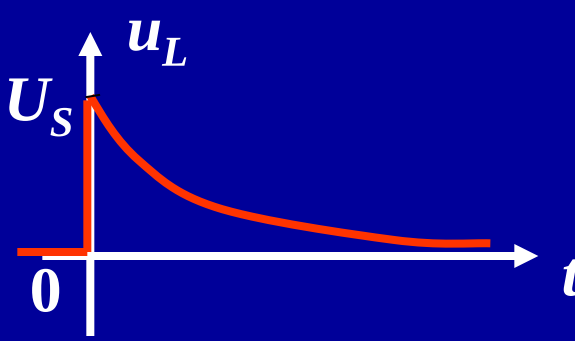
$$i_L=i_L'+i_L''=\frac{U_S}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(0_+)=0 \rightarrow A=-\frac{U_S}{R}$$

$$\boxed{i_L=\frac{U_S}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

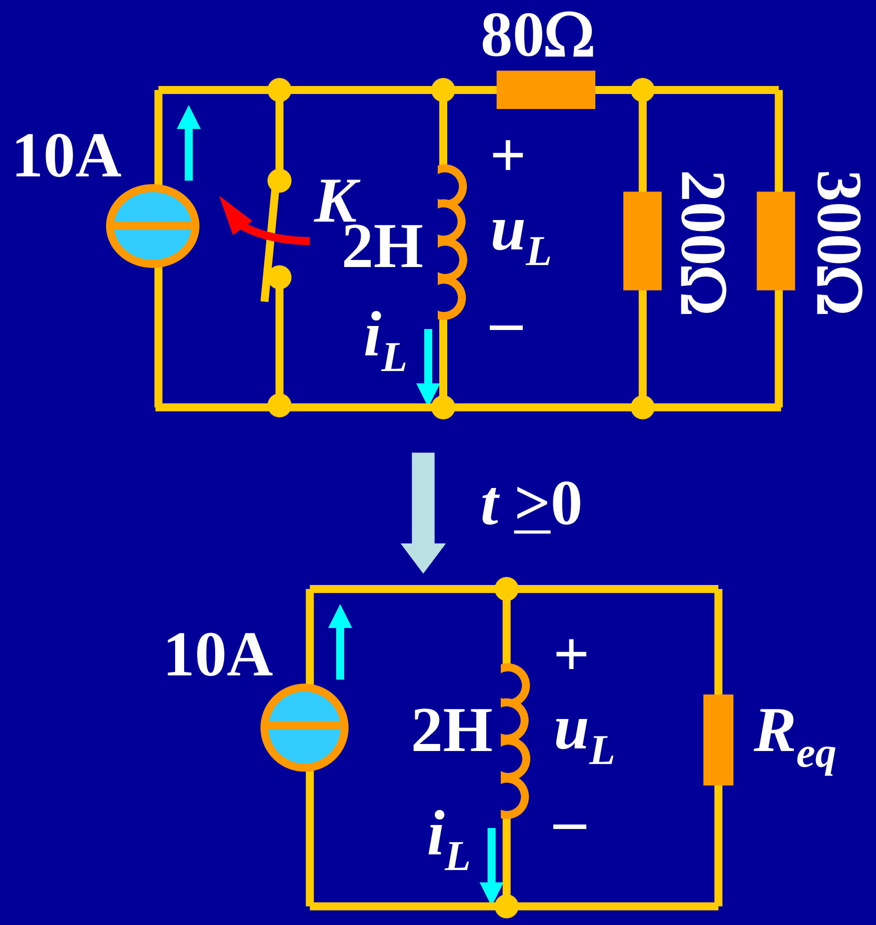
$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=U_Se^{-\frac{R}{L}t}$$



**例1** $t=0$时，开关$K$打开，求$t>0$后$i_L$、$u_L$的变化规律。

**解** 这是一个$RL$电路零状态响应问题，先化简电路。




$$R_{eq} = 80 + 200 // 300 = 200\Omega$$

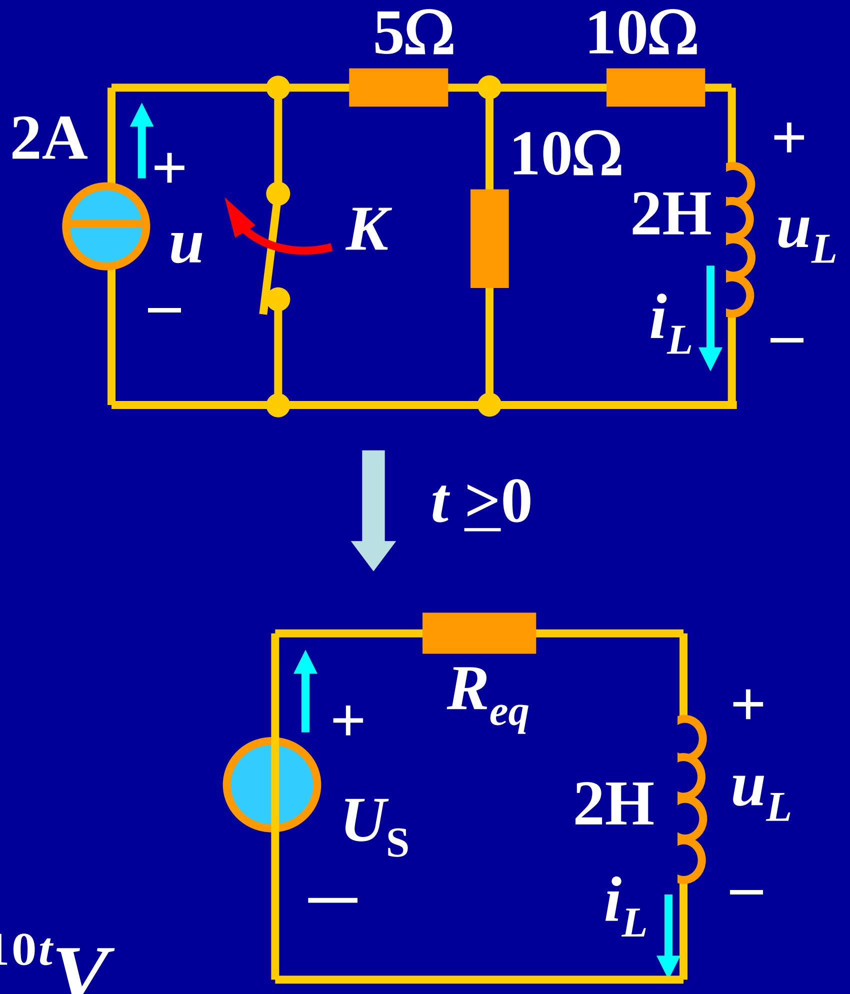
$$\tau = L / R_{eq} = 2/200 = 0.01s$$

$$i_L(\infty) = 10A$$

$$i_L(t) = 10(1 - e^{-100t})A$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 2000e^{-100t}V$$

**例2** $t=0$时 ,开关$K$打开，求$t>0$后$i_L$、$u_L$的及电流源的端电压$u$。




**解**

$$R_{eq}=10+10=20\Omega$$

$$U_S=2\times10=20V$$

$$\tau=L/R_{eq}=2/20=0.1s$$

$$i_L(\infty)=U_S/R_{eq}=1A$$

$$i_L(t)=(1-e^{-10t})A$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=20e^{-10t}V$$

