目 录

合肥工业大学《高等数学 A（下）》

高数 A 2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1.设$z=e^{y-x}$，则$dz|_{(1,0)}=$ ________

2.曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,1,2)$处的切平面方程为 ________

3.交换二重积分次序$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 f(x,y)dy=$ ________

4.设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，则该幂级数的收敛区间为 ________

5.设L为半圆$x^2+y^2=r^2,x\geq 0$.则$\int_L(x^2+y^2)ds=$ ________

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1.函数$f(x,y)=\arctan(x^2y)$在点$(1,1)$处的梯度等于（　）

（A）$\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$　（B）$\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$　（C）$\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}$　（D）$\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$

2.设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)偏导数存在，且取得极小值，则下列结论正确的是（　）

（A）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数等于 0　（B）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数大于 0

（C）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数小于 0　（D）$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数不存在

3.设α是常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$（　）

（A）发散　（B）绝对收敛　（C）条件收敛　（D）敛散性不定

4.设$f(x)=\begin{cases}x, 0\leq x\leq \frac{1}{2}\\ 2-2x, \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x),-\infty<x<+\infty$

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx$，则$S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ ________

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）1

5.设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$上半部分，并取上侧，则下列结论不正确的是（　　）

（A）$\iint_\Sigma y^2dydz=0$　　（B）$\iint_\Sigma ydydz=0$

（C）$\iint_\Sigma x^2dydz=0$　　（D）$\iint_\Sigma xdydz=0$

三、（本题共12分）设$f(x,y)$具有连续二阶偏导数，且$z=f\left(xy,\dfrac{x^2}{y}\right)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

四、（本题共10分）求函数$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$的极值

五、（本题共12分）计算三重积分$I=\iiint_\Omega(x^2+y^2)dV$，$\Omega$是由旋转抛物面$2z=x^2+y^2$以及平面$z=2$所包围的立体部分

六、（本题共12分）计算曲面积分$I=\oiint_\Sigma\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的内侧

七、（本题共12分）已知$f(0)=-\frac{1}{2}$，求可微函数$f(x)$，使得曲线积分$\int_L [e^x+f(x)]ydx-f(x)dy$与路径无关，并计算积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+f(x)]ydx-f(x)dy$

八、（本题共12分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$的收敛域及和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$

高数A 2019-2020学年第二学期期末考试A卷参考答案

一、填空题（本题满分15分，每小题3分）

1.【正解】$-\frac{1}{e}dx+\frac{1}{e}dy$

【学解】$z_x(1,0)=-e^{y-x}\big|_{(1,0)}=-\frac{1}{e},z_y(1,0)=e^{y-x}\big|_{(1,0)}=\frac{1}{e}$

所以$dz\big|_{(1,0)}=z_x(1,0)dx+z_y(1,0)dy=-\frac{1}{e}dx+\frac{1}{e}dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第三部分　3.1全微分的定义

2.【正解】$2x+2y-z=2$

【学解】由于$z_x(1,1)=2x\big|_{(1,1)}=2,z_y(1,1)=2y\big|_{(1,1)}=2$，所以在点$(1,1,2)$处的切平面的法向量为$\vec{n}=(z_x(1,1),z_y(1,1),-1)=(2,2,-1)$，于是切平面方程为$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$

化简得$2x+2y-z=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第五部分　5.2曲面的切平面与法线

3.【正解】$\int_0^2 dy\int_1^{y+1}f(x,y)dx$

【学解】积分区域$D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 3,x-1\leqslant y\leqslant 2\}=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 1+y\}$

所以$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 f(x,y)dy=\int_0^2 dy\int_1^{y+1}f(x,y)dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题九　第二部分　2.1利用直角坐标系计算二重积分

4.【正解】$(-1,3)$

【学解】因为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，依据Abel第一定理可知此幂级数的收敛半径为$|-1-1|=2$，于是收敛区间为$(-1,3)$

值得一提的是：收敛区间与收敛域是不同的两个概念

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第三部分　3.2 幂级数及其敛散性

5.【正解】πr^3

【学解】$\int_L (x^2+y^2)ds = r^2\int_L ds = r^2\cdot\frac{2\pi r}{2} = \pi r^3$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第一部分【易错考点】【1-1】第一型曲线积分的计算方法

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1.【正解】B

【学解】$\boldsymbol{grad}f(1,1)=(f_x(1,1),f_y(1,1))=\left(\frac{2xy}{1+x^4y^2},\frac{x^2}{1+x^4y^2}\right)\Big|_{(1,1)}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$，故选 B

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第六部分　6.2 梯度

2.【正解】A

【学解】由于$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取得极小值，所以存在$\delta>0$，当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，恒有$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$，那么当$|y-y_0|<\delta$时，有$f(x_0,y)\geq f(x_0,y_0)$，所以$f(x_0,y)$在点$(x_0,y_0)$处取得极小值，又因为$f(x_0,y)$在$y=y_0$处可导（这是因为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$偏导数存在），所以根据费马引理知$f(x_0,y)$在$y=y_0$处导数等于 0

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第七部分　7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

3.【正解】A

【学解】首先有$\left|\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}\right|\leq\frac{1}{n^3}$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}$绝对收敛

又因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$是发散的，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\alpha)}{n^3}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$发散

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第二部分　2.2 绝对收敛与条件收敛

4.【正解】C

【学解】因为将$f(x)$展开成了余弦级数，从$S(x)$的形式可知$S(x)$以 2 为周期，是偶函数

于是根据狄利克雷收敛定理知：$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}^+\right)+f\left(\frac{1}{2}^-\right)}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第六部分　6.1 周期为$2l$的周期函数的傅里叶级数

5.【正解】D

【学解】补平面$S:x^2+y^2\leq 1,z=0$，取其下侧

那么根据高斯公式有：$\iint_{\Sigma+S}xdydz=\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq 1\\ z\geq 0}}dV=\frac{2}{3}\pi$

又因为$\iint_S xdydz=0$，所以$\iint_\Sigma xdydz=\frac{2}{3}\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第五部分　5.1 对坐标的曲面积分

三、（本题共 12 分）

【学解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\frac{2x}{y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right]-\frac{2x}{y^2}f_2'+\frac{2x}{y}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right]$$
$$=f_1'-\frac{2x}{y^2}f_2'+xyf_{11}''+f_{12}''\frac{x^2}{y}-\frac{2x^3}{y^3}f_{22}''$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第二部分　2.2 高阶偏导数

四、（本题共 10 分）

【学解】令$\begin{cases}f_x=4-2x=0\\ f_y=-4-2y=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$，解得唯一驻点$(2,-2)$

接下来考虑 Hessian 矩阵$\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\ f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}=-2E_2$，显然它恒为负定矩阵

于是点$(2;-2)$为极大值点，即此函数的极大值为$f(2,-2)=8$

【考点延伸】《考试宝典》专题八　第七部分　7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

五、（本题共 12 分）

【学解】首先联立旋转抛物面$2z=x^2+y^2$以及平面$z=2$，可得到该立体在xOy平面的投影为：

$D_{xy}:x^2+y^2\leq 4$，于是$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)dV=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}dz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}dz=2\pi\int_0^2\left(2r^3-\frac{r^5}{2}\right)dr=\frac{16\pi}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九　第三部分【易错考点】3-1 三重积分的计算方法

六、（本题共12分）

【学解】$I=\oiint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)=\oiint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$

根据高斯公式有：$\oiint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=-\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}3dV=-4\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第五部分　5.1 对坐标的曲面积分

七、（本题共12分）

【学解】令$P=[e^x+f(x)]y,Q=-f(x)$

因为曲线积分$\int_L[e^x+f(x)]ydx-f(x)dy$与路径无关，故有$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$

即得到$-f'(x)=e^x+f(x)$，得微分方程$f(x)+f'(x)=-e^x$

于是有$e^x[f(x)+f'(x)]=-e^{2x}\Longrightarrow(e^xf(x))'=-e^{2x}\Longrightarrow e^xf(x)-e^0f(0)=-\int_0^x e^{2t}dt$

$\Longrightarrow e^xf(x)=-\frac{e^{2x}}{2}\Longrightarrow f(x)=-\frac{e^x}{2}$

进而有$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+f(x)]ydx-f(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{e^x}{2}ydx+\frac{e^x}{2}dy=\left[\frac{e^x}{2}y\right]\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{e}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十　第三部分　3.1 格林公式

八、（本题共12分）

【学解】令$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，有收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$

当$x=1$时，幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}$，是发散的；

当$x=-1$时，幂级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}$，也是发散的；

所以收敛域为$(-1,1)$，下面在$(-1,1)$的意义下求解和函数：

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1},-1<x<1$

于是$\int_0^x s(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}t^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2}x^n\overset{def}{=\!=}g(x)$

$\int_0^x g(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2}t^n dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2}=\frac{x^2}{2(1-x)}$

于是$s(x)=\left(\frac{x^2}{2(1-x)}\right)''=\left(\frac{2x-x^2}{2(1-x)^2}\right)'=\frac{1}{(1-x)^3},-1<x<1$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=s\left(\frac{1}{2}\right)=8$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一　第三部分　3.3 幂级数的运算

高数 A 2018-2019 学年第二学期期末考试试卷

一、填空题

1. 若曲线$\begin{cases} x=t^2 \\ y=2t \\ z=t^3 \end{cases}$在$t=1$处的切线与平面$x+ay-2z=1$平行，则常数$a$等于__________

2. 函数$z=x^2y+2xy$在点$(1,1)$处的最大方向导数为__________

3. .设空间区域Ω为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$等于__________

4. 设曲面Σ的方程为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} zdS=$__________

5. $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$在区间$(-\infty,+\infty)$内关于x的幂级数展开式为__________

二、选择题

1. 设$f(0,0)=1,f_x'(0,0)=2,f_y'(0,0)=3$，$\vec{l}$对$x$轴正向的逆时针方向转角为$\dfrac{\pi}{4}$，则下列说法一定正确的是(　　)

(A) $f(x,y)$在$(0,0)$点连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=1$

(B) $f(x,y)$在$(0,0)$点可微，且$df(x,y)\big|_{(0,0)}=2dx+3dy$

(C) $f(x,y)$在$(0,0)$点沿$\vec{l}$方向的方向导数存在，且$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\bigg|_{(0,0)}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(D) $f(x,y)$在$(0,0)$点不取极值

2. 设$f(x,y)$为连续函数，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=$ (　　).

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

3. 设$L:y=x,x\in[0,1]$，第一类曲线积分$I_1=\int_L k(y-x)ds$，$I_2=\int_L (y-x^2)ds$，其中k为常数，则I_1,I_2的大小关系为(　　).

(A) $I_1<I_2$　　(B) $I_1>I_2$　　(C) $I_1=I_2$　　(D) 无法比较

4. 设常数$\lambda>0$，则级数$\sum\limits_{n=1}\dfrac{\sin n+(-1)^n\lambda}{n^2}$是(　　).

(A)条件收敛　　(B) 绝对收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与常数λ有关

5. 设$f(x)$是周期2π的函数，且$f(x)=\begin{cases} x+1, -\pi\leqslant x<0 \\ x^2, 0\leqslant x<\pi \end{cases}$ $s(x)$为$f(x)$的傅里叶级数展开，则$s(5)=$ (　　).

(A) $(5-2\pi)^2$　　(B) $6-2\pi$　　(C) 6　　(D) 25

三、（本题满分 10 分）设函数$u=x^2+y+z^2$，其中$y=y(x),z=z(x)$由隐函数方程组$\begin{cases} x^2+x-ye^y=0 \\ xz+\ln z=1 \end{cases}$确定，求$du\big|_{x=0}$

四、（本题满分 10 分）求函数$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$的极值

五、（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}|y-x^2|d\sigma$，其中区域 D 为 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$

六、（本题满分 10 分）设在全平面内，曲线积分 $\int_L (y\varphi(x)+ye^{xy})dx+(x^2+xe^{xy})dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 为连续函数.

(1)求 $\varphi(x)$ 的表达式;

(2)求 $(y\varphi(x)+ye^{xy})dx+(x^2+xe^{xy})dy$ 的一个原函数 $u(x,y)$;

(3)计算曲线积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y\varphi(x)+ye^{xy})dx+(x^2+xe^{xy})dy$

七、（本题满分 12 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2ydydz+y^2\sin xdzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的一部分，并取外侧

八、（本题 12 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{2}{n}\right)x^n$ 的收敛域和和函数

九、（本题满分6分）设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛

高数A 2018-2019学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、填空题

1.【正解】2

【学解】切向量为$\vec{s}=\{2t,2,3t^2\}\big|_{t=1}=\{2,2,3\}$，平面的法向量为$\vec{n}=\{1,a,-2\}$

因为切线与平面平行，所以切向量与法向量垂直，则$\vec{s}\cdot\vec{n}=\vec{0}$，即$2+2a-6=0$，

所以$a=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 5.1 空间曲线的切线与法平面

2.【正解】5

【学解】$gradz\big|_{(1,1)}=\{2xy+2y,x^2+2x\}\big|_{(1,1)}=\{4,3\}$，$\max\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,1)}=\left|gradz\big|_{(1,1)}\right|=5$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1 方向导数 6.2 梯度

3.【正解】$\dfrac{4\pi}{5}$

【学解】$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^4\sin\varphi d\rho=\dfrac{4\pi}{5}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 第三部分【易错考点】3-1 三重积分的计算方法

4.【正解】π

【学解】$\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}dxdy=\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 第四部分【易错考点】【4-1】第一型曲面积分的计算方法

5.【正解】$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$

【学解】因为$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n}$，从而$f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 4.1 函数展开成幂级数

二、选择题

1.【正解】(D)

【学解】偏导数存在未必连续，未必可微，未必方向导数存在，所以选项(A)，(B)，(C)均不正确，由二元函数极值存在的必要条件可知，如果$f(x,y)$在$(0,0)$点取极值，并且一阶偏导数都存在，则

$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，与已知矛盾，所以(D)选项正确

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

2.【正解】(D)

【学解】由二重积分极坐标与一般形式的互化可知，(D）正确

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1 利用直角坐标系计算二重积分; 2.2 利用极坐标计算二重积分

3.【正解】(A)

【学解】解法一：L上$y-x=0$，所以$I_1=0$，L上$y-x^2=x-x^2\geqslant 0$且不恒为0，所以$I_2>0$，故选(A)

解法二：$I_1=\int_0^1 k(x-x)\sqrt{2}\,dx=0, I_2=\int_0^1(x-x^2)\sqrt{2}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{6}$，所以选(A)

【考点延伸】《考试宝典》专题十 第一部分【易错考点】【1-1】第一型曲线积分的计算方法

4.【正解】(B)

【学解】因为$\left|\frac{\sin n+(-1)^n\lambda}{n^2}\right|\leqslant\frac{\lambda+1}{n^2}$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda+1}{n^2}$收敛，故选(B)

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.2 绝对收敛与条件收敛

5.【正解】(B)

【学解】因为$s(x)$是周期2π的函数，所以$s(5)=s(5-2\pi)$，$5-2\pi\in(-\pi,0)$是$f(x)$的连续点，

从而$s(5)=s(5-2\pi)=f(5-2\pi)=6-2\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.2 函数展开成傅里叶级数

三、【学解】由题意可知，$x=0$时，$y=0$，$z=e$.

由$u=x^2+y+z^2$，可知$du=2xdx+dy+2zdz$，

由$x^2+x-ye^y=0$，可得$\frac{dy}{dx}=\frac{1+2x}{(1+y)e^y}$，从而$dy|_{x=0}=dx$，

【或者$2xdx+dx-(1+y)e^ydy=0$，得$dy|_{x=0}=dx$】

由$xz+\ln z=1$，可得$\frac{dz}{dx}=-\frac{z^2}{xz+1}$，从而$dz|_{x=0}=-e^2dx$，

【或者$xdz+zdx+\frac{1}{z}dz=0$，得$dz|_{x=0}=-e^2dx$】

所以$du|_{x=0}=(1-2e^3)dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 4.1 一元函数与多元函数复合的情形

四、【学解】令$\begin{cases}f_x'=3x^2-8x+2y=0\\ f_y'=2x-2y=0\end{cases}$，解得驻点为(0,0)，(2,2).

又$f_{xx}''=6x-8$，$f_{xy}''=2$，$f_{yy}''=-2$，依次代入驻点，有

驻点	A	B	C	$\Delta=B^2-AC$	极值情况
(0,0)	-8	2	-2	<0	取极大值
(2,2)	4	2	-2	>0	不取极值

所以$f(x,y)$在点(0,0)处取极大值，且极大值为$f(0,0)=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

五、【学解】$D=D_1\cup D_2$，其中$D_1:0\leqslant x\leqslant 1.x^2\leqslant y\leqslant 1;D_2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2$

$$I=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_0^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\int_0^1dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}x^4\right)dx+\int_0^1\frac{1}{2}x^4dx=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1 利用直角坐标系计算二重积分

六、【学解】(1). 令$P(x,y)=y\varphi(x)+ye^{xy},Q(x,y)=x^2+xe^{xy}$

因为曲线积分与路径无关，所以$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即$\varphi(x)+e^{xy}+xye^{xy}=2x+e^{xy}+xye^{xy}$，

所以$\varphi(x)=2x$

(2). 解法一： 取(0,0)，有$u(x,y)=\int_0^xP(x,0)dx+\int_0^yQ(x,y)dy$

$$=\int_0^y(x^2+xe^{xy})dy=x^2y+e^{xy}\Big|_0^y=x^2y+e^{xy}-1.$$

解法二.：$u(x,y)=\int P(x,y)dx=\int(2xy+ye^{xy})dx=x^2y+e^{xy}+c(y)$，

从而$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+xe^{xy}+c'(y)=Q(x,y)$，所以$c'(y)=0$，取$c(y)=0$，则得到一个原函数为

$u(x,y)=x^2y+e^{xy}$.

(3).**解法一**：取路径$L:y=x,x:0\to 1$，可得$I=\int_0^1(3x^2+2xe^{x^2})dx=(x^3+e^{x^2})\big|_0^1=e$.

解法二：由原函数为$u(x,y)=x^2y+e^{xy}-1$，则$I=(x^2y+e^{xy}-1)\big|_{(0,0)}^{(1,1)}=e$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 第二部分 对坐标的曲线积分

七、【学解】

解法一：补充曲面Σ_1：$z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，取上侧；$\Sigma_2:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$，取下侧，则$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2$构成封闭曲面，取外侧，它们所围区域记为$\Omega$.

由高斯公式可得，$\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint_{\Omega}(2xy+2y\sin x+2z)dV$，

根据奇偶对称性可知$\displaystyle\iiint_{\Omega}2xydV=\iiint_{\Omega}2y\sin xdV=0$，所以

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=2\iiint_{\Omega}zdV=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}dxdy\int_0^1 zdz=\pi$$

而$\displaystyle\iint_{\Sigma_1}=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}1^2dxdy=\pi,\iint_{\Sigma_2}=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}0^2dxdy=0$

所以$\displaystyle I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}=\pi-\pi-0=0$

解法二：由于$\displaystyle\iint_{\Sigma}z^2dxdy=0$，所以$\displaystyle I=\iint_{\Sigma}x^2ydydz+\iint_{\Sigma}y^2\sin xdzdx$.

补充曲面Σ_1：$z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，取上侧；$\Sigma_2:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$，取下侧，则$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2$构成封闭曲面，所围区域为$\Omega$，取外侧.

由高斯公式可得，$\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint_{\Omega}(2xy+2y\sin x)dV$，

根据奇偶对称性可知$\displaystyle\iiint_{\Omega}2xydV=\iiint_{\Omega}2y\sin xdV=0$，所以$\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=0$.

而$\displaystyle\iint_{\Sigma_1}x^2ydydz+\iint_{\Sigma_1}y^2\sin xdzdx=\iint_{\Sigma_2}x^2ydydz+\iint_{\Sigma_2}y^2\sin xdzdx=0$，所以$I=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1 对坐标的曲面积分

八、【学解】

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}((n+1)+\frac{2}{n+1}\Big/n+\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}(\frac{(n+1)^2+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n^2+2})=1,$$

当$x=\pm1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(n+\frac{2}{n})=\infty,\lim\limits_{n\to\infty}(n+\frac{2}{n})(-1)^n=\infty$，级数发散，所以收敛域为$(-1,1)$.

设级数的和函数为$s(x)$，则$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+\frac{2}{n})x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\overset{记}{=}f(x)+g(x)$，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'-\frac{x}{1-x}$$

$$=(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})'-\frac{x}{1-x}=(\frac{x^2}{1-x})'-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

【或$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$】

$g(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，则$g'(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{2}{1-x}$，

从而$g(x)-g(0)=\int_0^x\frac{2}{1-t}dt=-2\ln(1-x)$，$g(0)=0$，所以$g(x)=-2\ln(1-x)$.

【或$g(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=2\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt=2\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-2\ln(1-x)$】

综合所述，$s(x)=\frac{x}{(1-x)^2}-2\ln(1-x)$，$x\in(-1,1)$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3 幂级数的运算

九、【学解】证明：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=s$

由于其前n项部分和$s_n=b_2-b_1+b_3-b_2+\cdots+b_{n+1}-b_n=b_{n+1}-b_1$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=s$，得$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=s+b_1$，从而数列$\{b_n\}$有界.

不妨令$|b_n|\leqslant M$，则$0\leqslant|a_nb_n|\leqslant Ma_n$.因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ma_n$收敛，所以由正项级数的比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.2 绝对收敛与条件收敛

高数 A 2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷

一、填空题(3 分，共 15 分)

1、设 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$______

2、设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，则曲线积分 $\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$______.

3、设 Σ 为 $x+y+z=1\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$，则 $\iint_\Sigma dS=$______.

4、求过点 $(1,1,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x-4z=3,\\2x-y-5z=1\end{cases}$ 的直线方程为______.

5、设函数 $f(x)=x^2, 0\leq x<1$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\quad -\infty<x<+\infty$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots$，则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=$______.

三、选择题(3 分，共 15 分)

1、曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为(　　).

(A) $x-y+z=-2$　(B) $x+y+z=0$　(C) $x-2y+z=-3$　(D) $x-y-z=0$

2、已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则(　　).

