第九章 正弦稳态电路的分析

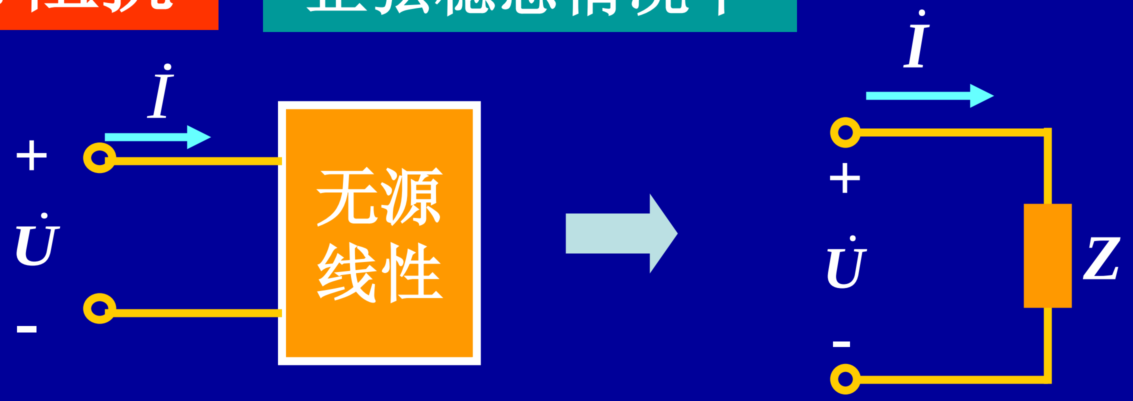
重点

1. 阻抗和导纳；
2. 正弦稳态电路的分析；
3. 正弦稳态电路的功率分析。

9.1 阻抗和导纳

1. 阻抗

正弦稳态情况下



定义阻抗 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{U\angle\phi_u}{I\angle\phi_i}=|Z|\angle\varphi_Z$

相量形式的欧姆定律

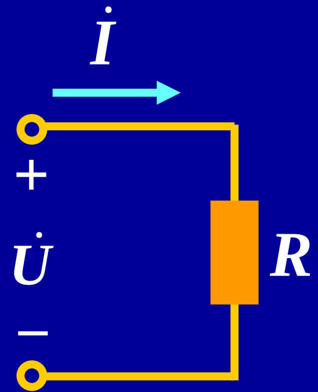
$$\begin{cases} |Z|=\dfrac{U}{I} \\ \varphi_Z=\phi_u-\phi_i \end{cases}$$

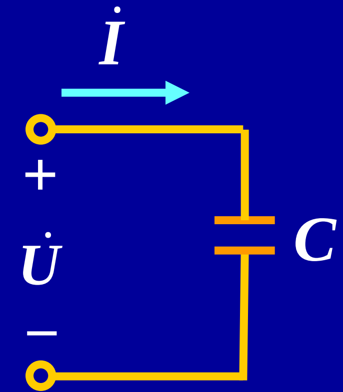
阻抗模

阻抗角

单位：Ω

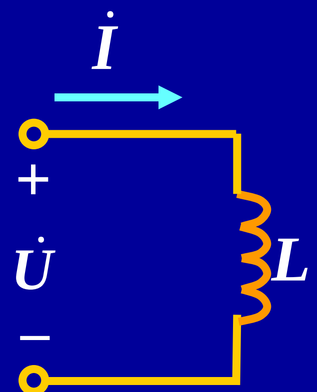
当无源网络内为单个元件时有





$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R$$

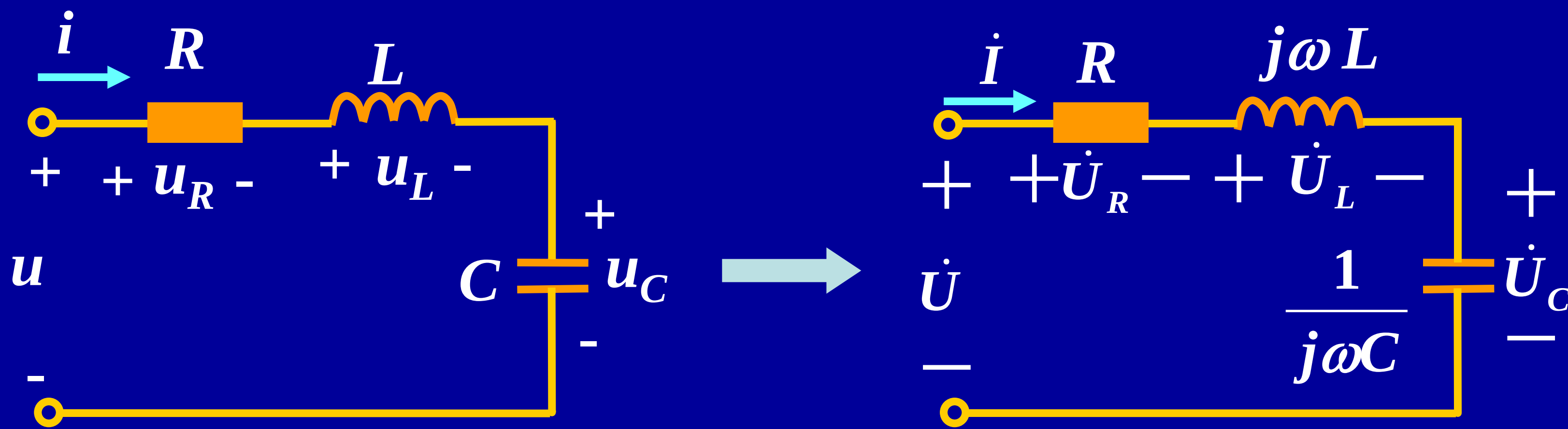
$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=-j\frac{1}{\omega C}=jX_C$$



$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=j\omega L=jX_L$$

Z 可以是实数，也可以是复数

2. *RLC*串联电路



由KVL $\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=R\dot{I}+j\omega L\dot{I}-j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$

$$=[R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})]\dot{I}=[R+j(X_L+X_C)]\dot{I}\ =(R+jX)\dot{I}$$

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}=R+jX=|Z|\angle\varphi_Z$$

上页 下页

Z— 复阻抗；***R***—电阻(阻抗的实部)；***X***—电抗(阻抗的虚部)；

$|Z|$—复阻抗的模；φ_Z —阻抗角。

转换关系

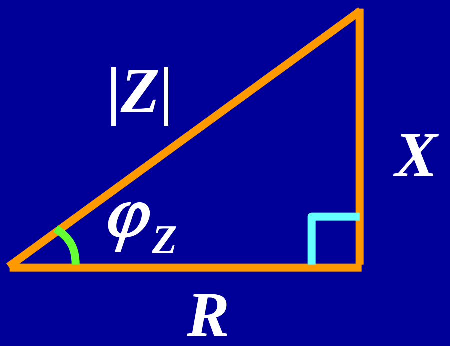
$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \phi_Z = \arctan \dfrac{X}{R} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} R = |Z| \cos \varphi_Z \\ X = |Z| \sin \varphi_Z \end{cases}$$

$$|Z| = \frac{U}{I}, \quad \varphi_Z = \phi_u - \phi_i$$

阻抗三角形

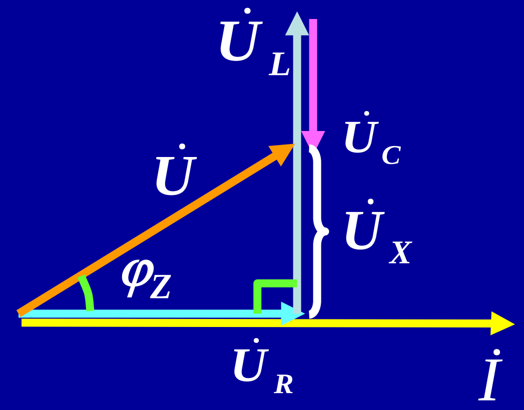


分析 R、L、C 串联电路得出：

（1）$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C) = |Z|\angle\varphi_Z$ 为复数，故称复阻抗

（2）$\omega L > 1/\omega C$，$X>0$，$\varphi_Z>0$，电路为感性，电压超前电流

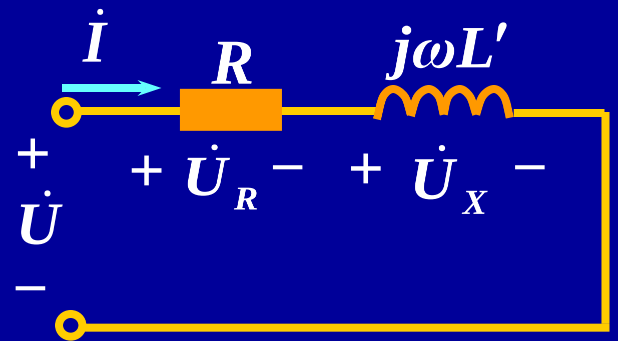
相量图：选电流为参考向量，设 $\phi_i = 0$



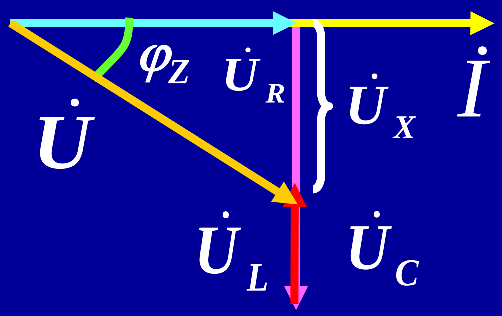
三角形 U_R、U_X、U 称为电压三角形，它和阻抗三角形相似。即

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$

等效电路

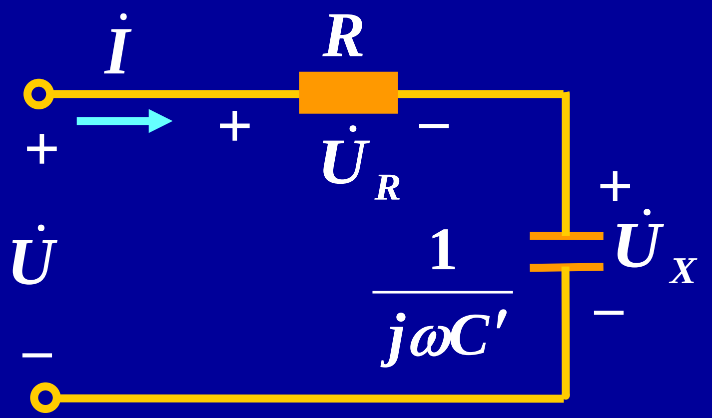


（3）$\omega L<1/\omega C$， $X<0$， $\varphi_Z<0$，电路为容性，电压滞后电流

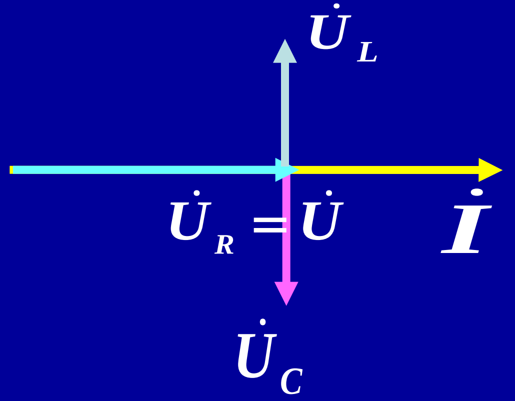


$$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}$$

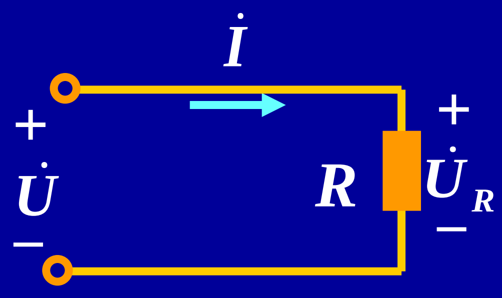
等效电路



（4）$\omega L=1/\omega C$，$X=0$，$\varphi_Z=0$，电路为电阻性，电压与电流同相

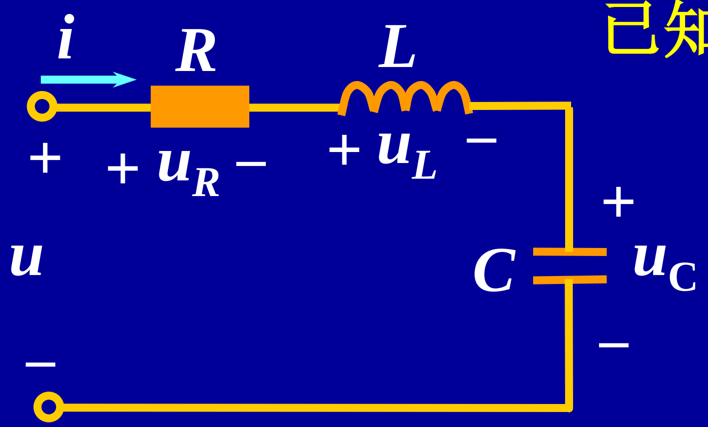


等效电路



上页 下页

例



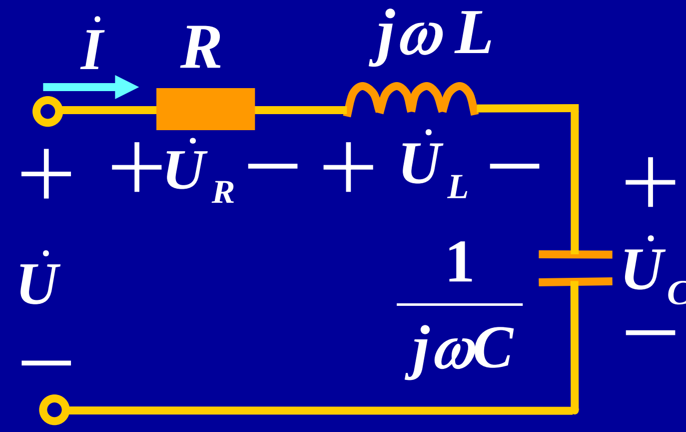
已知：R=15Ω, L=0.3mH, C=0.2μF,

$$u = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 60°)$$

$$f = 3\times 10^4\ HZ$$

求 i , u_R , u_L , u_C

解 其相量模型为:



$$\dot{U} = 5\angle 60°\ \text{V}$$

$$j\omega L = j2\pi\times 3\times 10^4\times 0.3\times 10^{-3} = j56.5\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{2\pi\times 3\times 10^4\times 0.2\times 10^{-6}} = -j26.5\Omega$$

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 15 + j56.5 - j26.5 = 33.54\angle 63.4°\ \Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{5\angle 60^\circ}{33.54\angle 63.4^\circ}=0.149\angle -3.4^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{U}_R=R\dot{I}=15\times 0.149\angle -3.4^\circ=2.235\angle -3.4^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=56.5\angle 90^\circ\times 0.149\angle -3.4^\circ=8.42\angle 86.4^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_C=-j\frac{1}{\omega C}\dot{I}=26.5\angle -90^\circ\times 0.149\angle -3.4^\circ=3.95\angle -93.4^\circ\ \text{V}$$

