第八章 相量法

重点

1. 正弦量的表示法、相位差；

2. 正弦量的相量表示；

3. 电路定理的相量形式。

下 页

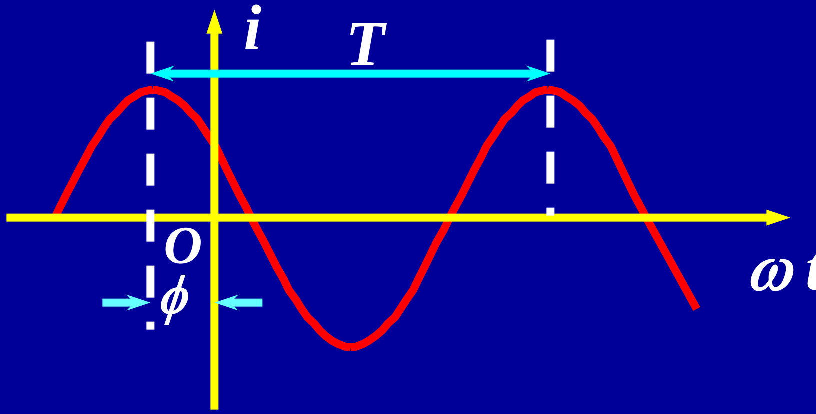
8.1 正弦量的基本概念

1. 正弦量

瞬时值表达式：

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

波形：



正弦量为周期函数 $f(t) = f(t + kT)$

周期T (*period*)和频率f (*frequency*)：

$$f = \frac{1}{T}$$

周期 T ：重复变化一次所需的时间。 单位：s，秒

频率 f ：每秒重复变化的次数。 单位：Hz，赫(兹)