(A) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在　(B) $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

(C) $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在　(D) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都不存在

3、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

4、函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　)

(A) $\vec{i}$　(B) $-\vec{i}$　(C) $\vec{j}$　(D) $-\vec{j}$

5、设 $u=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

三、(本题满分 10 分)设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、(本题满分 10 分)设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq x\}$，计算 $\iint_D\sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

五、(**本题满分 12 分**)求 $f(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{2}+1$ 在圆域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

六、(**本题满分 12 分**)设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续倒数，且 $\varphi(0)=0$. 求 $\varphi(x)$ 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

七、(**本题满分 11 分**)设有界区域 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+(2z+x^3)dxdy$

八、(**本题满分 10 分**)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

九、**(本题满分 5 分)** 设正数 u_n 满足方程 $x^n+nx-1=0$，(n 为整数)，证明：当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^a$ 收敛.

补 1.（03-1,12 分） 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

补 2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数

高数 A 2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题(3 分，共 15 分)

1、【正解】0

【学解】函数 $f(u)$ 可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\times\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\times\left(-\frac{1}{y^2}\right)$

故 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)-f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4——复合函数求导法则

2、【正解】$2\pi a\cos a$

【学解】$\cos\sqrt{x^2+y^2}=\cos a$，$\oint_L\cos\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\cos a\oint_L ds=2\pi a\cos a$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分的概念和性质

3、【正解】$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【学解】依题意可知，该空间图形为一等边三角形，$\iint_\Sigma dS$ 为该图形的面积，

而该三角形的边长为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，故 $\iint_\Sigma dS=\frac{\sqrt{3}}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 4.1——曲面的表面积

4、【正解】$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$

【学解】已知直线为两平面相交的线，所求直线平行于已知直线，则所求直线的方向向量与平面的方向向量垂直，即 $\vec{l}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-4\\2&-1&-5\end{vmatrix}=-(4,3,1)$

而所求直线过点(1，1，1)，故直线方程为 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 4.3——两个直线的夹角

5、【正解】$-\frac{1}{4}$

【学解】依题意，$S(x)$ 为函数 $f(x)$ 的奇延拓，则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一易错考点 6-1——将区间上的函数展开为正（余）弦函数

二、选择题(3分，共15分)

1、【正解】A

【学解】曲面在该点处的法向量即为该方程对x，y，z这三个未知数的偏导在点$(0,1,\ -1)$处的数值，计算得，法向量为$(1,\ -1,\ 1)$，故该点的切平面方程为$x-y+z=-2$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 3.2——平面的一般方程

2、【正解】B

【学解】$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x,\ 0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x,\ 0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$，故$f_x'(0,0)$不存在

同理，可求得$f_y'(0,0)$存在，故选B

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的定义及其算法

3、【正解】C

【学解】依题意，积分的图像为在第一象限内的一个$\dfrac{1}{8}$大的单位圆，四个选项中可看出C合题意

【考点延伸】《考试宝典》专题十易错考点 4-1——第一型曲面积分 的计算方法

4、【正解】A

【学解】梯度为$gradf(0,\ 1)=f_x'(0,1)\vec{i}+f_y'(0,1)\vec{j}=\vec{i}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.2——梯度

5、【正解】C

【学解】$n>1,\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{\pi}{2},\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$在$(1,\ +\infty)$上单调递减，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

由莱布尼茨定理可知，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$收敛，

而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

由于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$均为正项级数，故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散

即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u^2(n)$发散

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——正项级数及其审敛法

三、【学解】解一：$\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$，两端同时对$x$求导（注意：$z=z(x,y)$）

$$\frac{1\cdot z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(x+z)-z\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+z)^2}=-\frac{z^2}{(x+z)^3}$$

解二：令$F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y},F_x'=\dfrac{1}{z},F_z'=-\dfrac{x+z}{z^2}$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{z}{x+z},\ldots\ldots$

解三：利用微分形式不变性对$\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=0$两边求导，

$$\frac{zdx-xdz}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{ydz-zdy}{y^2}=0\Rightarrow dz=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\ldots$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的定义及其算法

四、【学解】解一：$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x-x^2}\right\}$

所以$\iint\limits_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$\underline{\underline{\sqrt{1-x}=t}}\ 4\int_0^1 t^2(1-t^2)\mathrm{d}t=4\left(\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\dfrac{8}{15}$

解二：$\iint_D\sqrt{x}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\,rdr=\dfrac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\dfrac{8}{15}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

五、【学解】

由题设知$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-y$，令$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$,得$f(x,y)$在$D$内的驻点$(0,0)$，且$f(0,0)=1$.

再考虑$f(x,y)$在D的边界曲线$x^2+y^2=1$上的情形.

解一：设拉格朗日函数为$F(x,y,\lambda)=x^2-\dfrac{y^2}{2}+1+\lambda(x^2+y^2-1)$

解方程组$\begin{cases}F_x'=2(1+\lambda)x=0,\\F_y'=-y+2\lambda y=0,\\F_\lambda'=x^2+y^2-1=0,\end{cases}$得4个驻点$(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$，并计算其函数值为

$f(0,1)=f(0,-1)=\dfrac{1}{2}$，$f(1,0)=f(-1,0)=2$.

可见$z=f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$内的最大值为2，最小值为$\dfrac{1}{2}$.

解二：$x^2=1-y^2, h(y)=2-\dfrac{3y^2}{2}, -1\leqslant y\leqslant 1, h'(y)=-3y\overset{\triangle}{=}0 \Rightarrow y=0$,

$h(0)=f(\pm 1,0)=2$, $h(\pm 1)=f(0,\pm 1)=\dfrac{1}{2}$，故 $z=f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 内的最

为 2，最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——多元函数的极值及最大值、最小值

六、【学解】

由 $P(x,y)=xy^2$，$Q(x,y)=y\varphi(x)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得 $2xy=y\varphi'(x)$, $\varphi(x)=x^2+C$，再由 $\varphi(0)=0$

得 $C=0$，故 $\varphi(x)=x^2$，所以 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,\mathrm{d}x+yx^2\,\mathrm{d}y=\dfrac{x^2y^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分的概念与性质

七、【学解】$\Sigma: x+y+z=1$，

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(2z+x^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(2x-2+2)\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}2x\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

八、【学解】先求收敛域.由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ 得收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，该级数收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{n}$，该级数发散.故幂级数的收

敛域为 $(-1,1]$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n$，$(-1,1)$. 显然 $s(0)=0$，

对 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n$ 的两边求导,得 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\dfrac{1}{1+x}$.

对上式从 0 到 x 积分，得 $s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)$.

由和函数在收敛域上的连续性，$s(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}s(x)=\ln 2$.

所以 $s(x)=\ln(1+x)$. $(-1,1]$：故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}=s(1)=\ln 2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

九、【学解】

证明 由已知 $u_n=\dfrac{1-u_n^{\ n}}{n}$,因为 u_n 为正数，故有 $u_n<\dfrac{1}{n}\Rightarrow u_n^{\ \alpha}<\dfrac{1}{n^\alpha}$，

当 $\alpha>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{\ \alpha}$ 收敛.

解二：

令 $f(x)=x^n+nx-1$,对任意正整数 n,当 $x\geq 0$ 时, $f(0)=-1<0$, $f'(x)=nx^{n-1}+n>0$,所以方程有

唯一正根 u_n,又因为 $f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{n^n}>0$,所以 $0<u_n<\dfrac{1}{n}\Rightarrow 0<u_n^{\ \alpha}<\dfrac{1}{n^\alpha}$,$\alpha>1$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{\ \alpha}$ 收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——正项级数及其审敛法

补 1、【学解】

【分析】幂级数展开有直接法与间接法，一般考查间接法展开，即通过适当的恒等变形、求导或积分等，

转化为可利用已知幂级数展开的情形.本题可先求导，再利用函数 $\dfrac{1}{1-x}$ 的幂级数展开

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 即可，然后取 x 为某特殊值，得所求级数的和.

因为 $f'(x)=-\dfrac{2}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}, x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

又 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$,所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}-2\int_0^x[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}]\,\mathrm{d}t$

$=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续，所以 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\dfrac{(-1)4^n}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{2^{2n+1}}]=\dfrac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$,

再由 $f(\dfrac{1}{2})=0$，得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}-f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{4}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

补 2、【学解】

解一：易求出级数的收敛域为 $(-\infty,\infty)$

原式 $=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}(x^{2n+2})'=\frac{1}{2}(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1})'$

$=\frac{1}{2}(x\sin x)'=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$

解二： 先求出收敛域区间$(-\infty,\infty)$，设和函数为$S(x)$

则 $\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$

$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sin x$

$\therefore\ S(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

高数A 2016-2017学年第二学期期末考试A卷

一、填空题（每题3分，共15分）

1. 曲线$\begin{cases}y=ax,\\ z=x^2\end{cases}$在点$(1,a,1)$处的切线和直线$x=y=-z$垂直，则$a=$__________.

2. 已知$z=u^2v,u=x^2+y,v=x-y$，且在xOy面上有点$P_0(1,0)$和向量$\vec{l}=\{3,4\}$，则方向导数$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=$__________.

3. 设L为$y=\frac{1}{2}x^2$上介于$(-1,\frac{1}{2})$和$(1,\frac{1}{2})$的一段曲线，则$\int_L(x+3\sqrt{1+2y})ds=$__________.

4. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$，则$\iint\limits_{\Sigma}3x^2dS=$__________.

5. 设$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$为函数$f(x)=|x+1|,x\in(-\pi,\pi)$的傅里叶级数，则$s(-3)=$__________.

二、选择题（每题3分，共15分）

1. 已知$f(0,0)=0$，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处（　　）.

（A）连续，但偏导数不存在　　（B）不连续，但偏导数存在
（C）连续，偏导数存在，但是不可微　　（D）连续、偏导数存在，且可微

2. 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi_y'(x,y)\neq0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，如果$f_y'(x_0,y_0)=0$，则必有（　　）.

（A）$\varphi_x'(x_0,y_0)=0$　（B）$\varphi_x'(x_0,y_0)\neq0$　（C）$f_x'(x_0,y_0)=0$　（D）$f_x'(x_0,y_0)\neq0$

3. 设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$，$I_1=\iint\limits_D x|y|dxdy$，$I_2=\iint\limits_D|xy|dxdy$，$I_3=\iint\limits_D\ln(1-|xy|)dxdy$，则$I_1,I_2$和$I_3$满足（　　）.

（A）$I_2<I_3<I_1$　（B）$I_3<I_1<I_2$　（C）$I_3<I_2<I_1$　（D）$I_3<I_2<I_1$

4. 设$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le1,0\le y\le1,0\le z\le2\}$，则三重积分$\iiint_\Omega xydv=$（　　）.

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{1}{4}$　（D）$\frac{1}{6}$

5.已知$|a_n| \le b_n, n=1,2,\cdots$，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$（　　）.

(A)　绝对收敛　　(B)　条件收敛　　(C)　发散　　(D)　敛散性不定

三、(**本题满分 10 分**) 设$z=z(x,y)$是由方程$x+y-z=e^z$所确定隐函数，求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)}$.

四、(**本题满分 12 分**) 求函数$f(x,y)=y^3-x^2+6x+12y+5$的极值.

五、(**本题满分 12 分**) 设函数$f(x,y)=\begin{cases} x^2 y, & 1 \le x \le 2, 0 \le y \le x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$计算二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2 \ge 2x\}$.

六、(**本题满分 12 分**) 求曲面积分$I=\iint_{\Sigma} 4zxdydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy$，其中$\Sigma$为圆抛物面$z=(x^2+y^2)/2$（$0 \le z \le 2$），取下侧.

七、(**本题满分 12 分**) 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n$的收敛域及和函数$s(x)$.

高数A 2016-2017学年第二学期期末考试A卷参考答案

一、填空题（每题3分，共15分）

1、【正解】1

【学解】曲线在点$(1,\ a,\ 1)$处的切线的方向向量为$(1,\ a,\ 2)$，

依题意$(1,1,\ -1)\cdot(1,\ a,\ 2)=1+a-2=0$，$a=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 1.2——向量的线性运算

2、【正解】$\dfrac{19}{5}$

【学解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2uv\dfrac{\partial u}{\partial x}+u^2\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2uv\dfrac{\partial u}{\partial y}+u^2\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\ 0)}=5$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\ 0)}=1$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,\ 0)}=5\times\frac{3}{5}+1\times\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数

3、【正解】8

【学解】$\displaystyle\int_L\left(x+3\sqrt{1+2y}\right)ds=\int_{-1}^{1}\left(x+3\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+(x)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}3(1+x^2)dx=8$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分的概念与性质

4、【正解】4π

【学解】$\displaystyle\iint_\Sigma 3x^2dS=\iint_\Sigma 3y^2dS=\iint_\Sigma 3z^2dS=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_\Sigma dS=4\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 4.1——第一型曲面积分的计算方法

5、【正解】2

【学解】$s(-3)=f(-3)=|-3+1|=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.2——函数展开成傅里叶级数

二、选择题（每题3分，共15分）

1、【正解】D

【学解】$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x,\ y)-x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x,\ y)-f(0,0)}{x}-1\right)=f'_x(0,0)-1=0$，$f'_x(0,0)=1$

同理可得$f'_y(0,0)=1$，故$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,\ y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,\ y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

所以可得$f(x,\ y)$可微，故$f(x,\ y)$可导且偏导数存在

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.3——可导、可微与连续的关系

2、【正解】C

【学解】构造关于$f(x,\ y)$的拉格朗日函数$L(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\varphi(x,\ y)$

由于$\varphi'_y(x,\ y)\neq0$，而$(x_0,\ y_0)$为函数的一个极值点，故$\lambda=0$

所以有$f'_x(x_0,\ y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0,\ y_0)=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.2——条件极值 拉格朗日乘数法

3、【正解】B

【学解】依题意D的图像关于x、y轴对称，故$I_1=0$，而$\ln(1-|xy|)<0$，$|xy|>0$

故$I_2>0,I_3<0$，$I_3<I_1<I_2$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 1.2——定积分的基础性质

4、【正解】A

【学解】原式$\displaystyle=\int_0^2dz\int_0^1xdx\int_0^1ydy=\frac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 2.3——定积分的积分法则

5、【正解】A

【学解】依题意，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，而$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——正项级数及其审敛法

三、（本题满分10分）

【学解】在方程两边关于x求偏导数得$1-\partial z/\partial x=e^z\partial z/\partial x$，（1）

当$(x,y)=(1,0)$时，$z=0$，代入上式，得$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$. 类似可得$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$

在(1)式两边关于y求偏导数得$-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+e^z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，代入$x=1,y=0,z=0$，

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$及$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$，解得$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{8}$.

或者：计算得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+e^z}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-e^z}{(1+e^z)^3}$，同理可得$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{8}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的定义及其算法

四、（本题满分 12 分）

【学解】令$\begin{cases} f_x'(x,y) = -2x+6=0, \\ f_y'(x,y) = 3y^2-12=0, \end{cases}$得驻点(3,2)，(3,−2)．又

$$f_{xx}''(x,y)=-2,\quad f_{xy}''(x,y)=0,\quad f_{yy}''(x,y)=6y.$$

在驻点(3,2)处，$A=f_{xx}''(3,2)=-2$，$B=f_{xy}''(3,2)=0$，$C=f_{yy}''(3,2)=12$，

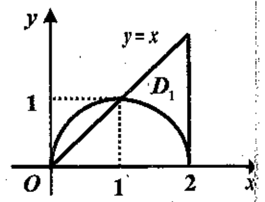
$AC-B^2=-24<0$，故(3,2)不是极值点；

在驻点(3,−2)处，$A=f_{xx}''(3,-2)=-2$，$B=f_{xy}''(3,-2)=0$，$C=f_{yy}''(3,-2)=-12$，

$AC-B^2=24>0$，且$A<0$，故(3,−2)是极大值点，且极大值为$f(3,-2)=-18$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——多元函数的极值及最大值、最小值

五、（本题满分 12 分）



【学解】记$D_1=\{(x,y)|1\le x\le 2,\sqrt{2x-x^2}\le y\le x\}$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1}x^2ydxdy=\int_1^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}x^2ydy=\int_1^2(x^4-x^3)dx=\frac{49}{20}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分的概念和性质

六、（本题满分 12 分）

【学解】补充曲面Σ_1：$z=2\ (x^2+y^2\le 4)$，取上侧.

设Ω为$\Sigma+\Sigma_1$所围成的立体区域，则Ω：$\frac{r^2}{2}\le z\le 2$，$0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$，由 Gauss 公式可得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}4zxdydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy=\iiint_{\Omega}(4z-2z)dv=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}zdz=2\pi\int_0^2r(4-\frac{r^4}{4})dr=\frac{32\pi}{3};$$

$$\iint_{\Sigma_1}4zxdydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 4}(-3)dxdy=-12\pi$$

所以有：$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}4zxdydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy-\iint_{\Sigma_1}4zxdydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy$

$$=\frac{32\pi}{3}-(-12\pi)=\frac{68}{3}\pi.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

七、（本题满分 12 分）

【学解】$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1}=1$，所以收敛半径为$R=1$，收敛区间为(−1,1).

当$x=\pm 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)x^n\ne 0$，所以原级数均发散，故收敛域为(−1,1).

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$3\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n+1)}\right)'-\frac{21}{1-x}=3\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{2}{1-x}=\frac{3}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x}=\frac{1+2x}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1).$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.3——幂级数的运算

高数A 2015-2016学年第二学期期末考试A卷

一、填空题（每小题3分，共15分）

1. 设函数$z=z(x,y)$由方程$x-e^{y}+\ln z=0$确定，则$dz\big|_{(1,0)}=$________.

2. 曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$在$(1,1,1)$处的切线方程为________________.

3.设曲线L为椭圆$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$,则曲线积分$\oint_L(3x^2+4xy+2y^2)ds=$____________.

4. 设Σ为半圆柱面$x^2+y^2=R^2(0\le z\le 1,x\ge 0)$，则曲面积$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}S=$______________.

5. 由曲线$\begin{cases}x^2+2y^2=3\\z=0\end{cases}$，绕$x$轴旋转一周得到的旋转曲面在点$(1,0,-1)$处的指向外侧的单位法向量为________________.

二、选择题（每小题3分，共15分）

1、设$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$则在原点$(0,0)$处$f(x,y)$（　　）.

A、不连续　　B、偏导数不存在

C、偏导数存在且连续　　D、偏导数不连续但可微

2、设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(1)=$（　　）.

A、0　　B、$f(1)$　　C、$-f(1)$　　D、$2f(1)$

3、设曲线L是圆周$(x-1)^2+y^2=R^2$沿逆时针方向一周，则曲线积分$\int_L\dfrac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=$（　　）.

A、0　　B、π　　C、2π　　D、-2π

4、若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数（　　）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛　　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛　　C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛　　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛

5、设周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\le x<0,\\ x-\pi, & 0\le x<\pi.\end{cases}$的傅立叶级数在$x=\pi$和$x=2\pi$处分别收敛于$a$和$b$，则(　　).

A、$a=\dfrac{\pi}{2},b=-\dfrac{\pi}{2}$　　B、$a=\dfrac{\pi^2}{2},b=2\pi^2+\dfrac{\pi}{2}$

C、$a=-\dfrac{\pi}{2},b=\dfrac{\pi}{2}$　　D、$a=\dfrac{\pi^2}{2},b=-\dfrac{\pi}{2}$

三、（10分）设$z=f(x^2-y^2,xy)+g(x+2y)$，其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$g(t)$二阶可导，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（10分）已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线$C:x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数.

五、（10分）计算二重积分$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

六、（11分）试确定可导函数$f(x)$，使在整个平面上，$yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$为某函数$u(x,y)$的全微分,其中$f(0)=0$，并求一个$u(x,y)$.

七、（12分）计算曲面积分$I=\iint\limits_\Sigma (x^3+yz+1)dydz+(y^3+zx+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

八、（12分）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数$s(x)$，并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}$的和.

九、（5分）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\cos(n+k)$（$k$为常数）绝对收敛.

高数 A 2015-2016 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题

1、【正解】$dy-dx$

【学解】由原方程得$z|_{(1,0)}=1$，对x求导得$1+\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}=0\Longrightarrow\frac{dz}{dx}\Big|_{(1,0)}=-1$

对y求导得$-e^y+\frac{1}{z}\frac{dz}{dy}=0\Longrightarrow\frac{dz}{dy}\Big|_{(1,0)}=1$，因此$dz=dy-dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

2、【正解】$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$

【学解】设$\begin{cases}F_1=x^2+y^2+z^2-3x\\F_2=2x-3y+5z-4\end{cases}$，根据隐函数曲面的切向量的方程可得

$$\begin{cases}(2x-3)+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\cdot\frac{dz}{dx}=0\\2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$$，将$x=y=z=1$代入得

$\frac{dy}{dx}=\frac{9}{16},\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{16}$，因此切线方程为$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 4.1——空间直线的一般方程

3、【正解】$6a$

【学解】由$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow 3x^2+2y^2=6$，因此$\oint_L(3x^2+4xy+2y^2)ds=\oint_L 6ds+\oint_L 4xy\,ds$

由椭圆曲线的对称性可知$\oint_L 4xy\,ds=0$，因此原式$=\oint_L 6ds=6a$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分的概念与性质

4、【正解】$2R^2$

【学解】因为$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dS=\iint\limits_{\Sigma}xdS+\iint\limits_{\Sigma}ydS$，由对称性知$\iint\limits_{\Sigma}ydS=0$，

$\Sigma:x=\sqrt{R^2-y^2},(y,z)\in D_{yz}:-R\le y\le R,0\le z\le 1$，

并有$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}},\frac{\partial x}{\partial z}=0$，所以$dS=\sqrt{1+(\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}})^2+0^2}dydz=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$

$\iint\limits_{\Sigma}xdS=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=R\iint\limits_{D_{yz}}dydz=2R^2$，所以$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dS=2R^2$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

5、【正解】$\left\{\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right\}$

【学解】设曲面上的任意一点$M(x,y,z)$，易知是由曲线上的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$绕x轴旋转得的，

因此有$y^2+z^2=y_0^2+z_0^2$，因为有$\begin{cases}x^2+2y_0^2=3\\z_0=0\end{cases}$，因此有$2(y^2+z^2)=3-x^2$

即$x^2+2y^2+2z^2=3$，令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2-3$

有$\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{(1,0,-1)}=(2x,4y,4z)|_{(1,0,-1)}=(2,0,-4)$

因此单位法向量为$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left\{\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right\}$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 5.2——旋转曲面

二、选择题

1、【正解】D

【学解】$f_x(0,0)=\lim\limits_{\triangle x\to0}\frac{(0+\triangle x)\cdot 0\cdot\sin\frac{1}{\triangle x^2+0}-0}{\triangle x}=0$，同理$f_y(0,0)=0$

当$(x,y)\ne(0,0)$时，$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{x^2+y^2}+xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$

$f_y(x,y)=x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$

当(x,y)沿着直线$y=0$趋向$(0,0)$时

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}f_x(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}y\sin\frac{1}{x^2+y^2}+xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$不存在

同理$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}} f_y(x,y)$不存在，因此偏导数不连续

而因$\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=0$，故$f(x,y)$在原点处可微

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.2——在一点连续，偏导数存在以及可微的相互关系

2、【正解】A

【学解】$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t (x-1)f(x)dx$

因此$F'(1)=F'(t)\big|_{t=1}=(t-1)f(t)\big|_{t=1}=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——利用直角坐标系计算二重积分

3、【正解】C

【学解】记$P=\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2},Q=\dfrac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-((x-1)^2+y^2)+2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{((x-1)^2+y^2)-2(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，在点$(1,0)$处$P,Q$不连续，因此选适当小的$r>0$作为积分区域内的圆周

得$\oint_L\dfrac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\oint_l\dfrac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\dfrac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 3.1——格林公式

4、【正解】D

【学解】由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$收敛，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.1——收敛级数的基本性质

5、【正解】D

【学解】因为$f(\pi)=f(-\pi)=\pi^2,\lim\limits_{x\to\pi^-}=0$，因此$f(x)$在$x=\pi$处不连续

因此傅里叶级数

$$s(\pi)=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi^2+0}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$f(2\pi)=f(0),f(0^+)=-\pi,f(0^-)=0$

$s(2\pi)=\dfrac{f(2\pi+0)+f(2\pi-0)}{2}=\dfrac{-\pi}{2}$，因此选项$D$正确

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 6.1——周期为$2l$的傅里叶级数

三、【学解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'+g'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(-2yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+y(-2yf_{21}''+xf_{22}'')+2g''$

$=f_2'-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+2g''$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

四、【学解】$f(x,y)$在任意一点处的最大方向导数为

$|gradf|=\sqrt{(\dfrac{\partial f}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial f}{\partial y})^2}=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}=\sqrt{2+2x+2y+x^2+y^2}$.