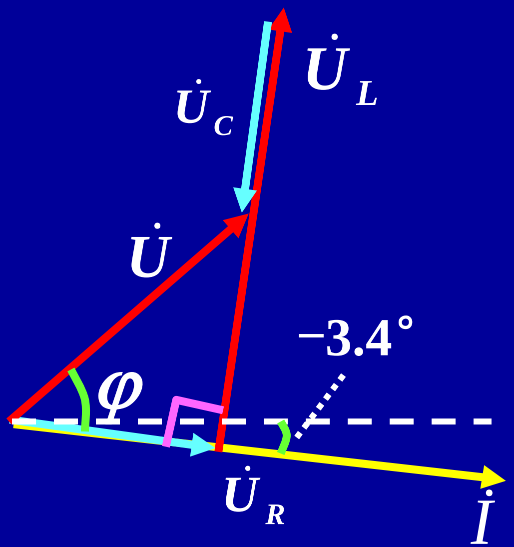
则

$$i=0.149\sqrt{2}\cos(\omega t-3.4^\circ)\ \text{A}$$

$$u_R=2.235\sqrt{2}\cos(\omega t-3.4^\circ)\ \text{V}$$

$$u_L=8.42\sqrt{2}\cos(\omega t+86.6^\circ)\ \text{V}$$

$$u_C=3.95\sqrt{2}\cos(\omega t-93.4^\circ)\ \text{V}$$



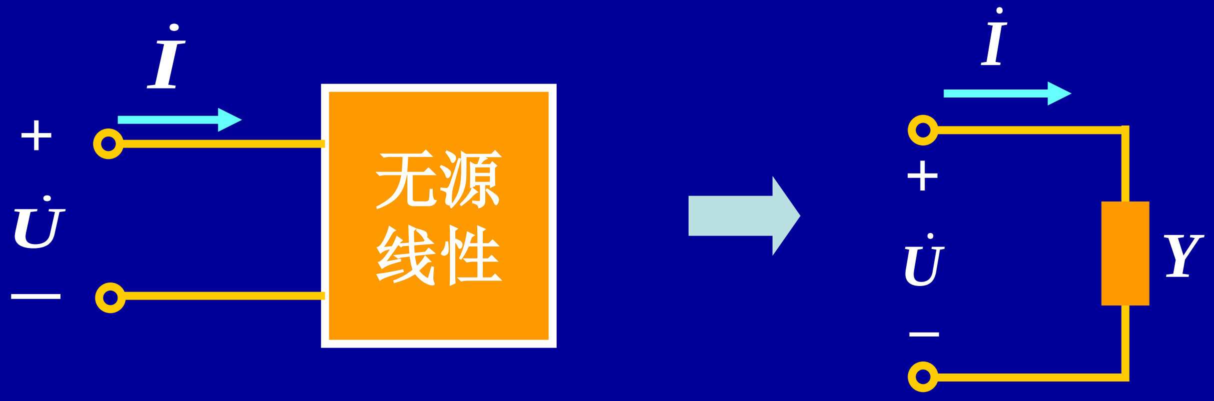
相量图

注

U_L=8.42 > U=5，分电压大于总电压。

3. 导纳

正弦稳态情况下



定义导纳 $Y = \dfrac{\dot{I}}{\dot{U}} = |Y| \angle \varphi_y$

$$\begin{cases} |Y| = \dfrac{I}{U} \\ \varphi_y = \phi_i - \phi_u \end{cases}$$

导纳模

单位：S

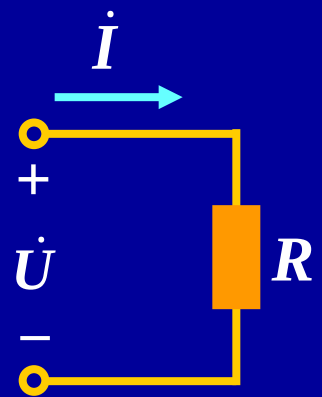
导纳角

上 页 下 页

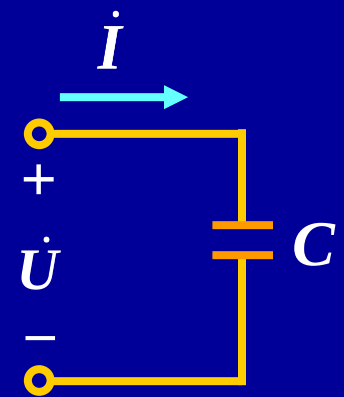
对同一个二端网络:

$$Z = \frac{1}{Y},\ Y = \frac{1}{Z}$$

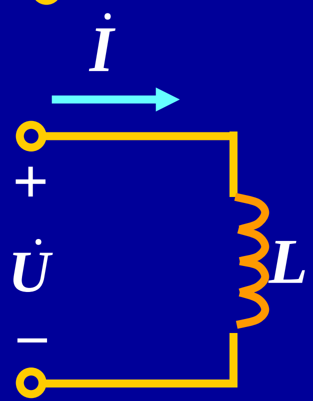
当无源网络内为单个元件时有:



$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{R} = G$$



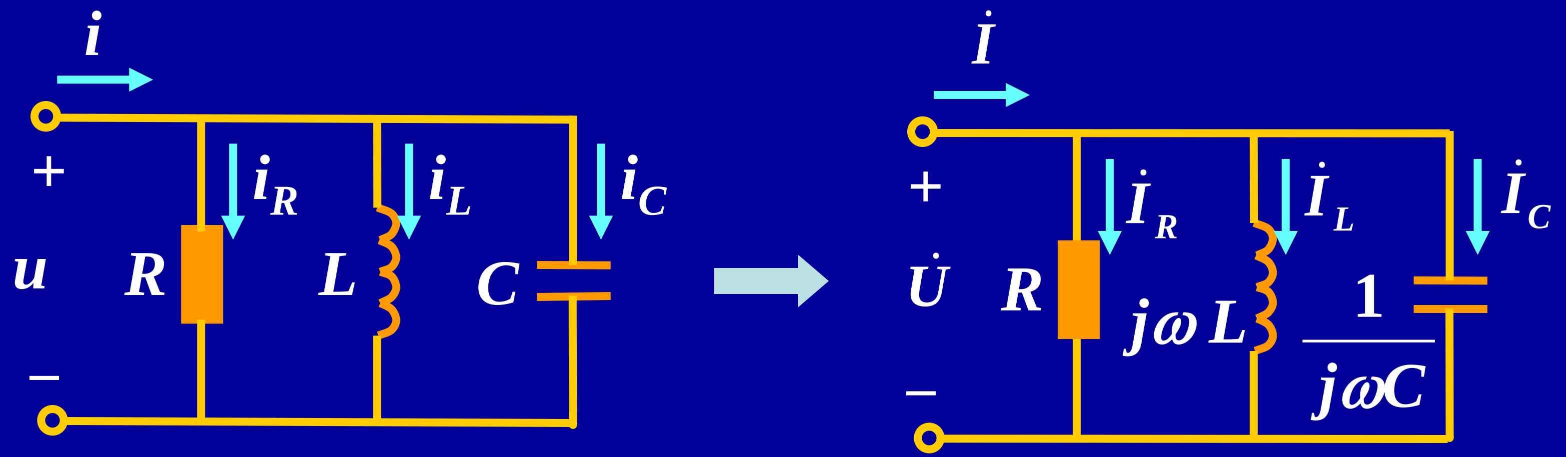
$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = j\omega C = jB_C$$



$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{j\omega L} = jB_L$$

Y 可以是实数，也可以是复数

4. *RLC*并联电路



由KCL：

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = G\dot{U} - j\frac{1}{\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U}$$

$$= [G + j(B_L + B_C)]\dot{U} = (G + jB)\dot{U}$$

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = G + jB = |Y|\angle\varphi_y$$

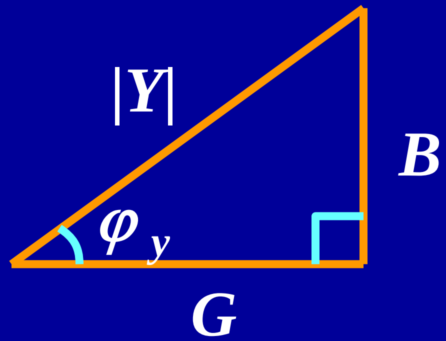
Y— 复导纳；G—电导分量；B—电纳分量；

$|Y|$—导纳模；φ_y— 导纳角。

转换关系：
$$\begin{cases} |Y| = \sqrt{G^2 + B^2} \\ \varphi_y = \arctan \dfrac{B}{G} \end{cases}$$
或
$$\begin{cases} G = |Y|\cos\varphi_y \\ B = |Y|\sin\varphi_y \end{cases}$$

$$|Y| = \frac{I}{U}\ ,\quad \varphi_y = \phi_i - \phi_u$$

导纳三角形



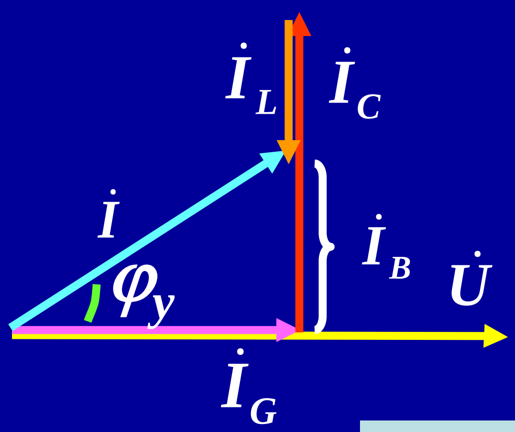
上 页　下 页

分析 R、L、C 并联电路得出：

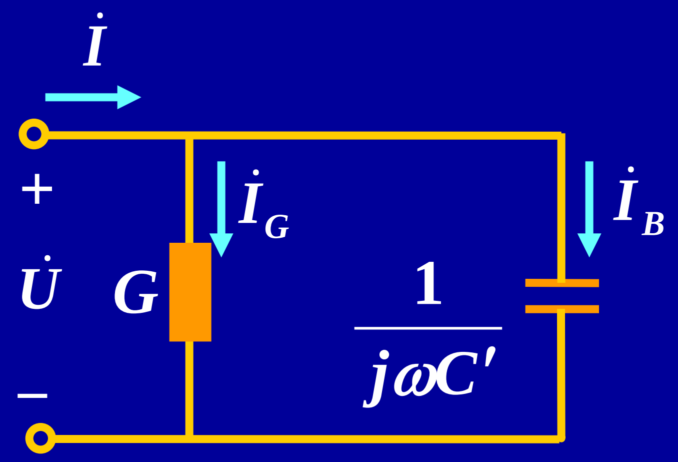
（1）$Y = G + j(\omega C - 1/\omega L) = |Y| \angle \varphi_y$ 为复数，故称复导纳；

（2）$\omega C > 1/\omega L$，$B>0$，$\varphi_y>0$，电路为容性，电流超前电压

相量图：选电压为参考向量 $\psi_u = 0$



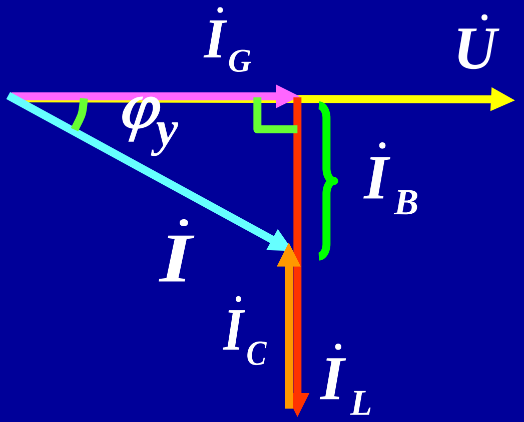
等效电路



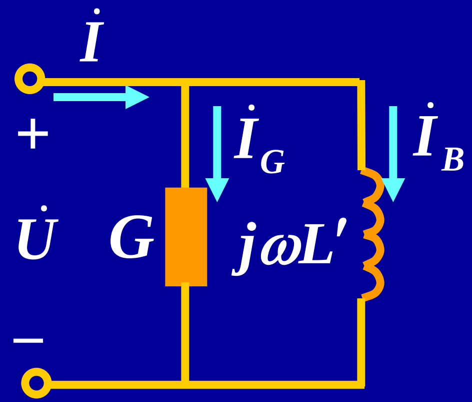
电流三角形 $$I = \sqrt{I_G^2 + I_B^2} = \sqrt{I_G^2 + (I_L - I_C)^2}$$

RLC并联电路同样会出现分电流大于总电流的现象

（3）$\omega C < 1/\omega L$，$B<0$，$\varphi_y<0$，电路为感性，电流滞后电压；

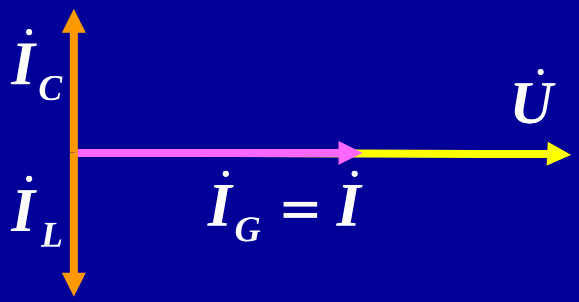


等效电路

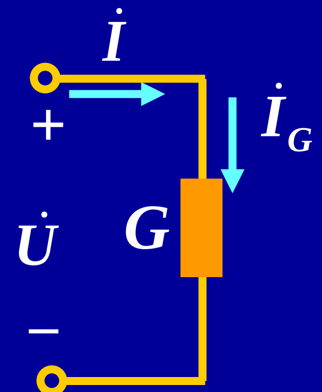


$$I=\sqrt{I_G^2+I_B^2}=\sqrt{I_G^2+(I_L-I_C)^2}$$

（4）$\omega C = 1/\omega L$，$B=0$，$\varphi_y=0$，电路为阻性，电流与电压同相

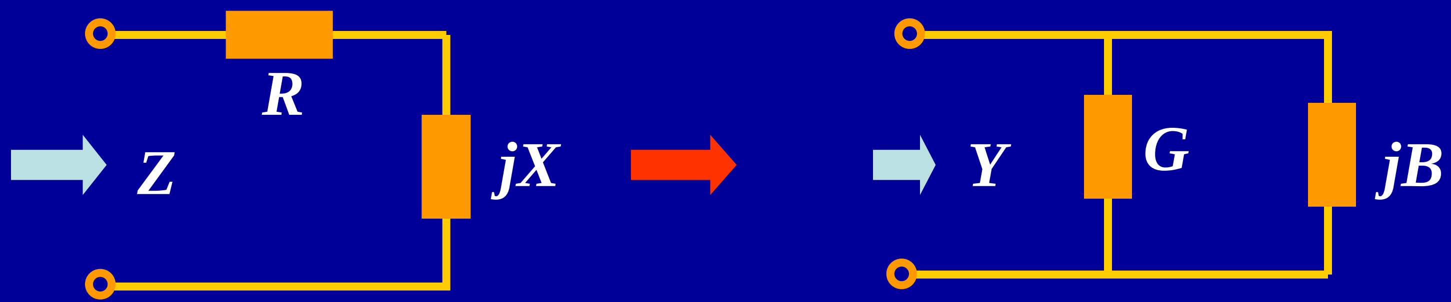


等效电路



上 页　下 页

5. 复阻抗和复导纳的等效互换



$$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi_Z \qquad Y = G + jB = |Y| \angle \varphi_y$$