正弦电流电路 → 激励和响应均为正弦量的电路（正弦稳态电路）称为正弦电路或交流电路。

研究正弦电路的意义

（1）正弦稳态电路在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位。

优点

1）正弦函数是周期函数，其加、减、微分、积分运算后仍是同频率的正弦函数；

2）正弦信号容易产生、传送和使用。

（2）正弦信号是一种基本信号，任何变化规律复杂的信号可以分解为按正弦规律变化的分量。

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega t+\theta_k)$$

2. 正弦量的三要素

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)$$

(1) 幅值 (*amplitude*) (振幅、 最大值)I_m

→ 反映正弦量变化幅度的大小。

(2) 角频率(*angular frequency*)ω

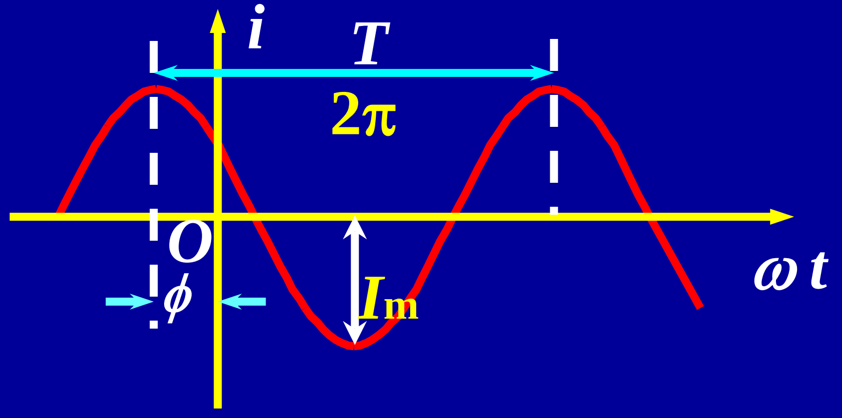
→ 相位变化的速度， 反映正弦量变化快慢。

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

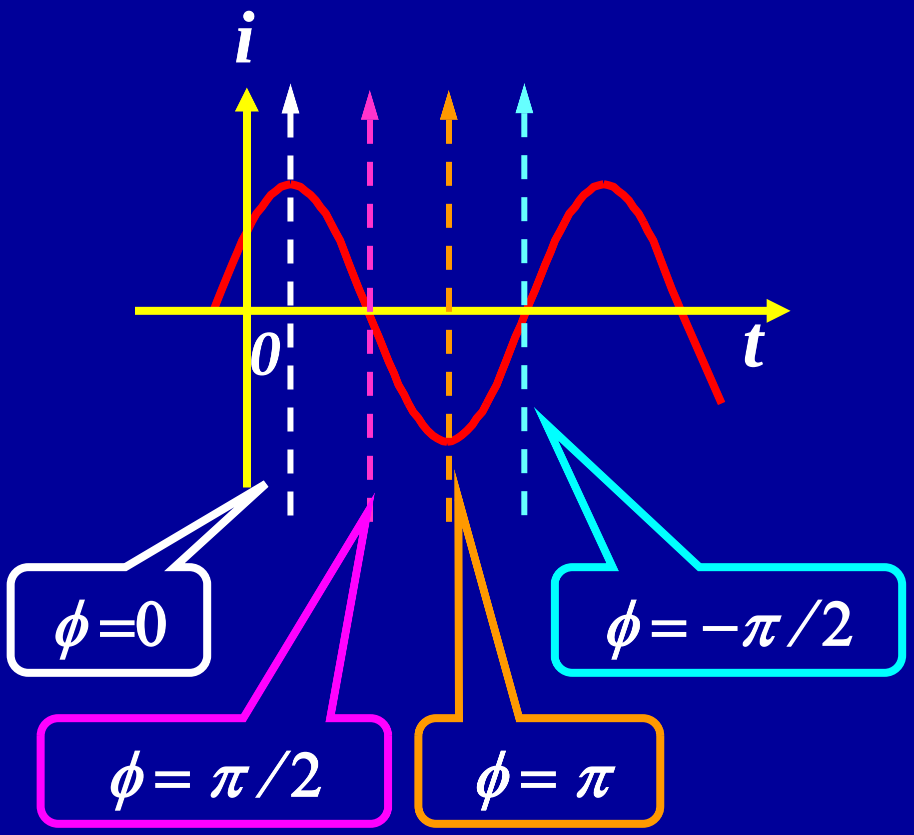
单位： rad/s ， 弧度 / 秒

(3) 初相位(*initial phase angle*) ϕ

→ 反映正弦量的计时起点，常用角度表示。

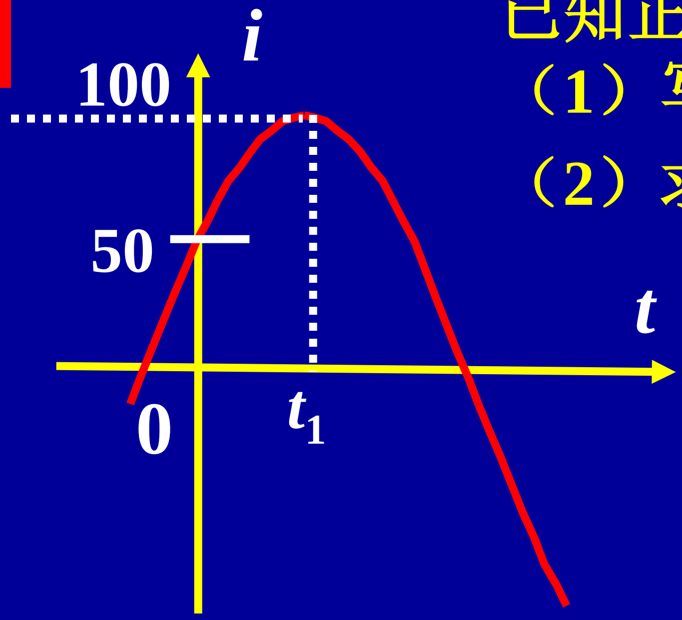


同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。



一般规定：$|\phi| \le \pi$

例



已知正弦电流波形如图，$\omega=10^3$rad/s，

（1）写出$i(t)$表达式；

（2）求最大值发生的时间t_1

解 $i(t)=100\cos(10^3 t+\phi)$

$$t=0 \rightarrow 50=100\cos\phi$$

$$\rightarrow \quad \phi=\pm\pi/3$$

由于最大值发生在计时起点右侧 $\phi=-\dfrac{\pi}{3}$

$$i(t)=100\cos(10^3 t-\frac{\pi}{3})$$

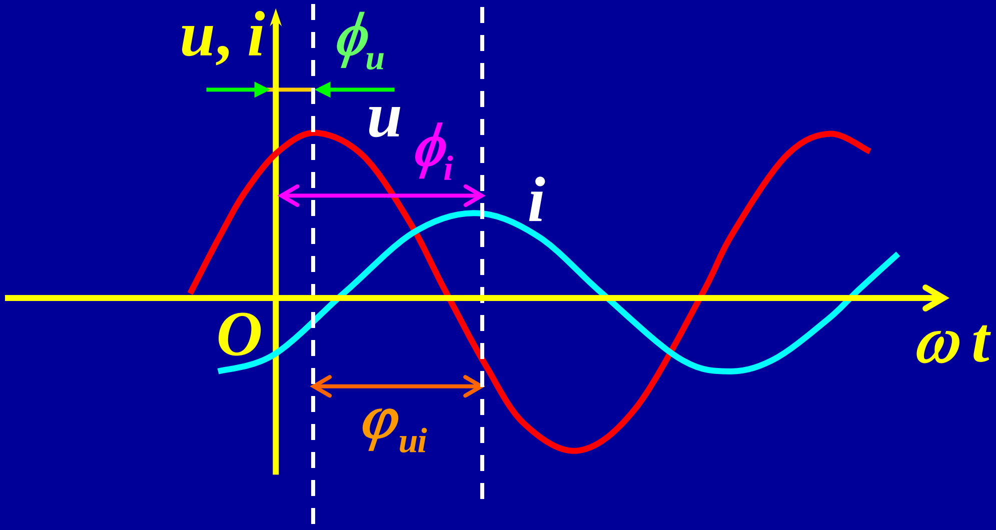
当 $10^3 t_1=\pi/3$ 有最大值 $\rightarrow$ $t_1=\dfrac{\pi/3}{10^3}=1.047ms$

3. 同频率正弦量的相位差 (*phase difference*)

设： $u(t)=U_m\cos(\omega t+\phi_u)$， $i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$

则相位差： $\varphi_{ui}=(\omega t+\phi_u)-(\omega t+\phi_i)=\phi_u-\phi_i$

同频正弦量的相位差等于初相位之差。

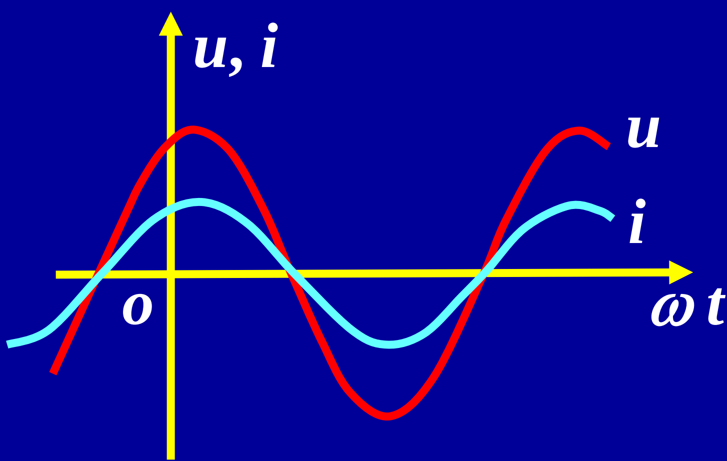


规定： $|\varphi|\le\pi$

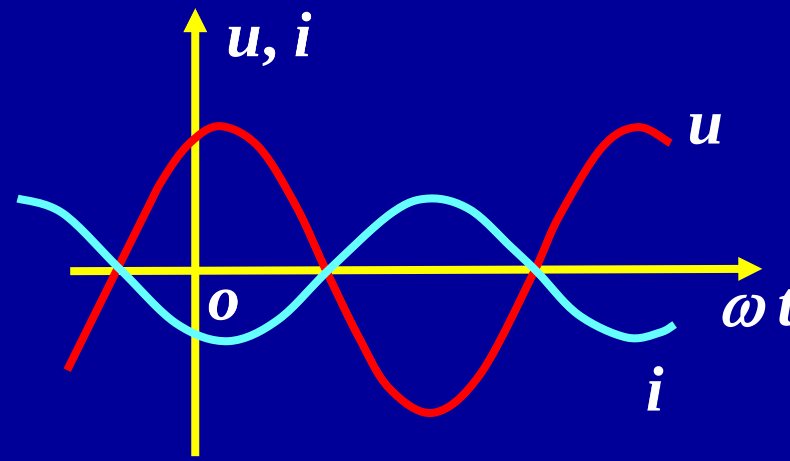
- $\varphi_{ui}>0$， u 超前于i，或i 滞后于u，u 比i先到达最大值；
- $\varphi_{ui}<0$， i 超前于u，或u 滞后i，i 比 u 先到达最大值。

特殊相位关系

$\varphi = 0$，同相



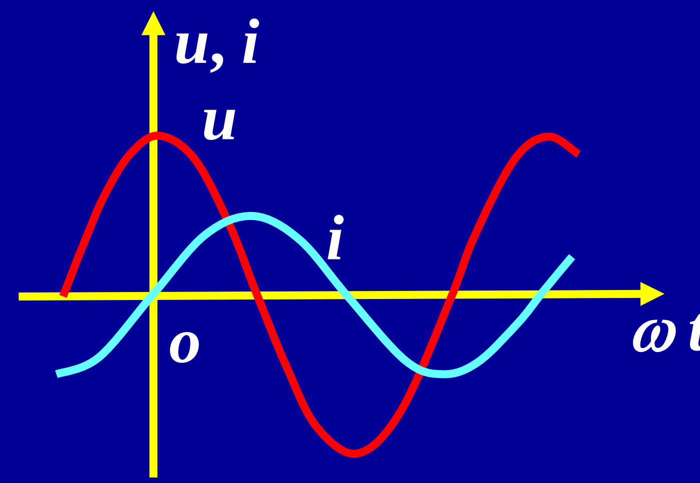
$\varphi = \pm\pi$，反相



$\varphi = \pi / 2$

u 超前 i于$\pi/2$，不说 u 滞后 i于$3\pi/2$；

i 滞后u于$\pi/2$，不说 i 超前u于$3\pi/2$。



同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

例 计算下列两正弦量的相位差。

(1) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+3\pi/4)$ $\varphi_{12}=3\pi/4-(-\pi/2)=5\pi/4>\pi$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-\pi/2)$ $\Rightarrow$ $\varphi_{12}=-2\pi+5\pi/4=-3\pi/4$