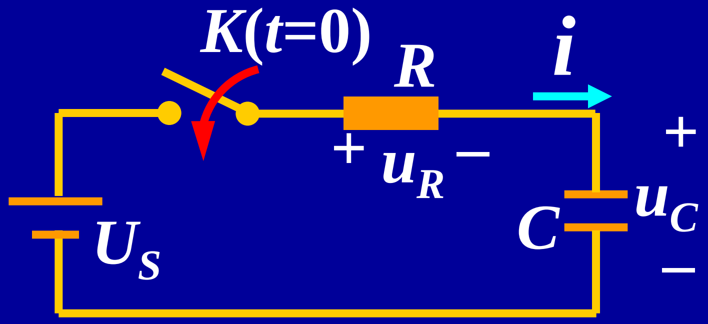
$$u=5I_S+10i_L+u_L=20+10e^{-10t}V$$

# 7.4 一阶电路的全响应

**全响应** → 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

## 1. 全响应

以$RC$电路为例，电路微分方程：




$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$$u_C(t)=u_C'+u_C''$$

$$\begin{cases}\text{稳态解} & u_C'=U_S \\ \text{暂态解} & u_C''=Ae^{-\frac{t}{\tau}}\end{cases}$$

$$\tau=RC$$

由起始值定$A$

$$u_C(0_-)=U_0$$

$$u_C(0_+)=A+U_S=U_0$$

$$\therefore A=U_0-U_S$$

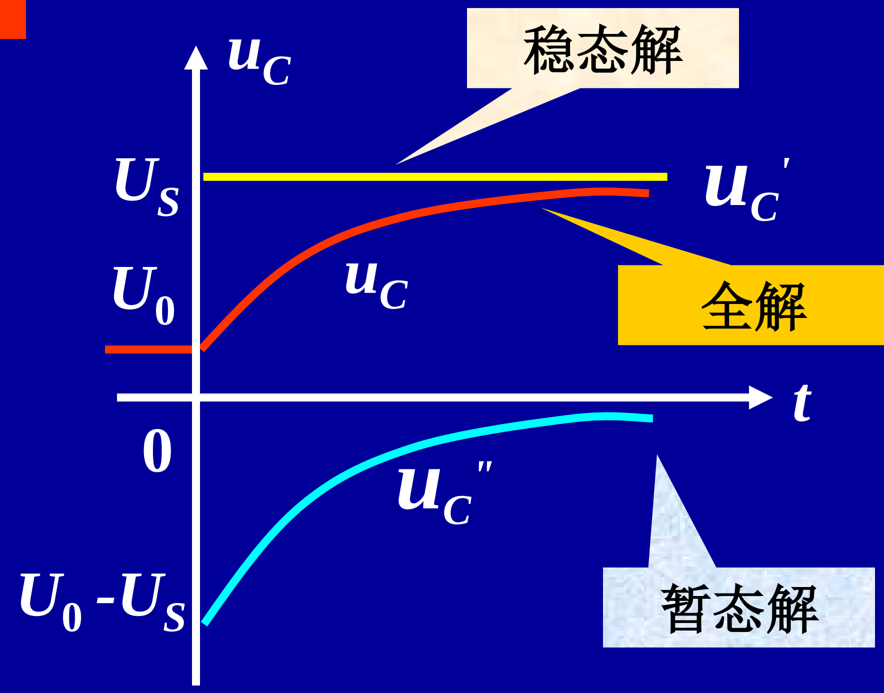
$$u_C = U_S + Ae^{\frac{-t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

强制分量(稳态解)

自由分量(暂态解)

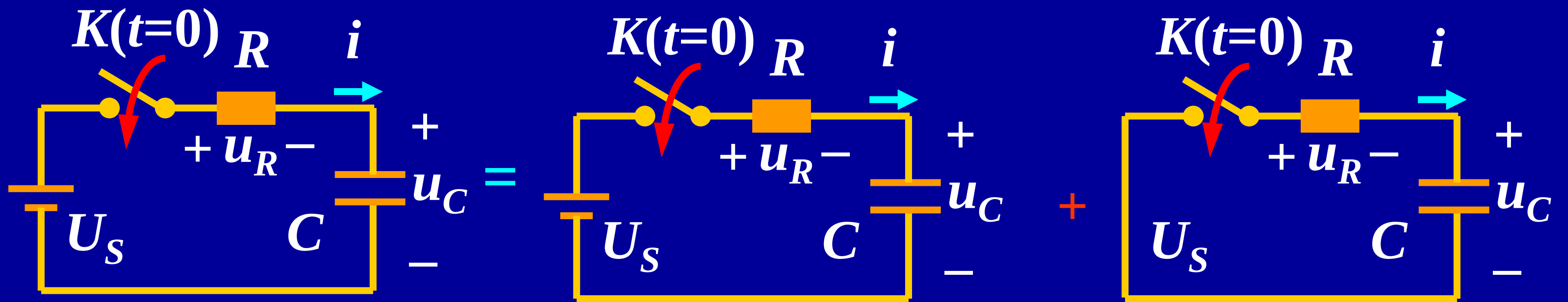
## 2. 全响应的两种分解方式

（1）全响应可以分解为暂态分量和稳态分量之和



（2）全响应可以分解为零状态响应和零输入响应之和

$$\boxed{u_C = \underbrace{U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}} \qquad (t \geq 0)}$$

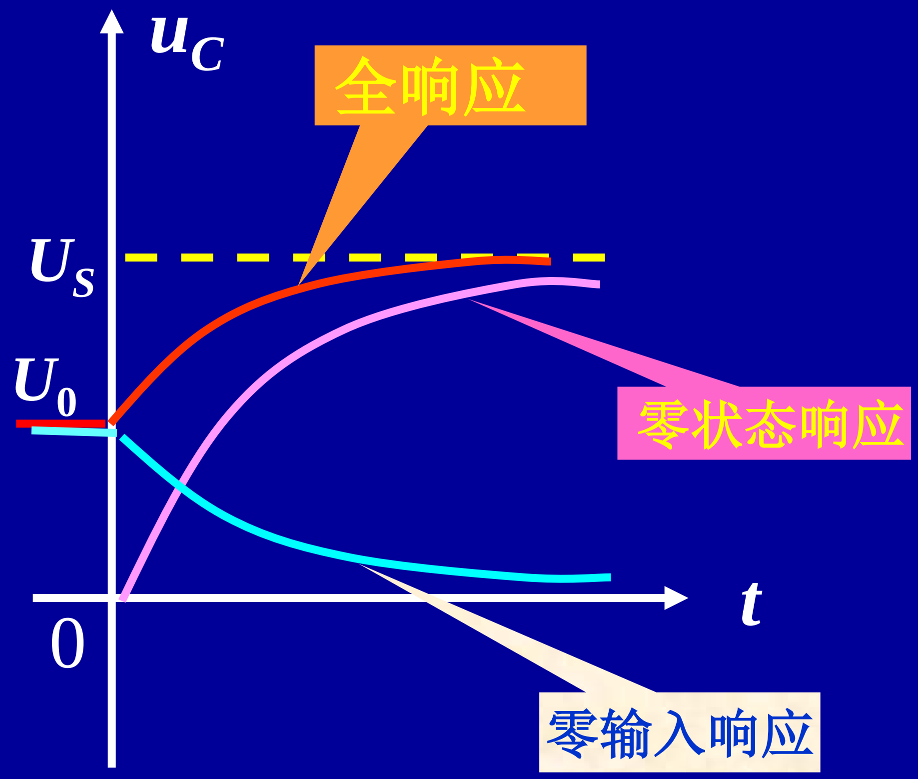



$u_C(0_-)=U_0$ $\quad$ $u_C(0_-)=0$ $\quad$ $u_C(0_-)=U_0$

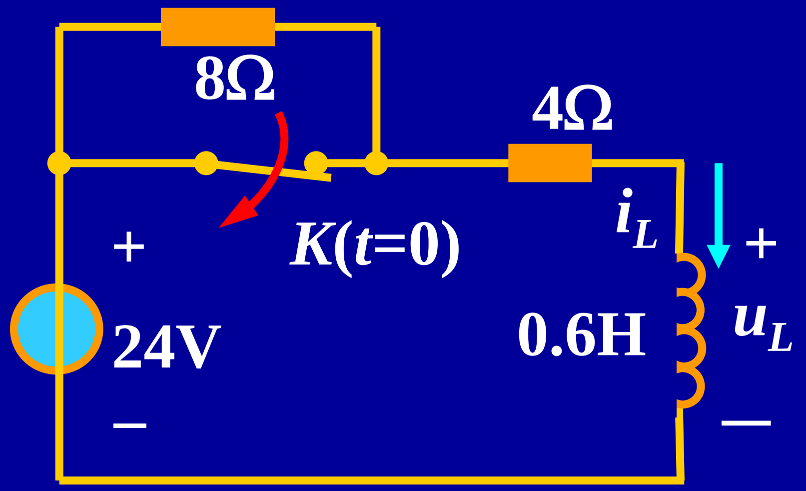
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应