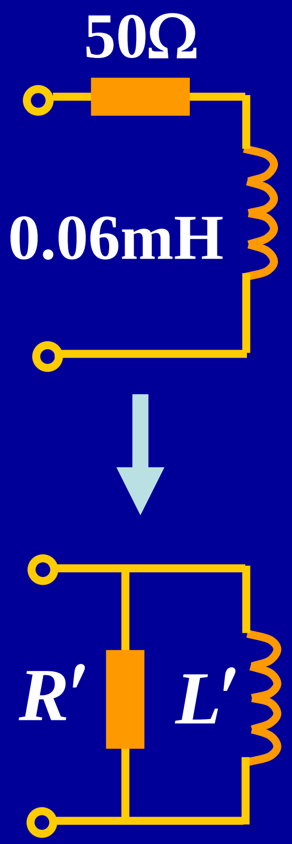
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

注

一般情况 $G \neq 1/R$　$B \neq 1/X$。若Z为感性，$X > 0$，则$B < 0$，即仍为感性。

例 *RL*串联电路如图，求在$\omega=10^6$ rad/s时的等效并联电路。



解 *RL*串联电路的阻抗为：

$$X_L = \omega L = 10^6 \times 0.06 \times 10^{-3} = 60\Omega$$

$$Z = R + jX_L = 50 + j60 = 78.1\angle 50.2°\Omega$$

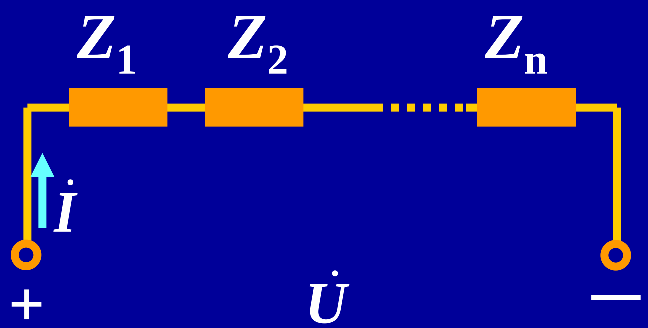
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{78.1\angle 50.2°} = 0.0128\angle -50.2°\Omega$$

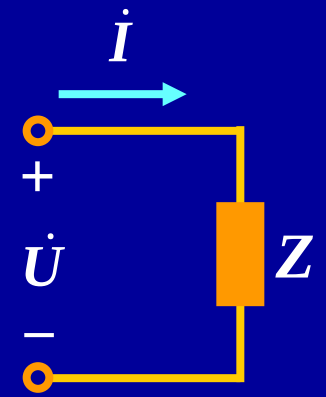
$$= 0.0082 - j0.0098$$

$$R' = \frac{1}{G'} = \frac{1}{0.0082} = 122\Omega \qquad L' = \frac{1}{0.0098\omega} = 0.102mH$$

9.2 阻抗（导纳）的串联和并联

1. 阻抗的串联





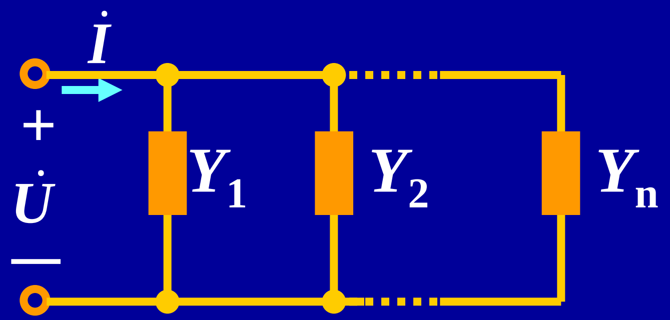
$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = \dot{I}Z$$

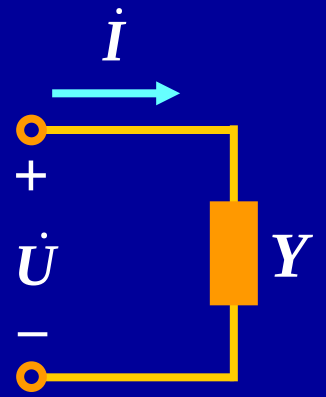
$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} (R_k + jX_k)$$

分压公式

$$\dot{U}_i = \frac{Z_i}{Z}\dot{U}$$

2. 导纳的并联





$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n = \dot{U}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = \dot{U}Y$$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} (G_k + jB_k)$$

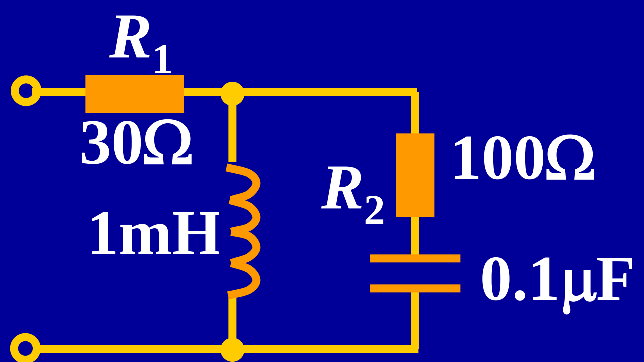
分流公式

$$\dot{I}_i = \frac{Y_i}{Y}\dot{I}$$

两个阻抗 Z_1、Z_2 的并联等效阻抗为：$Z = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

例 求图示电路的等效阻抗， ω＝10^5 rad/s 。

解 感抗和容抗为：



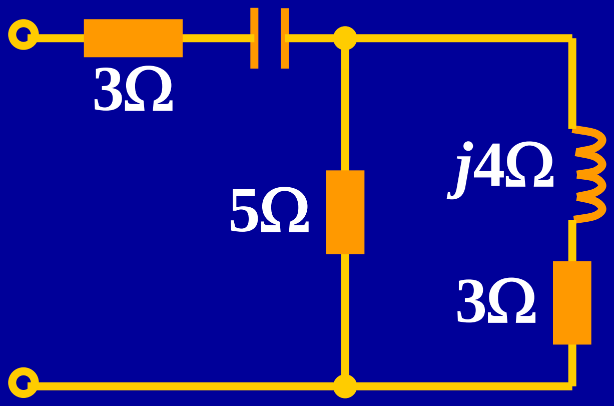
$$X_L = \omega L = 10^5 \times 1 \times 10^{-3} = 100\Omega$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^5 \times 0.1 \times 10^{-6}} = -100\Omega$$

$$Z = R_1 + \frac{jX_L(R_2 + jX_C)}{jX_L + R_2 + jX_C} = 30 + \frac{j100 \times (100 - j100)}{100}$$

$$= (130 + j100)\Omega$$

例　图示电路对外呈现感性还是容性？



解　等效阻抗为：

$$Z = 3 - j6 + \frac{5(3 + j4)}{5 + (3 + j4)}$$

$$= 5.5 - j4.75\Omega$$

X<0，电路呈现容性

9.4 正弦稳态电路的分析

电阻电路与正弦电流电路的分析比较

电阻电路:

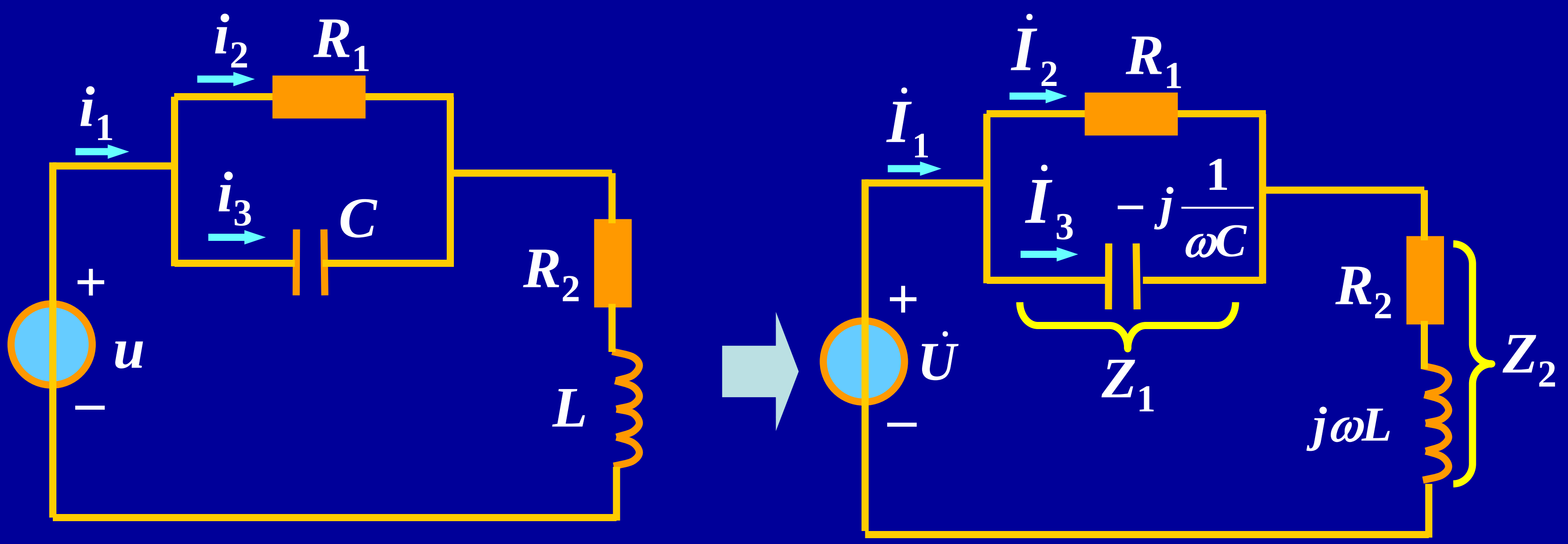
$$\begin{cases} \text{KCL}: \quad \sum i = 0 \\ \text{KVL}: \quad \sum u = 0 \\ \text{元件约束关系:} \quad u = Ri \\ \qquad\qquad \text{或} \quad i = Gu \end{cases}$$

正弦电路相量分析:

$$\begin{cases} \text{KCL}: \quad \sum \dot{I} = 0 \\ \text{KVL}: \quad \sum \dot{U} = 0 \\ \text{元件约束关系:} \quad \dot{U} = Z\dot{I} \\ \qquad\qquad \text{或} \quad \dot{I} = Y\dot{U} \end{cases}$$

可见，二者依据的电路定律是相似的。只要作出正弦稳态电路的相量模型，便可将电阻电路的分析方法推广应用于正弦稳态电路的相量分析中。

例1 已知：$R_1 = 1000\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 500mH$, $C = 10\mu F$, $U = 100V$, $\omega = 314rad/s$ ， 求:各支路电流。

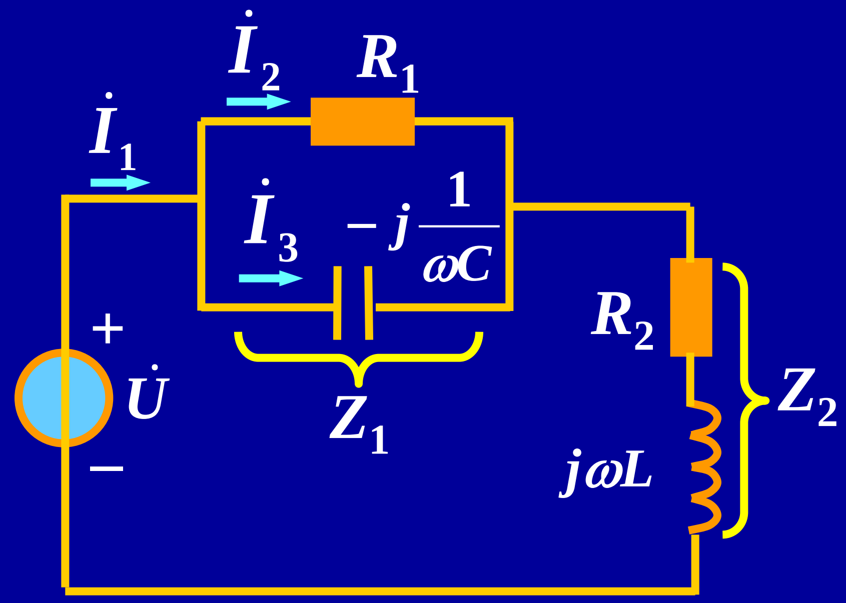


解 画出电路的相量模型

$$Z_1 = \frac{R_1(-j\frac{1}{\omega C})}{R_1 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1000\times(-j318.47)}{1000 - j318.47} = \frac{318.47\times10^3\angle-90^\circ}{1049.5\angle-17.7^\circ}$$

$$= 303.45\angle-72.3^\circ = 92.11 - j289.13\ \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L = 10 + j157\ \Omega$$



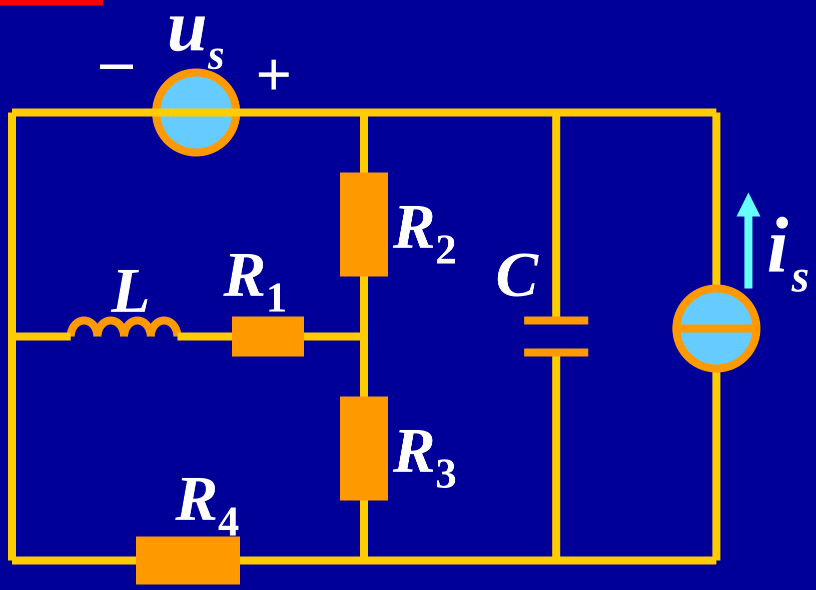
$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 \\ &= 92.11 - j289.13 + 10 + j157 \\ &= 102.11 - j132.13 \\ &= 166.99\angle -52.3^\circ\ \Omega \end{aligned}$$