(2) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+30°)$

$i_2(t)=10\sin(100\pi t-15°)$ $\nearrow$ $i_2(t)=10\cos(100\pi t-105°)$

$\varphi_{12}=30°-(-105°)=135°$

(3) $u_1(t)=10\cos(100\pi t+30°)$ $\omega_1\neq\omega_2$

$u_2(t)=10\cos(200\pi t+45°)$ 不能比较相位差

(4) $i_1(t)=5\cos(100\pi t-30°)$ $i_2(t)=3\cos(100\pi t-150°)$

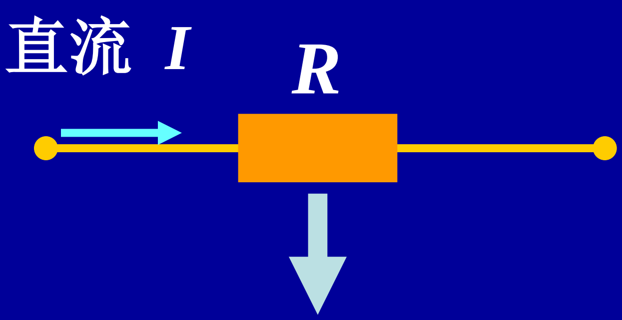
$i_2(t)=-3\cos(100\pi t+30°)$ $\nearrow$ $\varphi_{12}=-30°-(-150°)=120°$

两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

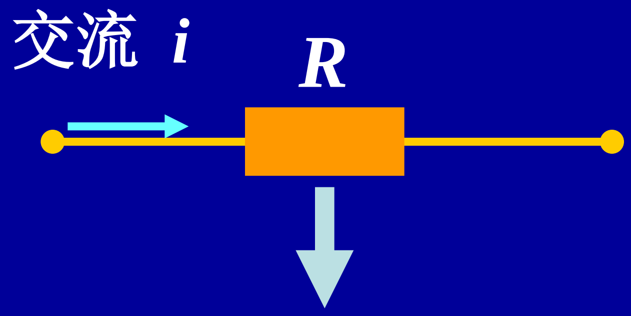
4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其效果，在工程上采用有效值来表示。

周期电流、电压有效值 (*effective value*) 定义



$$W = RI^2T$$



$$W = \int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$$

电流有效值定义为

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

有效值也称均方根值 (*root-mean-square*)

上 页　下 页

同样，可定义电压有效值：$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$

正弦电流、电压的有效值

设：$i(t) = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(\omega t + \phi)\,dt}$$

$$= \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{\mathrm{m}} \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{\mathrm{m}} = \sqrt{2} I}$$

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_m \quad 或 \quad U_m=\sqrt{2}U$$

若一交流电压有效值为U=220V，则其最大值为$U_m\approx$311V；

U=380V， $U_m\approx$537V。

注 （1）工程 … 值，如设备铭
牌额 … 平、耐压值指
的是 … 压水平时应按
最大 …

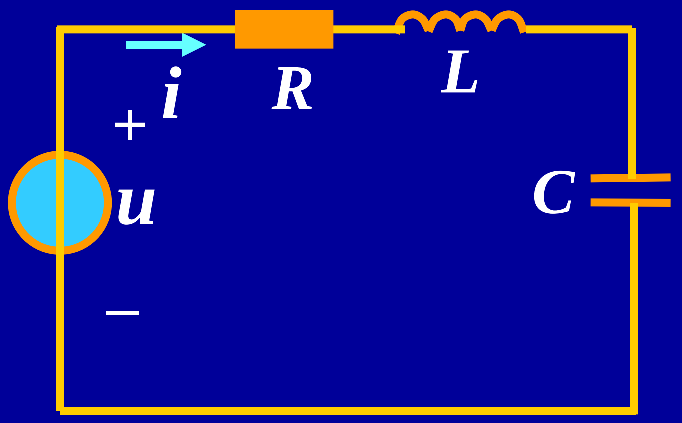
$$i\,,\,I_m\,,\,I$$

（2）测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

（3）区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

8.2 正弦量的相量表示

1. 问题的提出



电路方程是微分方程：

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u(t)$$

若激励是正弦量，则电路的响应也是同频率的正弦量，正弦量的各阶微分和积分仍然是同频率的正弦量。所以，我们只需关心电路响应的有效值和初相位，可以不理睬正弦量的角频率。

两个正弦量的相加：如KCL、KVL方程运算。

$$i_1 = \sqrt{2}\, I_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2}\, I_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$i_3 = \sqrt{2} I_3 \cos(\omega t + \phi_3)$$

因同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，所以，只要确定初相位和有效值(或最大值)就行了。一个复数的极坐标形式包含了模和辐角，因此:

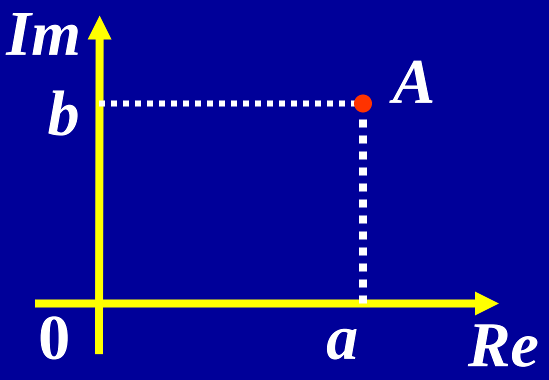
$\boxed{\text{正弦量}} \longleftrightarrow \boxed{\text{复数}}$

2. 复数及运算

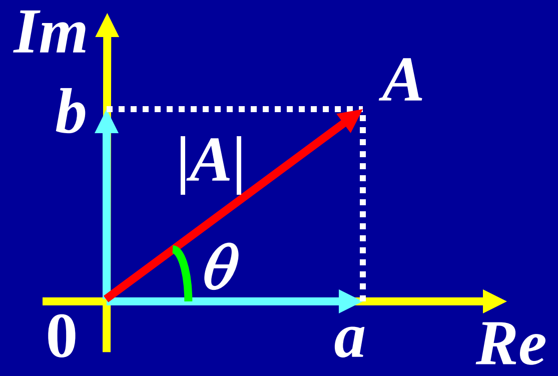
复数A的表示形式

$$A = a + jb$$

$(j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位)



$$A = a + jb$$



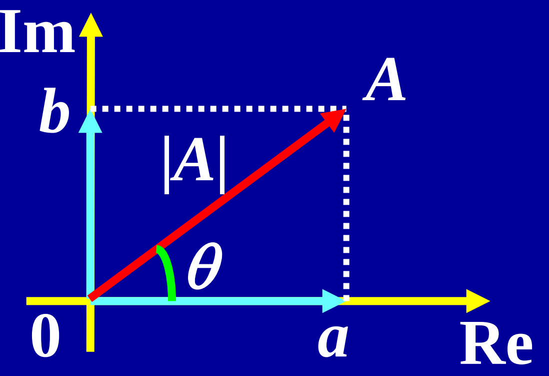
$$A = |A| e^{j\theta}$$

$$A = |A| e^{j\theta} = |A| (\cos\theta + j\sin\theta) = a + jb$$

$$A = |A| e^{j\theta} = |A| \angle\theta$$

两种表示法的关系

$$A = a + jb \quad = |A| \angle \theta$$



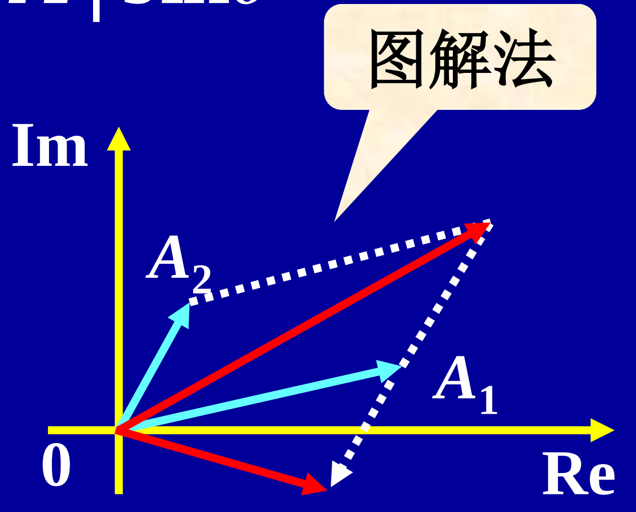
$$\begin{cases} |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \text{arctg}\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a = |A|\cos\theta \\ b = |A|\sin\theta \end{cases}$$