下求$|gradf|^2=2+2x+2y+x^2+y^2$在曲线$C$上的条件最大值．构造拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=2+2x+2y+x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$.

令$\begin{cases}L_x'(x,y,\lambda)=2+2x+2\lambda x+\lambda y=0,\\L_y'(x,y,\lambda)=2+2y+2\lambda y+\lambda x=0,\\L_\lambda'(x,y,\lambda)=x^2+y^2+xy-3=0,\end{cases}$，解得驻点为$(1,1),(-1,-1),(-1,2),(2,-1)$.

计算得$|gradf|\big|_{(1,1)}=2\sqrt{2}$，$|gradf|\big|_{(-1,-1)}=0$，$|gradf|\big|_{(-1,2)}=|gradf|\big|_{(2,-1)}=3$，

故$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数为3.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数

五、【学解】将D分成D_1,D_2两部分，其中

$D_1:0\le y\le x,0\le x\le1$； $D_2:0\le x\le y,0\le y\le1$，

且D_1与D_2关于直线$y=x$对称.

在D_1上，$e^{\max\{x^2,y^2\}}=e^{x^2}$；在$D_2$上，$e^{\max\{x^2,y^2\}}=e^{y^2}$，因此，

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

又由轮换对称性可知 $\iint_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x=e-1.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 1.2——二重积分的性质

六、【学解】（Ⅰ）$P(x,y)=yf(x)$，$Q(x,y)=f(x)-x^2$，

因为 $yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，所以有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

即 $f'(x)-f(x)=2x$，

解得 $f(x)=e^{\int dx}[\int 2xe^{-\int dx}dx+C]=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)=Ce^x-2x-2$，

又 $f(0)=0$，得 $C=2$，所以 $f(x)=2(e^x-x-1)$，

（Ⅱ）在平面上取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y)\,dy=\int_0^y(2e^x-2x-2-x^2)\,dy=(2e^x-x^2-2x-2)y.$$

或用凑微分法求 $u(x,y)$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

七、【学解】添加平面：$\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，则 Σ_1 与 Σ 构成封闭曲面，

设其所围成的区域为 Ω，　$\Omega=\{(\rho,\varphi,\theta)\,|\,0\le\rho\le 1, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\}$.

且 $\Sigma+\Sigma_1$ 取外侧，故由 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3+yz+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+zx+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{6}{5}\pi,$$

又 $\iint_{\Sigma_1}(x^3+yz+1)dydz+(y^3+zx+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\iint_{x^2+y^2\le 1}(xy+1)dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi$$

所以 $I=(\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})(x^3+yz+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+zx+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{6}{5}\pi+\pi=\frac{11}{5}\pi$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

八、【学解】此级数为缺项幂级数，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)x^{2(n+1)}}{(2n+3)x^{2n}}\right|=x^2$，

由正项级数的比值审敛法知，当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时，该幂级数绝对收敛；

当 $x^2>1$，即 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}\neq 0$，该幂级数发散.所以该幂级数的收敛半径 $R=1$.

又 $x=\pm1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，发散，所以原幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$，$x\in(-1,1)$，则 $x\neq0$ 时，$(xs(x))'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$，

因此 $xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，

又 $x=0$ 时，$s(0)=1$，故 $s(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & |x|<1, x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$

令 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)$，此时级数即为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}$，

而 $s(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3})$，

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 3.2——幂级数及其收敛性

九、【学解】考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$，$\because S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ 收敛，

又 $\left|(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\cos(n+k)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，故原级数绝对收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——正项级数及其审敛法

高数 A 2015-2016 学年第二学期期末考试 B 卷

1. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xy-z=2$ 确定，则 $dz=$ ________.

2. 曲面 $z=x^2+y^2$ 上平行于平面 $2x+4y-z=10$ 的切平面方程为________.

3. 设 L 是上半圆周 $x^2+y^2=a^2\ (y\ge 0)$，则曲线积分 $\int_L \dfrac{x^3y^2+y}{x^2+y^2}ds=$________.

4. 函数 $u=xy+yz+zx$ 在 $M(1,2,3)$ 点沿该点向径 $(\overrightarrow{OM})$ 方向的方向导数为________.

5. 若 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 为 $f(x)=x\ (x\in[0,\pi])$ 展开的余弦级数,则 $a_3=$________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $z=f(x,y)$ 为二元函数，则下列结论正确的是（　　）.

A、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

B、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，且偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

C、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数都连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

D、若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数连续

2、设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy=$（　　）.

A、$\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$　　B、$\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$

C、$\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx$　　D、$\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx$

3、设 Ω 为上半球 $x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}zdV=$（　　）.

A、0　　B、$\dfrac{1}{2}\pi a^4$　　C、πa^4　　D、$\dfrac{1}{4}\pi a^4$

4、设 Σ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$ 的外侧，D_{xy} 是 xoy 平面上圆域 $x^2+y^2\le 1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}zdydz$

可化为二重积分（　　）

A、$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)2xdxdy$　　B、$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)(-2x)dxdy$

C、$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)2ydxdy$　　D、$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

5、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos n}{n^2}+(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]$（　　）.

A、绝对收敛　　B、条件收敛　　C、发散　　D、无法确定

三、（10 分）设 $z=f((x-y)^2,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（10 分）求 $z=f(x,y)=x^2-y^2$ 在闭区域 D：$\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1$ 上的最大值和最小值

五、（10分）计算二重积分$\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$，其中$D$是由两个圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域.

六、（10分）计算曲线积分$\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中$L$为$y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$上从$A(2,0)$到点$B(-2,0)$的一段曲线.

七、（12分）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx-dxdy$，其中$\Sigma$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧.

八、（12分）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域及和函数，并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$的和.

九、（6分）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}+1)$发散.

高数A 2015-2016学年第二学期期末考试B卷参考答案

一、填空题

1、【正解】$\frac{y}{1-e^z}dx+\frac{x}{1-e^z}dy$

【学解】$e^z\frac{dz}{dx}+y-\frac{dz}{dx}=0\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{y}{1-e^z}$，$e^z\frac{dz}{dy}+x-\frac{dz}{dy}=0\Rightarrow\frac{dz}{dy}=\frac{x}{1-e^z}$

因此$dz=\frac{y}{1-e^z}dx+\frac{x}{1-e^z}dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

2、【正解】$2x+4y-z=5$

【学解】$z=x^2+y^2$的法向量为$(2x,2y,-1)$，$2x+4y-z=10$的法向量为$(2,4,-1)$

故只需要$2x=2,2y=4$，即此时$x=1,y=2,z=5$，故所求平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即：$2x+4y-z=5$

【考点延伸】《考试宝典》专题七 3.2——平面的一般方程

3、【正解】 2

【学解】L为上半圆，故$y=\sqrt{a^2-x^2},ds=\sqrt{1+(y')^2}dx$，因此有

$$\text{原式}=\oint_L\frac{x^3(a^2-x^2)+\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}ds=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(x^3(a^2-x^2)+\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(x^3\sqrt{a^2-x^2}+1\right)dx=2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分

4、【正解】$\frac{22}{\sqrt{14}}$

【学解】

$u_x(1,2,3)=y+z|_{(1,2,3)}=5$

$u_y(1,2,3)=x+z|_{(1,2,3)}=4$，$\overrightarrow{OM}=(1,2,3)$，单位化得

$u_z(1,2,3)=y+x|_{(1,2,3)}=3$

$\vec{l}=\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$，故方向导数为$\frac{1}{\sqrt{14}}(1\cdot5+4\cdot2+3\cdot3)=\frac{22}{\sqrt{14}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数

5、【正解】$-\frac{4}{9\pi}$

【学解】作偶延拓，则 $b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$

$$a_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos3x\mathrm{d}x=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\sin3x=\frac{2}{3\pi}[(x\sin3x)|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin3x\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{2}{3\pi}[\frac{1}{3}\cos3x|_0^{\pi}]=-\frac{4}{9\pi}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.1——三角级数

二、选择题

1、【正解】C

【学解】二元函数的有关概念推导如图

沿任意方向导数均存在

$\Uparrow$

有极限$\Leftarrow$连续$\Leftarrow$可微$\Leftarrow$偏导数连续，因此C选项正确

$\Downarrow$

偏导数存在

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.2——在一点连续，偏导数存在，以及可微的相互关系

2、【正解】C

【学解】根据原函数的积分区域进行画图，可以得出积分区域是$0<y<1,\sqrt{y}<x<\sqrt{2-y^2}$

因此C选项正确

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——利用直角坐标系计算二重积分

3、【正解】D

【学解】

$$\iiint\limits_{\Omega} z dv=\iiint\limits_{\Omega} \rho\cos\varphi\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3\sin\varphi\cos\varphi d\rho=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\pi a$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分的计算方法

4、【正解】A

【学解】$z=x^2+y^2\quad 0\le z\le 1$，则$\Sigma$在$xoy$面上的投影为$x^2+y^2=1$，正好是$D_{xy}$

而$dz=2xdx$，因此$\iint\limits_{\Sigma} zdydz=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)2xdxdy$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对坐标的曲面积分

5、【正解】B

【学解】由于$\frac{\cos n}{n^2}<\frac{1}{n^2}$，$\because\frac{1}{n^2}$收敛，$\therefore\frac{\cos n}{n^2}$收敛

当$n\to\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\to 0$，且$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$单调递减，所以$(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$收敛

对于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]$

当n为偶数时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos}{n^2}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，

$\because\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$收敛

因此当n为偶数时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right|$发散

又因为子数列发散数列必发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right|$发散

综上$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]$条件收敛

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 2.2——绝对收敛与条件收敛

三、【学解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-y)f_1'+yf_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2(x-y)f_1'+yf_2')=-2f_1'+2(x-y)[-2(x-y)f_{11}''+xf_{12}'']+f_2'+y[2(y-x)f_{21}''+xf_{22}'']$$

$$=-2f_1'-4(x-y)^2f_{11}''+2(x-y)^2f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——全微分的定义

四、【学解】在D的内部，

$\begin{cases}f_x'=2x=0\\ f_y'=-2y=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)$为驻点，且$f(0,0)=0$

在D的边界上， 由

$\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y^2=1-\frac{x^2}{4}\Rightarrow z=x^2-y^2=\frac{5x^2}{4}-1\quad(-2\le x\le 2)$

$\frac{dz}{dx}=\frac{5x}{2}=0\Rightarrow x=0$，此时，$y=\pm1$，，则有$f(0,\pm1)=-1$，$f(\pm2,0)=4$

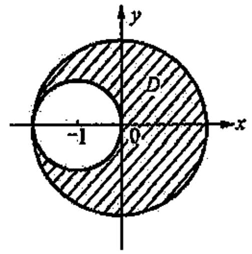
比较上述函数值知，函数$z=f(x,y)=x^2-y^2$在D上的最大值为4,最小值为-1.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——多元函数的极值及其最大值，最小值

五、【学解】区域D关于x轴对称，如图$D_{大}:x^2+y^2\le 4$，$D_{小}:(x+1)^2+y^2\le 1$

$$\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint\limits_D yd\sigma=\iint\limits_{D_{大}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma-\iint\limits_{D_{小}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\cdot rdr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r\cdot rdr=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}$$



或$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint\limits_{D_2+D_3}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$

其中D_1为D在x轴上方部分，D_2，D_3分别为D_1在第一和第二象限部分

所以$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint\limits_{D_2+D_3}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2(\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint\limits_{D_3}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma)$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r\cdot rdr+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r\cdot rdr=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——利用极坐标计算二重积分

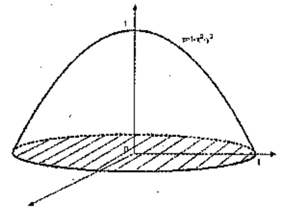
六、【学解】$P=\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q=-\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad(x,y)\neq(0,0)$，

曲线积分与路径无关，取路径 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$ 的上半圆周 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$，$t$ 从 0 到 π，

$$\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\int_0^\pi \frac{-4\sin^2 t-4\cos^2 t}{4}dt=-\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 3.1——格林公式

七、【学解】用 Gauss 公式. 补平面 $\sum_1$: $z=0$ $(x^2+y^2\le 1)$，取下侧



记 $V=\left\{(r,\theta,z)\middle|0\le\theta\le2\pi,0\le r\le1,0\le z\le 1-r^2\right\}$，

$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le1\right\}$.

$$\text{则 } I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)x^3dydz+y^3dzdx-dxdy=\iiint_V(3x^2+3y^2)dV-\iint_D dxdy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{1-r^2}r^2\cdot rdz-\pi \quad =6\pi\int_0^1(r^3-r^5)dr-\pi=-\frac{\pi}{2}$$.或用“合一投影法”计算.

【考点延伸】《考试宝典》专题十 6.1——斯托克斯公式

八、【学解】级数的收敛域为 $(-1,1)$，设它的和函数为 $s(x)=2\sum_{n=0}^\infty(n+1)x^n-\sum_{n=0}^\infty x^n$

设 $s_1(x)=\sum_{n=0}^\infty(n+1)x^n, x\in(-1,1)$，则有

$$\int_0^x s_1(t)\,dt=\sum_{n=0}^\infty\int_0^x(n+1)t^n\,dt=\sum_{n=1}^\infty x^n=\frac{x}{1-x},s_1(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

又 $\sum_{n=0}^\infty x^n=\frac{1}{1-x}$， $x\in(-1,1)$,所以 $s(x)=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$， $x\in(-1,1)$；

令 $x=\frac12\in(-1,1)$ 则 $\sum_{n=0}^\infty\frac{2n+1}{2^n}=s(\frac12)=\frac{1+\frac12}{(1-\frac12)^2}=6$.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 1.2——收敛级数的基本性质

九、【学解】因为 $\sin\frac1n-\cos\frac1n+1=\sin\frac1n+2\sin^2\frac{1}{2n}$，

当 n 充分大时，有 $\sin\frac1n>0$，$\sin^2\frac{1}{2n}>0$，因此 $\sum_{n=1}^\infty\sin\frac1n$，$\sum_{n=1}^\infty\sin^2\frac{1}{2n}$ 为正项级数.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac1n}{\frac1n}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{(\frac{1}{2n})^2}=1$，而 $\sum_{n=1}^\infty\frac1n$ 发散，$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^\infty\sin\frac1n$ 发散，$\sum_{n=1}^\infty\sin^2\frac{1}{2n}$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^\infty(\sin\frac1n+2\sin^2\frac{1}{2n})$ 发散.从而级数 $\sum_{n=1}^\infty(\sin\frac1n-\cos\frac1n+1)$ 发散.

【考点延伸】《考试宝典》专题十一 5.1——三角级数

合肥工业大学试卷（A）

2012-2013 学年第 二 学期 课程代码 1400021B 学分 6 课程名称 高等数学 A(2) 命题教师 何先枝 教研室主任审批 李华冰

学号________ 学生姓名________ 教学班号______ 考试班级 全校 2012 级 考试日期 2013-6-19 14:00-16:00 成 绩________

一、选择题（每小题 4 分，满分共 20 分）

（1）设 $z = xe^{-y}$，则 $dz|_{x=1,y=0}=$（ ）.

（A）$dx+dy$ （B）dx （C）$-dy$ （D）$dx-dy$

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\pi}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n}}$ 的敛散性分别为（ ）.

（A）收敛，发散 （B）收敛，收敛 （C）发散，收敛 （D）发散，发散

（3）平面 π_1：$x+y+z=1$ 与 π_2：$x-y+z=1$ 的夹角余弦为（ ）.

（A）$\frac{1}{5}$ （B）$\frac{1}{4}$ （C）$\frac{1}{3}$ （D）$\frac{1}{2}$

（4）设 $L: x^2+y^2=1$，则曲线积分 $\oint_L(\sqrt{x^2+y^2}+x)ds=$（ ）.

（A）2π （B）3π （C）4π （D）5π

（5）函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在点 $M(1,1)$ 处沿任意方向的方向导数中的最大值是（ ）.

（A）$\sqrt{3}$ （B）$\sqrt{2}$ （C）$2\sqrt{5}$ （D）3

二、填空题（每小题 4 分，满分共 20 分）

（6）设 $f(x,y)=(y-1)\arctan\sqrt{x}-e^{xy}\cos(\pi y)$，则偏导数 $f_x'(0,1)=$________.

（7）交换二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$________.

（8）曲面 $\Sigma: 2z=x^2+y^2$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面方程为________.

（9）微分方程 $y''+y'-2y=10$ 的通解为 $y=$________.

（10）若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛、在 $x=3$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为________.

三、解答题（每小题 10 分，共 6 题，满分 60 分）

（11）设 $z=f(x+y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$..

（12）求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值.

（13）计算二重积分 $I=\iint_D|1-x^2-y^2|dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

（14）计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x-2)dydz-ydzdx+(y+z)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=4$ 之间部分曲面的下侧.

（15）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域与和函数.

（16）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，且 $f(0)=-1,g(0)=0$.

（Ⅰ）当 $f(x),g(x)$ 满足什么条件时，曲线积分

$$I=\int_L\{[xf(x)+g(x)]y^2+3x^2y\}dx+[yf(x)+g(x)]dy$$

在全平面内与积分路径无关；

（Ⅱ）求 $f(x),g(x)$.

命题教师注意事项:1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷. 2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中.

2012－2013 学年第二学期《高等数学 A(2)》试卷 A

参考解答及评分标准

一、选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
答案	D	B	C	A	C

二、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

题号	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	1	$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$	$x+y-z=1$	$C_1e^x+C_2e^{-2x}-5$	$[-2,2)$

三、解答题（每小题 10 分，满分 60 分）

（11）设 $z=f(x+y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

〖解〗因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'+xf_2'\ ,\qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'+yf_2')=f_{11}''+xf_{12}''+f_2'+y(f_{21}''+xf_{22}'')$$

$$=f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'.\qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

（12）求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值.

〖解〗显然， $f(x,y)$ 在全平面上是任意阶可微的函数，故其极值点必为其驻点.

因为 $f_x'=3x^2-8x+2y$， $f_y'=2x-2y$，所以，由 $\begin{cases} f_x'=0,\\ f_y'=0\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}3x^2-8x+2y=0,\\ x-y=0\end{cases}$$

可解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $M_1(0,0),M_2(2,2)$.　　　　　　　　……4 分

因为

$A=f''_{xx}=6x-8, B=f''_{xy}=2, C=f''_{yy}=-2$， ……6 分

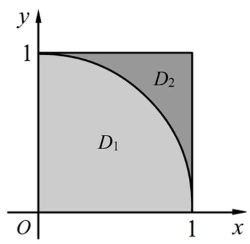
$\Delta=AC-B^2=-2(6x-8)-4=12(1-x)$，

所以，

在 $M_1(0,0): A=-8<0, \Delta=12>0$，故 $f(0,0)=0$ 是极大值； ……8 分

在 $M_2(2,2): \Delta=-12<0$，故 $f(2,2)$ 不是极值. ……10 分

（13）计算二重积分 $I=\iint\limits_D |1-x^2-y^2|\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.



(13)-1

〖解〗方法 1　如图(13)-1，用圆周 $x^2+y^2=1$ 将 D 分割为 D_1 和 D_2.

$$I=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)dxdy \quad ……4 分$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr+\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy \quad ……8 分$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\int_0^1(x^2-1+\frac{1}{3})dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}. \quad ……10 分$$

方法 2

由极坐标计算可得

$$I_1=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{2}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\pi}{8}. \quad ……3 分$$

由直坐标计算可得

$$I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)dy=\int_0^1\{(x^2-1)(1-\sqrt{1-x^2})+\frac{1}{3}[1-(\sqrt{1-x^2})^3]\}dx$$

$$=\int_0^1[x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(\sqrt{1-x^2})^3]dx=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\int_0^1(\sqrt{1-x^2})^3dx$$

$$\overset{x=\sin t}{=}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}. \quad ……8 分$$

由二重积分可加性可得：$I=I_1+I_2=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$. ……10 分

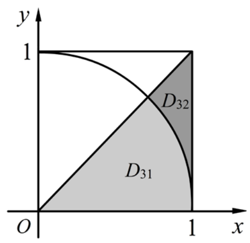
方法 3 如图(13)-2，记 $D_3=\{(x,y)\,|\,0\le y\le x\le 1\}$，由轮换对称性可得

$$I=2\iint\limits_{D_3}|1-x^2-y^2|\,dxdy \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$=2[\iint\limits_{D_{31}}(1-x^2-y^2)dxdy+\iint\limits_{D_{32}}(x^2+y^2-1)dxdy]$$

$$=2[\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^{\sec\theta}(r^2-1)rdr] \qquad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

$$=\frac{\pi}{8}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{4}\sec^4\theta-\frac{1}{2}\sec^2\theta+\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}. \qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$



(13)-2

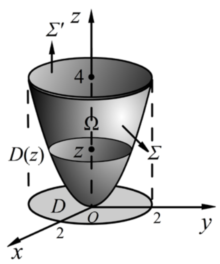
（14）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-2)dydz-ydzdx+(y+z)dxdy$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=4$ 之间部分的下侧.