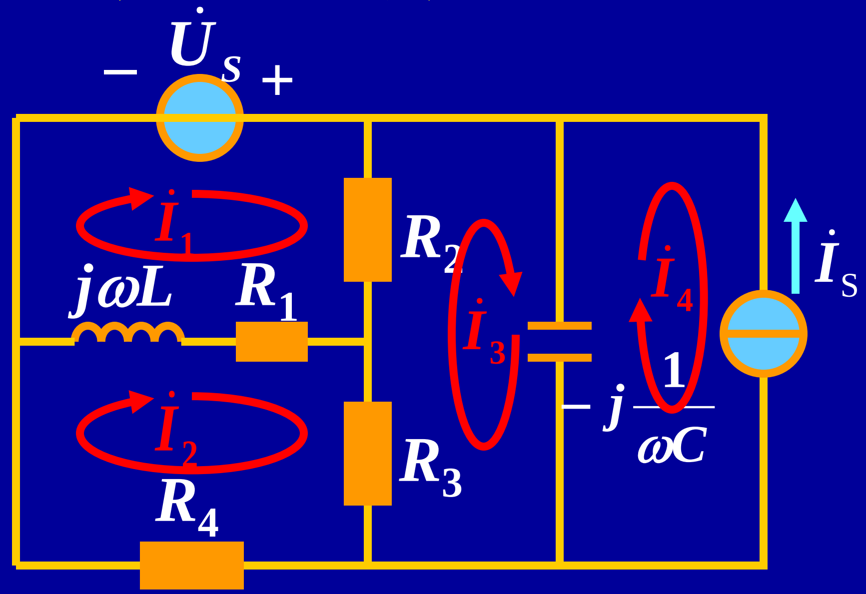
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{166.99\angle -52.3^\circ} = 0.6\angle 52.3^\circ\ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{-j318.47}{1049.5\angle -17.7^\circ} \times 0.6\angle 52.3^\circ = 0.181\angle -20^\circ\ A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{R_1}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{1000}{1049.5\angle -17.7^\circ} \times 0.6\angle 52.3^\circ = 0.57\angle 70^\circ\ A$$

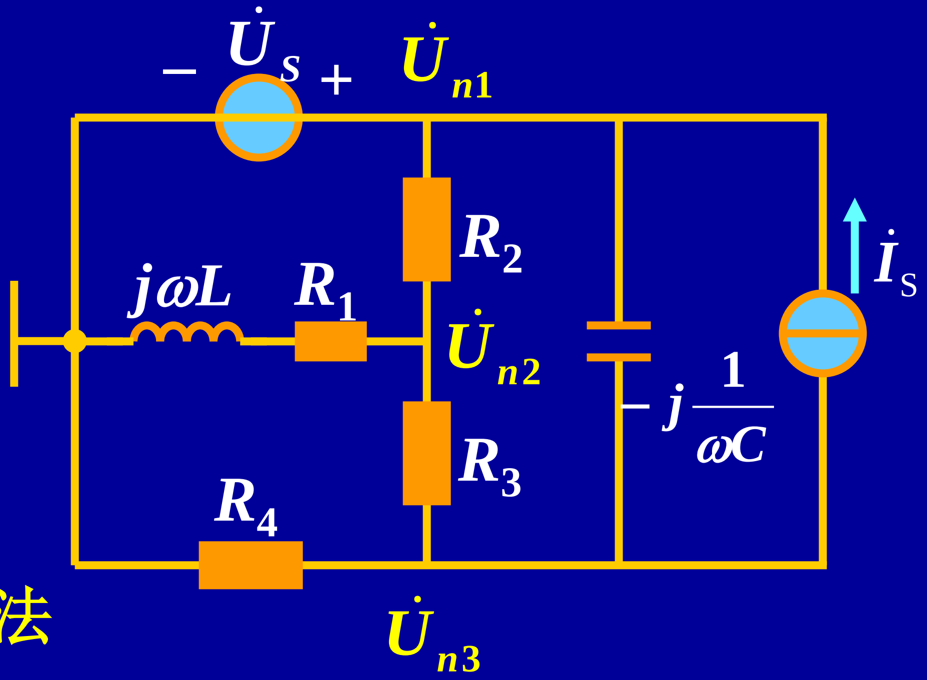
例2　列写电路的回路电流方程和节点电压方程





解　回路法

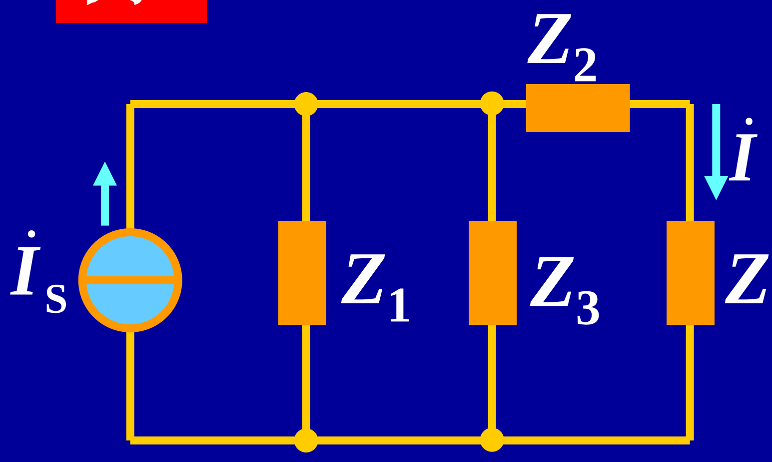
$$
\begin{cases}
(R_1+R_2+j\omega L)\dot{I}_1-(R_1+j\omega L)\dot{I}_2-R_2\dot{I}_3=\dot{U}_S \\
(R_1+R_3+R_4+j\omega L)\dot{I}_2-(R_1+j\omega L)\dot{I}_1-R_3\dot{I}_3=0 \\
(R_2+R_3-j\dfrac{1}{\omega C})\dot{I}_3-R_2\dot{I}_1-R_3\dot{I}_2+j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_4=0 \\
\dot{I}_4=-\dot{I}_S
\end{cases}
$$



节点电压法

$$
\begin{cases}
\dot{U}_{n1} = \dot{U}_S \\
\left(\dfrac{1}{R_1 + j\omega L} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)\dot{U}_{n2} - \dfrac{1}{R_2}\dot{U}_{n1} - \dfrac{1}{R_3}\dot{U}_{n3} = 0 \\
\left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + j\omega C\right)\dot{U}_{n3} - \dfrac{1}{R_3}\dot{U}_{n2} - j\omega C\dot{U}_{n1} = -\dot{I}_S
\end{cases}
$$

例3

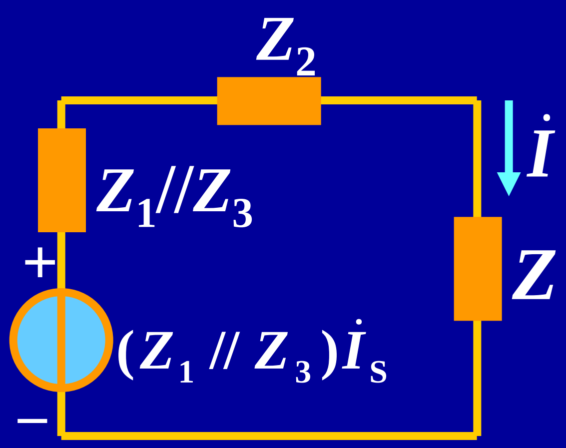


已知：$\dot{I}_S = 4\angle 90°\text{A}$，$Z_1 = Z_2 = -j30\ \Omega$

$Z_3 = 30\ \Omega$，$Z = 45\ \Omega$

求：$\dot{I}$

解　方法一：电源变换



$$Z_1 // Z_3 = \frac{30(-j30)}{30-j30} = 15 - j15\Omega$$

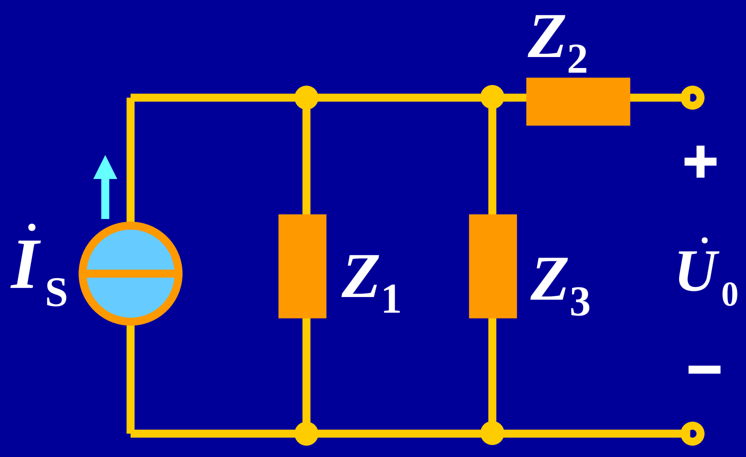
$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_S(Z_1 // Z_3)}{Z_1 // Z_3 + Z_2 + Z}$$

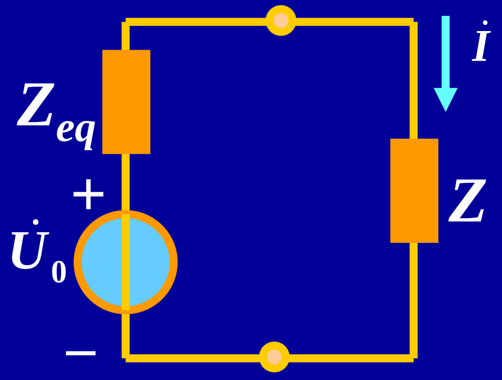
$$= \frac{j4(15-j15)}{15-j15-j30+45}$$

$$= 1.13\angle 81.9^{\circ}\ \text{A}$$

上页　下页

方法二：戴维宁等效变换





求开路电压：

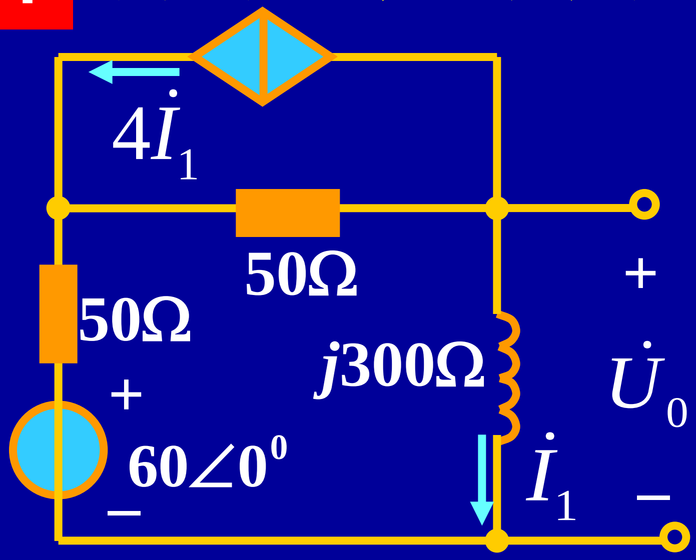
$$\dot{U}_0 = \dot{I}_S(Z_1 // Z_3)$$
$$= 84.86\angle 45^{o}\,\mathrm{V}$$

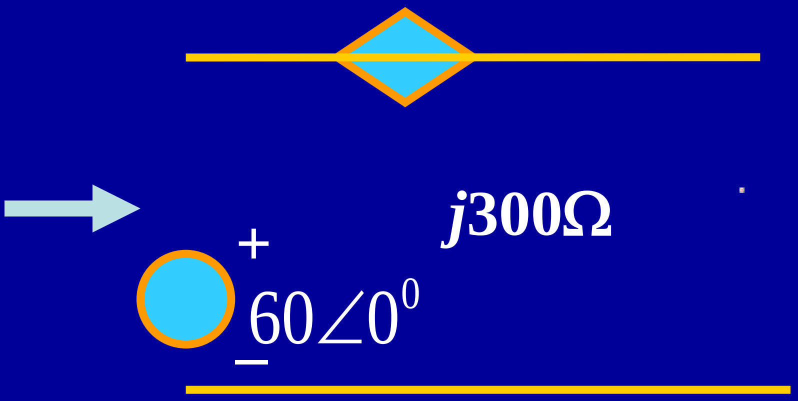
求等效阻抗：

$$Z_{eq} = Z_1 // Z_3 + Z_2$$
$$= 15 - j45$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{Z_{eq} + Z} = \frac{84.86\angle 45^{\circ}}{15 - j45 + 45}$$
$$= 1.13\angle 81.9^{o}\,\mathrm{A}$$

例4 求图示电路的戴维宁等效电路。





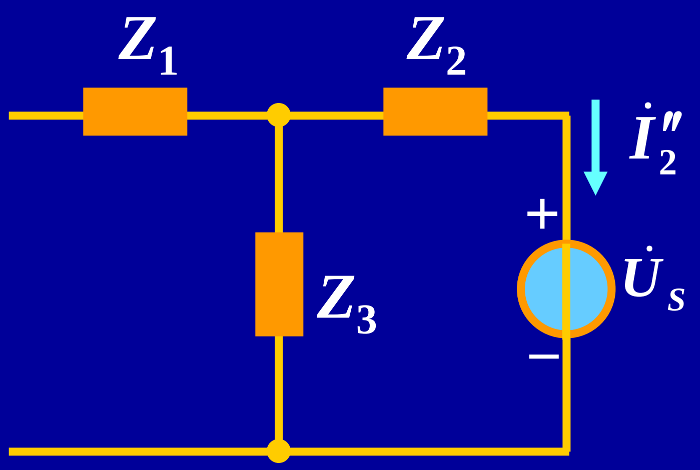
$$100\dot{I}_1 + 200\dot{I}_1 + j300\dot{I}_1 = 60\angle 0°$$

例5 用叠加定理计算电流 $\dot{I}_2$。已知：$\dot{U}_S = 100\angle 45^\circ \text{ V}$

$\dot{I}_S = 4\angle 0^\circ \text{ A},$

$Z_1 = Z_3 = 50\angle 30^\circ \Omega,$

$Z_2 = 50\angle -30^\circ \Omega.$



解 (1) $\dot{I}_S$单独作用 ($\dot{U}_S$短路)

$$\dot{I}_2' = \dot{I}_S \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$= 4\angle 0^\circ \times \frac{50\angle 30^\circ}{50\angle -30^\circ + 50\angle 30^\circ}$$

$$= \frac{200\angle 30^\circ}{50\sqrt{3}} = 2.31\angle 30^\circ \text{ A}$$

(2) $\dot{U}_S$单独作用 ($\dot{I}_S$开路)

$$\dot{I}_2'' = -\frac{\dot{U}_S}{Z_2 + Z_3}$$

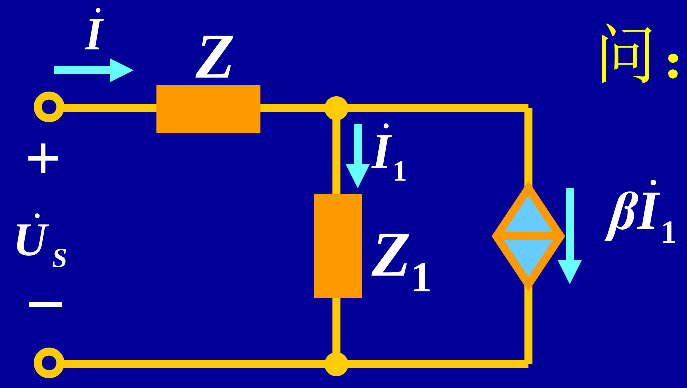
$$= \frac{-100\angle 45^\circ}{50\sqrt{3}} = 1.155\angle -135^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2''$$

$$= 2.31\angle 30^\circ + 1.155\angle -135^\circ$$

$$= 1.23\angle -15.9^\circ \text{ A}$$

例6 已知：$Z=10+j50$，$Z_1=400+j1000$。



问：β等于多少时，$\dot{I}_1$和$\dot{U}_S$相位差90°？

解

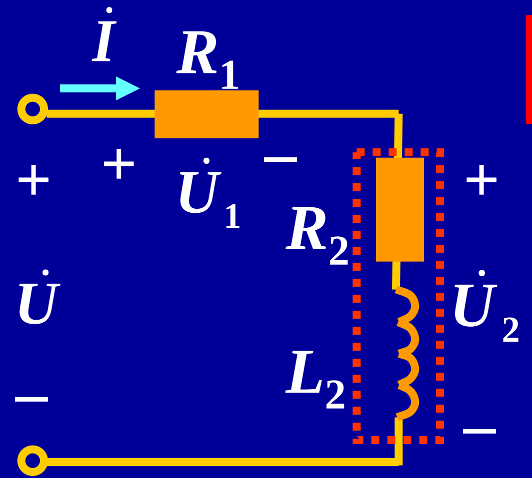
$$\dot{U}_S = Z\dot{I} + Z_1\dot{I}_1 = Z(1+\beta)\dot{I}_1 + Z_1\dot{I}_1$$