复数运算

(1) 加减运算——采用代数形式



若：$A_1 = a_1 + jb_1,\ A_2 = a_2 + jb_2$

则：$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

(2) 乘除运算——采用极坐标形式

若：$A_1 = |A_1|\angle\theta_1$， $A_2 = |A_2|\angle\theta_2$

则：$A_1 \cdot A_2 = |A_1| e^{j\theta_1} \cdot |A_2| e^{j\theta_2} = |A_1||A_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$$= |A_1||A_2| \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

复数乘法：模相乘，角相加。

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1|\angle\theta_1}{|A_2|\angle\theta_2} = \frac{|A_1| e^{j\theta_1}}{|A_2| e^{j\theta 2}} = \frac{|A_1|}{|A_2|} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= \frac{|A_1|}{|A_2|} \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

复数除法：模相除，角相减。

例1 $5\angle 47^\circ + 10\angle -25^\circ = ?$

解 $5\angle 47^\circ + 10\angle -25^\circ = (3.41 + j3.657) + (9.063 - j4.226)$

$$= 12.47 - j0.569 = 12.48\angle -2.61^\circ$$

例2 $220\angle 35^\circ + \dfrac{(17 + j9)(4 + j6)}{20 + j5} = ?$

解 $原式 = 180.2 + j126.2 + \dfrac{19.24\angle 27.9^\circ \times 7.211\angle 56.3^\circ}{20.62\angle 14.04^\circ}$

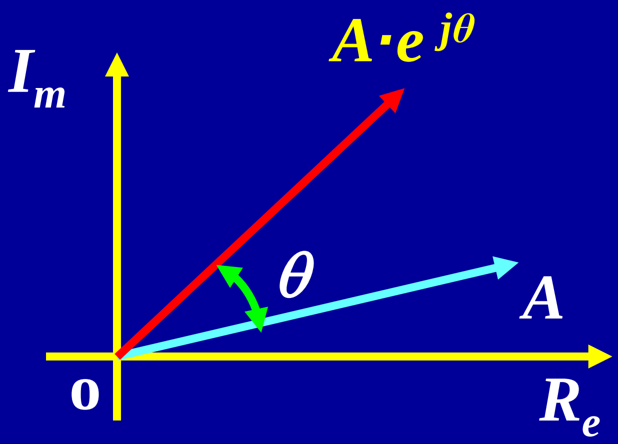
$$= 180.2 + j126.2 + 6.728\angle 70.16^\circ$$

$$= 180.2 + j126.2 + 2.238 + j6.329$$

$$= 182.5 + j132.5 = 225.5\angle 36^\circ$$

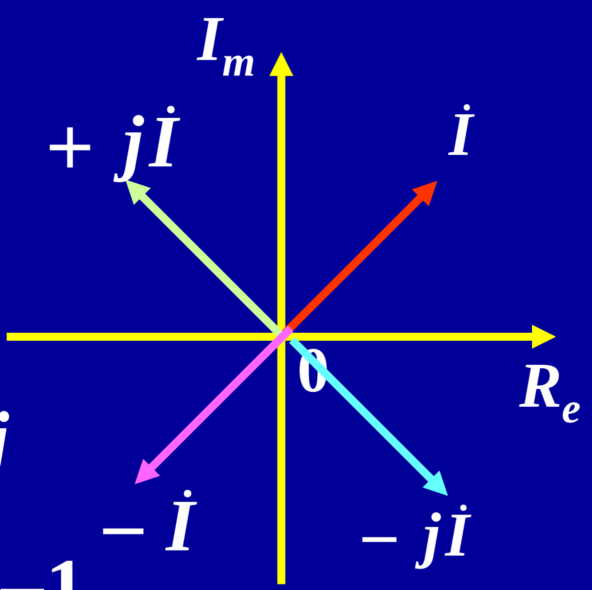
(3) 旋转因子

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta=1\angle\theta$$



$A\cdot e^{j\theta}$ 相当于A逆时针旋转一个角度θ，而模不变。故把 $e^{j\theta}$ 称为旋转因子。

几种不同θ值时的旋转因子



$$\theta=\frac{\pi}{2},\quad e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=+j$$

$$\theta=-\frac{\pi}{2},\quad e^{-j\frac{\pi}{2}}=\cos(-\frac{\pi}{2})+j\sin(-\frac{\pi}{2})=-j$$

$$\theta=\pm\pi,\quad e^{\pm j\pi}=\cos(\pm\pi)+j\sin(\pm\pi)=-1$$

故 $+j$, $-j$, -1 都可以看成旋转因子。

3. 正弦量的相量表示

用复数的模和幅角来表示正弦量的有效值和初相，就构成了相量。

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi) \qquad \dot{I}=I\angle\phi$$

$$\begin{cases}\text{相量的模表示正弦量的有效值}\\ \text{相量的幅角表示正弦量的初相位}\end{cases}$$

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系：

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\theta$$

例1 已知

$$i=141.4\cos(314t+30^{\circ})\text{A}$$

$$u=311.1\cos(314\text{t}-60^{\circ})\text{V}$$

试用相量表示*i*, *u* .

解

$$\dot{I}=100\angle 30^{\circ}\ \text{A}$$

$$\dot{U}=220\angle -60^{\circ}\ \text{V}$$

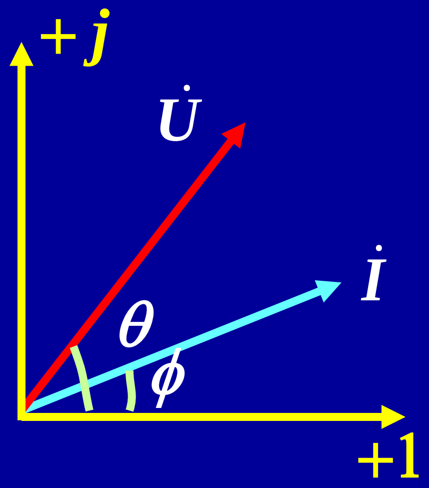
例2 已知 $\dot{I}=50\angle 15^{\circ}\ \mathrm{A},\ \ f=50\mathrm{Hz}$.