〖解〗添加平面片 $\Sigma':z=4$（$(x,y)\in D:x^2+y^2\le 4$）上侧与 Σ 围成空间区域 Ω.

由高斯公式可得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(x-2)+\frac{\partial}{\partial y}(-y)+\frac{\partial}{\partial z}(y+z)]dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^4 dz\iint\limits_{D(z)}dxdy=\pi\int_0^4 zdz=\pi\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_0^4=8\pi. \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$



(14)

而

$$\iint\limits_{\Sigma'}=\iint\limits_{\Sigma'}(y+z)dxdy$$

$$=+\iint\limits_{D}(y+4)dxdy=\iint\limits_{D}ydxdy+4\iint\limits_{D}dxdy=0+4\cdot\pi\cdot 2^2=16\pi,$$

故

$$I=8\pi-16\pi=-8\pi. \qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

（15）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域与和函数.

〖解〗收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$. ……2 分

当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(\pm1)^n$ 均发散，故幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. ……4 分

设和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，则逐项积分可得

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} \quad (-1 < x < 1), \qquad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

再求导可得

$$S(x) = (\frac{x^2}{1-x})' = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1). \qquad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

（16）设函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上均有连续导数，且 $f(0) = -1, g(0) = 0$.

（Ⅰ）当 $f(x), g(x)$ 满足什么条件时，曲线积分

$$I = \int_L \{[xf(x) + g(x)]y^2 + 3x^2 y\}dx + [yf(x) + g(x)]dy$$

在全平面内与路径无关；

（Ⅱ）求 $f(x), g(x)$.

〖解〗（Ⅰ）记 $P = [xf(x) + g(x)]y^2 + 3x^2 y, Q = yf(x) + g(x)$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = yf'(x) + g'(x), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y[xf(x) + g(x)] + 3x^2,$$

故当

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (-\infty < x, y < +\infty)$$

时，所给曲线积分与路径无关，即 $f(x), g(x)$ 满足

$$yf'(x) + g'(x) = 2y[xf(x) + g(x)] + 3x^2 \quad (-\infty < x, y < +\infty),$$

或

$$[f'(x) - 2f(x) - 2g(x)]y + g'(x) - 3x^2 = 0 \quad (-\infty < x, y < +\infty). \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

（Ⅱ）视上式为关于 y 的多项式，比较系数可得：

$$\begin{cases} f'(x) - 2xf(x) - 2g(x) = 0, \\ g'(x) - 3x^2 = 0. \end{cases}$$

由 $g'(x) = 3x^2$ 和 $g(0) = 0$ 可得：$g(x) = x^3$. ……6 分

由 $f'(x) - 2xf(x) - 2x^3 = 0$ 和 $f(0) = -1$ 可得：$f(x) = -x^2 - 1$. ……10 分

附录：客观题参考解答

（1）〖解〗因为$dz = e^{-y}dx - xe^{-y}dy$，所以$dz|_{x=1,y=0} = dx - dy$.

（2）〖解〗$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\pi}}$：$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$，$p=\pi>1$，收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n}}$：几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}$，$|q|=\frac{1}{\pi}<1$，收敛.

（3）〖解〗两平面法向量分别为$\vec{n}_1=\{1,1,1\},\vec{n}_2=\{1,-1,1\}$，其夹角$\theta$的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{1}{3}.$$

（4）〖解〗由对弧长曲线积分性质可得

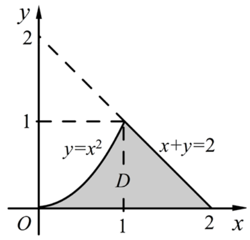
$$\oint_L(\sqrt{x^2+y^2}+x)ds=\oint_L ds+\oint_L xds=2\pi.$$

（5）〖解〗因为$gradf(1,1)=\{f_x,f_y\}|_{(1,1)}=\{2x,4y\}|_{(1,1)}=\{2,4\}$，所以由方向导数与梯度关系可得最大方向导数为$|gradf(1,1)|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

（6）〖解〗因为$f(x,1)=e^{x}$，所以$f_x'(x,1)=e^{x}$，$f_x'(0,1)=1$.

（7）〖解〗积分区域如图，交换积分顺序可得：

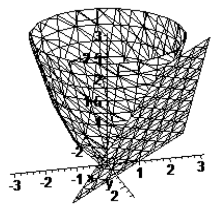
$$I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx.$$



（8）〖解〗曲面Σ在点$M(1,1,1)$处的法向量为

$$\vec{n}=\{z_x',z_y',-1\}|_{(1,1,1)}=\{x,y,-1\}|_{(1,1,1)}=\{1,1,-1\},$$

故所求切平面方程为$(x-1)+(y-1)-(z-1)=0$，即$x+y-z=1$.



（9）〖解〗特征方程为$r^2+r-2=0$，特征根为$r_1=1,r_2=-2$，对应齐次微分方程的通解为$Y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$.观察可知：$y^*=-5$为原方程特解.

于是，原方程通解为$y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}-5$.

（10）〖解〗因为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，在$x=3$处发散，所以由阿贝尔定理可知：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$收敛域为$[-1,3)$，从而，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域为$[-2,2)$.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ）

2013～2014 学年第 二 学期　课程代码 1400021B　课程名称 高等数学 A(2)　学分 6　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________　考试日期 2014-06-20 08:00-10:00　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、椭球面Σ：$2x^2+y^2+z^2=16$在点$P_0(2,2,2)$处的切平面方程是__________.

2、设曲线L的方程为$x^2+y^2=1$，则$\int_L[(x+y)^2-y]ds=$______________.

3、设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ 则其以2π为周期的傅里叶级数在点$x=\pi$处收敛于______________.

4、微分方程$y''+2y'+2y=0$的通解为________________________.

5、设$f(x,y,z)=x^2+2y+z^3$，则$\mathbf{grad}\,f(1,1,1)=$_____________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设$x^2+y^2+ze^z=2$，则$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$（　　）

(A) $-2(\mathrm{dx}+\mathrm{dy})$　(B) $\dfrac{-2}{(\mathrm{z}+1)\mathrm{e}^z}dx+\dfrac{-2}{(\mathrm{z}+1)\mathrm{e}^z}dy$

(C) $2dx+2dy$　(D) $-2dx+2dy$

2、二次积分$\int_0^2dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$ 化为极坐标下累次积分为（　　）

$(A)\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$　$(B)\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$

$(C)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$　$(D)2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$

3、微分方程$y''+y'=x+\sin x$的特解形式可设为（　　）.

（A）$y^*=x(ax+b)+A\sin x+B\cos x$　（B）$y^*=ax+b+x(A\sin x+B\cos x)$

（C）$y^*=x(ax+b+A\sin x+B\cos x)$　（D）$y^*=ax+b+A\sin x+B\cos x$

4、直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{2z-1}{4}$与平面$2x-y+4z+1=0$的位置关系是（　　）

(A) $l\parallel\pi$但l不在π上　(B) l在平面π上　(C) $l\perp\pi$　(D) l与π斜交

5、设曲面$\sum$的方程为$x^2+y^2+z^2=z$,，$\sum_1$为$\sum$在第一卦限的部分，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）$\iint\limits_{\Sigma}xdS=0$　（B）$\iint\limits_{\Sigma}zdS=0$

（C）$\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=4\iint\limits_{\Sigma_1}z^2dS$　（D）$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS$

三、（本题满分 10 分）设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 12 分）求$f(x,y)=x^2-y^2+2$在椭圆域**D**：$x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1$上的最大值和最小值.

五、（本题满分 10 分）计算二重积分：$I=\iint\limits_D\left|y-x^2\right|d\sigma$，其中$D:-1\le x\le 1,0\le y\le 2$.

六、（本题满分 12 分）已知积分$\int_L(y-5ye^{-2x}f(x))dx+e^{-2x}f(x)dy$与路径无关，且$f(0)=\dfrac{6}{5}$．求$f(x)$，并计算$I=\int_{(1,0)}^{(2,3)}(y-5ye^{-2x}f(x))dx+e^{-2x}f(x)dy$.

七、（本题满分 12 分）计算积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧.

八、（本题满分 10 分）.求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数，并求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$的和.

九、（本题满分 4 分）设$u_n\ne 0(n=1,2,3,\ldots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

2013-2014 第二学期《高等数学》（合肥校区）试卷 A（2）评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1． $2x+y+z=8$；2． 2π ；3． $\dfrac{\pi^2}{2}$；4． $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$；5．（2，2，3）.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．A； 2．C； 3．A； 4．D； 5．B.

三、（本题共 10 分）解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$，…………2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

……………….6 分

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ……………….10 分

四、（本题共 12 分）**【解】**（1）区域 D 内部：$\begin{cases} f_x'=2x=0 \\ f_y'=-2y=0 \end{cases}$ 得点（0,0） $f(0,0)=2$

……………….6 分

（2）区域 D 边界：$f(x,y)=x^2-(4-4x^2)+2=5x^2-2 \quad (-1\le x\le 1)$

得点$(\pm 1,0)$ 及（$0,\pm 2$） $f(\pm1,0)=3$，$f(0,\pm2)=-2$

…………….10 分

所以最大值是 3，最小值是-2. …………….12 分

五、（本题共 10 分）解：设 $\boldsymbol{D_1:-1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 2\,;D_2:-1\le x\le 1,0\le y\le x^2}$，

……………….2 分

则 $\displaystyle \boldsymbol{I=\iint_D\left|y-x^2\right|d\sigma=\iint_{D_1}\left|y-x^2\right|d\sigma+\iint_{D_2}\left|y-x^2\right|d\sigma}$ ……………….5 分

$\displaystyle \boldsymbol{=\iint_{D_1}(y-x^2)d\sigma+\iint_{D_2}(x^2-y)d\sigma}$

$\displaystyle \boldsymbol{=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}(y-x^2)dy-\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(y-x^2)dy}$ ……………….10 分

$\boldsymbol{=\dfrac{22}{5}}$

六、（本题共 12 分）由已知得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 即 $-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=1-5e^{-2x}f(x)$，

$f'(x)+3f(x)=\mathrm{e}^{2x}$. ……………….4 分

$f(x)=e^{-\int 3dx}[\int e^{2x}e^{\int 3dx}\,\mathrm{dx}+\mathrm{c}]=\mathrm{e}^{-3x}(\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{c})$. 将 $f(0)=\dfrac{6}{5}$ 代入得 $c=1$.

……………….8 分

故 $f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}+e^{-3x}$，$I=\int_1^2 0dx+\int_0^3 e^{-4}(\frac{1}{5}\mathrm{e}^4+\mathrm{e}^{-6})\,\mathrm{dy}=3(\frac{1}{5}+\mathrm{e}^{-10})$．……………….12 分

七、（本题共 12 分）【解】$I=\frac{1}{a^2}\iint_\Sigma xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$

记 $I_1=\iint_\Sigma xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$

添加 $\Sigma_1:z=0\quad\left(x^2+y^2\le a^2\right)$，取下侧

则：$I_1=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$ ……………….4 分

又：$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\rho^4\sin\varphi d\rho\;=\frac{2}{5}\pi a^5$

……………….8 分

又：$\iint_{\Sigma_1}\;=\iint_{\Sigma_1}\left(2xy+y^2z\right)dxdy=\iint_{\Sigma_1}2xydxdy\;=-\iint_{D_{xy}}2xydxdy=0$

$\therefore I=\frac{1}{a^2}I_1=\frac{2}{5}\pi a^3$ ……………….12 分

八、（本题共 10 分）$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,x=\pm1$ 时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛，故此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$。 ……………….4 分

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，$(-1\le x\le1)$，则

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\int_0^x(-x^2)^{n-1}dx)$

$=x\cdot\int_0^x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1})dx)=x\cdot\arctan x,(-1\le x\le1)$

……………….8 分

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=s(1)=\frac{\pi}{4}$. ……………….10 分

九、（本题共 4 分）已知前 n 项部分和为

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}})$

$=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}-...+(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ ……………….1 分

$=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$，于是 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$，因而原级数收敛. ……………….3 分

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|}{1/n}=2$,知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|$ 发散,故原级数条件收敛. ……………….4 分

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ）

2014～2015 学年第 二 学期 课程代码 1400021B 课程名称 高等数学 A(2) 学分 6 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式：开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2015.7.3. 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解为__________.

2、过点 $(1,2,3)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x-4z-3=0 \\ 2x-y-5z=0 \end{cases}$ 的直线方程为__________.

3、设 $x^2z+y\ln z=1$，则 $dz=$__________.

4、曲线 L：$x^2+y^2=ax(a>0)$，曲线积分 $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=$__________ .

5、$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ x & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}$，$f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶正弦级数展开式和函数为 $s(x)$，则 $s\left(-\frac{5}{2}\pi\right)=$__________ .

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0\ , & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则在 $(0,0)$ 点关于 $f(x,y)$ 叙述正确的是（ ）

(A) 连续但偏导也存在　　(B) 不连续但偏导存在

(C) 连续但偏导不存在　　(D) 不连续偏导也不存在

2、设 $z=z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 某领域内有定义，且 $z_x'(0,0)=2, z_y'(0,0)=3$ 则下列结论正确的是（ ）

(A) $dz|_{(0,0)}=2dx+3dy$

(B) 曲线 $\begin{cases} z=z(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0,\ z(0,0))$ 的切向量为 $\{2,3,-1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases} z=z(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0,\ z(0,0))$ 的法向量为 $\{2,3,1\}$

(D) $z=z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的梯度为 $\{2,3\}$

3、微分方程 $y''-5y'+6y=3x-e^{2x}$ 的特解形式为（ ）

$A.\ (ax+b)e^{2x}$　　$B.\ (ax+b)xe^{2x}$　　$C.\ (ax+b)+ce^{2x}$　　$D.\ (ax+b)+cxe^{2x}$

4、设 $f(x,y)$ 连续，则 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=$（ ）

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

5、设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数（ ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

三、（本题满分 10 分） 设 $z=f(x-y,e^{x+y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 10 分） 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，计算 $\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)dxdy$.

五、（本题满分 10 分） 求函数 $f(x,y)=x(y-1)$ 在由上半圆周 $x^2+y^2=3(y\ge 0)$ 与 x 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

六、（本题满分 12 分） 设曲线积分 $\int_A^B[e^x-f(x)]y^2dx-2f(x)ydy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 及当 A 为点 $(0,0)$，B 为点 $(2,3)$ 时的积分值.

七、（本题满分 12 分） 计算 $I=\iint_\Sigma 4xy\,dydz+(x+1-y^2)dzdx+(1+y)dxdy$，其中 Σ 为曲线 $\begin{cases} y=z^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面介于 $y=0$ 与 $y=1$ 之间部分外侧.

八、（本题满分 12 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$ 的收敛域及和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n3^n}$ 的和.

九、（本题满分 4 分） 设 $u_n>0,v_n>0$，且 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}(n=1,2,\cdots)$，证明若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

一、填空题

1． $\sin\frac{y}{x}=Cx$；2． $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$ ；3． $-\frac{2xz^2}{x^2z+y}dx-\frac{z\ln z}{x^2z+y}dy$ ；

4． $2a^2$；5． $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

二、选择题

1． B；2．D；3． D；4．C；5．C.

三、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot e^{x+y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot e^{x+y}+e^{x+y}f_2'+e^{x+y}(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot e^{x+y})$$

$$=-f_{11}''+e^{x+y}f_2'++f_{22}''\cdot e^{2(x+y)}.$$

四、解：用 $y=x$ 将 D 分成两部分 D_1、D_2，其中

$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0,y\le x\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0,y\ge x\right\}$，

则 $D=D_1\cup D_2,D_1\cap D_2=\phi$.

$$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)dxdy=\iint_D|x-y|+2)dxdy=2\iint_{D_1}(x-y)dxdy+2\iint_D dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r^2(\cos\theta-\sin\theta)dr+2\times\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}.$$

五、解：在闭区域 D 内，由 $\begin{cases}f_x'=y-1=0\\ f_y'=x=0\end{cases}$ 得驻点 $(0,1)$，$f(0,1)=0$.

在 D 的边界 $x^2+y^2=3(y\ge 0)$ 上，令 $F(x,y,\lambda)=x(y-1)+\lambda(x^2+y^2-3)$，

由 $\begin{cases}F_x'=y-1+2\lambda x=0,\\ F_y'=x+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=3.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\\ y=\frac{3}{2},\end{cases}$ $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

在 D 的边界 x 轴上，$\left(\sqrt{3},0\right)$，$\left(-\sqrt{3},0\right)$，$f\left(\sqrt{3},0\right)=-\sqrt{3}$，$f\left(-\sqrt{3},0\right)=\sqrt{3}$，

比较以上各函数值，知最大值为 $f\left(-\sqrt{3},0\right)=\sqrt{3}$，最小值为 $f\left(\sqrt{3},0\right)=-\sqrt{3}$.

六、解：$P(x,y)=[e^x-f(x)]y^2$，$Q(x,y)=-2f(x)y$.

由积分与路径无关得：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

即 $2[e^x-f(x)]y=-2f'(x)y$，　$f'(x)-f(x)=-e^x$，

解得 $f(x)=e^{\int dx}[-\int e^x e^{-\int dx}dx+C]=e^x(-x+C)$.又 $f(0)=1$，$C=1$.

所以　$f(x)=e^x(1-x)$.

$$\int_A^B[e^x-f(x)]y^2dx-2f(x)ydy=\int_A^B[e^x-e^x(1-x)]y^2dx-2e^x(1-x)ydy$$

$$=\int_0^3-2e^2(1-2)ydy=9e^2.$$

七. 解:Σ方程：$y=x^2+z^2$,$0\le y\le 1$　加Σ_1：$y=1$右侧　记Σ与Σ_1所谓区域Ω

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}4ydydz+\left(1-y^2\right)dzdx+\left(1+y\right)dxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}4ydydz+\left(1-y^2\right)dzdx+\left(1+y\right)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}2ydV-\iint\limits_{\Sigma_1}xdzdx=\int_0^1 2ydy\iint\limits_{x^2+z^2\le y}dxdz-\iint\limits_{x^2+z^2\le 1}xdzdx=2\pi\int_0^1 y^2dy=\frac{2}{3}\pi$$

八、解：令 $t=x-3$, 从而级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n.3^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\right|.\left|\dfrac{n.3^n}{t^n}\right|=\left|\dfrac{t}{3}\right|$

当$\left|\dfrac{t}{3}\right|\begin{cases}<1,\text{ 即}|t|<3\text{时收敛}\\>1,\text{ 即}|t|>3\text{时发散}\end{cases}$，故收敛半径 $R=3$

当 $t=-3$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛，因为$\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n},n=1,2,\dots$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，

当 $t=3$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故收敛域 $t\in[-3,3)$ 即 $x\in[0,6)$ 时级数收敛。

在 $(-3,3)$ 内，设 $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n.3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\frac{t}{3})^n}{n}$，$\therefore S'(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{t}{3})^{n-1}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3-t}$

又$\int_0^t S'(u)du=\int_0^t\dfrac{1}{3-u}du=\ln 3-\ln(3-t)$，且 $S(0)=0$

$\therefore S(t)=\ln 3-\ln(3-t),t\in[-3,3)$，故 $S(x)=\ln 3-\ln(6-x),x\in[0,6)$.

当 $x=1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n.3^n}=S(1)=\ln\dfrac{3}{5}$.

九．证明：由题设有 $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \le \frac{u_n}{v_n}\,(n=1,2,\cdots)$，即数列 $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ 是单减正项数列，因此有 $u_n \le \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} v_n \le \frac{u_1}{v_1} v_n = a v_n, a = \frac{u_1}{v_1}\,(n=2,3,\cdots)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a v_n$ 收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ A ）

2015～2016 学年第 二 学期　课程代码 1400021B　课程名称 高等数学 A(2)　学分 6　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________________　考试日期 2016-07-08 08:00-10:00　命题教师 朱士信　系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-e^{y}+\ln z=0$ 确定，则 $dz\big|_{(1,0)}=$__________.

2. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线方程为______________.

3.设曲线 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a,则曲线积分

$\oint_L \left(3x^2+4xy+2y^2\right)ds=$_____________.

4. 设 Σ 为半圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ $(0\le z\le 1, x\ge 0)$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}S=$_____________.

5. 由曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$，绕 x 轴旋转一周得到的旋转曲面在点 $(1,0,-1)$ 处的指向外侧的单位法向量为_______________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 则在原点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$（　　）.

（A）不连续　　　　　　（B）偏导数不存在

（C）偏导数存在且连续　（D）偏导数不连续但可微

2. 设 $f\left(x\right)$ 为连续函数，$F\left(t\right)=\int_1^t dy\int_y^t f\left(x\right)dx$，则 $F'\left(1\right)=$（　　）.

（A）0　　（B）$f\left(1\right)$　　（C）$-f\left(1\right)$　　（D）$2f\left(1\right)$

3. 设曲线 L 是圆周 $\left(x-1\right)^2+y^2=R^2$ 沿逆时针方向一周，则曲线积分

$\oint_L \dfrac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=$（　　）.

（A）0　　（B）π　　（C）2π　　（D）-2π

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

5. 设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -\pi\le x<0, \\ x-\pi, & 0\le x<\pi. \end{cases}$ 的傅立叶级数在 $x=\pi$ 和 $x=2\pi$ 处分别收敛于 a 和 b，则（　　）.

（A）$a=\dfrac{\pi}{2}, b=-\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$a=\dfrac{\pi^2}{2}, b=2\pi^2+\dfrac{\pi}{2}$

（C）$a=-\dfrac{\pi}{2}, b=\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$a=\dfrac{\pi^2}{2}, b=-\dfrac{\pi}{2}$

三、（本题满分 10 分）设 $z=f(x^2-y^2,xy)+g(x+2y)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$g(t)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 10 分）已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

五、（本题满分 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$.

六、（本题满分 11 分）试确定可导函数 $f(x)$，使在整个平面上，$yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分，其中 $f(0)=0$，并求一个 $u(x,y)$.

七、（本题满分 12 分）计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+yz+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+zx+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

命题教师注意事项:1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。　2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

2015～2016 学年第 二 学期 课程代码 1400021B 课程名称 高等数学 A(2) 学分 6 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2016-07-08 08:00-10:00 命题教师 朱士信 系（所或教研室）主任审批签名__________

的上侧.