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = (1+\beta)(10+j50)+(400+j1000)$$

$$= 410+10\beta + j(50+50\beta+1000)$$

令 $410+10\beta=0$，$\beta=-41$

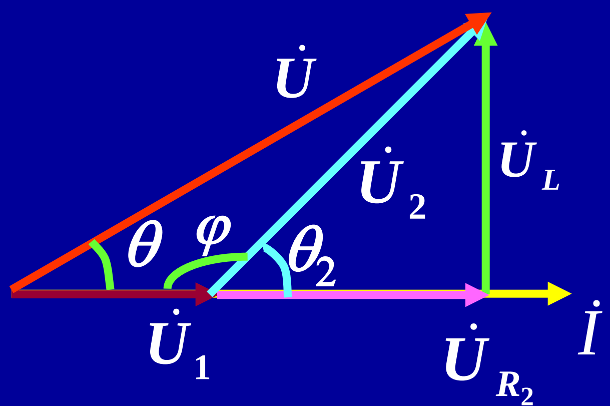
$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = -j1000$$ 故电流超前电压90°



例7 已知：U=115V , U_1=55.4V , U_2=80V，R_1=32Ω , f =50Hz

求：线圈的电阻R_2和电感L_2。

解一 借助相量图分析



$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \dot{U}_R + \dot{U}_L$$

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -0.4237 \qquad \therefore \varphi = 115.1^\circ$$

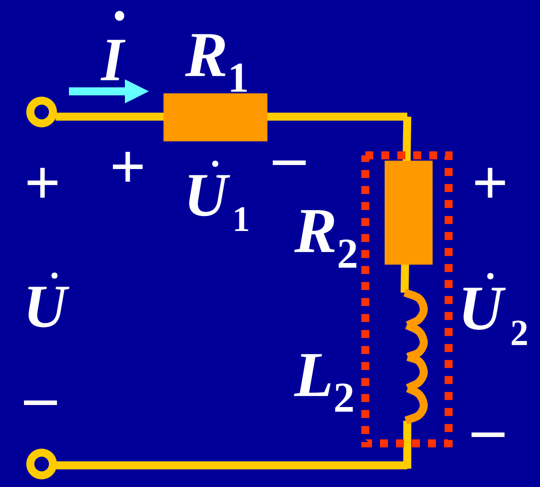
$$\theta_2 = 180^\circ - \varphi = 64.9^\circ$$

$$I = U_1 / R_1 = 55.4/32 = 1.73\text{A}$$

$$|Z_2| = U_2 / I = 80/1.73 = 46.2\Omega \qquad X_2 = |Z_2|\sin\theta_2 = 41.8\Omega$$

$$R_2 = |Z_2|\cos\theta_2 = 19.6\Omega \qquad L_2 = X_2/(2\pi f) = 0.133\text{H}$$

解二



设：$\dot{U} = 115\angle\theta$, $\dot{U}_1 = 55.4\angle 0°$,

$\dot{U}_2 = 80\angle\varphi$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$= 55.4\angle 0^0 + 80\angle\varphi = 115\angle\theta$$

U=115V，

U_1=55.4V，

U_2=80V

$$\begin{cases} 55.4 + 80\cos\varphi = 115\cos\theta \\ 80\sin\varphi = 115\sin\theta \end{cases}$$

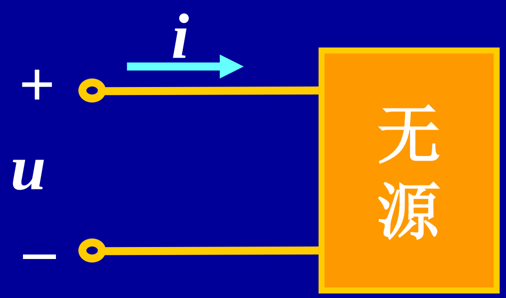
→ $\cos\phi = 0.424$

$\phi = 64.9°$

其余步骤同解法一。

9.5 正弦稳态电路的功率

无源一端口网络吸收的功率（ *u, i* 关联）



$$u(t)=\sqrt{2}U\cos\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t-\varphi)$$

φ为u和i的相位差$\varphi=\phi_u-\phi_i$

1. 瞬时功率 (instantaneous power)

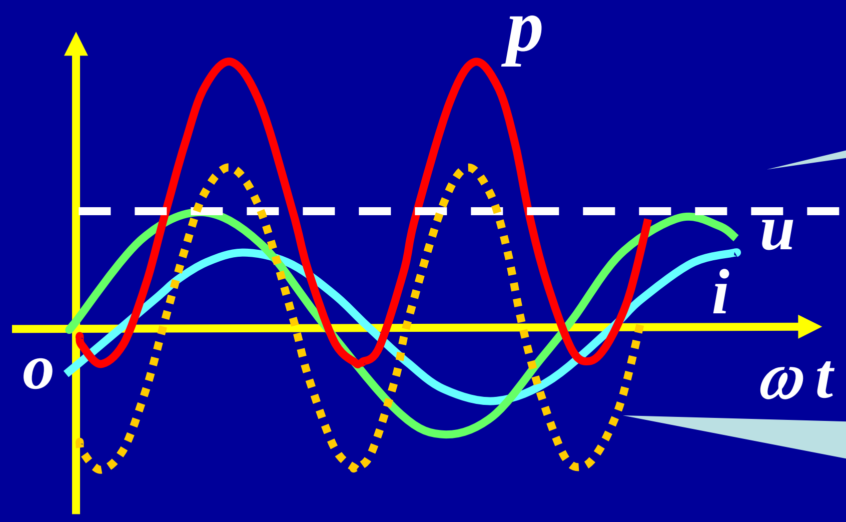
$$p(t)=ui=\sqrt{2}U\cos\omega t\cdot\sqrt{2}I\cos(\omega t-\varphi)$$

$$=UI[\cos\varphi+\cos(2\omega t-\varphi)]$$ 第一种分解方法

$$=UI\cos\varphi(1+\cos 2\omega t)+UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

第二种分解方法

第一种分解方法： $p(t)=UI[\cos\varphi+\cos(2\omega t-\varphi)]$



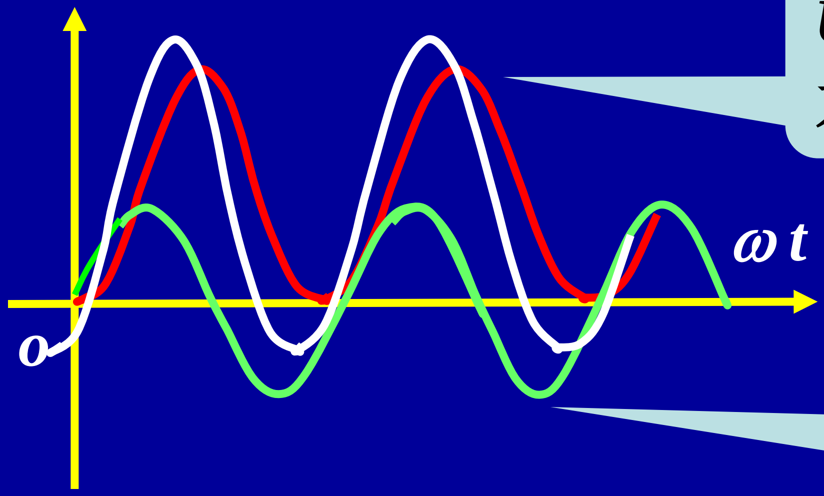
*UI*cos*φ* 恒定分量

*UI*cos (2*ω t* −*φ*) 为正弦分量

- *p* 有时为正，有时为负；
- *p*>0, 电路吸收功率；
- *p*<0，电路发出功率。

第二种分解方法:

$$p(t)=UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t)+UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$



$UI\cos\varphi\,(1\text{-}\cos 2\omega t)$
为不可逆分量

$UI\sin\varphi\,\sin 2\omega t$
为可逆分量

2.平均功率P (average power)

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t-\varphi)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$

$$\boxed{P=UI\cos\varphi}$$

P 的单位：W（瓦）

$$\varphi=\phi_u-\phi_i$$

功率因数角。对无源网络，为其等效阻抗的阻抗角。

$\cos\varphi$ 功率因数。

$\cos\varphi=1$ 纯电阻 $\cos\varphi=0$ 纯电抗

一般地，有 $0 \le |\cos\varphi| \le 1$

$X>0, \varphi>0$，感性，　　$X<0, \varphi<0$，容性

$\cos\varphi=0.5$（感性），则 $\varphi=60^{\circ}$（电压领先电流60°）。

平均功率实际上是网络内电阻消耗的功率，亦称为有功功率。表示电路实际消耗的功率，它不仅与电压电流有效值乘积有关，而且与 $\cos\varphi$ 有关，这是交流和直流的主要区别，主要由于电压、电流存在相位差。

3. 无功功率 Q (reactive power)

$$Q \overset{\text{def}}{=} UI\sin\varphi$$

单位：var（乏）。

$Q>0$，表示网络吸收无功功率；

$Q<0$，表示网络发出无功功率。

Q 的大小反映网络与外电路交换功率的大小。是由储能元件L、C的性质决定的。

4. 视在功率S

$$S \overset{\text{def}}{=} UI \qquad \text{单位: V}\cdot\text{A (伏安)}$$

反映电气设备的容量。

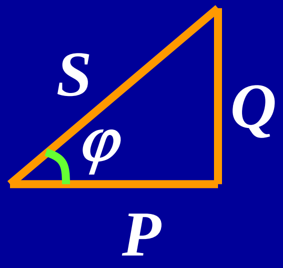
有功，无功，视在功率的关系：

有功功率：$P = UI\cos\varphi$ 单位：W

无功功率：$Q = UI\sin\varphi$ 单位：var

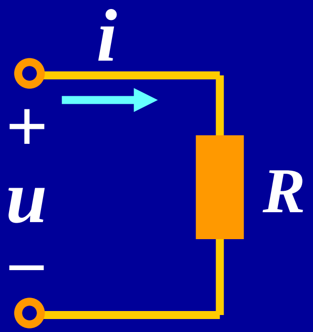
视在功率：$S = UI$ 单位：$\mathrm{V \cdot A}$

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$



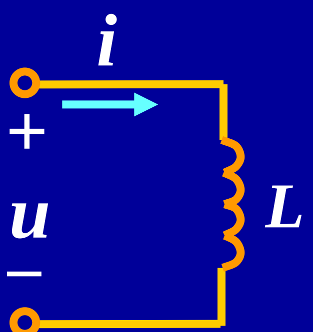
功率三角形

5. *R*、*L*、*C*元件的有功功率和无功功率



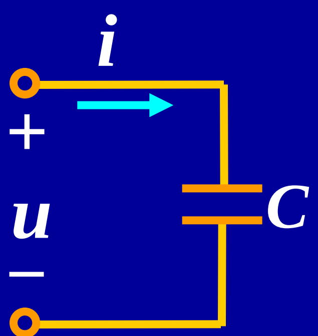
$$P = UI\cos\varphi = UI\cos 0° = UI = I^2R = U^2/R$$

$$Q = UI\sin\varphi = 0 \qquad S = P$$



$$P = UI\cos\varphi = 0 \qquad S = Q$$

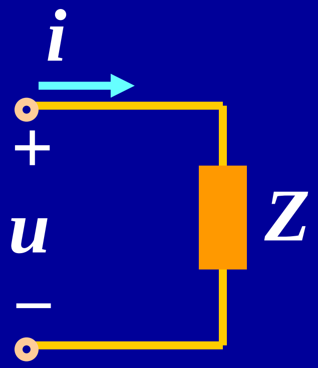
$$Q = UI\sin\varphi = UI\sin 90° = UI = I^2X_L$$



$$P = UI\cos\varphi = 0 \qquad S = -Q$$

$$Q = UI\sin\varphi = UI\sin(-90°) = -UI = I^2X_C$$

任意阻抗的功率计算



$$P_Z = UI\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

$$Q_Z = UI\sin\varphi = I^2|Z|\sin\varphi = I^2X$$

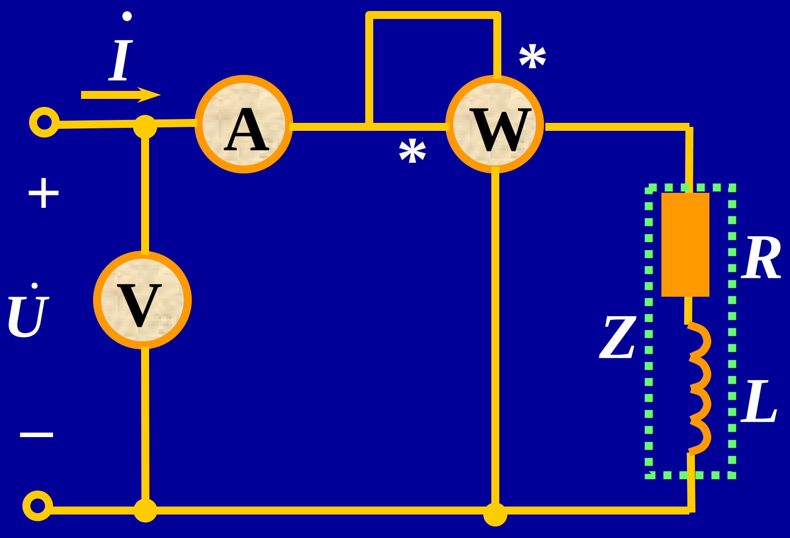
$$= I^2(X_L + X_C) = Q_L + Q_C$$

$Q_L = I^2X_L > 0$ 吸收无功为正

$Q_C = I^2X_C < 0$ 吸收无功为负

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2\sqrt{R^2 + X^2} = I^2|Z|$$