试写出电流的瞬时值表达式。

解 $i=50\sqrt{2}\cos(314t+15^{\circ})\ \mathrm{A}$

相量图 → 在复平面上用向量表示相量的图

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)\Leftrightarrow \dot{I}=I\angle\phi$$



$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\theta$$

4. 相量法的应用

（1）同频率正弦量的加减

$$i_1 \pm i_2 = i_3$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \uparrow$$

$$\dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

故同频正弦量相加减运算变成对应相量的相加减运算。

例 $u_1(t)=6\sqrt{2}\cos(314t+30^\circ)\ \text{V}, u_2(t)=4\sqrt{2}\cos(314t+60^\circ)\ \text{V}$

求：$u_1(t)+u_2(t)$

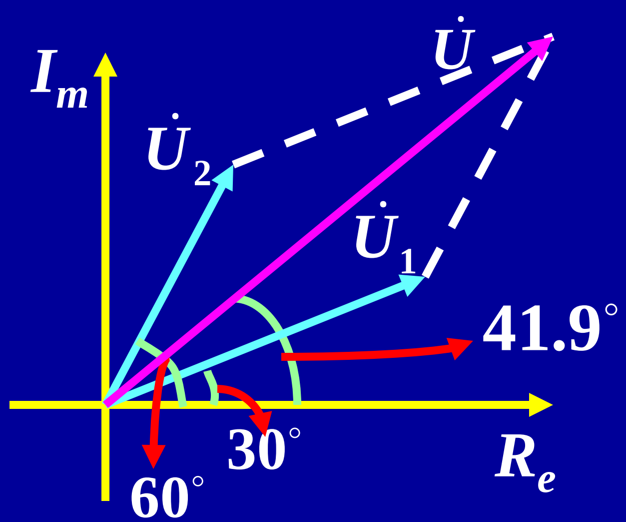
解 $\dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \text{V}\ ,\dot{U}_2=4\angle 60^\circ\ \text{V}$

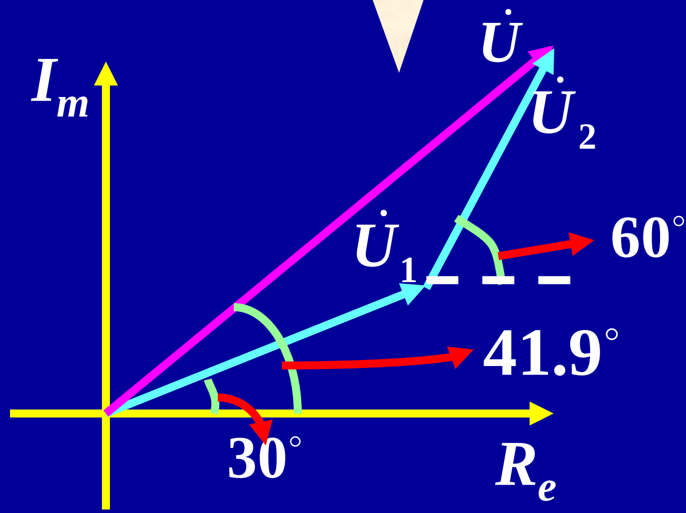
$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=6\angle 30^\circ+4\angle 60^\circ=5.19+j3+2+j3.46=9.67\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\therefore u(t)=u_1(t)+u_2(t)=9.67\sqrt{2}\cos(314t+41.9^\circ)\ \text{V}$$

也可借助相量图计算

首尾相接





（2） 正弦量的微分，积分运算

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)\leftrightarrow \dot{I}=I\angle\phi_i$$

微分运算

$$\frac{di}{dt}=-\sqrt{2}I\omega\sin(\omega t+\phi_i)\ =\sqrt{2}I\omega\cos(\omega t+\phi_i+90°)$$

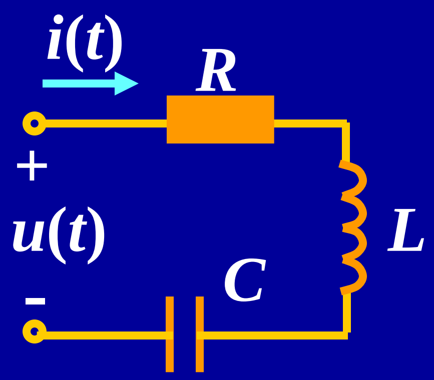
$$\leftrightarrow \omega I\angle\phi_i+\frac{\pi}{2}\quad =j\omega\dot{I}$$

积分运算

$$\int idt=\frac{\sqrt{2}I}{\omega}\sin(\omega t+\phi_i)\ =\frac{\sqrt{2}I}{\omega}\cos(\omega t+\phi_i-90°)$$

$$\leftrightarrow \frac{I}{\omega}\angle\phi_i-\frac{\pi}{2}\quad =-j\frac{\dot{I}}{\omega}=\frac{\dot{I}}{j\omega}$$

例



$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$$

解 $$u(t)=Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i dt$$

用相量运算： $$\dot{U}=R\dot{I}+j\omega L\dot{I}+\frac{\dot{I}}{j\omega C}$$

相量法的优点

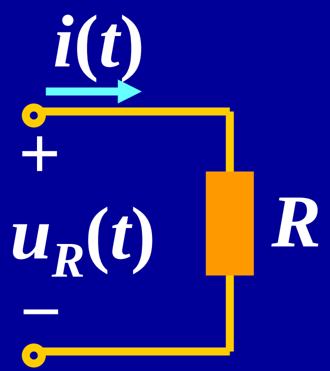
（1）把时域问题变为复数问题；

（2）把微积分方程的运算变为复数方程运算；

（3）可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路。

8.3 电路定理的相量形式

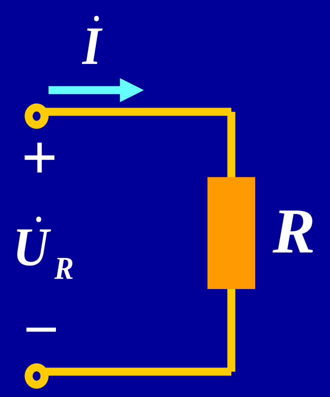
1. 电阻元件VCR的相量形式



时域形式：

已知 $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$

则 $u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}\underbrace{RI}_{U_R}\cos(\omega t+\underbrace{\phi_i}_{\phi_u})$