零输入响应



例1　$t=0$时，开关K打开，求$t>0$后的$i_L$、$u_L$




解

$$i_L(0_-)=i_L(0_+)=24/4=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/12=1/20s$$

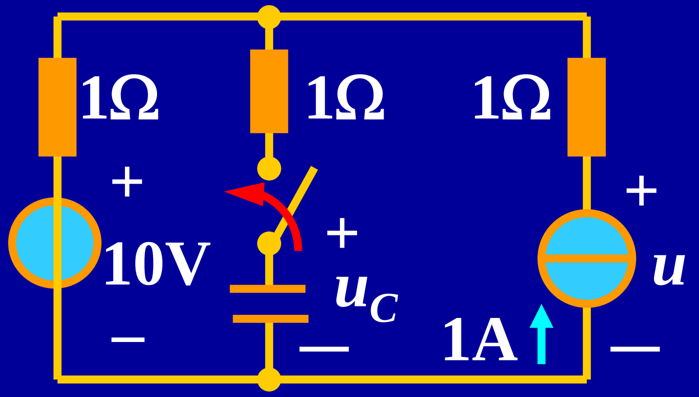
零输入响应：$$i_L'(t)=6e^{-20t}A$$

零状态响应：$$i_L''(t)=\frac{24}{12}(1-e^{-20t})A$$

全响应：$$i_L(t)=6e^{-20t}+2(1-e^{-20t})=2+4e^{-20t}A$$

**例2** $t=0$时，开关$K$闭合，求$t>0$后的$i_C$、$u_C$及电流源两端的电压。已知：$u_C(0_-)=1V, C=1F$.

**解**




稳态分量：$u_C(\infty)=10+1=11V$

$$\tau = RC = (1+1)\times 1 = 2s$$

全响应：$u_C(t)=11+Ae^{-0.5t}V \rightarrow A=-10$

$$u_C(t)=11-10e^{-0.5t}V$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=5e^{-0.5t}A$$

$$u(t)=1\times 1+1\times i_C+u_C=12-5e^{-0.5t}V$$

## 3. 三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学模型是一阶微分方程： $a\dfrac{df}{dt}+bf=c$

其解答一般形式为： $f(t)=f(\infty)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

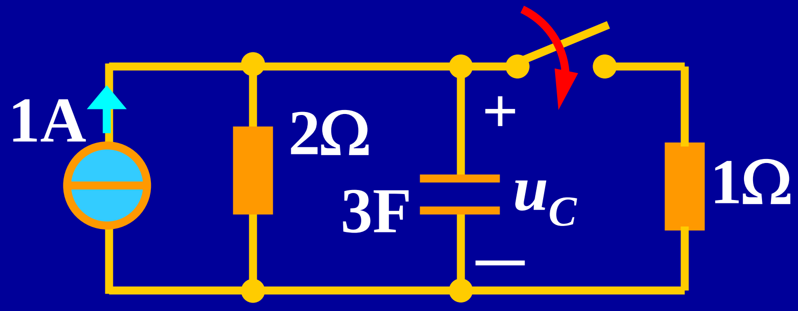
令 $t=0_+$ $\quad f(0_+)=f(\infty)+A \;\rightarrow\; A=f(0_+)-f(\infty)$

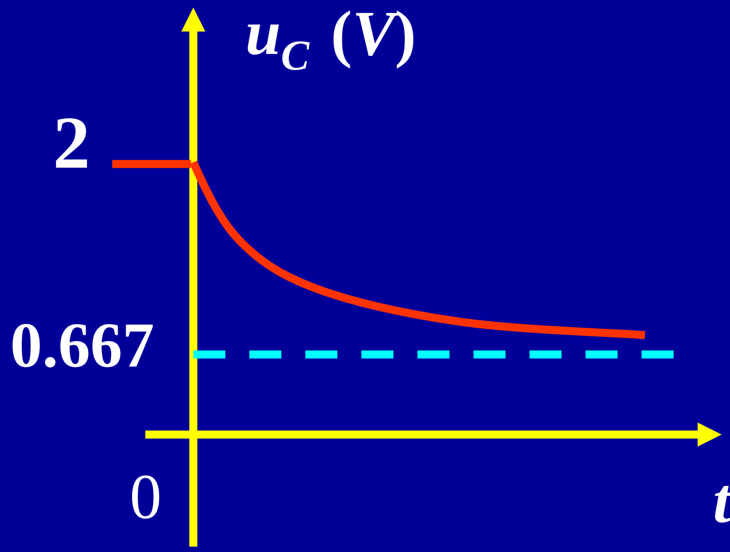
$$\boxed{f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

三要素
- $f(\infty)$ 稳态解 → 用 $t\to\infty$ 的稳态电路求解
- $f(0_+)$ 初始值 → 用 $0_+$ 等效电路求解
- $\tau$ 时间常数 → 用 $0_+$ 等效电路求解

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题

**例1** 已知：$t=0$时开关闭合，求换路后的$u_C(t)$。




**解**

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=2V$$

$$u_C(\infty)=(2//1)\times 1=\frac{2}{3}V$$

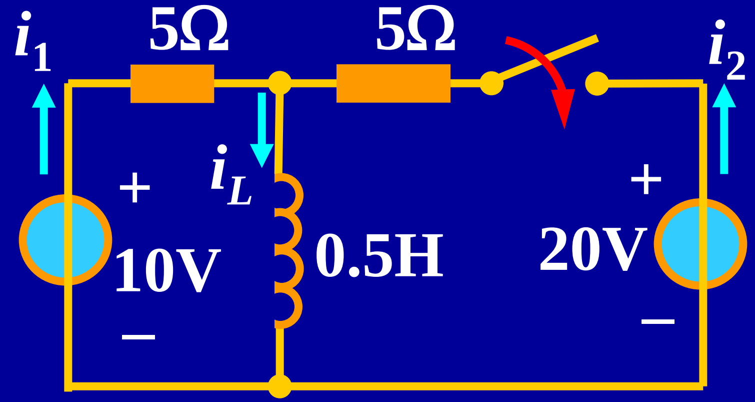
$$\tau=R_{eq}C=\frac{2}{3}\times 3=2\,\mathrm{s}$$

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C=\frac{2}{3}+(2-\frac{2}{3})e^{-0.5t}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}e^{-0.5t}\qquad t\geq 0$$

例2　$t=0$时，开关闭合，求$t>0$后的$i_L$、$i_1$、$i_2$

解　三要素为：




$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=10/5=2A$$

$$i_L(\infty)=10/5+20/5=6A$$

$$\tau=L/R=0.5/(5//5)=1/5s$$

应用三要素公式　$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(t)=6+(2-6)e^{-5t}=6-4e^{-5t}\quad t\geq 0$$