八、（**本题满分 10 分**）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数$s(x)$，并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}$的和.

九、（**本题满分 5 分**）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\cos(n+k)$（$k$为常数）绝对收敛.

2015-2016 学年第二学期《高等数学》试卷（A）解答

一、填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-e^{y}+\ln z=0$ 确定，则 $dz\Big|_{(1,0)}=$__________.

答案： 填“ $dy-dx$ ”

2. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线方程为________________.

答案： 填“ $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$ ”

3. 设曲线 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ，其周长为 a ，则曲线积分 $\oint_L \left(3x^2+4xy+2y^2\right)ds=$____________.

答案：填“ $6a$ ”

解 因为 L 关于 y 轴对称，且 $4xy$ 是关于变量 x 的奇函数，所以 $\oint_L 4xyds=0$，

又在 L 上有 $3x^2+2y^2=6$，所以

$$I=\oint_L\left(3x^2+2y^2\right)ds+\int_L 4xyds=\int_L 6ds=6a.$$

4. 设 $\sum$ 为半圆柱面 $x^2+y^2=R^2(0\le z\le 1, x\ge 0)$，则曲面积 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}S=$_______________.

答案：填“ $2R^2$ ”

解 因为 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S$，由对称性知 $\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S=0$，

$\sum: x=\sqrt{R^2-y^2}, (y,z)\in D_{yz}: -R\le y\le R, 0\le z\le 1$，

并有 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}, \dfrac{\partial x}{\partial z}=0$，所以 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}})^2+0^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2}\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=R\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2R^2$，所以 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}S=2R^2$.

5. 由曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$，绕 x 轴旋转一周得到的旋转曲面在点 $(1,0,-1)$ 处的指向外侧

的单位法向量为________________.

答案：填 “$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$

二、选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 则在原点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$（ D ）.

（A）不连续　　　　　　　　（B）偏导数不存在

（C）偏导数存在且连续　　　（D）偏导数不连续但可微

2.设 $f\left(x\right)$ 为连续函数，$F\left(t\right)=\int_1^t dy\int_y^t f\left(x\right)dx$，则 $F'\left(1\right)=$（A ）.

（A）0　　　（B）$f\left(1\right)$　　　（C）$-f\left(1\right)$　　　（D）$2f\left(1\right)$

解　交换积分次序　$F\left(t\right)=\int_1^t dy\int_y^t f\left(x\right)dx=\int_1^t dx\int_1^x f\left(x\right)dy=\int_1^t\left(x-1\right)f\left(x\right)dx$

则有　$F'\left(t\right)=\left(t-1\right)f\left(t\right)$，　故　$F'\left(1\right)=0$；

3. 设曲线 L 是圆周 $\left(x-1\right)^2+y^2=R^2$ 沿逆时针方向一周，则曲线积分

$\oint_L\frac{\left(x-1\right)dy-ydx}{\left(x-1\right)^2+y^2}=$（ C ）.

（A）0　　　（B）π　　　（C）2π　　　（D）-2π

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数（ D ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

5. 设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -\pi\le x<0, \\ x-\pi, & 0\le x<\pi. \end{cases}$ 的傅立叶级数在 $x=\pi$ 和 $x=2\pi$ 处分别收敛于 a 和 b，则（ D ）.

（A）$a=\frac{\pi}{2},b=-\frac{\pi}{2}$　　（B）$a=\frac{\pi^2}{2},b=2\pi^2+\frac{\pi}{2}$

（C）$a=-\frac{\pi}{2},b=\frac{\pi}{2}$　　（D）$a=\frac{\pi^2}{2},b=-\frac{\pi}{2}$

三、（10 分）设$z=f(x^2-y^2,xy)+g(x+2y)$，其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$g(t)$二阶可导，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'+g'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(-2yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+y(-2yf_{21}''+xf_{22}'')+2g''$$

$$=f_2'-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+2g''$$

四、（10 分）已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线$C:x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数.

解　$f(x,y)$在任意一点处的最大方向导数为

$$|gradf|=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}=\sqrt{2+2x+2y+x^2+y^2}.$$

下求$|gradf|^2=2+2x+2y+x^2+y^2$在曲线$C$上的条件最大值．构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=2+2x+2y+x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3).$$

令$\begin{cases}L_x'(x,y,\lambda)=2+2x+2\lambda x+\lambda y=0,\\ L_y'(x,y,\lambda)=2+2y+2\lambda y+\lambda x=0,\\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=x^2+y^2+xy-3=0,\end{cases}$，解得驻点为$(1,1),(-1,-1),(-1,2),(2,-1)$.

计算得$|gradf||_{(1,1)}=2\sqrt{2},\ |gradf||_{(-1,-1)}=0,\ |gradf||_{(-1,2)}=|gradf||_{(2,-1)}=3$，故$f(x,y)$在曲线$C$上的最大方向导数为$3$.

五、（10 分）计算二重积分$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

解 将D分成D_1,D_2两部分，其中

$$D_1: 0\le y\le x, 0\le x\le 1;\quad D_2: 0\le x\le y, 0\le y\le 1,$$

且 D_1 与 D_2 关于直线 $y=x$ 对称.

在 D_1 上，$e^{\max\{x^2,y^2\}}=e^{x^2}$；在 D_2 上，$e^{\max\{x^2,y^2\}}=e^{y^2}$，因此，

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

又由轮换对称性可知 $\iint_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x=e-1 .$$

六、(11 分）试确定可导函数 $f(x)$，使在整个平面上，$yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分,其中 $f(0)=0$，并求一个 $u(x,y)$.

解 （Ⅰ）$P(x,y)=yf(x)$，$Q(x,y)=f(x)-x^2$，

因为 $yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，所以有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,

即

$$f'(x)-f(x)=2x,$$

解得 $f(x)=e^{\int dx}[\int 2xe^{-\int dx}dx+C]=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C)=Ce^x-2x-2$,

又 $f(0)=0$，得 $C=2$，所以 $f(x)=2(e^x-x-1)$，

（Ⅱ）在平面上取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y)\,dy$$

$$=\int_0^y(2e^x-2x-2-x^2)\,dy=(2e^x-x^2-2x-2)y .$$

或用凑微分法求 $u(x,y)$.

七、(12 分）计算曲面积分

$I=\iint_\Sigma (x^3+yz+1)dydz+(y^3+zx+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解　添加平面：$\Sigma_1 : z = 0(x^2 + y^2 \le 1)$ 的下侧，则 $\sum_1$ 与 $\sum$ 构成封闭曲面，设其所围成的区域为 Ω，　$\Omega = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

且 $\sum + \sum_1$ 取外侧，故由 Gauss 公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3 + yz + 1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 + zx + 1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + xy + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^4 \mathrm{d}\rho = \frac{6}{5}\pi,$$

又　$\iint\limits_{\Sigma_1} (x^3 + yz + 1)dydz + (y^3 + zx + 1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + xy + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (xy + 1)dxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = -\pi$$

所以

$$I = (\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1})(x^3 + yz + 1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 + zx + 1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + xy + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{6}{5}\pi + \pi = \frac{11}{5}\pi.$$

八、（12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)3^n}$ 的和.

解　此级数为缺项幂级数，因为

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2n+1)x^{2(n+1)}}{(2n+3)x^{2n}}\right| = x^2,$$

由正项级数的比值审敛法知，当 $x^2 < 1$,即 $|x| < 1$ 时，该幂级数绝对收敛；当 $x^2 > 1$,即 $|x| > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} x^{2n} \ne 0$, 该幂级数发散.所以该幂级数的收敛半径 $R = 1$.

又 $x = \pm 1$　时，原级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$，发散，所以原幂级数的收敛域为 $(-\ 1,1)$.

设 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} x^{2n}$，　x ? (　1,1)，则

$x \ne 0$　时，$(xs(x))' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$，因此

$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

又 $x=0$ 时， $s(0)=1$，故

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & |x|<1, x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in\left(-1,1\right)$，此时级数即为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)3^{n}}$，而

$$s(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3}),$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^{n}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

九、（5 分）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})\cos(n+k)$（$k$ 为常数）绝对收敛.

解 考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$，$\because S_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}})=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n}=1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$ 收敛，

又 $\left|(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})\cos(n+k)\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，故原级数绝对收敛.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （ 合 肥 A）

2016～2017 学年第二 学期 课程代码 1402021B、1400021B、1400221B 课程名称 高等数学 A(下) 学分 6 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2017 年 7 月 5 日 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 曲线 $\begin{cases} y = ax, \\ z = x^2 \end{cases}$ 在点 $(1,a,1)$ 处的切线和直线 $x = y = -z$ 垂直，则 $a =$__________.

2. 已知 $z = u^2 v, u = x^2 + y, v = x - y$，且在 xOy 面上有点 $P_0(1,0)$ 和向量 $\vec{l} = \{3,4\}$，则方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} =$__________.

3. 设 L 为 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ 上介于 $(-1,\dfrac{1}{2})$ 和 $(1,\dfrac{1}{2})$ 的一段曲线，则 $\int_L (x + 3\sqrt{1+2y})ds =$__________.

4. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，则 $\iint\limits_{\Sigma} 3x^2 dS =$__________.

5. 设 $s(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 为函数 $f(x) = |x+1|, x \in (-\pi, \pi)$ 的傅里叶级数，则 $s(-3) =$__________.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $f(0,0) = 0$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（）.

（A）连续，但偏导数不存在　　（B）不连续，但偏导数存在

（C）连续，偏导数存在，但是不可微　　（D）连续、偏导数存在，且可微

2． 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y) \neq 0$．已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的一个极值点，如果 $f_y'(x_0,y_0) = 0$，则必有（　　）.

（A） $\varphi_x'(x_0,y_0) = 0$　（B） $\varphi_x'(x_0,y_0) \neq 0$　（C） $f_x'(x_0,y_0) = 0$　（D） $f_x'(x_0,y_0) \neq 0$

3. 设 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$，$I_1 = \iint\limits_D x|y|dxdy$，$I_2 = \iint\limits_D |xy|dxdy$，$I_3 = \iint\limits_D \ln(1-|xy|)dxdy$，

则 I_1, I_2 和 I_3 满足（　　）.

（A） $I_2 < I_3 < I_1$　（B） $I_3 < I_1 < I_2$　（C） $I_3 < I_2 < I_1$　（D） $I_3 < I_2 < I_1$

4. 设 $\Omega = \{(x,y,z) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xydv =$（　　）.

（A） $\dfrac{1}{2}$　（B） $\dfrac{1}{3}$　（C） $\dfrac{1}{4}$　（D） $\dfrac{1}{6}$

5. 已知 $|a_n| \le b_n, n = 1,2,\cdots$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$（　　）.

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 发散　(D) 敛散性不定

三、（本题满分 10 分）设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $x + y - z = e^z$ 所确定隐函数，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)}$.

四、（本题满分 12 分）求函数 $f(x,y) = y^3 - x^2 + 6x + 12y + 5$ 的极值.

五、（本题满分 12 分）设函数 $f(x,y) = \begin{cases} x^2 y, & 1 \le x \le 2, 0 \le y \le x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \ge 2x\}$.

六、(本题满分 12 分)求曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆抛物面 $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$（$0 \le z \le 2$），取下侧.

七、（本题满分 12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

八、（本题满分 12 分）⑴在全平面上，证明曲线积分 $\int_L y^2 e^x dx + 2ye^x dy$ 与路径无关，并求 $y^2 e^x dx + 2ye^x dy$ 的一个原函数 $u(x,y)$；⑵计算 $I = \int_L (y^2 e^x - y)dx + (2ye^x - 1)dy$，其中 L 为 $x^2 + y^2 = 2x\ (y \ge 0)$ 上从 $(2,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段曲弧.

2016-2017 第二学期期末考试试卷 A 标准答案

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\underline{1}$.　　**2.** $\underline{\dfrac{19}{5}}$.　　**3.** $\underline{8.}$　　**4.** $\underline{4\pi}$　　**5.** $\underline{2}$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. D.　　**2.** C.　　**3.** B.　　**4.** A.　　**5.** A.

三、（本题满分 10 分）

解：在方程两边关于 x 求偏导数得 $1-\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}$，　　　　**(1)**

当 $(x,y)=(1,0)$ 时，$z=0$，代入上式，得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$．类似可得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$．

在(1)式两边关于 y 求偏导数得 $-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+e^z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，代入 $x=1,y=0,z=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$ 及 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$，解得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{8}$.

或者：计算得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+e^z}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-e^z}{(1+e^z)^3}$，同理可得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{8}$.

四、（本题满分 12 分）

解：令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=-2x+6=0, \\ f_y'(x,y)=3y^2-12=0, \end{cases}$ 得驻点 $(3,2),\ (3,-2)$．又

$$f_{xx}''(x,y)=-2,\quad f_{xy}''(x,y)=0,\quad f_{yy}''(x,y)=6y.$$

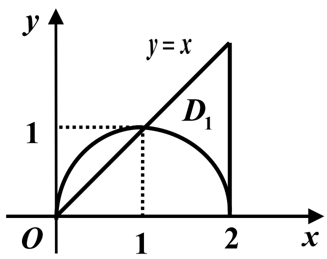
在驻点 $(3,2)$ 处，$A=f_{xx}''(3,2)=-2, B=f_{xy}''(3,2)=0, C=f_{yy}''(3,2)=12$，

$AC-B^2=-24<0$，故 $(3,2)$ 不是极值点；

在驻点 $(3,-2)$ 处，$A=f_{xx}''(3,-2)=-2, B=f_{xy}''(3,-2)=0, C=f_{yy}''(3,-2)=-12$，

$AC-B^2=24>0$，且 $A<0$，故 $(3,-2)$ 是极大值点，且极大值为 $f(3,-2)=-18$.

五、（本题满分 12 分）



解：记 $D_1=\{(x,y)\big|1\le x\le 2,\sqrt{2x-x^2}\le y\le x\}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}x^2ydxdy=\int_1^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}x^2ydy$$

$$=\int_1^2(x^4-x^3)dx=\frac{49}{20}.$$

六、（本题满分 12 分）

解　补充曲面 $\sum_1$：$z=2\ (x^2+y^2\le 4)$，取上侧.

设 Ω 为 $\sum+\sum_1$ 所围成的立体区域，则 Ω: $\frac{r^2}{2}\le z\le 2, 0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$，由 **Gauss** 公式可得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2z)dv=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}zdz$$

$$=2\pi\int_0^2 r(4-\frac{r^4}{4})dr=\frac{32\pi}{3};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(-3)dxdy=-12\pi,$$

所以

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{32\pi}{3}-(-12\pi)=\frac{68}{3}\pi.$$

七、（本题满分 12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3n+4}{3n+1}\right|=1$，所以收敛半径为 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)x^n\ne 0$，所以原级数均发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=3(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'-2\frac{1}{1-x}=3(\frac{x}{1-x})'-\frac{2}{1-x}=\frac{3}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x}=\frac{1+2x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$

八、（本题满分 12 分）

解：⑴ 令 $P=y^2e^x, Q=2ye^x$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2ye^x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分 $\int_L y^2e^xdx+2ye^xdy$ 与路径无关.

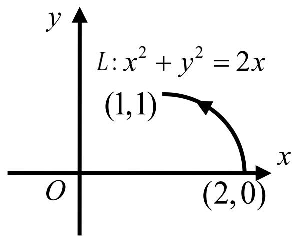
下面求 $u(x,y)$．由题意知 $du(x,y)=y^2e^xdx+2ye^xdy$．

解法一：取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则 $u(x,y)=\int_0^x 0\cdot e^xdx+\int_0^y 2ye^xdy=y^2e^x$；

解法二：$du(x,y)=y^2e^xdx+2ye^xdy=y^2d(e^x)+e^xd(y^2)=d(y^2e^x)$，取 $u(x,y)=y^2e^x$，

解法三：由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2e^x$ 得 $u=\int y^2e^xdx=y^2e^x+c(y)$，从而 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2ye^x+c'(y)=Q=2ye^x$，即 $c'(y)=0$，取 $c(y)=0$，则 $u(x,y)=y^2e^x$．

⑵ 解法一：

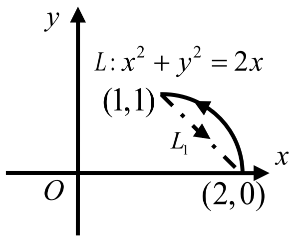


$$I=\int_L (y^2e^x-y)dx+(2ye^x-1)dy=\int_L y^2e^xdx+2ye^xdy-\int_L ydx+dy$$

$$=y^2e^x\Big|_{(2,0)}^{(1,1)}-\int_L ydx+dy=e-I_1.$$

L 的参数方程为 $L:\begin{cases}x=1+\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad t:0\to\dfrac{\pi}{2}$．则 $I_1=\int_L ydx+dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin^2 t+\cos t)dt=-\dfrac{\pi}{4}+1$．

故 $I=y^2e^x\Big|_{(2,0)}^{(1,1)}-\int_L ydx+dy=e+\dfrac{\pi}{4}-1$．



解法二：补充曲线 $L_1: y=-x+2$，$x:1\to 2$，L 与 L_1 所围平面区域记为 D，故

$$I=\oint_{L+L_1}(y^2e^x-y)dx+(2ye^x-1)dy-\int_{L_1}(y^2e^x-y)dx+(2ye^x-1)dy.$$

$$\oint_{L+L_1}(y^2e^x-y)dx+(2ye^x-1)dy=\iint_D(2ye^x-2ye^x+1)dxdy=\iint_D 1dxdy=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},$$

$$\int_{L_1}(y^2e^x-y)dx+(2ye^x-1)dy=\int_1^2\{(-x+2)^2e^x+x-2+[2(-x+2)e^x-1](-1)\}dx$$

$$=\int_1^2(x^2e^x-2xe^x+x-1)dx=-e+\frac{1}{2},$$

所以 $I=(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2})-(-e+\dfrac{1}{2})=e+\dfrac{\pi}{4}-1$．

合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2017～2018 学年第 二 学期 课程代码 1400021B 课程名称 高等数学 A（下） 学分 6 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）______ 学号__________ 姓名______ 考试日期 2018 年 7 月 10 日 命题教师 高等数学命题组 系（所或教研室） 主任审批签名________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

2、设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，则曲线积分 $\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}ds=2\pi a\cos a$.

3、设 Σ 为 $x+y+z=1(x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0)$，则 $\iint_{\Sigma} ds=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4、求过点 $(1,1,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2x-y-5z=1 \end{cases}$ 的直线方程为 $\begin{cases} x-4z=-3 \\ 2x-y-5z=-4 \end{cases}$.

5、设函数 $f(x)=x^2$，$0\le x<1$，而 $S(x)=\sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $S(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$.

二. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（ ）.

（A）$x-y+z=-2$ （B） $x+y+z=0$ （C） $x-2y+z=-3$ （D）$x-y-z=0$

2、已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则（ ）.

（A） $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都存在 （B） $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在

（C） $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在 （D） $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都不存在

3、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于（ ）.

（A） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ （B） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

（C） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ （D） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

4、函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度为（ ）.

（A） $\vec{i}$ （B） $-\vec{i}$ （C） $\vec{j}$ （D） $-\vec{j}$

5、设 $u_n=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（ ）.

（A） $\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛 （B） $\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

（C） $\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{i=1}^{\infty}u_n^2$ 而发散 （D） $\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum_{i=1}^{\infty}u_n^2$ 而收敛

三、（本题满分 10 分） 设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、（本题满分 10 分） 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le x\}$，计算 $\iint_D \sqrt{x}dxdy$.

五、（本题满分 12 分） 求 $f(x,y)=x^2-\frac{y^2}{2}+1$ 在圆域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

六、（本题满分 12 分） 设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$. 求 $\varphi(x)$ 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值. $\varphi(x)=x^2$

七、（本题满分 11 分） 设有界区域 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+(2z+x^3)dxdy$. $\frac{1}{12}$

八、（本题满分 10 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

九、（本题满分 5 分） 设正数 u_n 满足方程 $x^n+nx-1=0$，（n 为正整数），证明：当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\alpha}$ 收敛.

命题教师注意事项：1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。 2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

合肥工业大学试卷（A）

2018~2019 学年第 二 学期　课程代码 1400221B　课程名称高等数学 A（下）　学分 6　课程性质：必修☑、选修☐、限修☐　考试形式：开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿　考试日期 2019 年 07 月 09 日 08:00~10:00　命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名 　[signature]

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 若曲线 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t, \\ z = t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线与平面 $x+ay-2z=1$ 平行，则常数 $a=$＿＿＿＿.

2. 函数 $z=x^2y+2xy$ 在点 $(1,1)$ 处的最大方向导数为＿＿＿＿.

3. 设空间区域 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=$＿＿＿＿.

4. 设曲面 Σ 的方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=$＿＿＿＿.

5. $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内关于 x 的幂级数展开式为＿＿＿＿.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $f(0,0)=1$，$f_x'(0,0)=2$，$f_y'(0,0)=3$，$\vec{l}$ 对 x 轴正向的逆时针方向转角为 $\frac{\pi}{4}$，则下列说法一定正确的是(　　).

(A) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=1$

(B) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，且 $\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(0,0)}=2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y$

(C) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\vec{l}$ 方向的方向导数存在，且 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(D) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不取极值

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$(　　).

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

3. 设 $L: y=x, x\in[0,1]$，第一类曲线积分 $I_1=\int_L k(y-x)\mathrm{d}s$，$I_2=\int_L (y-x^2)\mathrm{d}s$，其中 k 为常数，则 I_1, I_2 的大小关系为(　　).

(A) $I_1<I_2$　　(B) $I_1>I_2$　　(C) $I_1=I_2$　　(D) 无法比较

4. 设常数 $\lambda>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+(-1)^n\lambda}{n^2}$ 是(　　).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与常数 λ 有关

5. 设 $f(x)$ 是周期 2π 的函数，且 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi\le x<0, \\ x^2, & 0\le x<\pi, \end{cases}$ $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数展开，则 $s(5)=$(　　).

(A) $(5-2\pi)^2$　　(B) $6-2\pi$　　(C) 6　　(D) 25

三、（本题满分 10 分）设函数 $u=x^2+y+z^2$，其中 $y=y(x), z=z(x)$ 由隐函数方程组 $\begin{cases} x^2+x-ye^y=0, \\ xz+\ln z=1 \end{cases}$ 确定，求 $\mathrm{d}u\big|_{x=0}$.

四、（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值.