相量形式：

$\dot{I}=I\angle\phi_i$

$\dot{U}_R=RI\angle\phi_i$

相量关系：

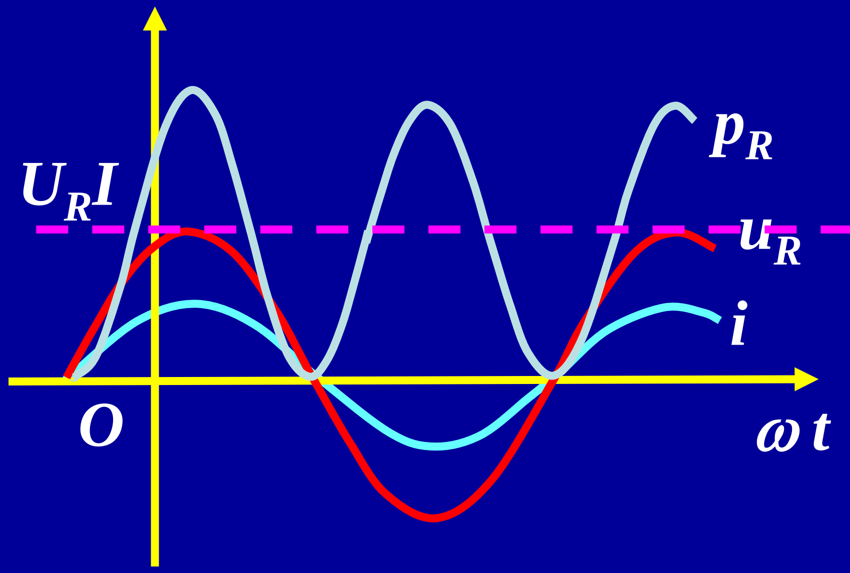
$\dot{U}_R=R\dot{I}$

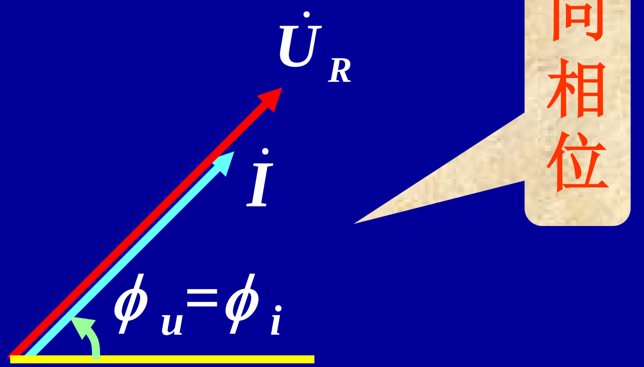
$U_R=RI$ 有效值关系

$\phi_u=\phi_i$ 相位关系

相量模型

波形图及相量图





瞬时功率： $$p_R = u_R i = \sqrt{2}U_R \sqrt{2}I\cos^2(\omega t + \phi_i)$$

$$= U_R I\,[1 + \cos 2(\omega t + \phi_i)]$$

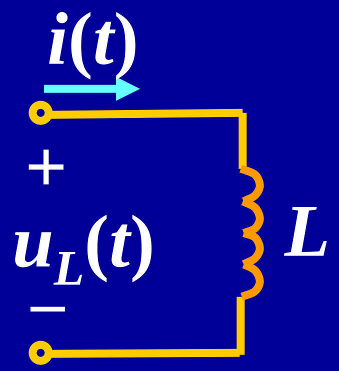
瞬时功率以2ω交变。始终大于零，表明电阻始终吸收功率

2.电感元件VCR的相量形式

时域形式：

已知 $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$

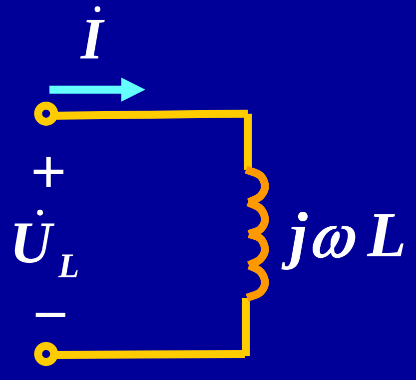
则 $u_L(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$



相量形式：

$\dot{I}=I\angle\phi_i$

$\dot{U}_L=\omega LI\angle(\phi_i+\pi/2)$



相量关系：

$$\boxed{\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=jX_L\dot{I}}$$

相量模型

有效值关系：$U_L=\omega LI$

相位关系：$\phi_u=\phi_i+90^\circ$

上 页 下 页

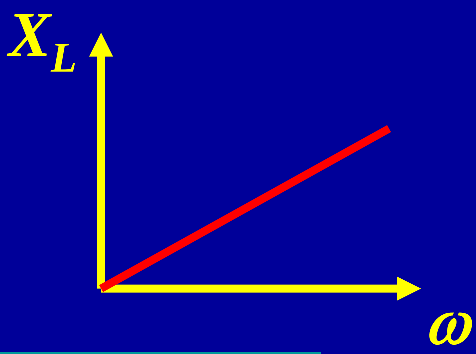
感抗和感纳:

$X_L = \omega L = 2\pi f L$ 感抗，单位为Ω（欧姆）

$B_L = -\dfrac{1}{\omega L} = -\dfrac{1}{2\pi f L}$ 感纳，单位为 S

感抗的物理意义:

（1）表示限制电流的能力；（2）感抗和频率成正比；



$\omega = 0$(直流), $X_L = 0$, 短路

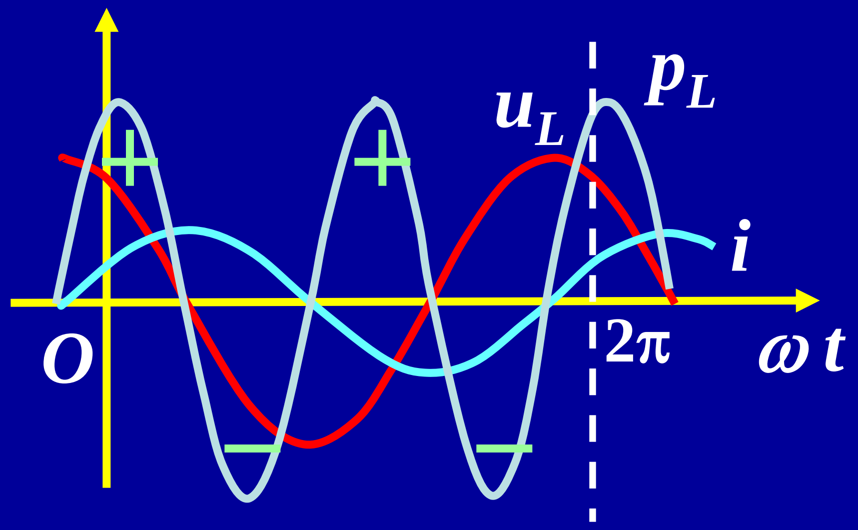
$\omega \to \infty$, $X_L \to \infty$, 开路

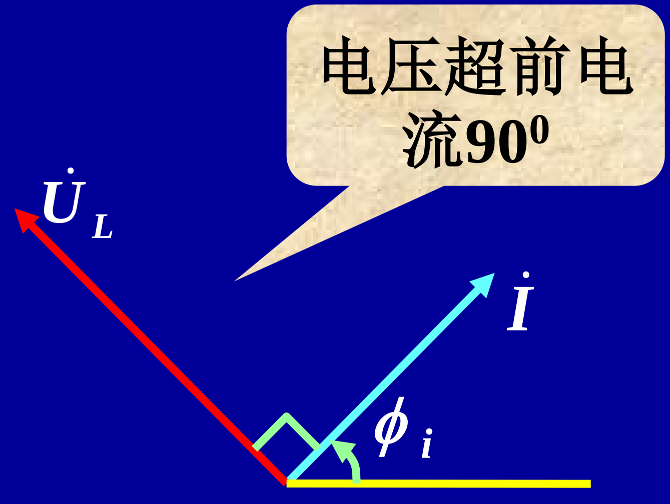
相量表达式:

$\dot{U} = jX_L \dot{I} = j\omega L \dot{I}$

$\dot{I} = jB_L \dot{U} = j\dfrac{-1}{\omega L}\dot{U} = \dfrac{1}{j\omega L}\dot{U}$

波形图及相量图：



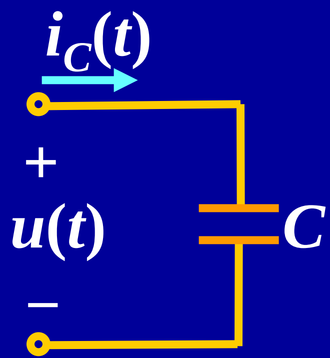


功率：

$$p_L = u_L i = -2U_L I\cos(\omega t+\phi_i)\sin(\omega t+\phi_i)$$
$$= -U_L I\sin 2(\omega t+\phi_i)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一个周期内刚好互相抵消