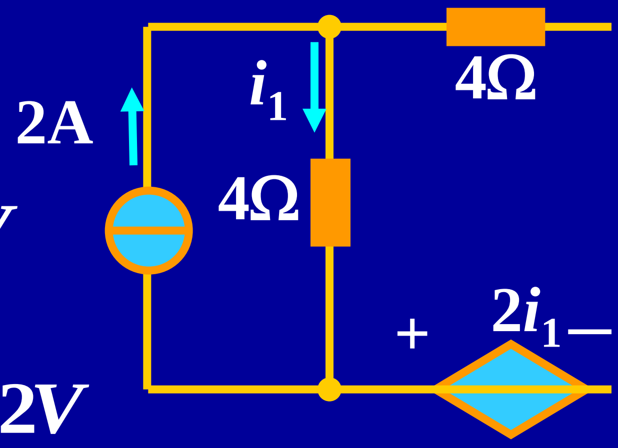
$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=0.5\times(-4e^{-5t})\times(-5)=10e^{-5t}V$$

$$i_1(t)=(10-u_L)/5=2-2e^{-5t}A$$

$$i_2(t)=(20-u_L)/5=4-2e^{-5t}A$$

**例3** 已知：$t=0$时开关由1→2，求换路后的$u_C(t)$。

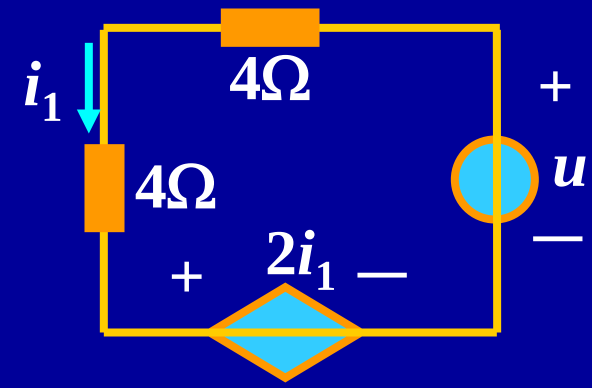
**解** 三要素为：




$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-8V$$

$$u_{OC}=4i_1+2i_1=6i_1=12V$$

$$\tau=R_{eq}C=10\times0.1=1s$$




$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

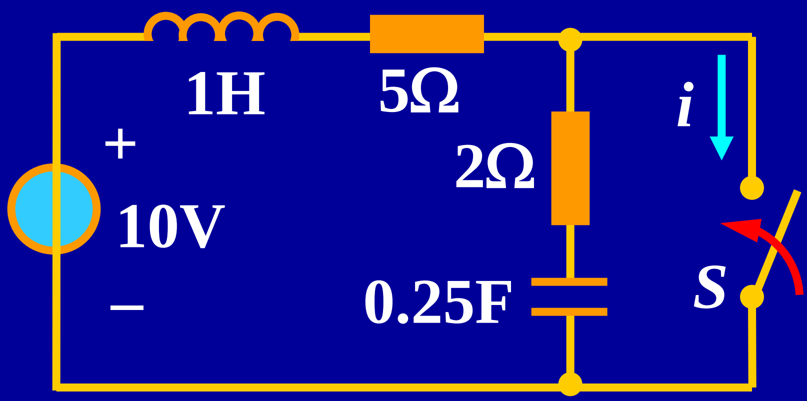
$$u_C(t)=12+[-8-12]e^{-t}$$

$$=12-20e^{-t}V$$

$$u=10i_1\rightarrow$$

$$R_{eq}=u/i_1=10\Omega$$

**例4** 已知：$t$=0时开关闭合，求换路后的电流$i\ (t)$ 。




**解** 三要素为:

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10V$$

$$\tau_1=R_{eq}C=2\times0.25=0.5s$$

$$u_C(\infty)=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \qquad i_L(\infty)=10/5=2A$$

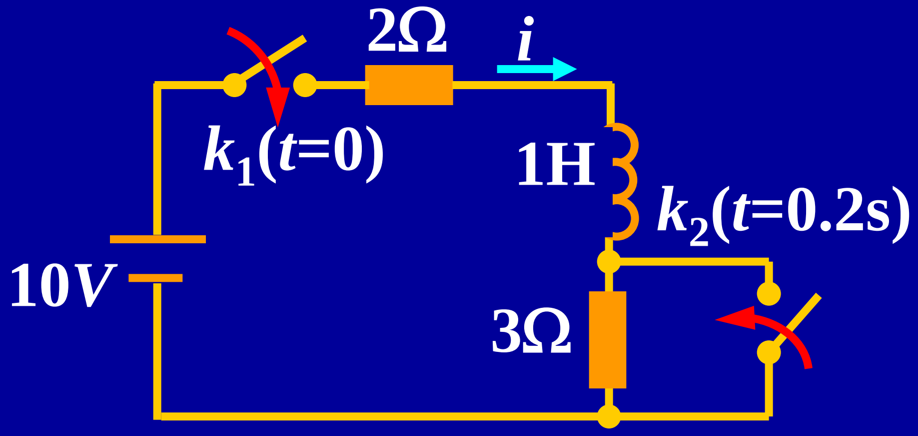
$$\tau_2=L/R_{eq}=1/5=0.2s$$

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_1}}=10e^{-2t}V$$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_2}}=2(1-e^{-5t})A$$

$$i(t)=i_L(t)+\frac{u_C(t)}{2}=2(1-e^{-5t})+5e^{-2t}A$$

**例5** 已知：电感无初始储能，$t = 0$时合$k_1$，$t = 0.2$s时合$k_2$，求两次换路后的电感电流$i(t)$。




**解**

**$0 < t < 0.2$s**

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$\tau_1 = L/R = 1/5 = 0.2\text{ s}$$

$$i(\infty) = 10/5 = 2\text{A}$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t}\ \text{A}$$

**$t > 0.2$s**

$$i(0.2_-) = 2 - 2e^{-5\times0.2} = 1.26\text{A}$$

$$i(0.2_+) = 1.26A$$

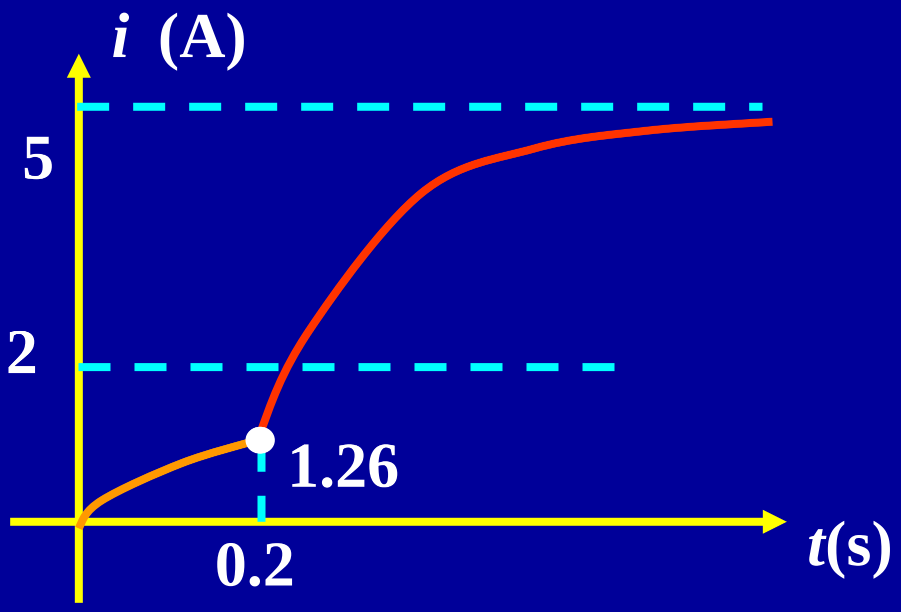
$$\tau_2 = L/R = 1/2 = 0.5$$

$$i(\infty) = 10/2 = 5A$$

$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)}\ \text{A}$$

$$i = 2 - 2e^{-5t} \qquad (0 < t \leq 0.2\text{s})$$

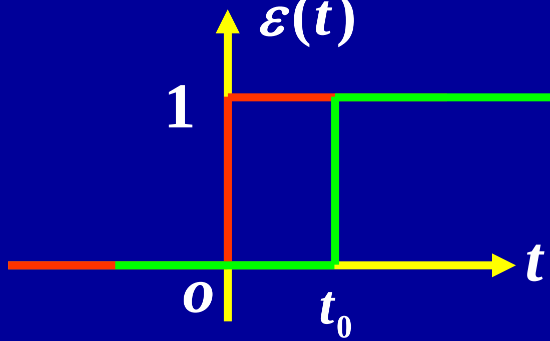
$$i = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \qquad (t \geq 0.2\text{s})$$



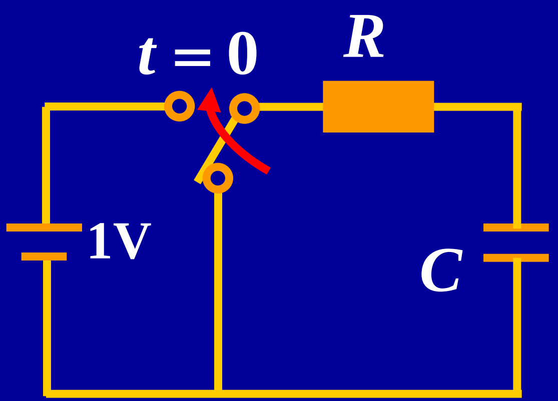
# 7.5　一阶电路的阶跃响应

**单位阶跃函数**　是一种奇异函数，定义为：

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t\le 0_-\\ 1 & t\ge 0_+\end{cases}$$