例1 三表法测线圈参数。 已知 f =50Hz，且测得U=50V，I=1A，P=30W。



解 方法一

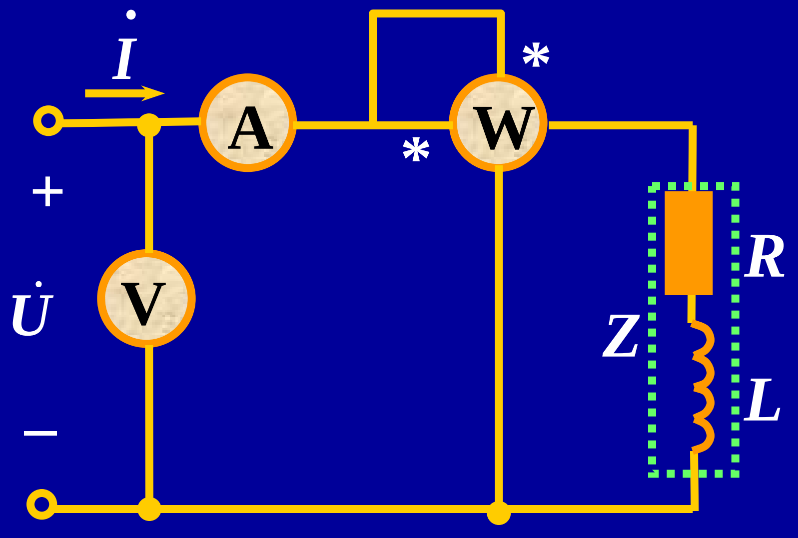
$$S = UI = 50 \times 1 = 50VA$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\,\text{var}$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1} = 30\Omega \qquad X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{40}{1} = 40\Omega$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{100\pi} = 0.127H$$

上页 下页



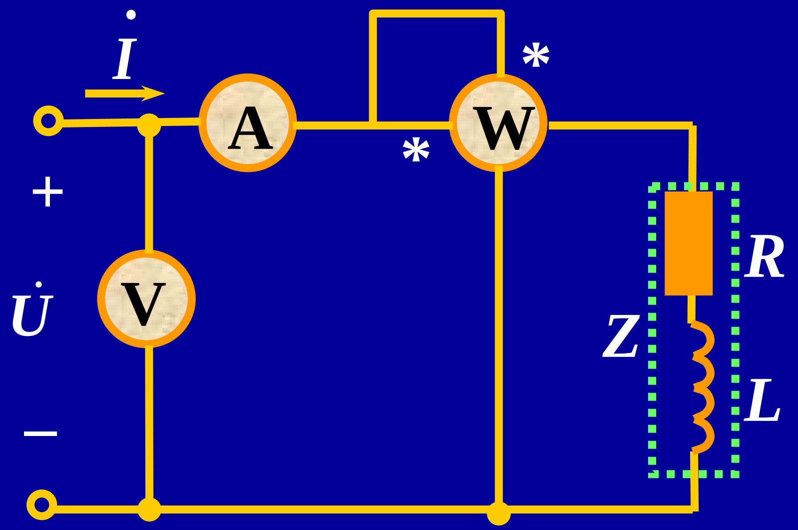
f =50Hz，U=50V，

I=1A，P=30W。

方法二 $P = I^2 R$ $\therefore R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{30}{1^2} = 30\Omega$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\Omega \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{|Z|^2 - R^2} = \frac{1}{314}\sqrt{50^2 - 30^2} = \frac{40}{314} = 0.127\text{H}$$



f =50Hz， U=50V，

I=1A， P=30W。

方法三

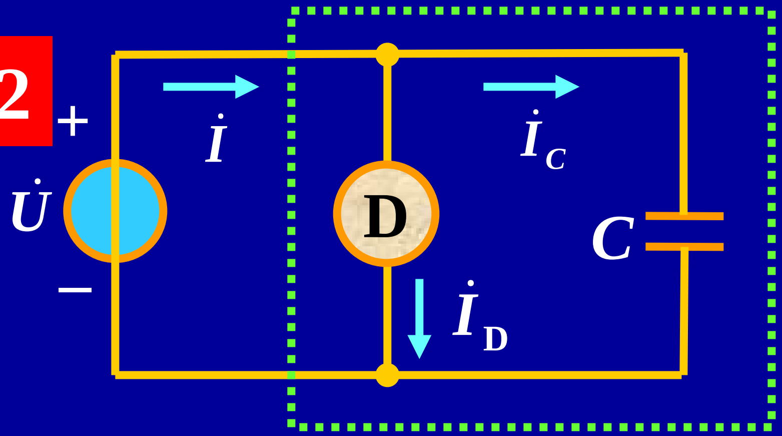
$$P = UI\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{30}{50\times 1} = 0.6$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\Omega$$

$$R = |Z|\cos\varphi = 50\times 0.6 = 30\Omega$$

$$X_L = |Z|\sin\varphi = 50\times 0.8 = 40\Omega$$

例2



已知：电动机 P_D=1000W，$\cos\varphi_D$=0.8（感性），U=220，f=50Hz，C=30μF。

求电路总的功率因数。

解 设 $\dot{U}=220\angle 0°$ 关键是找到电流 $\dot{I}$ 初相位

$$\dot{I}_C = j\omega C \times 220\angle 0^{\circ} = j2.08$$

$$I_D = \frac{P_D}{U\cos\varphi_D} = \frac{1000}{220\times 0.8} = 5.68\text{A}$$

$$\because\ \cos\varphi_D = 0.8(\text{感性}),\quad \therefore \varphi_D = 36.8°$$

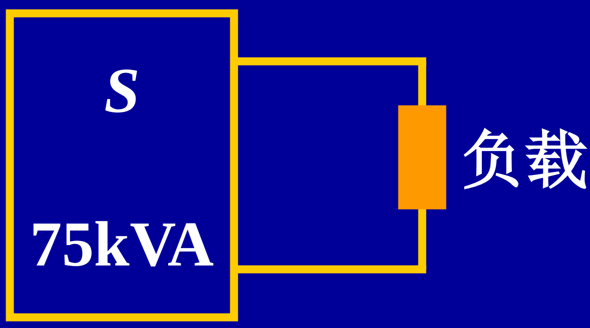
$$\dot{I} = \dot{I}_D + \dot{I}_C = 5.68\angle -36.8° + j2.08 = 4.73\angle -16.3°$$

$$\cos\varphi = \cos[0° - (-16.3°)] = 0.96$$

6. 功率因数提高

功率因数低带来的问题

（1）设备不能充分利用



$$P = UI\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1\,,\ P = UI = S = 75KW$$

$$\cos\varphi = 0.7\,,\ P = 0.7S = 52.5KW$$

设备容量 *S* (额定)向负载送多少有功功率要由负载的阻抗角决定。

异步电机　空载　$\cos\varphi$ =0.2~0.3

　　　　　满载　$\cos\varphi$ =0.7~0.85

日光灯　　$\cos\varphi$ =0.45~0.6

(2) 线路压降损耗大

当输出相同的有功功率时，线路上电流大。

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi}$$

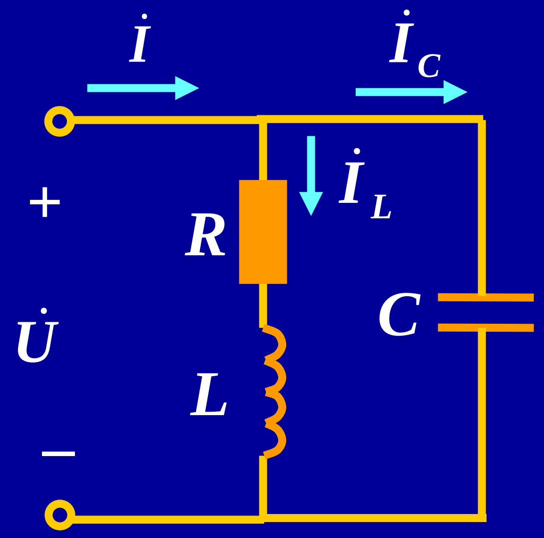
$\cos\varphi\downarrow$ $\quad I\uparrow$ $\quad U\downarrow$

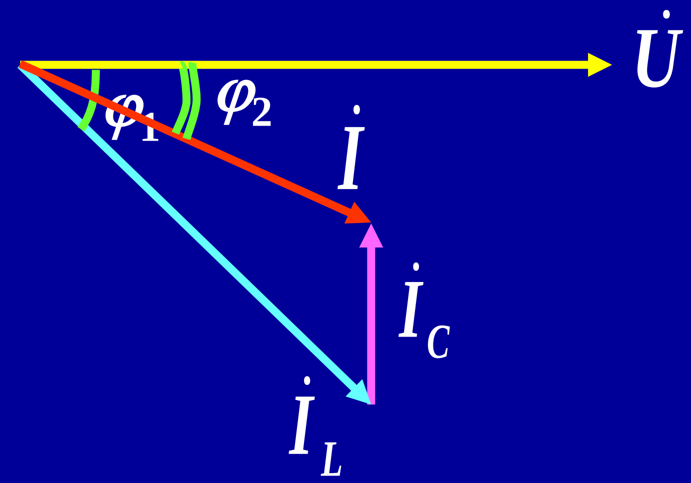
解决办法： （1）高压传输

（2）改进自身设备

（3）并联电容，提高功率因数 。

分析





特点

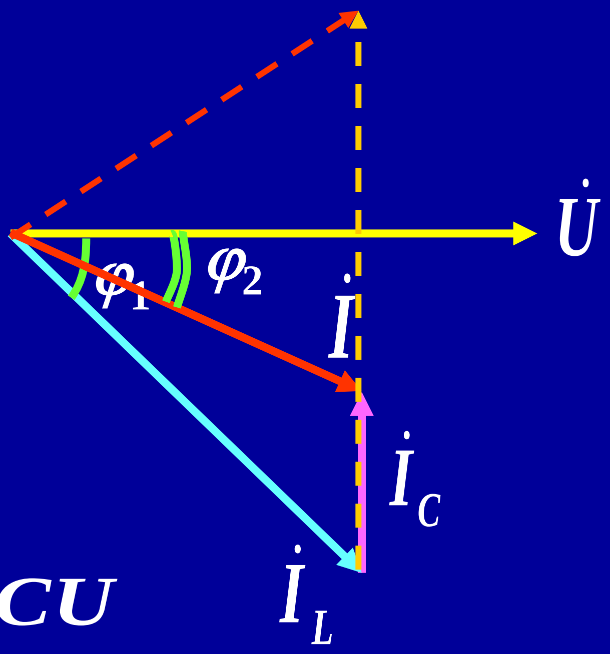
并联电容后，原负载的电压和电流不变，吸收的有功功率和无功功率不变，即：负载的工作状态不变。但电路的功率因数提高了。

并联电容的确定

$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I \sin\varphi_2$$

由 $P = UI_L \cos\varphi_1 = UI \cos\varphi_2$ 得

$$I_C = \frac{P}{U}(tg\varphi_1 - tg\varphi_2) \qquad I_C = \omega C U$$



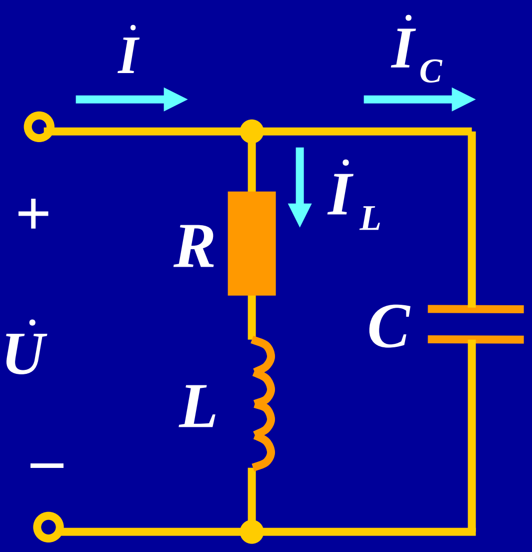
$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)}$$

补偿容量不同
- 欠
- 全——不要求(电容设备投资增加, 经济效果不明显)
- 过——使功率因数又由高变低(性质不同)

从功率角度来看

并联电容后，电源向负载输送的有功功率 $UI_L\cos\varphi_1 = UI\ \cos\varphi_2$ 不变，但是电源向负载输送的无功 $UI\sin\varphi_2$ 减少了，减少的这部分无功功率是由电容“产生”的无功功率来补偿，使感性负载吸收的无功功率不变，而功率因数得到改善。

例 已知：f =50Hz, U=220V, P=10kW, $\cos\varphi_1$=0.6，要使功率因数提高到0.9 , 求并联电容C，并联前后电路的总电流各为多大?



解

$$\cos\varphi_1 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 53.13^{\circ}$$

$$\cos\varphi_2 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 25.84^{\circ}$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\mathrm{tg}53.13^\circ - \mathrm{tg}25.84^\circ) = 557\mu\mathrm{F}$$

未并电容时：$$I = I_L = \frac{P}{U\cos\varphi_1} = \frac{10\times10^3}{220\times0.6} = 75.8A$$

并联电容后：$$I = \frac{P}{U\cos\varphi_2} = \frac{10\times10^3}{220\times0.9} = 50.5A$$

若要使功率因数从0.9再提高到0.95， 试问还应增加多少并联电容，此时电路的总电流是多大?

解

$$\cos\varphi_1 = 0.9 \Rightarrow \varphi_1 = 25.84^\circ$$

$$\cos\varphi_2 = 0.95 \Rightarrow \varphi_2 = 18.19^\circ$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\mathrm{tg}25.84^\circ - \mathrm{tg}18.19^\circ) = 103\mu\,\mathrm{F}$$

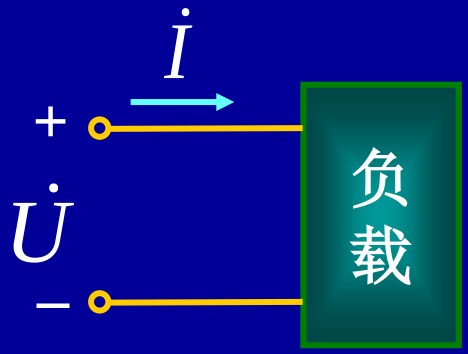
$$I = \frac{10\times10^3}{220\times0.95} = 47.8A$$

显然功率因数提高后，线路上总电流减少，但继续提高功率因数所需电容很大，增加成本，总电流减小却不明显。因此一般将功率因数提高到0.9即可。

9.6 复功率

1. 复功率

为了用相量$\dot{U}$和$\dot{I}$来计算功率，引入"复功率"



定义：$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^*$ 单位 VA

$$\bar{S} = UI\angle(\Psi_u - \Psi_i) = UI\angle\varphi = S\angle\varphi$$

$$= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

也可表示为：

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Z\dot{I}\cdot\dot{I}^* = ZI^2 = (R+\mathrm{j}X)I^2 = RI^2 + \mathrm{j}XI^2$$

or $\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}(\dot{U}Y)^* = \dot{U}\cdot\dot{U}^*Y^* = U^2Y^*$

① $\overline{S}$ 是复数，而不是相量，它不对应任意正弦量；

$\overline{S}$ 把 P、Q、S 联系在一起，它的实部是平均功率，虚部是无功功率，模是视在功率；

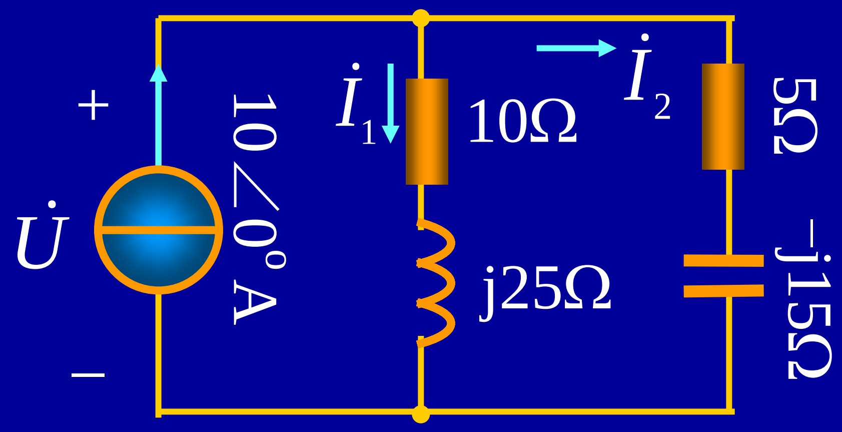
复功率满足守恒定理：在正弦稳态下，任一电路的所有支路吸收的复功率之和为零。即

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{b} P_k = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{b} Q_k = 0\end{cases} \longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{b}(P_k + \mathrm{j}Q_k) = \sum_{k=1}^{b}\overline{S}_k = 0}$$

$$\because U \neq U_1 + U_2 \quad \therefore S \neq S_1 + S_2$$

复功率守恒，视在功率　守恒.