3. 电容元件VCR的相量形式



时域形式：

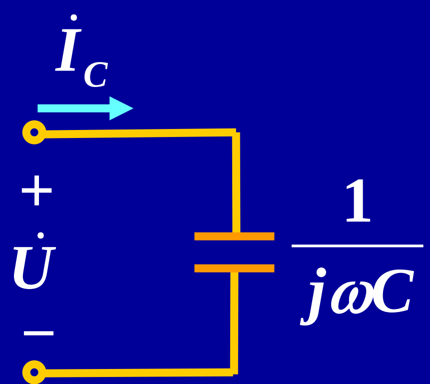
已知 $u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\phi_u)$

则 $i_C(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

相量形式：

$\dot{U}=U\angle\phi_u$

$\dot{I}_C=\omega CU\angle(\phi_u+\pi/2)$



相量关系：

$$\boxed{\dot{U}=-j\frac{1}{\omega C}\dot{I}=jX_C\dot{I}}$$

相量模型

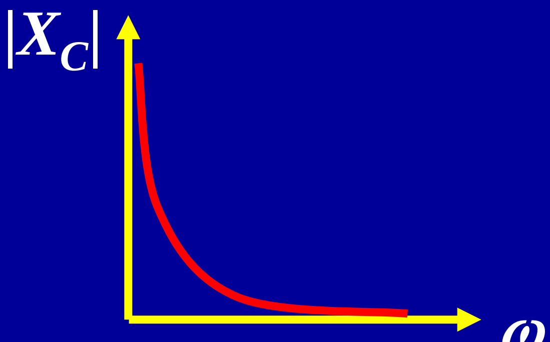
有效值关系： $I_C=\omega CU$

相位关系： $\phi_i=\phi_u+\pi/2$

容抗与容纳:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$ 称为容抗，单位为 Ω(欧姆)

$$B_C = \omega C$$ 称为容纳，单位为 S



$$\omega \to 0,\ |X_C| \to \infty$$ 直流开路(隔直)

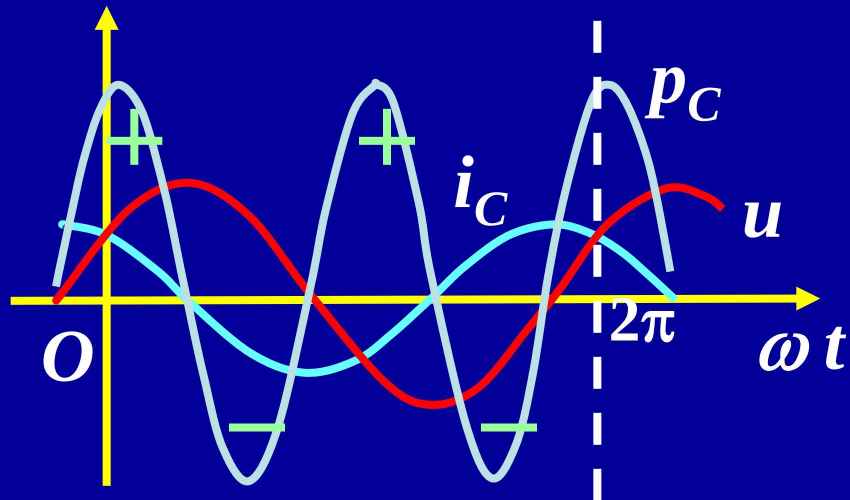
$$\omega \to \infty,\ |X_C| \to 0$$ 高频短路(旁路作用)

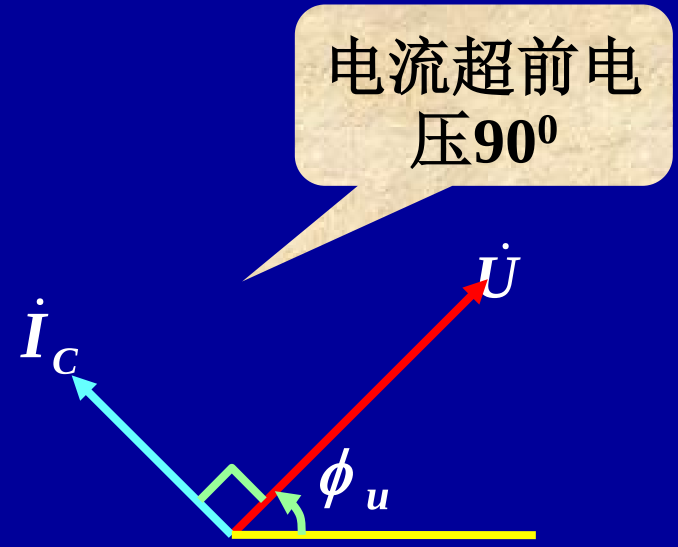
相量表达式:

$$\dot{I} = jB_C\dot{U} = j\omega C\dot{U}$$

$$\dot{U} = jX_C\dot{I} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

波形图及相量图：





功率：

$$p_C = ui_C$$
$$= -2UI_C\cos(\omega t + \phi_u)\sin(\omega t + \phi_u)$$
$$= -UI_C\sin 2(\omega t + \phi_u)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一个周期内刚好互相抵消

4. 基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此，在正弦电流电路中，KCL和KVL可用相应的相量形式表示：

上式表明：流入某一结点的所有正弦电流用相量表示时仍满足KCL；而任一回路所有支路正弦电压用相量表示时仍满足KVL。

例1　试判断下列表达式的正、误：

(1) $\dot{U} = j\omega L\dot{i}$

(2) $i = 5\cos\omega t \neq 5\angle 0^{0}$

(3) $\dot{I} = j\omega C\dot{U}$

(4) $X_L = \dfrac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} \quad \dfrac{U}{I} = \dfrac{U_m}{I_m}$

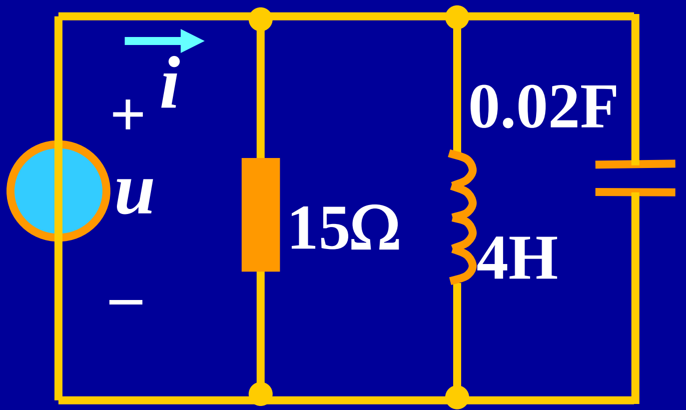
(5) $\dfrac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \dfrac{1}{j\omega C} \quad j\omega C$