五、（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}|y-x^2|\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 为 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

六、（本题满分 10 分）设在全平面内，曲线积分 $\int_L (y\varphi(x)+ye^{xy})\mathrm{d}x+(x^2+xe^{xy})\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 为连续函数. (1)求 $\varphi(x)$ 的表达式，(2)求 $(y\varphi(x)+ye^{xy})\mathrm{d}x+(x^2+xe^{xy})\mathrm{d}y$ 的一个原函数 $u(x,y)$，(3)计算曲线积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y\varphi(x)+ye^{xy})\mathrm{d}x+(x^2+xe^{xy})\mathrm{d}y$.

七、（本题满分 12 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1(0\le z\le 1)$ 的一部分，并取外侧.

八、（本题满分 12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+\frac{2}{n})x^n$ 的收敛域以及和函数.

九、（本题满分 6 分）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

一、填空题（每空4分共20分）.

1、过点$M(1,1,1)$且与直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$垂直的平面方程为______________.

2、曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$在点$(1,1,1)$处指向内侧的单位法向量为____________.

3、函数$u=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$在点$(1,2,3)$处沿$\{1,1,1\}$方向的方向导数为________.

4、三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dV=$_____，其中$\Omega$是由平面$x=\pm1,\ y=\pm1,\ z=0,\ z=1$所围立体.

5、交换二次积分的积分次序：$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx=$________.

二、选择题（每题4分共20分）.

6、直线$\begin{cases}2x-y-z=3,\\ x+y-z=1\end{cases}$可化为（　）.

(A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{3}$　　(B) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}$

(C) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{3}$　　(D) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{3}$

7、若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质P推出性质Q，考虑二元函数$f(x,y)$的下面5条性质：$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处：① 连续；② 两个偏导数存在；③ 可微；④ 两个偏导数连续；⑤ 极限存在．则有（　）.

(A) ④ ⟹ ③ ⟹ ② ⟹ ⑤　　(B) ② ⟹ ③ ⟹ ⑤ ⟹ ①

(C) ③ ⟹ ② ⟹ ⑤ ⟹ ①　　(D) ④ ⟹ ③ ⟹ ① ⟹ ⑤

8、设函数$z=f(x,y)$的全微分为$dz=ydx+xdy$，则点$(0,0)$（　）.

合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）
2017～2018学年第_二_学期 课程代码____1400221B____ 课程名称_高等数学A(2)_ 学分_6_ 课程性质：必修■、选修□、限修□ 考试形式：开卷□、闭卷■
专业班级（教学班）__________ 考试日期_2018年05月09日_ 命题教师_《高等数学》命题组_ 系（所或教研室）主任审批签名__________

(A) 不是$f(x,y)$的连续点　　(B) 不是$f(x,y)$的极值点

(C) 是$f(x,y)$的极大值点　　(D) 是$f(x,y)$的极小值点

9、设$M=\iiint\limits_{\Omega}\cos(x+y+z)dV,\quad N=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z+1)dV,\quad P=\iiint\limits_{\Omega}\sin(x+y+z)dV$，其中$\Omega$由$x+y+z=\frac{\pi}{4}$及三个坐标面所围区域，则有（　）.

(A) $M\ge N\ge P$　　(B) $N\ge P\ge M$　　(C) $M\ge P\ge N$　　(D) $N\ge M\ge P$

10、设函数$f(x,y)$连续，则$\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx=$（　）.

(A) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　(B) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　(D) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

三、解答题（共60分）.

11、（本题共10分）证明：$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在$(0,0)$处可微.

12、（本题共10分）设$z=f\left(x^2+y^2,\frac{x}{y}\right)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$z''_{xy}$.

13、（本题共10分）证明：曲面$\Sigma: xyz+x^2(y+z)=a^3\ (a>0)$上两点$P(-a,-a,a),Q(-a,a,-a)$处的法线相交.

14、（本题共10分）设函数$f(u,v)$可微分，$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，求$dz|_{(0,1)}$.

15、（本题共10分）求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le4,\ y\ge0\}$上的最大值和最小值.

高等数学下统考题20-0204050607101112131４汇编

2002-2003 学年第__二__学期　课程名称__高等数学（下）__

一、填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1．设函数 $z=\ln(3x-2y+e^{xy})$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$ $\underline{\frac{3}{4}dx-\frac{1}{4}dy}$。

2． $\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}dy=$ $\underline{2}$。

3．设 V 为柱体： $x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1$，则 $\iiint\limits_{\upsilon}e^z d\upsilon=$ $\underline{\pi(e-1)}$。

4．设 $f(x)=1+x$， $-\pi\le x\le\pi$，则其以 2π 为周期的傅立叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{1}$。

5．微分方程 $xy''+y'=0$ 的通解为 $\underline{y=C_1\ln x+C_2}$。

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy,}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则（　C.　　）

A. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在　　*B.* $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续

C. $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都存在　　*D.* $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

2．曲线 $\begin{cases}2x-e^y+z^2=9,\\ 2x^2+y^2-3z^2=6\end{cases}$ 在点 $(3,0,2)$ 处的切线方程为（ *B.*　）

A. $x-3=y=z-2$　　*B.* $x-3=\frac{y}{6}=z-2$

C. $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{4}$　　*D.* $\begin{cases}x-3=-(z-2)\\ y=0\end{cases}$

3．设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$, 则 $\oint_L(x^3+y^3)ds=$（　*A.*　）

$A.\,0$ $B.\,1$ $C.\,2$ $D.\,3$

4．设常数$a>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{1+a}\ln n}$（ $C.$ ）。

$A.$发散 $B.$条件收敛 $C.$绝对收敛 $D.$敛散性与a有关。

5．设$y_1=xe^x,y_2=(x+1)e^x,y_3=e^{2x}+xe^x$为某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，则该方程的通解为（ $D.$），其中C_1,C_2,C_3为任意常数。

$A.\ C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$ $B.\ C_1y_1+C_2y2+y_3$

$C.\ C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{2x}-e^x$ $D.\ C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

三、设$z=f((x-y)^2,xy)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。（本题 10 分）

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-y)f_1+yf_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2(x-y)f_1+yf_2)=-2f_1+2(x-y)[-2(x-y)f_{11}+xf_{12}]+f_2+y[2(y-x)f_{21}+xf_{22}]$$
$$=-2f_1-4(x-y)^2f_{11}+2(x-y)^2f_{12}+xyf_{22}+f_2$$

四（10 分）、求函数$f(x,y)=x(y-1)$在由上半圆周$x^2+y^2=3(y\ge 0)$与x轴所围成的闭区域D上的最大值和最小值。

解：在闭区域D内，由$\begin{cases} f_x'=y-1=0 \\ f_y'=x=0 \end{cases}$得驻点$(0,1)$，$f(0,1)=0$

在D的边界$x^2+y^2=3(y\ge 0)$上，令$F(x,y,\lambda)=x(y-1)+\lambda(x^2+y^2-3)$

由$\begin{cases} F_x'=y-1+2\lambda x=0 \\ F_y'=x+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$ 得$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$，$f(\sqrt{2},1)=0$

在D的边界x轴上，$\left(\sqrt{3},0\right)$，$\left(-\sqrt{3},0\right)$，$f\left(\sqrt{3},0\right)=-\sqrt{3}$，$f\left(-\sqrt{3},0\right)=\sqrt{3}$

比较以上各函数值，知最大值为$f\left(-\sqrt{3},0\right)=\sqrt{3}$，最小值为$f\left(\sqrt{3},0\right)=-\sqrt{3}$，

五、计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$是上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧。（本题 10 分）

解：将Σ的方程代入被积函数，得：$I=\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$

补充平面$\sum_1:z=0$上介于$x^2+y^2\le 1$的圆面，取其下侧。设$\sum$与$\sum_1$所围空间区域为V。

显然，$\iint\limits_{\Sigma_1}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}2xydxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}2xydxdy=0$

由高斯公式，得：$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dv-0=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr=\frac{2}{5}\pi$

六、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛半径，收敛域及和函数$S(x)$，并计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$的值。（本题 12 分）

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$，收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=1$，

当$x=-1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$，此级数收敛；当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，此级数发散。收敛域为$[-1,1)$

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，

当$x\ne 0$时，$[xS(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\Big|_0^x=-\ln(2-x)$，$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$

当$x=0$时，$S(0)=1$

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

令 $x=\frac{1}{2}$， $S(\frac{1}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}=S(\frac{1}{2})-1=2\ln 2-1$

七、已知曲线积分 $\int_L[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]ydx+f'(x)dy$ 与路径无关，其中 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=1$。求 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]ydx+f'(x)dy$ 的值。（本题 12 分）

解：解：$P(x,y)=[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]y$，$Q(x,y)=f'(x)$

由积分 $\int_L[f'(x)+6f(x)+4e^{-x}]ydx+f'(x)dy$ 与路径无关得：$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$，

即 $f'(x)+6f(x)+4e^{-x}=f''(x)$，　$f''(x)-f'(x)-6f(x)=4e^{-x}$

特征方程为：$\lambda^2-\lambda-6=0$，特征根为：$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-2$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$

因为 $\lambda=-1$ 不是特征方程的特征根，所以可设非齐次方程的特解为 $y^*=ae^{-x}$，

代入 $f''(x)-f'(x)-6f(x)=4e^{-x}$，得：$a=-1$

故 $f(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}-e^{-x}$

又 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$C_1=\frac{2}{5}$，$C_2=\frac{3}{5}$。

$f(x)=\frac{2}{5}e^{3x}+\frac{3}{5}e^{-2x}-e^{-x}$，$f'(x)=\frac{6}{5}e^{3x}-\frac{6}{5}e^{-2x}+e^{-x}$

$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}=\int_{(0,0)}^{(1,0)}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}=0+\int_0^1 f'(1)dy=f'(1)=\frac{6}{5}e^3-\frac{6}{5}e^{-2}-e^{-1}$

八、设有 $[0,+\infty)$ 上的连续曲线 $y=f(x),f(x)\geq 0$。若对任意 $x\in[0,+\infty)$，在 $[0,x]$ 上以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积 S_1 和以曲线 $y=e^x$ 为曲边的曲边梯形的面积 S_2 满足 $S_2-S_1=f(x)$，求函数 $y=f(x)$ 的表达式。（本题 10 分）

解：$S_1=\int_0^x f(t)dt$，$S_2=\int_0^x e^t dt$，$\int_0^x(e^t-f(t))dt=f(x)$

两端对 x 求导，得 $e^x - f(x) = f'(x)$，即 $f'(x) + f(x) = e^x$

解得 $f(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$。因为 $x=0$ 时，$f(0)=0$，代入得 $C = -\frac{1}{2}$

所以 $f(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

九、证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} + 1)$ 发散。（本题 6 分）

证明：因为 $\sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} + 1 = \sin\frac{1}{n} + 2\sin^2\frac{1}{2n}$

当 n 充分大时，有 $\sin\frac{1}{n} > 0$，$\sin^2\frac{1}{2n} > 0$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{2n}$ 为正项级数。

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{(\frac{1}{2n})^2} = 1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{2n}$ 收敛。

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n} + 2\sin^2\frac{1}{2n})$ 发散。从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} + 1)$ 发散。

合肥工业大学试卷

2004--2005 学年第 二 学期 课程名称 高等数学（下）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1．设 $z = e^{x-y}$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\ 0\ }$.

2．已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z = 1$，则点 P 的坐标为 $\underline{(1,1,2)}$.

3．设 L 为上半圆周 $y = \sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds = \underline{\ \pi\ }$.

4．设 $x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，$x\in(-\pi,\pi)$，则 $b_2=$ $\underline{-1}$.

5．微分方程 $xy'-y=x^2$ 的通解为 $\underline{\ y=x(x+C)\ }$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1。设 $z=f(x,y)$ 为二元函数，则下列结论正确的是（ $D.$ ）.

$A.$ 若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处偏导数都存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} f(x,y)$ 存在；

$B.$ 若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处连续，且偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处可微；

$C.$ 若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处偏导数连续；

$D.$ 若 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处偏导数都连续，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_{0,}y_0)$ 处连续.

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$ 所确定，则 $z=z(x,y)$ 在点 $(-1,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{3,4\}$ 的方向导数为（ $A.$ ）. $A.-\dfrac{48}{5}$ $B.\ \dfrac{48}{5}$ $C.-48$ $D.\ 48$

3．设 $f(x,y)$ 为二元连续涵数，则 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\,dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy=$（ $C.$ ）

$A.\ \int_1^4 dy\int_y^{y^2} f(x,y)\,dx$；$B.\ \int_1^4 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx$；

$C.\ \int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)\,dx$；$D.\ \int_1^2 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx$

4. 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ （$a_n>0, n=1,2,\cdots$）条件收敛，则下列结论正确的是（ $B.$ ）

$A.\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 都收敛. $B.\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 都发散.

$C.\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散. $D.\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛.

5. 微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解为（ $C.$ ）

$A.\ \ y=-\ln(\cos x+C_1)+C_2$ $\qquad B.\ \ y=\ln(\cos x+C_1)+C_2$

$C.\ \ y=-\ln\cos\left(x+C_1\right)+C_2$ $\qquad D.\ \ y=\ln\cos\left(x+C_1\right)+C_2$

三(10 分) 设 $z=f\left(x^2+y^2,xy\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[2yf_{11}+xf_{12}]+y[f_{21}\cdot 2y+xf_{22}]+f_2$$
$$=4xyf_{11}+(2x^2+2y^2)f_{12}+xyf_{22}+f_2$$

四（12 分） 设 $f\left(x,y\right)=4x-4y-x^2-y^2$

（1）求 $f\left(x,y\right)$ 的极值;（2）求 $f\left(x,y\right)$ 在闭圆盘 $x^2+y^2\le 9$ 上的最大值和最小值.

解:（1） $f_x=4-2x$， $f_y=-4-2y$， $A=f_{xx}=-2$， $B=f_{xy}=0$， $C=f_{yy}=-2$

由 $\begin{cases}f_x'=0\\ f_y'=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4-2x=0\\ -4+2y=0\end{cases}$，解得驻点 $(2,-2)$

由于 $AC-B^2>0$， $A<0$，所以 $(2,-2)$ 是极大值点，极大值为 $f(2,-2)=8$

（2）令 $L(x,y,\lambda)=4x-4y-x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-9)$

由 $\begin{cases}L_x=4+2\lambda x=0\\ L_y=-4+2\lambda y=0\\ L_x=x^2+y^2-9=0\end{cases}$ 解得驻点 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$f_{\max}=f(2,-2)=8$， $f_{\min}=f\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)=-12\sqrt{2}-9$

五（12 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}x^n$ 的和函数 $S\left(x\right)$，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n2^n}$ 的和.

解: $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}=1$，收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$，

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}$，此级数发散;

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$，此级数发散。幂级数收敛域为 $\left(-1,1\right)$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$， 而 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x}{1-x}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n})'dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

所以 $S(x)=\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)$

令 $x=\frac{1}{2}$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}=S(\frac{1}{2})=1+\ln 2$

六（14 分）设 Σ 为半球面 $z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$，并取上侧，求曲面积分
$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(xz+\frac{1}{3}x^3\right)dydz+\left(\frac{1}{3}y^3-yz\right)dzdx-\left(x^2+y^2+1\right)zdxdy$ 的值.

解：补充平面 $\Sigma_1:z=1$（含于 $x^2+y^2\le 1$ 内）取其下侧。由高斯公式，得：

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_V dv-\iint\limits_{\Sigma_1}[-(x^2+y^2)]dxdy$$
$$=\iiint\limits_V dv-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2+1)rdr=\frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3})-\frac{3\pi}{2}=-\frac{5\pi}{6}$$

七（14 分）已知曲线积分 $\int\limits_L\left(e^x+f\left(x\right)\right)ydx+f'\left(x\right)dy$ 与路经无关，其中 $f\left(x\right)$ 二阶可导，并且 $f\left(0\right)=2,f'\left(0\right)=\frac{1}{2}$，求 $f\left(x\right)$ 的表达式.

解：由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得 $e^x+f(x)=f''(x)$，即 $f''(x)-f(x)=e^x$

特征方程为 $r^2-1=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-1$ 相应的齐次方程的通解为
$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

又由于 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，故设非齐次方程的特解为 $y^*=Axe^x$，

则 $(y^*)'=A(x+1)e^x$， $(y^*)''=A(x+2)e^x$。代入 $f''(x)-f(x)=e^x$ 解得 $A=\frac{1}{2}$

所以 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$

将 $f(0)=2, f'(0)=\frac{1}{2}$ 代入得 $C_1=C_2=1$，$f(x)=e^x+e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$

八（4 分）设 $\{a_n\}$ 为正项数列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, n=1,2,\cdots$，证明：（1）$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

证明：（1）由题意知：$S_{n-1}<S_n$，$\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}>0$，故 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 为正项级数.

其前 n 项部分和为 $\sum_{k=2}^{n+1}(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k})=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}<\frac{1}{S_1}$. 从而 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛.

（2）$\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$ （$n\geq 2$）

由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛，所以由正项级数比较审敛法知：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

九 （4 分）设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的正值连续函数，证明：$\iint\limits_D\left(f(x)+\frac{1}{f(y)}\right)dxdy\geq 2$，其中 $D: 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$.

证明：$\iint\limits_D\left(f(x)+\frac{1}{f(y)}\right)dxdy=\iint\limits_D f(x)dxdy+\iint\limits_D\frac{1}{f(y)}dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)dy+\int_0^1 dy\int_0^1\frac{1}{f(y)}dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{1}{f(y)}dy=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$$

$$=\int_0^1[f(x)+\frac{1}{f(x)}]dx\geq\int_0^1 2dx=2.$$

2005-0006 高等数学（下）

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得分	评阅人

1．曲面 $x-e^y+\ln z=0$ 在点（1，0，1）处的切平面方程为______________。

2．交换二重积分次序 $\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}f(x,y)dy=$______________________________。

3.设曲线L的方程为$x^2+y^2=1$,则$\int_L (x-y)^2 ds=$______________ 。

4．设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0<x\le\pi,\\ x^2-1, & -\pi<x\le 0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 以周期为 2π 的傅里叶级数在点 $x=-\pi$ 处收敛于______________ 。

5．微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为_$\underline{y=(x+c)\cos x}$ 。

一、1. $\underline{x-y+z=2}$

2. $\underline{\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx}$

3. $\underline{2\pi}$

4. $\underline{\pi^2}$

5. $\underline{y=(x+c)\cos x}$

二、1. A

2. A

3. C

4. B

5. D

二、

得分	评阅人

选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 5 条性质

①当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限存在，

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，

⑤ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微。

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质P推出性质Q，则下列结论完全正确的是（　　）

（A）④$\Rightarrow$⑤$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①。　　（B）④$\Rightarrow$⑤$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①。

（C）⑤$\Rightarrow$④$\Rightarrow$③$\Rightarrow$②。　　（D）⑤$\Rightarrow$③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①。

2．设曲面$\sum$的方程为$x^2+y^2+z^2=1$，$x \ge 0, y \ge 0$，$\sum_1$为$\sum$在第一卦限的部分，并且$\sum$和$\sum_1$均指向外侧，则下列结论不正确的是（　　）

（A）$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = 0$。　　（B）$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = 2\iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy$。

（C）$\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy = 0$。　　（D）$\iint\limits_{\Sigma} xydxdy = 0$。

3．设$u_n = (-1)^n \ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$，则级数（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$都收敛。　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$都发散。

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$发散。　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛。

4．$\ln y + c_1 = c_2 e^x$为微分方程（　B　）的通解。

（A）$yy'' = y'^2$　　（B）$yy'' - y'^2 = yy'$

（C）$yy'' - y'^2 = y^2$　　（D）$yy'' = y''$

5．设二阶非齐次线性微分方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$有三个线性无关的特解$y_1, y_2, y_3$，则该方程的通解为（ D　）

（A）$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$。　　（B）$y = c_1(y_1 - y_3) + c_2(y_2 - y_3)$。

（C）$y = c_1y_1 + c_2y_2 - (1-c_1-c_2)y_3$。（D）$y = c_1y_1 + c_2y_2 + (1-c_1-c_2)y_3$。

三、

得分	评阅人

（本题满分10分）设$z = f(xy, \ln x + g(y))$，其中f具有二阶连续偏导数，g可导，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解： $z_x = f_1 \cdot y + f_2 \cdot \frac{1}{x}$

$$z_{xy} = f_1 + y(f_{11} \cdot x + f_{12} \cdot g') + \frac{1}{x}(f_{21} \cdot x + f_{22} \cdot g')$$

$$= f_1 + xyf_{11} + (yg' + 1)f_{12} + \frac{1}{x}g'f_{22}$$

四、

得分	评阅人

（本题满分 10 分）求椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上的点到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的最长距离和最短距离。

解：设 (x, y) 为椭圆上任意一点，则该点到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{4 + 9}}$$

（法一）Lagrange 乘数法

构造 Lagrange 函数

$$F(x, y, \lambda) = (2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

则由
$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 4(2x + 3y - 6) + 2\lambda x = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 6(2x + 3y - 6) + 8\lambda y = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \\ \lambda = -\frac{55}{4} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ \lambda = \frac{5}{4} \end{cases}$$

又因为该问题最值一定存在，且可能极值点仅有两个

所以
$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left|\frac{8}{5} \times 2 + \frac{3}{5} \times 3 - 6\right| = \frac{1}{\sqrt{13}}$$
$$d_{\max} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left|-\frac{8}{5} \times 2 - \frac{3}{5} \times 3 - 6\right| = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

（法二）转化为无条件极值问题

椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

则 $d = \frac{1}{\sqrt{13}}|4\cos\theta + 3\sin\theta - 6|$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|5\sin(\theta+\alpha)-6\right| \quad （其中 \sin\alpha=\frac{4}{5}，\ \cos\alpha=\frac{3}{5}）$$

所以
$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|5-6\right|=\frac{1}{\sqrt{13}}$$
$$d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|-5-6\right|=\frac{11}{\sqrt{13}}$$

（法三）解析几何法

如图所示：点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)即为所求最值点

由隐函数微分法，将$x^2+4y^2=4$两边同时关于x求导得

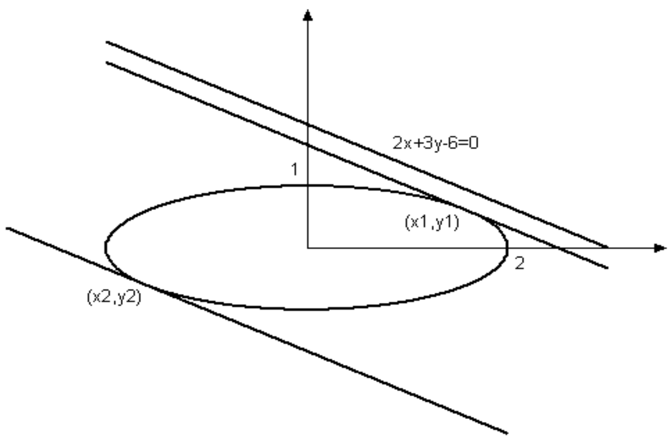
$$2x+8yy'=0 \quad 即 \quad y'=-\frac{x}{4y}$$

根据导数的几何意义，有$-\frac{x}{4y}=-\frac{2}{3}$

联立 $$x^2+4y^2=4$$

解得 $\begin{cases} x_1=\frac{8}{5} \\ y_1=\frac{3}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-\frac{8}{5} \\ y_2=-\frac{3}{5} \end{cases}$

所以
$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|\frac{8}{5}\times 2+\frac{3}{5}\times 3-6\right|=\frac{1}{\sqrt{13}}$$
$$d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|-\frac{8}{5}\times 2-\frac{3}{5}\times 3-6\right|=\frac{11}{\sqrt{13}}$$



五、

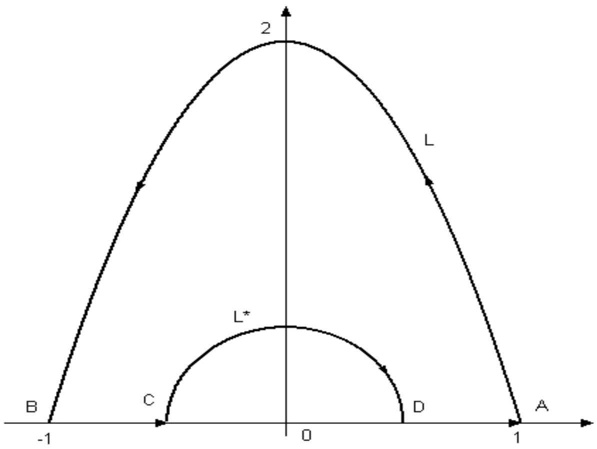
得分	评阅人

（本题满分 12 分）计算曲线积分 $I=\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$**，其中 L 为抛物线** $y=2-2x^2$ **上从点 A（1，0）到点 B（-1，0）的一段有向曲线。**

解：（法一）Green 公式

由题意，$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$



如图所示，其中半圆弧 L^* 的方程为 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le\pi$

则 $$I=\left(\oint_{L+\overline{BC}+L^*+\overline{DA}}+\int_{\overline{CB}}-\int_{L^*}+\int_{\overline{AD}}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=0+0+\int_0^{\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta+0$$

$$=\pi$$

注：用 Green 公式也可补上半平面的折线段（略）!