例 求电路各支路的复功率



解1

$$Z = (10 + j25)//(5 - j15)$$

$$\dot{U} = 10\angle 0^{\circ} \times Z = 236\angle(-37.1^{\circ})\text{V}$$

$$\bar{S}_{发} = 236\angle(-37.1^{\circ}) \times 10\angle 0^{\circ} = 1882 - j1424 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{1吸} = U^2 Y_1^* = 236^2 \left(\frac{1}{10 + j25}\right)^* = 768 + j1920 \quad \text{VA}$$

$$\bar{S}_{2吸} = U^2 Y_2^* = 1113 - j3345 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{1吸} + \bar{S}_{2吸} = \bar{S}_{发}$$

解2

$$\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ \times \frac{5 - \mathrm{j}15}{10 + \mathrm{j}25 + 5 - \mathrm{j}15} = 8.77\angle(-105.3^\circ)\ \ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_S - \dot{I}_1 = 14.94\angle 34.5^\circ\ \ \mathrm{A}$$

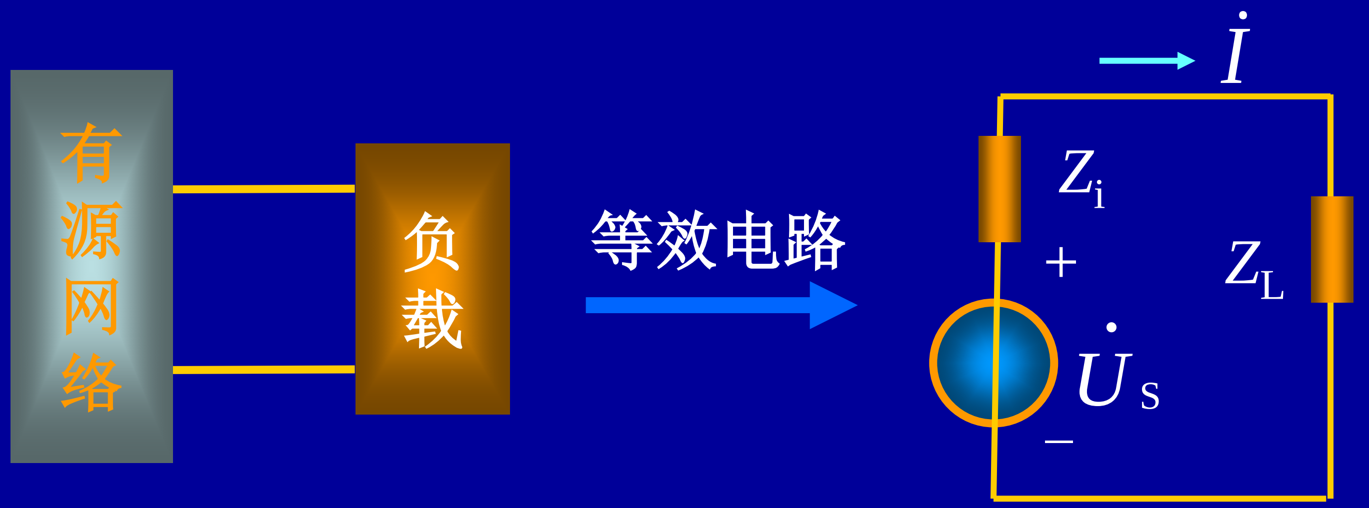
$$\overline{S}_{1吸} = I_1^{\ 2} Z_1 = 8.77^2 \times (10 + \mathrm{j}25) = 769 + \mathrm{j}1923\ \mathrm{VA}$$

$$\overline{S}_{2吸} = I_2^{\ 2} Z_2 = 14.94^2 \times (5 - \mathrm{j}15) = 1116 - \mathrm{j}3348\ \mathrm{VA}$$

$$\overline{S}_{发} = \dot{I}_1 Z_1 \cdot \dot{I}_S^{\ *} = 10 \times 8.77\angle(-105.3^\circ)(10 + \mathrm{j}25)$$

$$= 1885 - \mathrm{j}1423\ \mathrm{VA}$$

9.7 最大功率传输



$$Z_i = R_i + jX_i, \quad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + Z_L}, \quad I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}}$$

有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$

正弦电路中负载获得最大功率P_{max}的条件

$$P=\frac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$$

$$P_{max}=\frac{U_S^2}{4R_i}$$

①若$Z_L=R_L+jX_L$可任意改变

a) 先设 R_L 不变，X_L 改变

显然，当$X_i+X_L=0$，即$X_L=-X_i$时，P 获得最大值。

b) 再讨论 R_L 改变时，P 的最大值

当$R_L=R_i$ 时，P 获得最大值

$R_L=R_i \quad X_L=-X_i \quad \rightarrow \quad Z_L=Z_i^*$

最佳匹配条件

②若$Z_L = R_L + jX_L$只允许X_L改变

获得最大功率的条件是：$X_i + X_L = 0$，即 $X_L = -X_i$

最大功率为 $$P_{max} = \frac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2}$$

③若$Z_L = R_L$为纯电阻

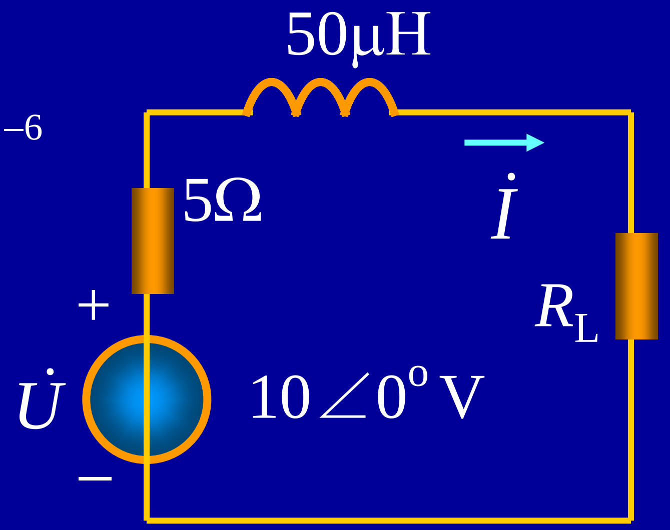
电路中的电流为：$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + R_L},\quad I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}}$$

负载获得的功率为：$$P = \frac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}$$

模匹配

令 $\dfrac{dP}{dR_L} = 0 \Rightarrow$ 获得最大功率条件：$R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = |Z_i|$

例 电路如图，求：**1.** R_L=5Ω时其消耗的功率；
2. R_L=?能获得最大功率，并求最大功率；
3.在R_L两端并联一电容，问R_L和C为多大时能与内阻抗最佳匹配，并求最大功率。



解

$$Z_i = R + jX_L = 5 + j10^5 \times 50 \times 10^{-6}$$
$$= 5 + j5 \ \Omega$$

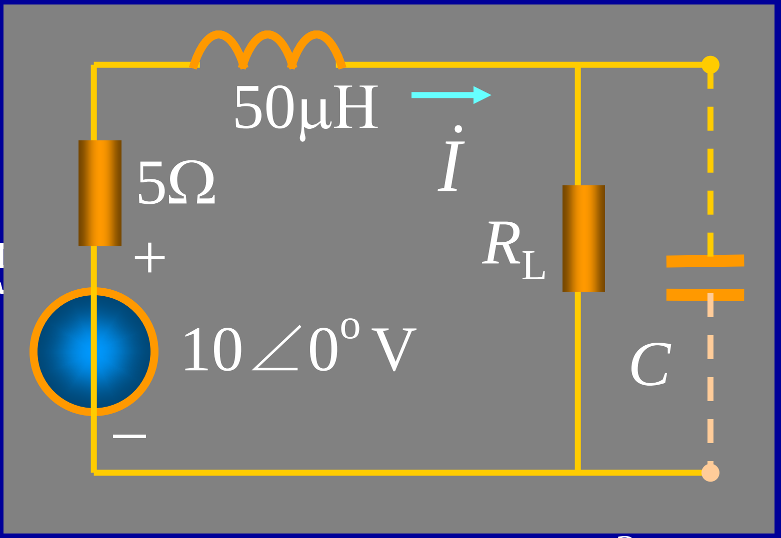
1. $$\dot{I} = \frac{10\angle 0^\circ}{5 + j5 + 5} = 0.89\angle(-26.6^\circ)\text{A}$$

$$P_L = I^2 R_L = 0.89^2 \times 5 = 4\text{W}$$

2. 当 $R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07\Omega$ 获最大功率

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^{\circ}}{5+\mathrm{j}5+7.07}=0.766\angle(-22$$

$$P_L=I^2R_L=0.766^2\times 7.07=4.15$$



$$3.\quad Y=\frac{1}{R_L}+\mathrm{j}\omega C$$

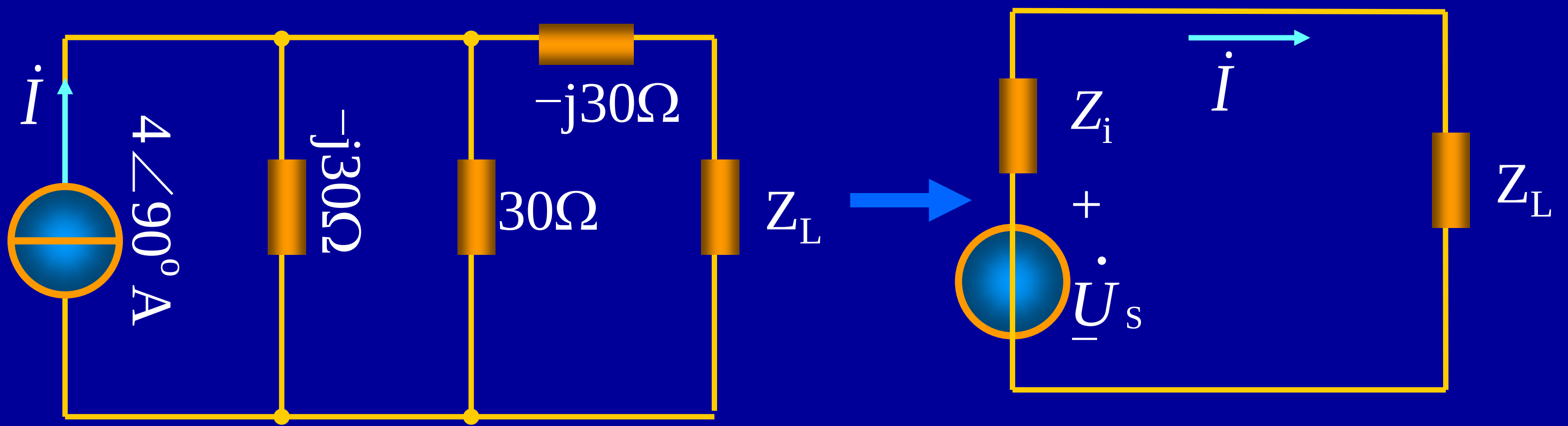
$$Z_L=\frac{1}{Y}=\frac{R_L}{1+\mathrm{j}\omega CR_L}=\frac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}-\mathrm{j}\frac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}$$

当 $\begin{cases}\dfrac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}=5\\[2mm] \dfrac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R_L=10\Omega\\ C=1\mu F\end{cases}$ 获最大功率

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^{\circ}}{10}=1\mathrm{A}$$

$$P_{\max}=I^2R_i=1\times 5=5\mathrm{W}$$

例 求Z_L=? 时能获得最大功率，并求最大功率。



解

$$Z_i = -j30 + (-j30 // 30) = 15 - j45\Omega$$

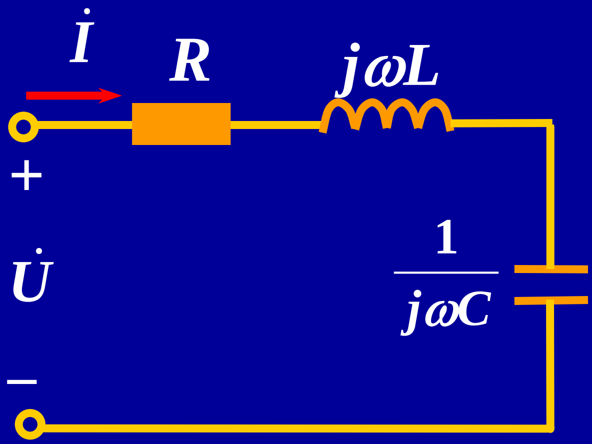
$$\dot{U}_S = 4j \times (-j30 // 30) = 60\sqrt{2}\angle 45^0$$