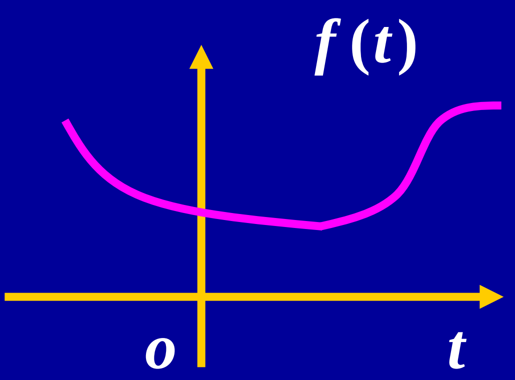


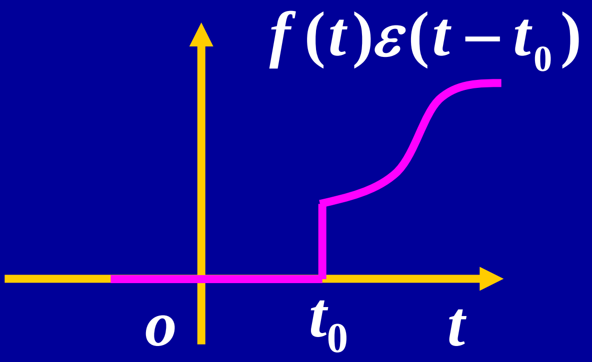

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\le t_{0-}\\ 1 & t\ge t_{0+}\end{cases}$$



**1. 用阶跃函数可以起始任意一个函数 $f(t)$**

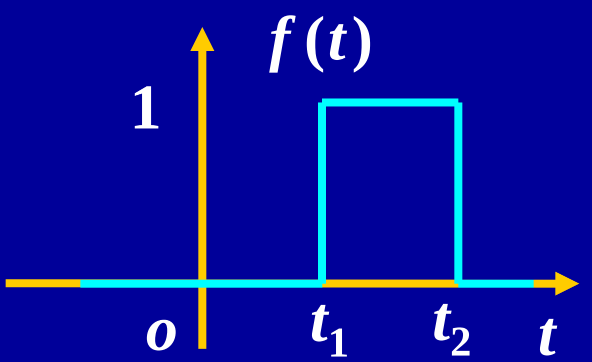
$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\le t_{0-}\\ f(t) & t\ge t_{0+}\end{cases}$$




**2. 用阶跃函数表示矩形脉冲**

$$f(t)=\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)$$




上 页 下 页

**单位阶跃响应** 在单位阶跃函数作用下电路引起的响应，记为 $s(t)$。

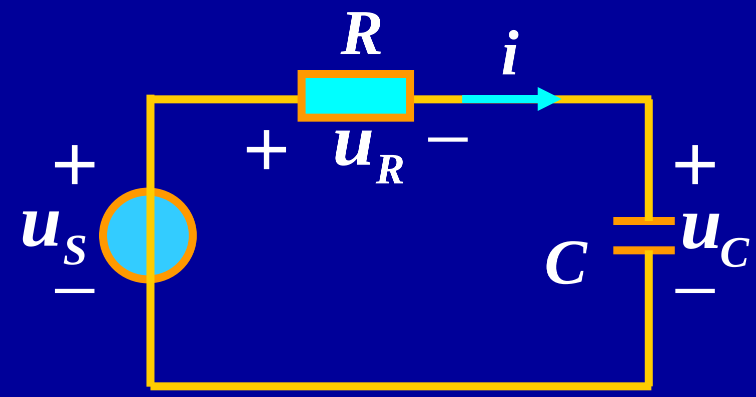
**阶跃响应** 若已知电路的单位阶跃响应为 $s(t)$，激励为：

$$u_S(t) = U_0\varepsilon(t - t_1)$$

则电路的阶跃响应（零状态响应）为：

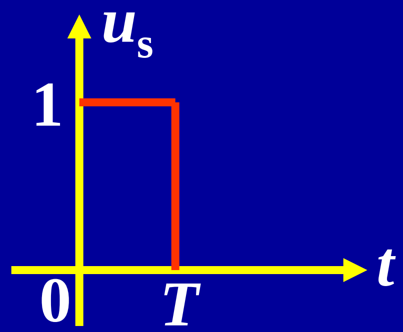
$$f(t) = U_0 s(t - t_1)$$

## 例6 脉冲序列分析




### 1. *RC* 电路在单个脉冲作用的响应

**(1) $0 < t < T$**




$$u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) = 0\,V$$

$$u_{C1}(\infty) = 1\,V \qquad \tau = RC$$

$$u_{C1}(t) = u_{C1}(\infty) + [u_{C1}(0_+) - u_{C1}(\infty)]e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{cases} u_{C1}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}\ V, & t > 0 \\ u_{R1}(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\ V, & t > 0 \\ i_1(t) = \dfrac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\ A, & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_s = 0 \begin{cases} t > T \\ t < 0 \end{cases} \\ u_s = 1\ (0 < t < T) \end{cases}$$

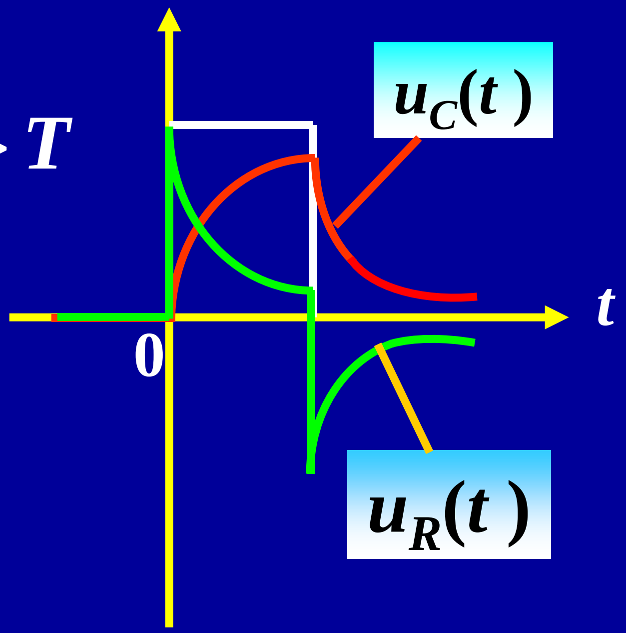
(2) $t > T$

$$u_{C2}(0_+) = u_{C1}(T) = 1 - e^{-\frac{T}{RC}} \text{ V}$$

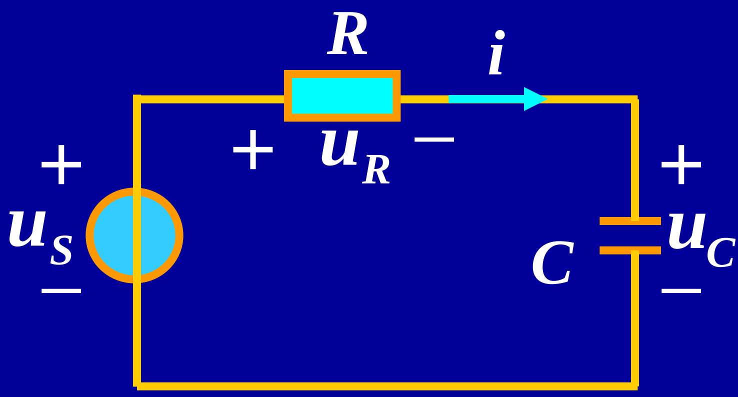
$$u_{C2}(\infty) = 0\,V \qquad \tau = RC$$