（法二）直接计算法

L ：$\begin{cases} x=x \\ y=2-2x^2 \end{cases}$，$x=1\to -1$

$$I=\int_1^{-1}\frac{x\cdot(-4x)-(2-2x^2)}{x^2+(2-2x^2)^2}dx$$

$$=4\int_0^1\frac{x^2+1}{4x^4-7x^2+4}dx=4\int_0^1\frac{1+\frac{1}{x^2}}{4x^2-7+\frac{4}{x^2}}dx$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{[2(x-\frac{1}{x})]^2+1}d[2(x-\frac{1}{x})]$$

$$=2\arctan[2(x-\frac{1}{x})]\Big|_{0^+}^{1}$$

$$=\pi$$

六、

得分	评阅人

（本题满分 13 分）计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx-dxdy$**，其中**$\Sigma$**是曲面**

$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$**的上侧。**

六、解：（法一）Gauss 公式

补平面 $\sum_1$: $z=0$ （$x^2+y^2\leq 1$），取下侧

记 $V=\left\{(r,\theta,z)\middle|0\leq\theta\leq 2\pi,0\leq r\leq 1,0\leq z\leq 1-r^2\right\}$

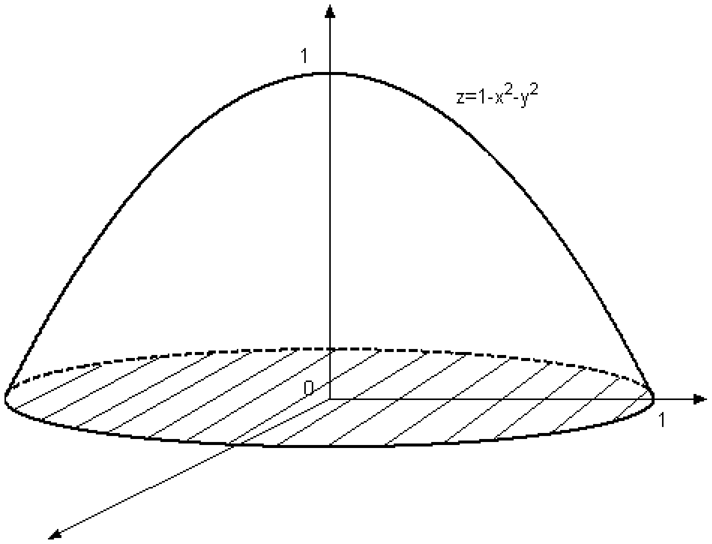
$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 1\right\}$

则 $I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)2x^3dydz+2y^3dzdx-dxdy$

$$=\iiint\limits_V(6x^2+6y^2)dV-\iint\limits_D dxdy$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{1-r^2}r^2\cdot rdz-\pi$$

$$=12\pi\int_0^1(r^3-r^5)dr-\pi=0$$



（法二）直接计算法（较繁，略）

七、

得分	评阅人

（本题满分 10 分）已知 $(f'(x)+x)ydx+f'(x)dy$ **为某函数的全微分，其中** $f(x)$ **具有二阶连续导数，且** $f(o)=0, f'(o)=1$**，求** $f(x)$ **。**

七、解：设 $y=f(x)$

Q $(f'(x)+x)ydx+f'(x)dy$ 为某函数的全微分

$\therefore$ $f'(x)+x=f''(x)$，即 $y''-y'=x$

（法一） 视为可降阶的二阶微分方程

令 $p=y'$ 且 $y''=\dfrac{dp}{dx}$

则有 $\dfrac{dp}{dx}-p=x$

$$\therefore \quad p=e^{-\int -dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx+C_1\right)$$

$$= e^x(\int xe^{-x}dx + C_1)$$

$$= e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)$$

$$= -x - 1 + C_1e^x$$

$$\therefore \quad y = \int(-x - 1 + C_1e^x)dx = -\frac{x^2}{2} - x + C_1e^x + C_2$$

又 Q $f(0) = 0$，$f'(0) = 1$

$$\therefore \quad \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = -1 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x) == 2e^x - \frac{x^2}{2} - x - 2$$

（法二） 视为二阶常系数非齐次线性微分方程

特征方程为 $r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0$，$r_2 = 1$

$\therefore$ 对应齐次线性微分方程的通解为 $Y = C_1 + C_2e^x$

设二阶常系数非齐次线性微分方程的一个特解为 $y^* = x(ax + b)$

将 $y^* = x(ax + b)$ 代入原方程得

$$2a - (2ax + b) = x \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = -1$$

即 $y^* = -\frac{1}{2}x^2 - x$

$\therefore$ 原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$

（下同法一，略）

八、

得分	评阅人

（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的值。

八、解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+2)x^{2n+2}}{(n+1)x^{2n}}\right| = x^2 \overset{令}{<} 1 \quad \Rightarrow \quad -1<x<1$

又 $\because$ $x=\pm 1$时原级数显然发散

$\therefore$ 原级数的收敛域为 $-1<x<1$

（2）设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = S(x)$ ， $-1<x<1$

（法一）$S(x) = \dfrac{1}{2}[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}]$

$$= \frac{1}{2}[(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})' + \frac{1}{1-x^2}]$$

$$= \frac{1}{2}[(\frac{x}{1-x^2})' + \frac{1}{1-x^2}]$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^2} \qquad -1<x<1$$

（法二）令 $t=x^2$，则原级数转化为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = (\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1})' = (\frac{t}{1-t})' = \frac{1}{(1-t)^2} \quad , \quad 0<t<1$$

即 $S(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2} \qquad -1<x<1$

（3）令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则由（2）的结论可得

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 2$$

得分	评阅人

九、（本题满分5分）设$\{a_n\}$为单调增加的有界正数列，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$收敛。

九、证明：∵ $\{a_n\}$为单调增加的有界正数列

$$\therefore\quad 0 \le 1-\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} \le \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

（法一）正项级数审敛法基本定理

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 的前 n 项和为 S_n

则

$$S_n \le \frac{1}{a_1}[(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)] = \frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_1) = \frac{a_{n+1}}{a_1}-1$$

由$\{a_n\}$为单调增加的有界正数列可知：数列$\{S_n\}$有界

$\therefore$ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛

（法二）正项级数比较审敛法

∵ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ 的前 n 项和数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_1}-1\right\}$ 单调有界

$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ 收敛

$\therefore$ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛

2005-2006《高等数学Ⅰ(2)》A卷参考答案

一、1. $x-y+z=2$

2. $\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx$

3. 2π

4. π^2

5. $y=(x+c)\cos x$

二、1. A

2. A

3. C

4. B

5. D

三、解： $z_x = f_1 \cdot y + f_2 \cdot \frac{1}{x}$

$$z_{xy} = f_1 + y(f_{11} \cdot x + f_{12} \cdot g') + \frac{1}{x}(f_{21} \cdot x + f_{22} \cdot g')$$

$$= f_1 + xyf_{11} + (yg' + 1)f_{12} + \frac{1}{x} g' f_{22}$$

四、解：设 (x, y) 为椭圆上任意一点，则该点到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{4 + 9}}$$

（法一）Lagrange 乘数法

构造 Lagrange 函数

$$F(x, y, \lambda) = (2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

则由 $\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 4(2x + 3y - 6) + 2\lambda x = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 6(2x + 3y - 6) + 8\lambda y = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \\ \lambda = -\frac{55}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ \lambda = \frac{5}{4} \end{cases}$

又因为该问题最值一定存在，且可能极值点仅有两个

所以 $d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left|\frac{8}{5} \times 2 + \frac{3}{5} \times 3 - 6\right| = \frac{1}{\sqrt{13}}$

$d_{\max} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left|-\frac{8}{5} \times 2 - \frac{3}{5} \times 3 - 6\right| = \frac{11}{\sqrt{13}}$

（法二）转化为无条件极值问题

椭圆的参数方程为

$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$， $0 \le \theta \le 2\pi$

则 $d = \frac{1}{\sqrt{13}}|4\cos\theta + 3\sin\theta - 6|$

$= \frac{1}{\sqrt{13}}|5\sin(\theta + \alpha) - 6|$ （其中 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$， $\cos\alpha = \frac{3}{5}$）

所以 $$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}|5-6|=\frac{1}{\sqrt{13}}$$ $$d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{13}}|-5-6|=\frac{11}{\sqrt{13}}$$

（法三）解析几何法

如图所示：点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)即为所求最值点

由隐函数微分法，将$x^2+4y^2=4$两边同时关于x求导得

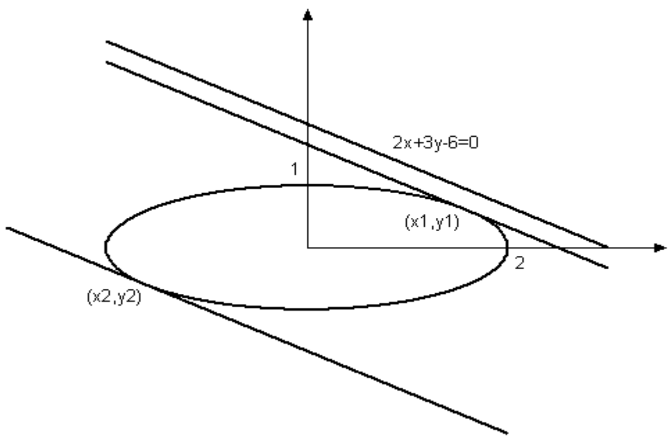
$$2x+8yy'=0 \quad \text{即} \quad y'=-\frac{x}{4y}$$

根据导数的几何意义，有$-\frac{x}{4y}=-\frac{2}{3}$

联立 $$x^2+4y^2=4$$

解得 $\begin{cases} x_1=\frac{8}{5} \\ y_1=\frac{3}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-\frac{8}{5} \\ y_2=-\frac{3}{5} \end{cases}$

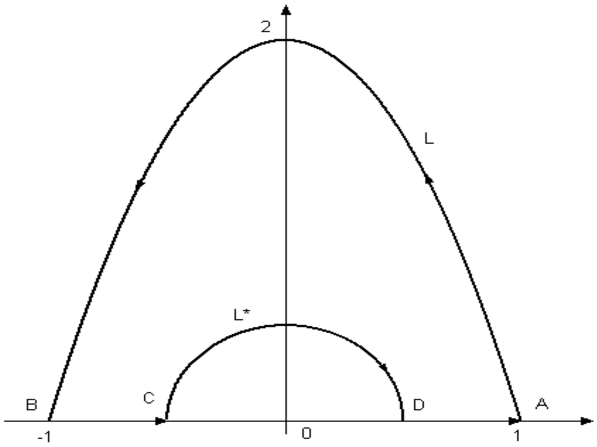
所以 $$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|\frac{8}{5}\times 2+\frac{3}{5}\times 3-6\right|=\frac{1}{\sqrt{13}}$$ $$d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|-\frac{8}{5}\times 2-\frac{3}{5}\times 3-6\right|=\frac{11}{\sqrt{13}}$$



五、解：（法一）Green 公式

由题意，$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$



如图所示，其中半圆弧L^*的方程为$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le\pi$

则 $$I=\left(\oint_{L+\overline{BC}+L^*+\overline{DA}}+\int_{\overline{CB}}-\int_{L^*}+\int_{\overline{AD}}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=0+0+\int_0^{\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta+0$$

$$=\pi$$

注：用 Green 公式也可补上半平面的折线段（略）！

（法二）直接计算法

L ：$\begin{cases} x=x \\ y=2-2x^2 \end{cases}$， $x=1\to -1$

$$I=\int_1^{-1}\frac{x\cdot(-4x)-(2-2x^2)}{x^2+(2-2x^2)^2}dx$$

$$=4\int_0^1\frac{x^2+1}{4x^4-7x^2+4}dx=4\int_0^1\frac{1+\frac{1}{x^2}}{4x^2-7+\frac{4}{x^2}}dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{1}{[2(x-\frac{1}{x})]^2+1} d[2(x-\frac{1}{x})]$$

$$=2\arctan[2(x-\frac{1}{x})]\Big|_{0^+}^{1}$$

$$=\pi$$

六、解：（法一）Gauss 公式

补平面 $\sum_1$: $z=0$ （$x^2+y^2\le 1$），取下侧

记 $V=\left\{(r,\theta,z)\middle|0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1,0\le z\le 1-r^2\right\}$

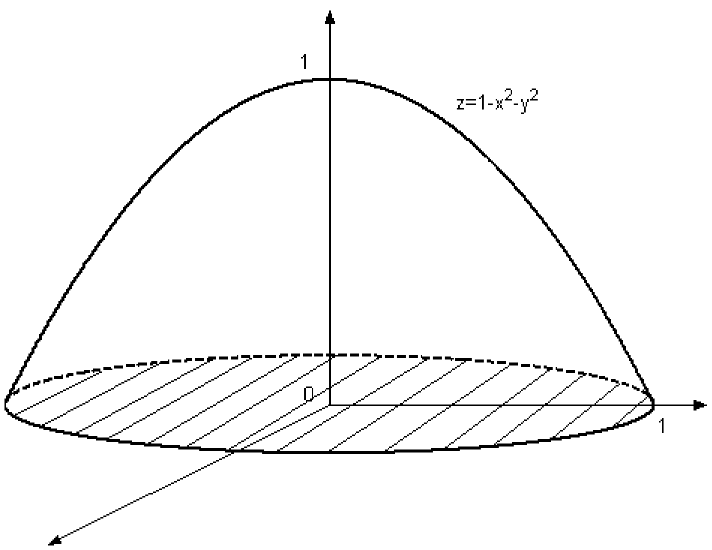
$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$

则 $I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)2x^3dydz+2y^3dzdx-dxdy$

$$=\iiint_V(6x^2+6y^2)dV-\iint_D dxdy$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}r^2\cdot rdz-\pi$$

$$=12\pi\int_0^1(r^3-r^5)dr-\pi=0$$



（法二）直接计算法（较繁，略）

七、解：设 $y=f(x)$

Q $(f'(x)+x)ydx+f'(x)dy$ 为某函数的全微分

$\therefore$ $f'(x)+x=f''(x)$，即 $y''-y'=x$

（法一） 视为可降阶的二阶微分方程

令 $p=y'$ 且 $y''=\dfrac{dp}{dx}$

则有 $\dfrac{dp}{dx}-p=x$

$$\therefore \quad p=e^{-\int -dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx+C_1\right)$$

$$=e^{x}\left(\int xe^{-x}dx+C_1\right)$$

$$=e^{x}(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1)$$

$$=-x-1+C_1e^{x}$$

$$\therefore \quad y=\int(-x-1+C_1e^{x})dx=-\frac{x^2}{2}-x+C_1e^{x}+C_2$$

又 Q $f(0)=0$，$f'(0)=1$

$$\therefore \quad \begin{cases}0=C_1+C_2\\ 1=-1+C_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=2\\ C_2=-2\end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x)==2e^{x}-\frac{x^2}{2}-x-2$$

（法二） 视为二阶常系数非齐次线性微分方程

特征方程为 $r^2-r=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=0$，$r_2=1$

$\therefore$ 对应齐次线性微分方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^{x}$

设二阶常系数非齐次线性微分方程的一个特解为

$y^*=x(ax+b)$

将 $y^* = x(ax+b)$ 代入原方程得

$$2a-(2ax+b)=x \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{2},\ b=-1$$

即 $y^* = -\frac{1}{2}x^2 - x$

$\therefore$ 原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$

（下同法一，略）

八、解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{2n+2}}{(n+1)x^{2n}}\right| = x^2 \overset{令}{<} 1 \quad \Rightarrow \quad -1<x<1$

又 $\because$ $x=\pm 1$ 时原级数显然发散

$\therefore$ 原级数的收敛域为 $-1<x<1$

（2）设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = S(x)$ ， $-1<x<1$

（法一）$S(x) = \frac{1}{2}[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}]$

$$= \frac{1}{2}[(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})' + \frac{1}{1-x^2}]$$

$$= \frac{1}{2}[(\frac{x}{1-x^2})' + \frac{1}{1-x^2}]$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^2} \qquad -1<x<1$$

（法二）令 $t=x^2$，则原级数转化为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = (\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1})' = (\frac{t}{1-t})' = \frac{1}{(1-t)^2} \quad , \quad 0<t<1$$

即 $S(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2} \qquad -1<x<1$

（3）令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则由（2）的结论可得

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$$

九、证明：$\because$ $\{a_n\}$为单调增加的有界正数列

$$\therefore \quad 0\le 1-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\le\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

（法一）正项级数审敛法基本定理

设$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$的前$n$项和为$S_n$

则

$$S_n\le\frac{1}{a_1}[(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)]=\frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_1)=\frac{a_{n+1}}{a_1}-1$$

由$\{a_n\}$为单调增加的有界正数列可知：数列$\{S_n\}$有界

$\therefore$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$收敛

（法二）正项级数比较审敛法

$\because$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$的前$n$项和数列$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_1}-1\right\}$单调有界

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$收敛

$\therefore$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$收敛

合肥工业大学试卷

2006-2007 学年第__二__学期　课程名称__高等数学（下）__

一、填空题　（每小题 3 分，满分 15 分）

1、旋转曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,2,4)$处的法线方程为$\underline{\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-4}{-1}}$.

2、设 L 为半圆 $x^2+y^2=r^2, x\geq 0$，则 $\int_L (x^2+y)ds = \underline{\dfrac{\pi}{2}r^3}$.

3、设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部，则 $\iint\limits_{\Sigma} zdS =$ $\underline{\pi a(a^2-h^2)}$.

4、设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leq 0\\ 1+x^2, & 0<x\leq \pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的 Fourier 在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{\pi^2}{2}}$.

5、函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处的方向导数最大值等于 $\underline{\sqrt{21}}$.

二、选择题（每小题 3 分，满分 15 分）

1、函数 $u=xyz$ 在附加条件下 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}$ $(x>0, y>0, z>0, a>0)$ 下的极值等于（ $A.$ ）

$A.\ 27a^3$ $B.\ 9a^3$ $C.\ 3a^3$ $D.\ a^3$

2、设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^{1} f(x,y)dy$ 等于（ $B.$ ）

$A.\ \int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$ $B.\ \int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$

$C.\ \int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$ $D.\ \int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$

3、设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的某邻域内有定义，且有

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则下列结论不正确的是（ $D.$ ）

$A.\ f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续 $B.\ f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

$C.\ f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微 $D.\ f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处某方向 l 的方向导数不存在

4、设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+n\alpha+1}{n}\pi$，其中$\alpha$为常数，则下列结论正确的是（ $C.$ ）

$A.$当$\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数发散

$B.$当$\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数绝对收敛

$C.$当$\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数条件收敛

$D.$当$\alpha\neq0,\pm1,\pm2,\cdots$ 等整数时，级数条件收敛

5、方程$y''-y'=e^x+1$的一个特解形式为（ $B.$ ）

$A.\ ae^x+b$　　　$B.\ axe^x+b$　　　$C.\ ae^x+bx$　　　$D.\ axe^x+bx$

三（12 分）、设$z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中$f(t)$二阶可导，$g(u,v)$具有连续的二阶偏导数，求dz及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'+xg_2'$。

$$dz=(2f'+g_1'+yg_2')dx+(-f'+xg_2')dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[2f'+g_1'+yg_2']=-2f''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''$$

四（12 分）、设D为 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2,x\ge0,y\ge0\right\}$，计算$\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|dxdy$。

解：记$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge0,y\ge0\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2\le 2,x\ge0,y\ge0\right\}$

则$D=D_1\cup D_2,D_1D_2=\phi$。

$$\begin{aligned}\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|dxdy&=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}(r^2-1)rdr\\&=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\frac{\pi}{2}[(\frac{(\sqrt{2})^4}{4}-\frac{(\sqrt{2})^2}{2})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})]=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

五（12 分）已知点 $O(0,0)$ 及点 $A(1,1)$，且曲线积分

$$I=\int_{\overset{\frown}{OA}}(ax\cos y-y^2\sin x)dx+(by\cos x-x^2\sin y)dy$$

与路径无关，试确定常数 a,b，并求 I。

解： $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-ax\sin y-2y\sin x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-by\sin x-2x\sin y$

由题意得：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，也即：$-ax\sin y-2y\sin x=-by\sin x-2x\sin y$

从而 $a=b=2$

由于积分与路径无关，所以可取积分路径为：

自点 $O(0,0)$ 到 $B(1,0)$，再到点 $A(1,1)$

$I=\int_0^1 2xdx+\int_0^1(2y\cos 1-\sin y)dy=2\cos 1$。

六（14 分）、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 $\sum$ 为有向曲 $z=x^2+y^2$

$(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向夹角为锐角。

解： 添加平面：$\Sigma_0:z=1(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，则 $\sum_0$ 与 $\sum$ 构成封闭曲面，设其所围成的区域为 Ω。由 Gauss 公式得：

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}$$

$$=-3\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=-3\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}dxdy+\pi=-3\int_0^1\pi zdz+\pi=-\frac{\pi}{2}$$

七（14 分）、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛域及和函数，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$的和。

解: 先求收敛域。由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$得收敛半径$R=1$，收敛区间为$(-1,1)$。

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，该级数发散；当$x=-1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$，

该交错级数收敛。故幂级数的收敛域为$[-1,1)$。

设和函数为$s(x)$，即$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$，$x\in[-1,1)$. 显然$s(0)=a_0=1$

在$xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$的两边求导得 $[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1}x^{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$.