当 $Z_L = Z_i^* = 15 + j45\Omega$

有 $P_{max} = \dfrac{(60\sqrt{2})^2}{4 \times 15} = 120\text{W}$

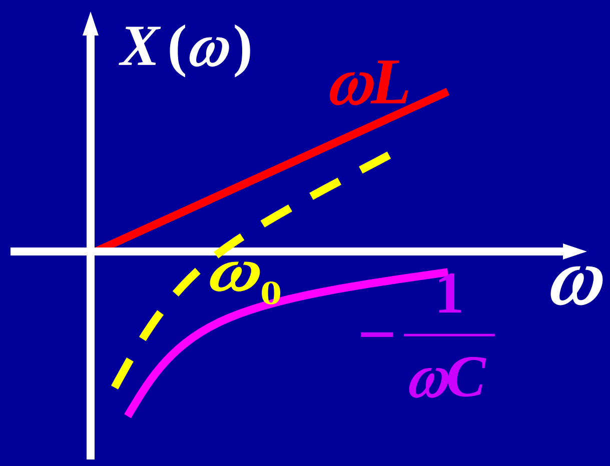
9.8 串联电路的谐振（选学）

谐振现象是电路的一种特殊工作状态，该现象被广泛地应用到无线电通讯中；另外有的时候我们不希望电路发生谐振，以免破坏电路的正常工作状态。



$$Z(j\omega)=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

当ω变化时，感抗、容抗均随ω而变化，故阻抗$Z(j\omega)$也随ω而变化。



当$\omega=\omega_0$时，$X(\omega_0)=0$,

$\dot{U}$和$\dot{I}$同相，$|Z|$最小。

这种工作状况称为谐振

串联谐振条件：

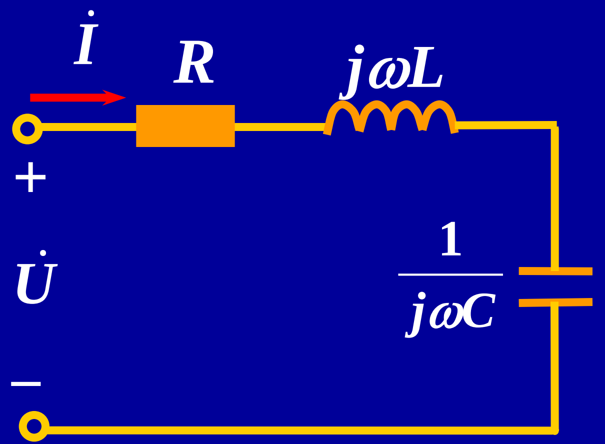
$$\mathrm{Im}[Z(j\omega)] = 0 \quad 或 \quad \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

串联谐振频率：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

串联谐振频率由电路参数L、C 决定，与电阻无关。

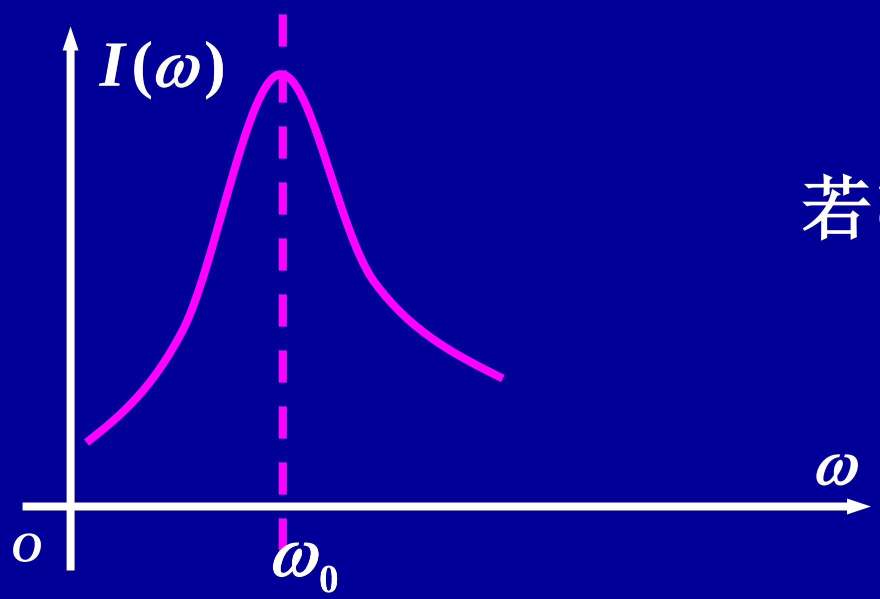
要想改变谐振频率，只需改变 L 或 C 即可。



$$Z(j\omega_0) = R + j(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) = R$$

阻抗模$|Z|$取得最小值，$|Z| = R$

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{R}$$

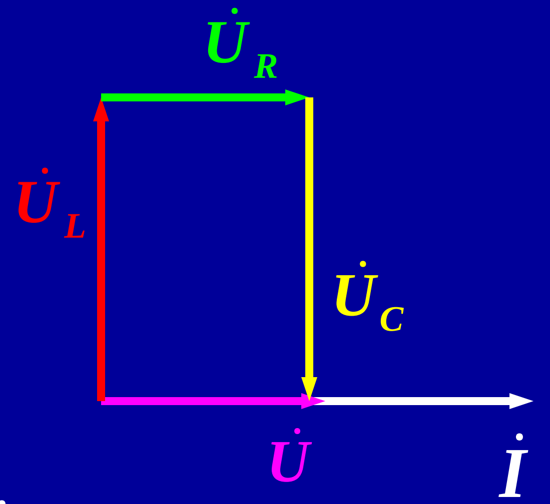


若U不变，则I 取得最大值。

$$U_R = IR = \frac{U}{R}R = U$$

上 页 下 页

谐振时，$\dot{U}_R=\dot{U}$，故$\dot{U}_L+\dot{U}_C=0$



$$\dot{U}_L=j\omega_0L\dot{I}=j\frac{\omega_0L}{R}\dot{U}=jQ\dot{U}$$

$$\dot{U}_C=-j\frac{1}{\omega_0C}\dot{I}=-j\frac{1}{\omega_0CR}\dot{U}=-jQ\dot{U}$$

$$Q=\frac{U_L(\omega_0)}{U}=\frac{U_C(\omega_0)}{U}=\frac{\omega_0L}{R}=\frac{1}{\omega_0CR}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q :串联谐振回路的品质因数

当$Q>>1$时,$U_L=U_C>>U$,出现过电压现象。

$$P(\omega_0) = UI\cos\varphi = UI$$

功率因数$\cos\varphi = 1$

P 取得最大值

$$Q(\omega_0) = UI\sin\varphi = 0$$

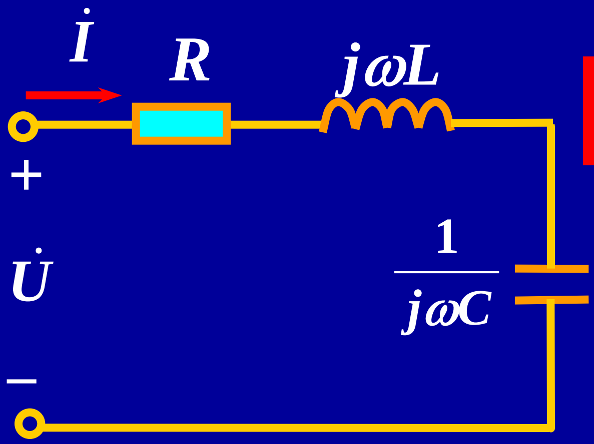
$$Q_L(\omega_0) = U_L I = \omega_0 L I^2$$

$$Q_C(\omega_0) = -U_C I = -\frac{1}{\omega_0 C} I^2$$

即：$Q_L(\omega_0) \neq 0$，$Q_C(\omega_0) \neq 0$，但$Q_L(\omega_0) + Q_C(\omega_0) = 0$

$$\overline{S} = P + j(Q_L + Q_C) = P$$

例 图示电路，正弦电压有效值 $U=10V$, $R=10\Omega$, $L=20mH$, 当电容 $C=200\,pF$ 时， 电流 $I=1A$。求正弦电压 u 的频率 ω、电压 U_L、U_C 和 Q 值。



解

$$|Z|=\frac{U}{I}=10\Omega$$

$$Z=R+jX \qquad |Z|=\sqrt{R^2+X^2}$$

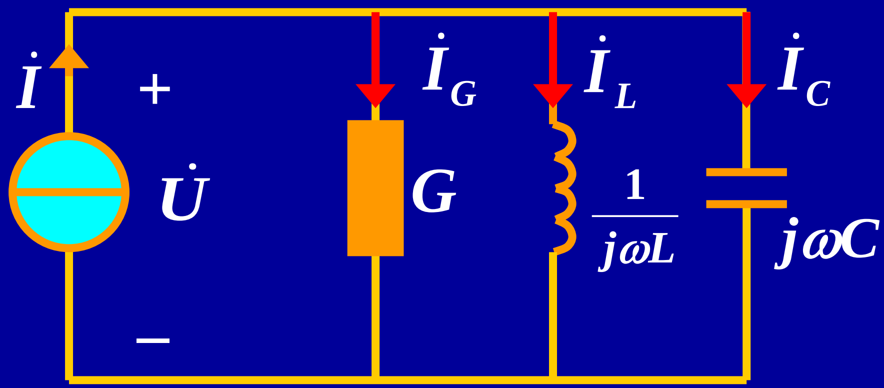
$$10=\sqrt{10^2+X^2} \qquad X=0$$

电路发生串联谐振，有

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0 \qquad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=5\times10^5 rad/s$$

$$U_L=U_C=\omega LI=10000V \qquad Q=\frac{U_L}{U}=\frac{\omega L}{R}=1000$$

9.9 并联电路的谐振（选学）



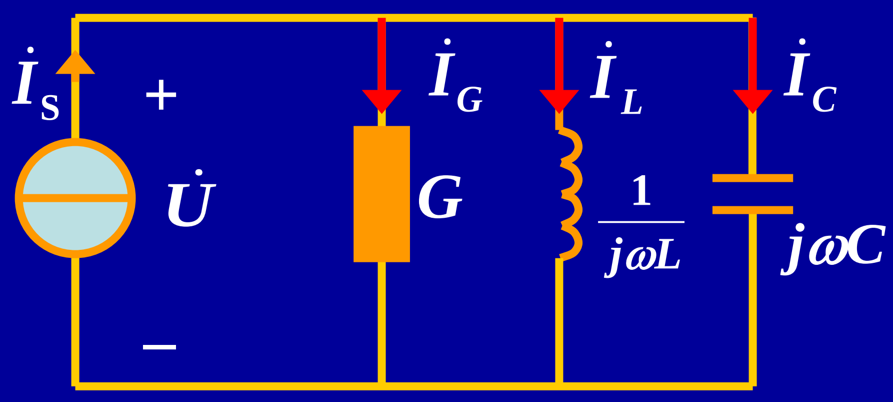
$$Y(j\omega)=G+\frac{1}{j\omega L}+j\omega C$$

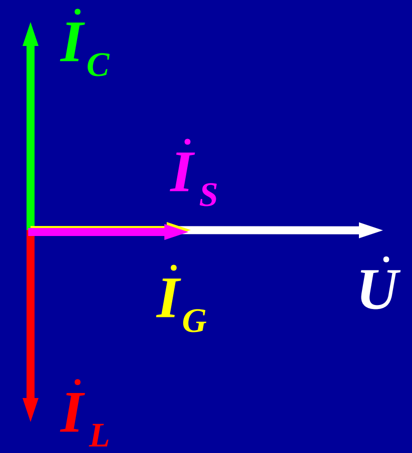
$$=G+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})$$

当$B=\omega_0 C-\frac{1}{\omega_0 L}=0$时，$\dot{U}$和$\dot{I}$ 同相，此时电路发生并联谐振。

谐振条件： $\mathrm{Im}[Y(j\omega_0)]=0$

谐振频率： $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$





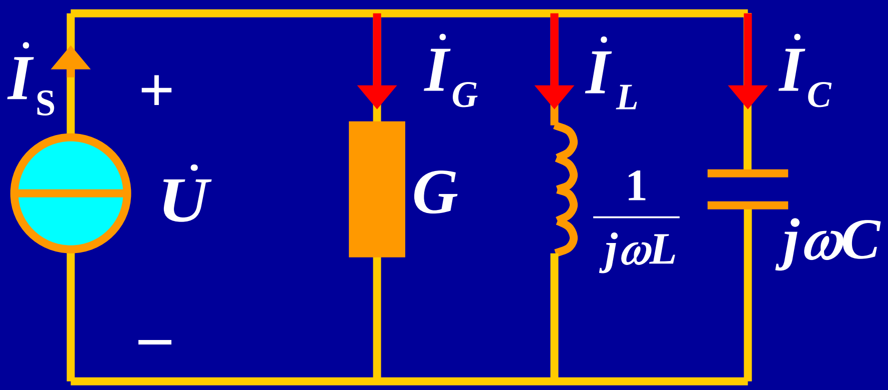
电路发生并联谐振时，导纳模取得最小值

$$|Y(j\omega_0)| = \sqrt{G^2 + B^2} = G \qquad |Z(j\omega_0)| = \frac{1}{G} = R$$

谐振时端电压达到最大值 $U(\omega_0) = RI_S$

并联谐振时，$\dot{I}_G = \dot{I}_S$，$\dot{I}_L + \dot{I}_C = 0$ 但$\dot{I}_L$和$\dot{I}_C$并不等于0

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{j\omega_0 L} = -j\frac{\dot{I}_S}{\omega_0 LG} \qquad \dot{I}_C = j\omega_0 C\dot{U} = j\frac{\omega_0 C\dot{I}_S}{G}$$



$$\dot I_L = \frac{\dot U}{j\omega_0 L} = -j\frac{\dot I_S}{\omega_0 LG}$$

$$\dot I_C = j\omega_0 C\dot U = j\frac{\omega_0 C\dot I_S}{G}$$

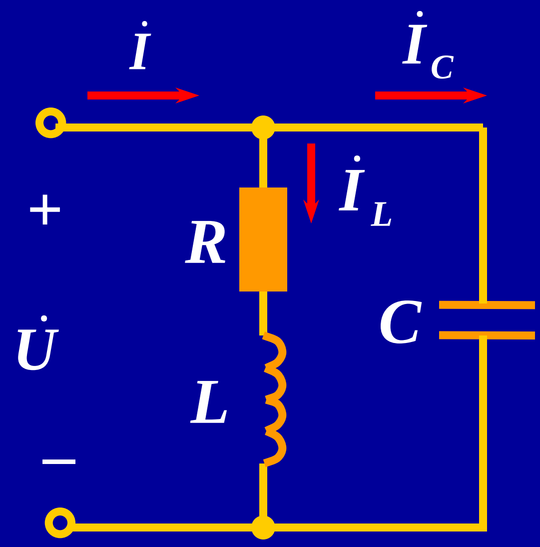
$$Q = \frac{I_L(\omega_0)}{I_S} = \frac{I_C(\omega_0)}{I_S} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Q越大，$I_L(\omega_0)$和$I_C(\omega_0)$就越大，在电感和电容支路上会出现过电流现象。

并联谐振时，功率因数，有功功率取得最大。

$$Q_L = \frac{U^2}{\omega_0 L},\quad Q_C = -\omega_0 CU^2,\quad Q_L + Q_C = 0$$

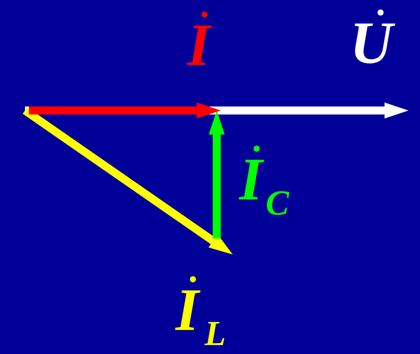
工程上常用电感线圈和电容并联的谐振电路



$$Y(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

$$\mathrm{Im}[Y(j\omega_0)] = 0 \qquad \omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = 0$$



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - CR^2}{CL^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

$$1 - \frac{CR^2}{L} > 0 \qquad R < \sqrt{\frac{L}{C}}$$

发生谐振 $\quad Y(j\omega_0) = \dfrac{CR}{L}$

上 页