(6) $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L$

(7) $u = L\dfrac{di}{dt}$

上 页　下 页

例2 已知 $u(t)=120\sqrt{2}\cos(5t)$, 求 $i(t)$



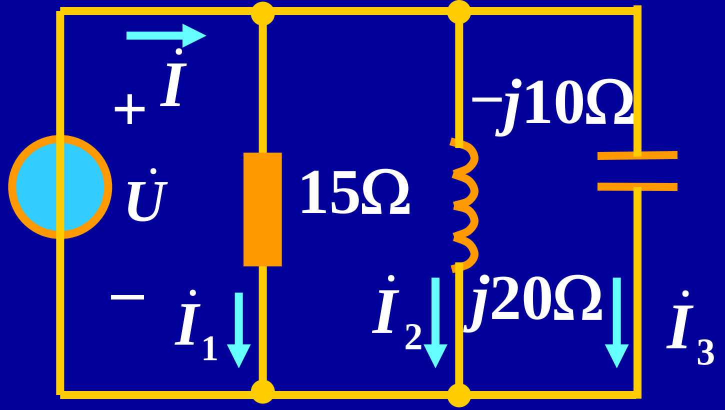
解

$$\dot{U}=120\angle 0°$$

$$jX_L=j4\times 5=j20\Omega$$

$$jX_C=-j\frac{1}{5\times 0.02}=-j10\Omega$$

相量模型



$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=\frac{\dot{U}}{R}+\frac{\dot{U}}{jX_L}+\frac{\dot{U}}{-jX_C}$$

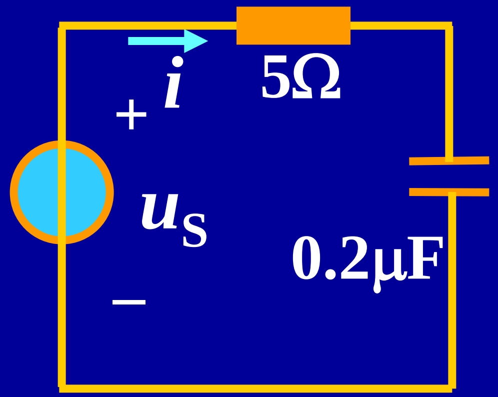
$$=120\angle 0°\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{j20}-\frac{1}{j10}\right)$$

$$=8+j6=10\angle 36.9°A$$

$$i(t)=10\sqrt{2}\cos(5t+36.9°)A$$

上 页 下 页

例3 已知 $i(t)=5\sqrt{2}\cos(10^6 t+15°)$，求 $u_S(t)$



解

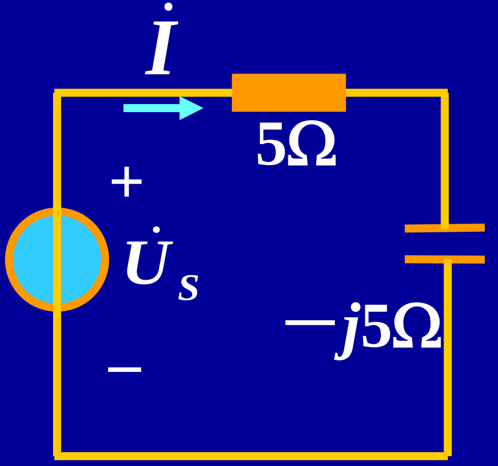
$$\dot{I}=5\angle 15°$$

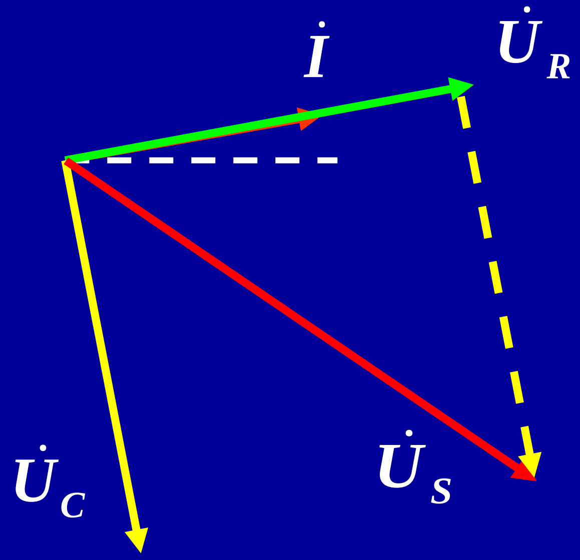
$$jX_C=-j\frac{1}{10^6\times 0.2\times 10^{-6}}=-j5\Omega$$

$$\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}_C=5\angle 15°(5-j5)$$

$$=25\sqrt{2}\angle -30° V$$

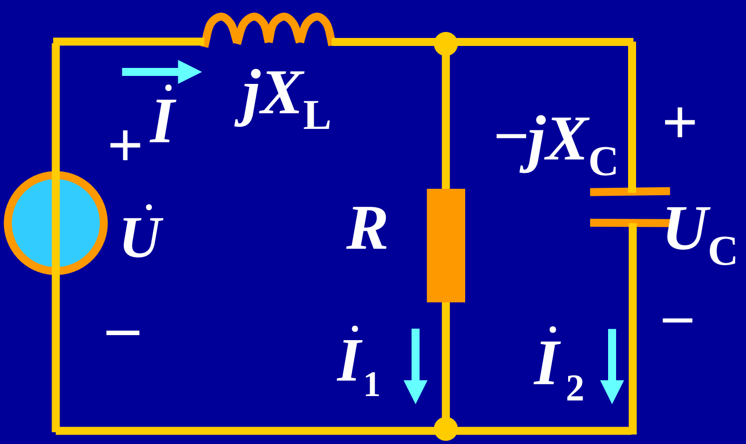
相量模型





上 页 下 页

例4 图示电路 $I_1 = I_2 = 5\text{A}$，$U = 50\text{V}$，总电压与总电流同相位，求 I、R、X_C、X_L。



解 设 $\dot{U}_C = U_C\angle 0°$

$$\dot{I}_1 = 5\angle 0° \qquad \dot{I}_2 = j5$$

$$\dot{I} = 5 + j5 = 5\sqrt{2}\angle 45°$$

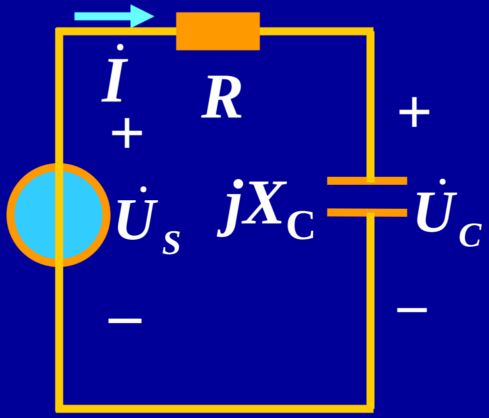
$$\dot{U} = 50\angle 45°$$

$$= 50\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (5 + j5)\times jX_L + 5R$$

令等式两边实部等于实部，虚部等于虚部

$$\begin{cases} 5X_L = 50/\sqrt{2} \Rightarrow X_L = 5\sqrt{2} \\ 5R - 5X_L = \dfrac{50}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = X_C = 10\sqrt{2}\Omega \end{cases}$$

例5 图示电路为阻容移相装置，如要求电容电压滞后于电源电压π/3，问*R*、*C* 应如何选择。



解

$$\dot{U}_S = R\dot{I} + jX_C\dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{R + jX_C}$$

$$\dot{U}_C = jX_C \frac{\dot{U}_S}{R + jX_C}$$

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{U}_C} = \frac{R + jX_C}{jX_C} = \frac{R}{-j\dfrac{1}{\omega C}} + 1 = 1 + j\omega CR$$

$$\rightarrow \quad \omega CR = \tan 60° = \sqrt{3}$$