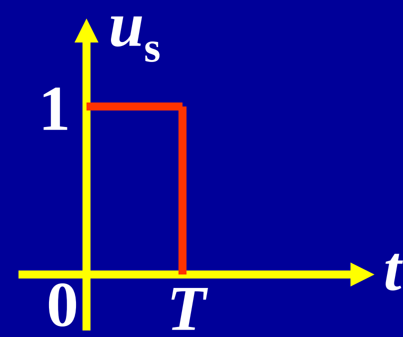
$$u_{C2}(t) = u_{C2}(\infty) + [u_{C2}(0_+) - u_{C2}(\infty)]e^{-\frac{t-T}{RC}}$$

$$\begin{cases} u_{C2}(t) = (1 - e^{-\frac{T}{RC}})e^{-\frac{t-T}{RC}} \text{ V}, \quad t > T \\ u_{R2}(t) = -u_{C2}(t), \quad t > T \\ i_2(t) = -\dfrac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{R} e^{-\frac{t-T}{RC}} \text{ A}, \quad t > T \end{cases}$$



## 利用阶跃响应求解



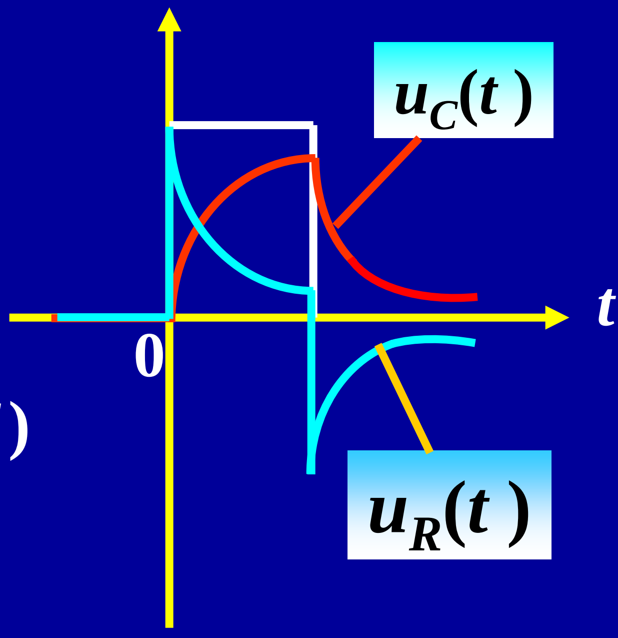




$$s_{u_C}(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})V$$

$$s_{u_R}(t)=e^{-\frac{t}{RC}}V$$

$$s_i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}A$$

$$u_S(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)$$

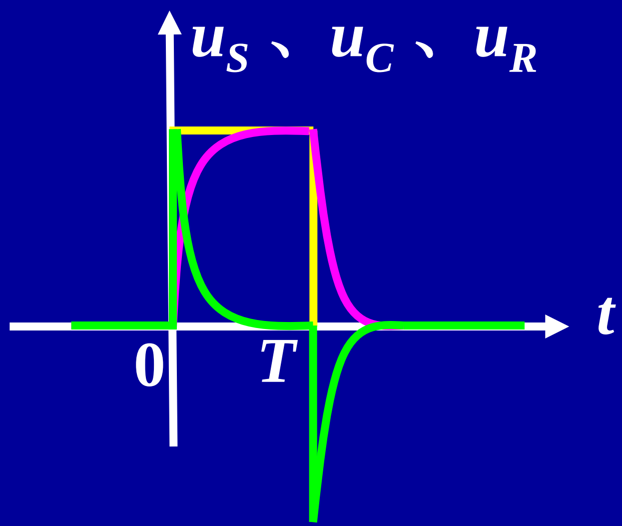


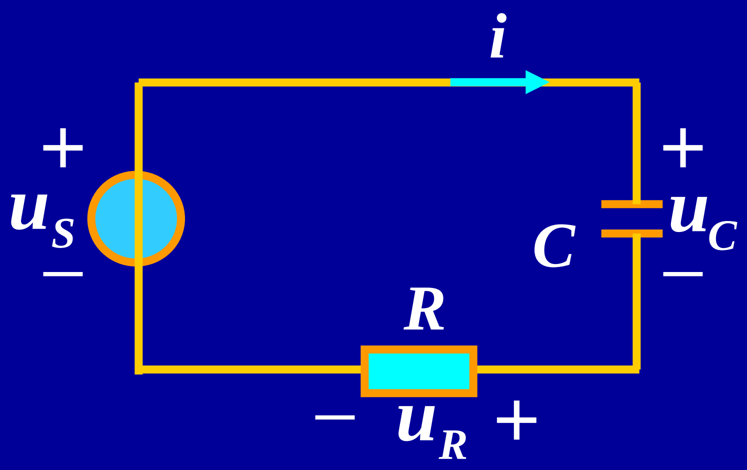

$$u_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)-(1-e^{-\frac{t-T}{RC}})\varepsilon(t-T)$$

$$u_R(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)-e^{-\frac{t-T}{RC}}\varepsilon(t-T)$$

$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)-\frac{1}{R}e^{-\frac{t-T}{RC}}\varepsilon(t-T)$$

## (a) $\tau << T$, $u_R$为输出



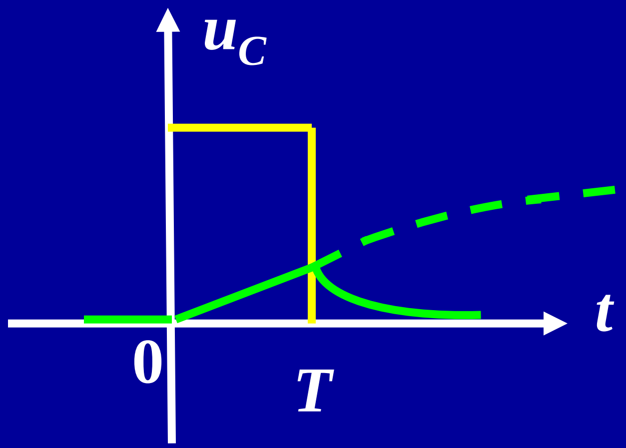



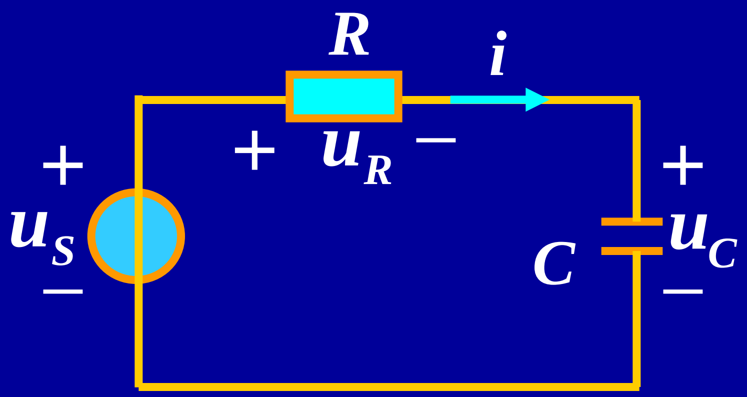

输出近似为输入的微分

$$\because \ \tau << T \qquad u_C(t) >> u_R(t) \qquad u_C(t) \approx u_S(t)$$

$$u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{du_C(t)}{dt} \approx RC\frac{du_S(t)}{dt}$$

## (b) $\tau >> T$, $u_C$为输出



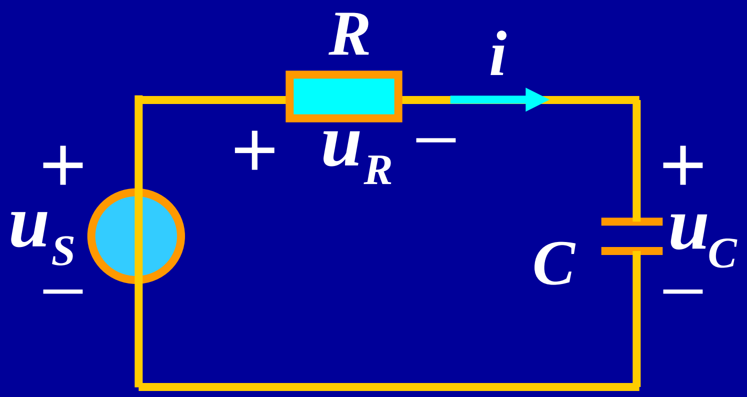

输出近似为输入的积分

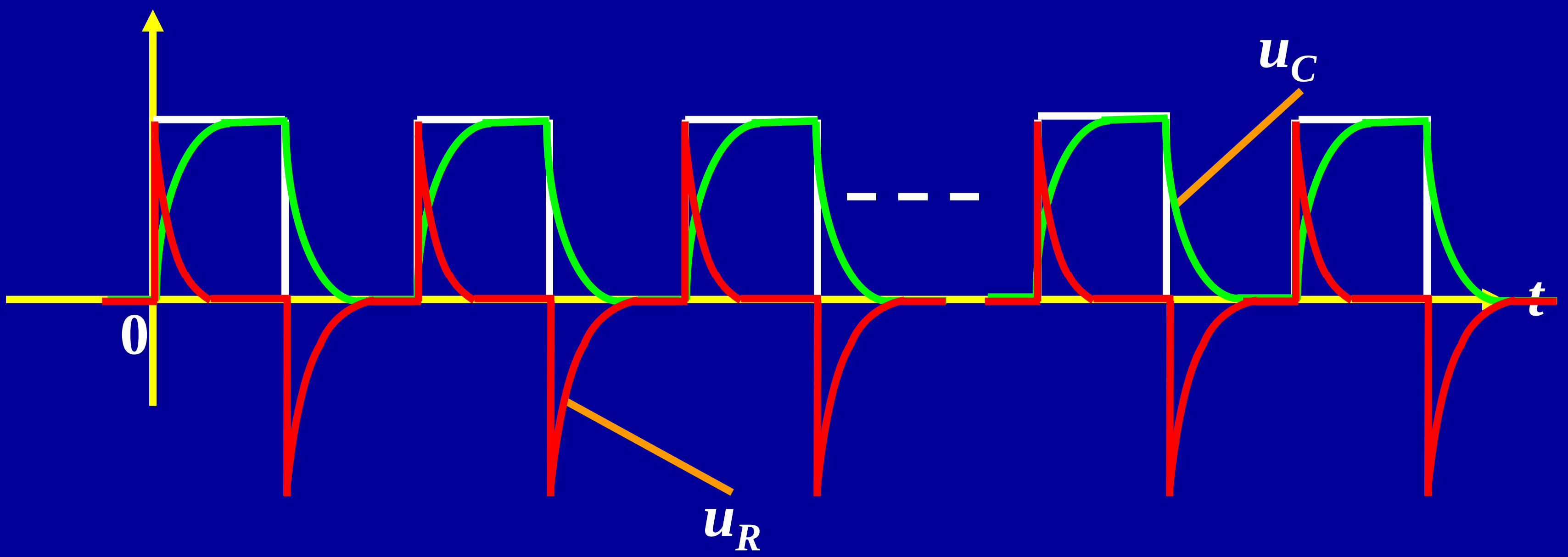
$$\because \ \tau >> T \qquad u_C(t) << u_R(t) \qquad u_R(t) \approx u_S(t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{C}\int \frac{u_R(t)}{R}dt \approx \frac{1}{RC}\int u_S(t)dt$$

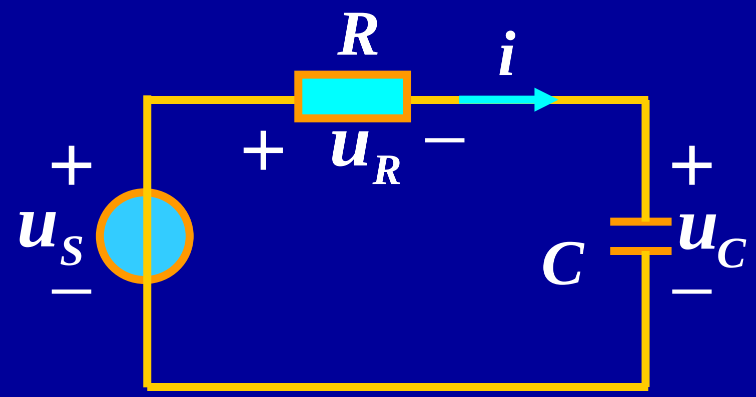
## 2. 脉冲序列分析

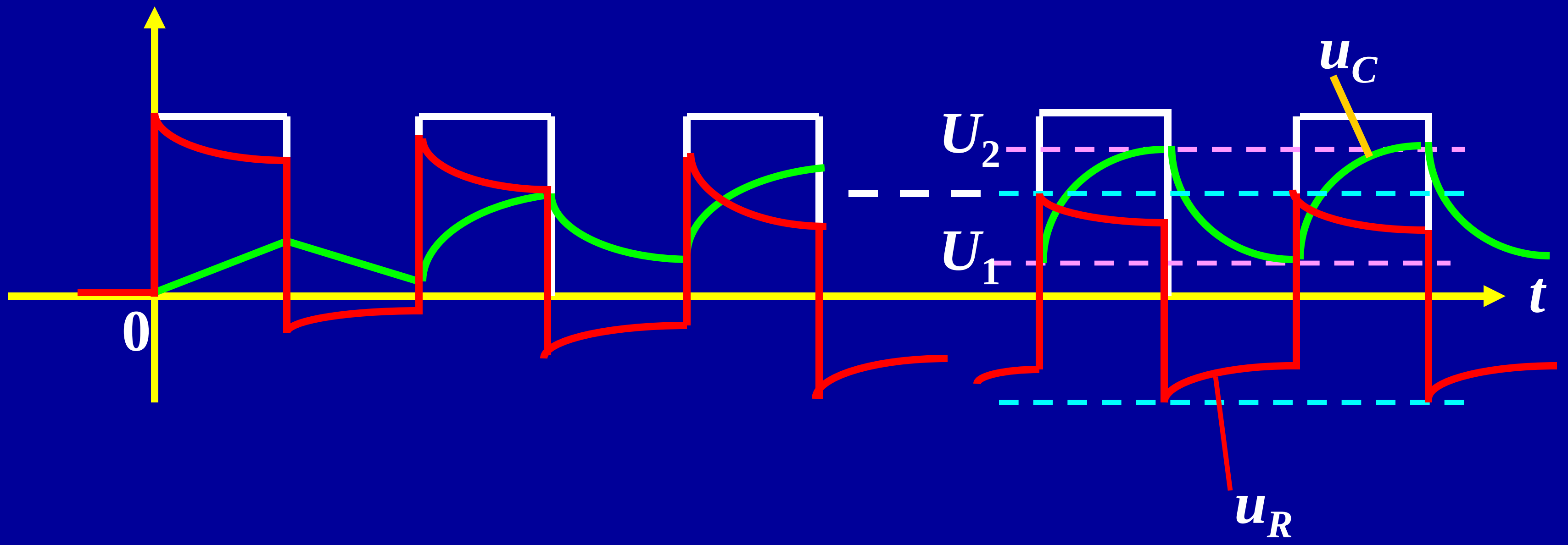
**(a) $\tau<<T$**



## (b) $\tau >> T$



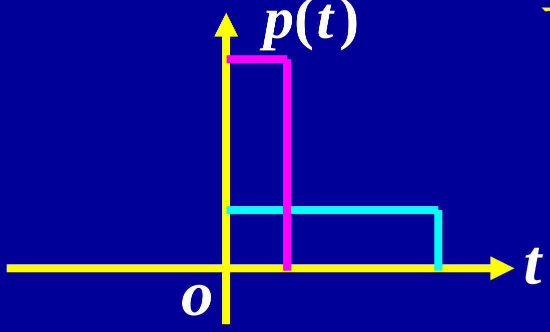



# 7.6 一阶电路的冲激响应

**单位冲激函数** 是一种奇异函数，定义为：

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\le 0_-\\ 0 & t\ge 0_+\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

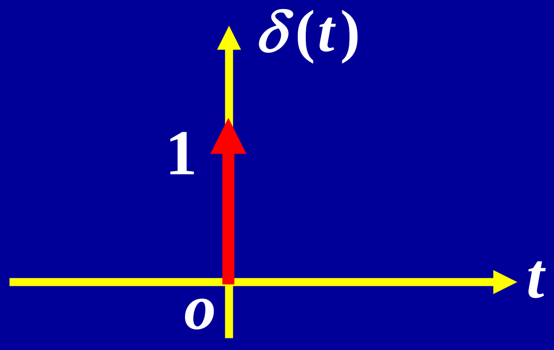


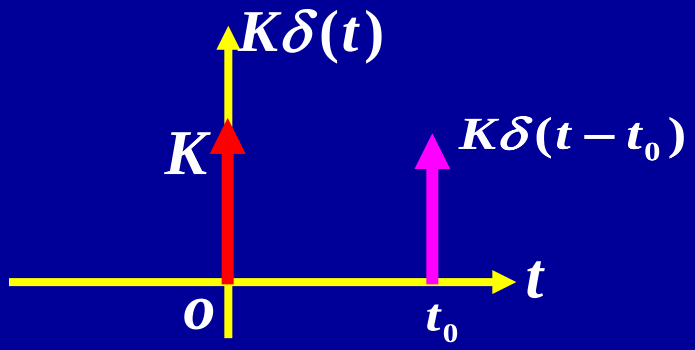

单位矩形脉冲

宽为：$\Delta$

高为：$\dfrac{1}{\Delta}$

$$\lim_{\Delta\to 0}p(t)=\delta(t)$$



## 冲激函数性质

1. 冲激函数和阶跃函数之间的关系

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\xi) d\xi = \varepsilon(t) \qquad \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$$

2. 筛分性质

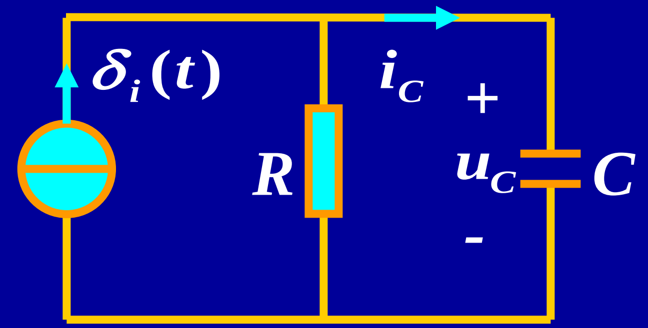
$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

3. 单位冲激电流（电压）加到无初始储能的动态元件上，将引起电容电压（电感电流）的跃变。

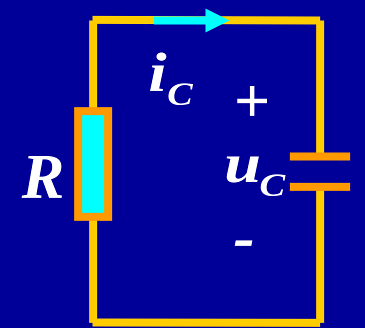
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} \delta_i(t) dt = \frac{1}{C}$$

## 单位冲激响应




求出$0_+$时刻电容电压的值

$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{R}=\delta_i(t)$$



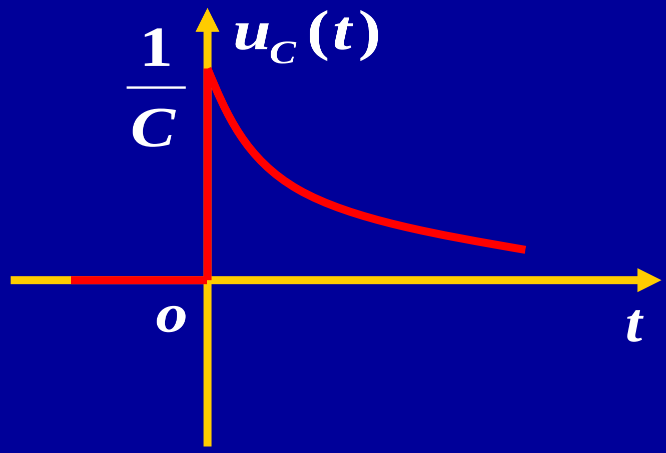

$$\int_{0-}^{0+}C\frac{du_C}{dt}dt+\cancel{\int_{0-}^{0+}\frac{u_C}{R}dt}=\int_{0-}^{0+}\delta_i(t)dt$$

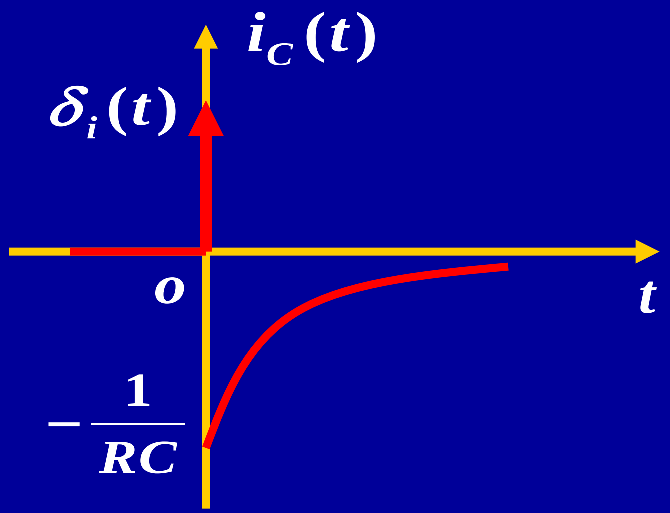
$$C[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=1$$

$$u_C(0_+)=\frac{1}{C} \qquad u_C(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C(t)=\delta_i(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad i_C(t)=\delta_i(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



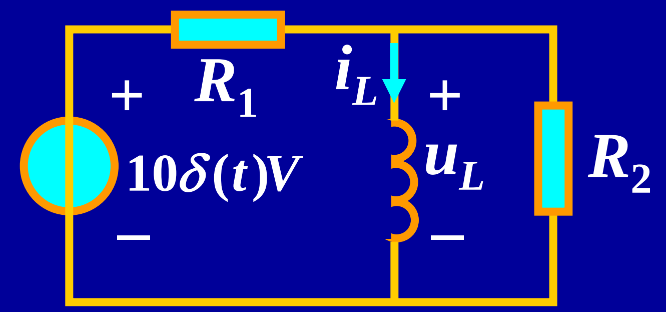

## 单位阶跃响应与单位冲激响应关系

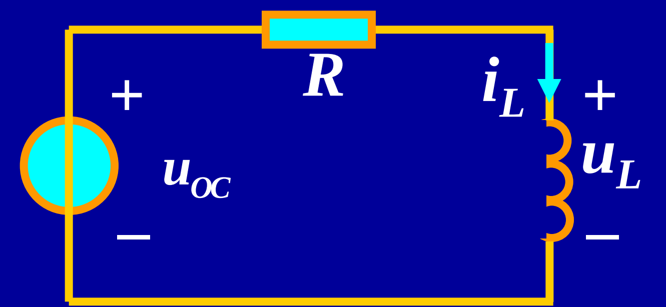
设一电路的单位阶跃响应为$s(t)$，单位冲激响应为$h(t)$，则：

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt} \qquad s(t)=\int h(t)dt$$

**例7** 图示电路，已知：$i_L(0_-)=0, R_1=6\Omega, R_2=4\Omega, L=100mH$ 求冲激响应 $i_L$ 和 $u_L$ 。

**解** 利用戴维宁定理：




$$u_{OC}=4\delta(t) \qquad R=2.4\Omega$$

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=4\delta(t)$$

$$\int_{0_-}^{0_+}L\frac{di_L}{dt}dt+\cancel{\int_{0_-}^{0_+}Ri_L dt}=\int_{0_-}^{0_+}4\delta(t)dt$$

$$L[i_L(0_+)-i_L(0_-)]=4 \qquad i_L(0_+)=40A$$

$$i_L(t)=i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=40e^{-24t}\varepsilon(t)A$$

$$u_L(t)=4\delta(t)-96e^{-24t}\varepsilon(t)V$$