对上式从 0 到x积分，得 $xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$.

于是，当$x\neq 0$时，有$s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$.

从而$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 1, \quad x=0\end{cases}$.

由和函数在收敛域上的连续性，$S(-1)=\lim_{x\to -1^+}S(x)=\ln 2$.

综上得$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1 & x=0\end{cases}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}=S(\frac{1}{2})=-2\ln\frac{1}{2}=2\ln 2$$

八（6 分）求微分方程$y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的特解。

解: 令$y'=p$，则$y''=p'$。原方程化为:

$p'(x+p^2)=p$，即

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p$$

$$x=e^{\int\frac{dp}{p}}(\int pe^{-\int\frac{dp}{p}}dp+C_1)=p(\int dp+C_1)=p(p+C_1)$$

由 $p|_{x=1}=y'(1)=1$ 得 $C_1=0$ 故 $x=p^2$。

$\because\ y'(1)=1$

$\therefore\ p=\sqrt{x}$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$

解得：$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$

又 $y(1)=1$，$C_2=\dfrac{1}{3}$，则特解为：$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$

2007-2008 高等数学（下）卷 A（含答案）

一 填空（每题 3 分，共 15 分）

1. 与两直线 $\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，

   且过原点的平面方程是 $\underline{\quad x-y+z=0\quad}$

2. 若 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 为 $f(x)=|x|(x\in[-\pi,\pi])$ 展开的余弦级数，则 $a_2=\underline{\quad 0\quad}$

3. 二次积分 $\int_0^1dx\int_x^1e^{-y^2}dy$ 的值等于 $\underline{\quad\frac{1}{2}(1-e^{-1})\quad}$

4. 微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解是 $\underline{\quad e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)\quad}$

5. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z+1)^2dS=$ $\underline{\ 8\pi\ }$

二 选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

则在原点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$(　　)

（A）不连续，　（B）偏导数不存在，　（C）偏导数存在且连续，（D）偏导数不连续但可微

2. 已知$(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$为某一函数$f(x,y)$的全微分。则$a$

和b分别为（　　）

（A）-2，2　　（B）2,-2　　（C）-3，3　　（D）3，-3

3. 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则此级数在$x=2$处（　　）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛　　（C）发散　　（D）敛散性无法判定

4. 设$f(x,y)$在有向曲线L上连续，其中L为上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, y\ge 0,$起点$A(-a,0),$终点$B(a,0),$则以下结论不正确的是（　　）

（A）当$f(-x,y)=-f(x,y)$时，　$\int_L f(x,y)ds=0$，

（B）当$f(-x,y)=f(x,y)$时，　$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_1}f(x,y)ds$，其中$L_1$为$L$的右半部分

（C）$\int_L f(x,y)ds=\int_{\pi}^{0}f(a\cos\theta,b\sin\theta)\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$

（D）$\int_L f(x,y)dy=\int_{\pi}^{0}f(a\cos\theta,b\sin\theta)b\cos\theta d\theta$

5. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$　（　　）

（A）发散　　（B）条件收敛　　（C）绝对收敛　　（D）敛散性无法判定

三 （本题满分 10 分）已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}$，

计算　$\iint\limits_D \min\{xy,2\}dxdy$.

$$\iint\limits_D \min\{xy,2\}dxdy=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D_2}2dxdy$$

$$=\int_1^2 dx\int_0^{\frac{2}{x}}xydy+2\int_1^2 dx\int_{\frac{2}{x}}^{2}dy=\int_1^2 x(\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{\frac{2}{x}}dx+2\int_1^2(2-\frac{2}{x})dx$$

$$=\int_1^2 x(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x^2})dx+4-4\ln 2 \quad =2\int_1^2 \frac{dx}{x}+4-4\ln 2=4-2\ln 2$$

四（本题满分 10 分）求原点到曲面Σ：$(x-y)^2-z^2=1$的最短距离。

设（x,y,z）为曲面Σ上的点，原点$(0,0,0)$到Σ的距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。为了计算方便，求$d^2=x^2+y^2+z^2$在$(x-y)^2-z^2=1$条件下的极值。

解 设 Lagrange 函数为：$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1]$

$$令\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ F_y'=2y-2\lambda(x-y)=0 \\ F_z'=2z-2\lambda z=0 \\ F_\lambda'=(x-y)^2-z^2-1=0 \end{cases}$$

解得$\lambda=1$或$z=0$，当$\lambda=1$显然不成立。

当$z=0$时得$\lambda=-\frac{1}{2}$， $x_1=\frac{1}{2}$， $y_1=-\frac{1}{2}$， $x_2=-\frac{1}{2}$， $y_2=\frac{1}{2}$

$$\therefore d_1^2=d_2^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

故最短距离$d=\frac{\sqrt{2}}{2}$

五 （本题满分 10 分）计算$\int_L (x+y^3)dx-(x^3-y)dy$，其中$L$为上半圆周$x^2+y^2=a^2,(y\ge 0)$，从起点$A(-a,0)$到终点$B(a,0)$，其中$a$为实常数。

$$\int_L (x+y^3)dx-(x^3-y)dy$$

$$=\oint_{L+\overline{BA}}(x+y^3)dx-(x^3-y)dy-\int_{\overline{BA}}(x+y^3)dx-(x^3-y)dy$$

$$\overset{Green}{=}\iint_D 3(x^2+y^2)dxdy-\int_{\overline{BA}} \quad =3\int_0^\pi d\theta\int_0^a r^3dr+\int_{\overline{AB}} \quad =\frac{3}{4}\pi a^4+\int_{-a}^a xdx$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^4+a^2$$

六 （本题满分 14 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数，

并计算$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}$.

解：先求收敛域，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+3}x^{2n+2}}{(-1)^{n}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n}}\right|=|x|^2$

当 $|x|^2<1$，即 $|x|<1$ 时级数收敛；当 $|x|^2>1$，即 $|x|>1$ 时级数收敛，所以收敛半径为 1

$x=1$ 时，$\sum(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 条件收敛，

$x=-1$ 时，$\sum(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 条件收敛，原级数收敛域 $[-1,1]$

设和函数为 $S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}\qquad x\in[-1,1]$$

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\left[xS(x)\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\qquad(|x|\le 1)$$

对上式从 0 到 x 积分

$$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^x=\arctan x\qquad(|x|\le 1)$$

$$x\neq 0\text{ 时，}\ S(x)=\frac{\arctan x}{x}\text{；}\quad x=0\text{ 时，}\ S(x)=0$$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x} & |x|\le 1,x\neq 0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2n}=\frac{1}{3}S(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{3}g\sqrt{3}g\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

七（本题满分 12 分）设曲面 Σ 是 $z=2-x^2-y^2(1\le z\le 2)$ 的上侧

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-x)dydz+(z-y)dzdx+(x-z)dxdy$.

补做 Σ_1：$Z=1\ \ (x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧，$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-x)dydz+(z-y)dzdx+(x-z)dxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

其中 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\overset{Gauss}{=}-3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=-3\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z}dxdy=-3\int_1^2\pi(2-z)dz=-\frac{3}{2}\pi$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}=-\iint\limits_{D}(x-1)dxdy=0+\pi$$

故 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-\frac{3}{2}\pi-\pi=-\frac{5}{2}\pi$

八 （本题满分 8 分）已知函数$u=u(x,y)$**满足方程**$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$**…①**

函数$v=v(x,y)$**满足方程**$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ **…②**

若利用变换$u(x,y)=v(x,y)e^{\alpha x+\beta y}$**可将方程①化为方程②，试求实常数**$\alpha,\beta$**。**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{\alpha x+\beta y}+\alpha v e^{\alpha x+\beta y}=(\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha v)e^{\alpha x+\beta y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha^2 v)e^{\alpha x+\beta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\frac{\partial v}{\partial y}+\beta v)e^{\alpha x+\beta y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\beta\frac{\partial v}{\partial x}+\beta^2 v)e^{\alpha x+\beta y}$$

将上述诸式代入（1）得：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(2+2\alpha)\frac{\partial v}{\partial x}+(2-2\beta)\frac{\partial v}{\partial y}+(\alpha^2-\beta^2+2\alpha+2\beta)v=0$$

$$\begin{cases}2+2\alpha=0\\2-2\beta=0\\\alpha^2-\beta^2+2\alpha+2\beta=0\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=1\end{cases}$$

九 （本题满分 6 分）设正项数列$\{a_n\}$**单调减少，且级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$**发散，试讨**

论 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})$ **的敛散性.**

解：依题知：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\exists$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 则 $a>0$，且 $a_n>a, n=1,2,\cdots$

而 $\left|(-1)^n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\right|=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}<\frac{a_n-a_{n+1}}{a}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a}$ 收敛，

由比较审敛法，原级数绝对收敛。

合肥工业大学 2010－2011 学年第二学期《高等数学 A2》试卷 A **参考答案**

一、简答题（答题时除第1小题外，均需要写出主要解题过程，每小题5分，本题共20分）

1、试用箭头表示二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处下列诸多概念之间的关系：连续、可微、偏导存在、偏导连续、任意方向 l 的方向导数存在。

$$\begin{tikzcd}
 & \text{任意方向 } l \text{ 的方向导数存在} & \text{偏导存在} \\
\text{偏导连续} \arrow[r] & \text{可微} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \text{连续}
\end{tikzcd}$$

评分细则：本小题满分5分，全部四个箭头正确标出，且无错误箭头标出，得满分，每标错一个箭头扣1分，直至扣光。

2、计算 $\oint_L(x^2+y)ds$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$。

解法一：利用对称性知 $\oint_L yds=0$，又 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta, \theta\in[0,2\pi]$，

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{2\pi}R^2\cos^2\theta Rd\theta=R^3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\pi R^3$。

解法二：利用对称性知 $\oint_L yds=0$，

$$\oint_L x^2ds=\int_L y^2ds=\frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)ds=\frac{1}{2}R^2\int_L 1ds=\frac{1}{2}R^2\cdot2\pi R=\pi R^3$$

$$\oint_L(x^2+y)ds=\pi R^3$$

3、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的上半部分。

解：　$\Sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D,$ 其中 $D: x^2+y^2\le R^2$。

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\text{，}\quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

因而 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} zdS = R\iint\limits_{D} dxdy = \pi R^3$。

4、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x$，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数。

解：$\because f(x)=x$ 是奇函数，

$\therefore a_n = 0, n=1,2,\cdots$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, n=1,2,\cdots .$$

因此，当 $x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots$ 时，

$$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \cdots);$$

当 $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots$ 时，

该级数收敛于0。

二、设 $w = f(x+y+z, xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$。（12分）

解：令 $u = x+y+z, v = xyz$，则 $w = f(u,v)$，

记 $f_1' = \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}$，$f_2' = \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ 等。

则 $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f_1' + yzf_2'$，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_1' + yzf_2') = \frac{\partial f_1'}{\partial y} + zf_2' + yz\frac{\partial f_2'}{\partial y},$$

又 $\dfrac{\partial f_1'}{\partial y} = f_{11}'' + xzf_{12}''$，$\dfrac{\partial f_2'}{\partial y} = f_{21}'' + xzf_{22}''$，

故 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + z f_2' + z(x+y) f_{12}'' + xyz^2 f_{22}''$。

三、　求曲面 $xy - z^2 + 1 = 0$ 上离原点最近的点。（12分）

解：设 (x, y, z) 为曲面上任意一点，则该点到原点的距离 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，

设Lagrange函数为：$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xy - z^2 + 1)$

令 $\begin{cases} L_x' = 2x + \lambda y = 0 \\ L_y' = 2y + \lambda x = 0 \\ L_z' = 2z - 2\lambda z = 0 \\ xy - z^2 + 1 = 0 \end{cases}$，

解得驻点为 $(0,0,\pm 1,1),(\pm 1,\mp 1,0,2)$。

根据题意，最近的点必存在，且只能是 $(0,0,\pm 1),(\pm 1,\mp 1,0)$，

比较函数值：$d(0,0,\pm 1) = 1, d(\pm 1,\mp 1,0) = \sqrt{2}$，

因而所求点为 $(0,0,\pm 1)$。

四、　设 $D: |x| \le 1, |y| \le 1$，计算 $\iint\limits_D |y - x| dxdy$。（10分）

解：用 $y = x$ 将区域D分为 D_1, D_2。

$$原式 = \iint\limits_{D_1} (y - x) dxdy + \iint\limits_{D_2} (x - y) dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x}^{1} (y - x) dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} (x - y) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (\frac{y^2}{2} - xy) \bigg|_x^1 dx + \int_{-1}^{1} (xy - \frac{y^2}{2}) \bigg|_{-1}^{x} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (xy - \frac{y^2}{2}) \bigg|_1^x dx + \int_{-1}^{1} (xy - \frac{y^2}{2}) \bigg|_{-1}^{x} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2 + 1) dx = \frac{8}{3}$$

五、　设曲线积分 $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 有连续导数且

$\varphi(0)=0$，求 $\varphi(x)$，并计算 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$。（10分）

解：令 $P=xy^2$，$Q=y\varphi(x)$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi^{'}(x)$。

由题知，该曲线积分与路径无关，

$\therefore 2xy=y\varphi^{'}(x)$，结合 $\varphi(0)=0$，解得 $\varphi(x)=x^2$。

故 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy=\dfrac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$。

六、　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$ 的收敛域与和函数。（15分）

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)3^n}{n3^{n-1}}=3, R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{3}.$

$x=\pm\dfrac{1}{3}$时该级数发散，故其收敛域为 $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$。

令 $t=3x$，设 $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$，且 $S(0)=1$，$-1<t<1$

$\int_0^t S(u)du=\int_0^t\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu^{n-1}du=\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n=\dfrac{t}{1-t}$，

$\therefore S(t)=(\dfrac{t}{1-t})'=\dfrac{1}{(1-t)^2}$，

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}=\dfrac{1}{(1-3x)^2}(-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3})$。

七、　计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。（15分）

解：记S为平面 $z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 的下侧，Ω 为 Σ 与S 所围的空间区域。

$I=\oiint\limits_{\Sigma+S}-\iint\limits_{S}$

其中

$$\oiint_{\Sigma+S} \underline{\underline{\text{由}Gauss\text{公式}}} 3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz\text{，}$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathbf{sin}\phi\mathbf{d}\phi\int_0^a\mathbf{r}^4\mathbf{dr}=\frac{6}{5}\pi a^5$$

$$\iint_S \ =\iint_S ay^2dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le a^2}y^2dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}a\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr=-\frac{1}{4}\pi a^5$$

故原式$=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5$。

八、设$u_n>0$，部分和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$的敛散性。（6分）

解：设$T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{u_i}{S_i^2}=\frac{u_1}{S_1^2}+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{S_i-S_{i-1}}{S_i^2}$

$$\le\frac{1}{S_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{S_i-S_{i-1}}{S_iS_{i-1}}$$

$$=\frac{1}{S_1}+\sum_{i=2}^{n}(\frac{1}{S_{i-1}}-\frac{1}{S_i})$$

$$=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{2}{S_1}$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$收敛。

2011----2012 学年第二学期期末考题解答

一. 填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1. 过直线$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$且垂直于平面$3x+2y-z=5$的平面方程是__________.

【解】应填： $x-8y-13z+9=0$**.**

直线L的方向向量$\vec{s}=\{2,-3,2\}$．已知平面的法向量$\vec{n}_1=\{3,2,-1\}$，设所求平面的法向量为$\vec{n}$，由题意知$\vec{n}\perp\vec{s}$且$\vec{n}\perp\vec{n}_1$，故可取

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \{-1, 8, 13\},$$

由条件知，所求平面过点 $P_0(1,-2,2)$，

于是所求平面方程为

$$-(x-1) + 8(y+2) + 13(z-2) = 0,$$

即

$$x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

2. 设 $x^2 + 2xy + y + ze^z = 1$，则 $dz\big|_{(0,1)} =$ _________.

【解】应填： $-2dx - dy$.

由 $x^2 + 2xy + y + ze^z = 1$，两边求全微分，得

$$2xdx + 2ydx + 2xdy + dy + (1+z)e^z dz = 0,$$

当 $x=0, y=1$ 时，代入原方程得 $z=0$，

所以

$$dz\big|_{(0,1)} = -2dx - dy.$$

3. 椭圆抛物面 Σ：$z = 2x^2 + y^2$ 在点 $P_0(1,-1,3)$ 处的法线方程是___________.

【解】应填： $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

曲面 Σ 在点 $P_0(1,-1,3)$ 处的法向量可取为

$$\vec{n} = \left\{4x, 2y, -1\right\}\big|_{(1,-1,3)} = \left\{4, -2, -1\right\},$$

于是曲面 Σ 在点 $P_0(1,-1,3)$ 处的法线方程为

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}.$$

4. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积为_________.

【解】应填：$\frac{\pi}{6}$.

$$V=\iiint_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{r}dz=\frac{\pi}{6}.$$

5. 设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L\left(x^2-xy+y^2\right)ds=$____________ .

【解】应填：π .

由对称性，代入技巧及几何意义可得

$$\int_L\left(x^2-xy+y^2\right)ds=\int_L ds+0=\pi$$

二. 选择题(每小题 3 分, 满分 15 分)

1．方程 $y''-3y'+2y=1+2x-3e^x$ 的特解形式为（　　）.

(A) $(ax+b)e^x$　　(B) $(ax+b)xe^x$

(C) $ax+b+ce^x$　　(D) $ax+b+cxe^x$

【解】选（D）

2. 设 $u_n=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（　　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

【解】选（C）

3．二元函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处都连续是 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微分的（　　）

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

【解】若 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 都连续，则 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微分，选(A)

4. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=$（　　　）

（A）$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$　　（B）$\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$　　（C）$\frac{1}{2}\sqrt{2}$　　（D）$\frac{1}{3}\sqrt{2}$

【解】　原积分 $=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{1+y^3}}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.　　选（B）

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & -\pi\le x<0 \\ x-\pi & 0\le x<\pi \end{cases}$，则周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=2\pi$ 处收敛于__________.

（A）$-\frac{\pi}{2}$　　（B）$-\pi$　　（C）0　　（D）π^2

【解】选(A)

三. （10 分）设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f 有二阶连续偏导数，g 有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】根据复合函数求偏导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot(-\frac{y}{x^2}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot(-\frac{y}{x^2})\right)$$

$$=f_1'+y[f_{11}''x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-g''\cdot\frac{y}{x^3}-g'\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{y}{x^3}g''-\frac{1}{x^2}g'$$

四.（10 分）求 $z=f(x,y)=x^2-y^2$ 在闭区域 D：$\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$ 上的最大值和最

小值.

【解】在 D 的内部,

$$\begin{cases} f_x' = 2x = 0 \\ f_y' = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ 为驻点,且 } f(0,0)=0$$

在 D 的边界上,

由 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-\dfrac{x^2}{4} \Rightarrow z=x^2-y^2=\dfrac{5x^2}{4}-1 \quad (-2\le x\le 2)$

$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{5x}{2}=0 \Rightarrow x=0$,此时, $y=\pm1,$,则有 $f(0,\pm1)=-1,\quad f(\pm2,0)=4$

比较上述函数值知,

函数 $z=f(x,y)=x^2-y^2$ 在 D 上的最大值为 4,最小值为-1.

五. (10 分) 求微分方程 $y''=\dfrac{y'}{x}+xe^x$ 的通解.

【解】不显含 y,故令 $y'=p,$ 则 $y''=p'$,代入原方程得 $p'-\dfrac{1}{x}p=xe^x$,

利用通解公式求得通解为

$$p=x(e^x+C_1),$$

积分得原方程通解为

$$y=(x-1)e^x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2.$$

六. (12 分)(Ⅰ)试确定可导函数 $f(x)$,使在右半平面内,$y[2-f(x)]dx+xf(x)dy$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分,其中 $f(1)=2$; (Ⅱ)求 $u(x,y)$;

【解】(Ⅰ) $P=y[2-f(x)]$, $Q=xf(x)$.

因为 $y[2-f(x)]dx+xf(x)dy$ 是函数 $u(x,y)$ 的全微分,所以有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,

即

$$f(x)+xf'(x)=2-f(x),$$

故

$$xf'(x)+2f(x)=2.$$

上述微分方程的通解为

$$f(x)=1+\frac{C}{x^2}.\ 由\ f(1)=2\ 得\ C=1,$$

所以

$$f(x)=1+\frac{1}{x^2}.$$

（Ⅱ）在右半平面内取 $(x_0,y_0)=(1,0)$，则

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y)\,dy=\int_0^y (x+\frac{1}{x})\,dy=y(x+\frac{1}{x}).$$

七.（12 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛域及和函数.

【解】易求得其收敛域为 $(-1,1)$，令

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}=x\cdot S_1(x)$， 其中 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$，

两边积分

$$\int_0^x S_1(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n,$$

再积分

$$\int_0^x (\int_0^x S_1(x)\,dx)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (n+1)x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}.$$

因此

$$S_1(x)=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

故原级数的和

$$S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1).$$

八.（12 分） 计算积分 $I=\iint_{\Sigma}(y-z)\,dzdx+(x+2z)\,dxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2\quad(0\le z\le 1)$，取下侧.

【解】补 $S_0: z=1\ (x^2+y^2\ ?\ 1)$, 取上侧,

设Σ与Σ_0围成空间区域Ω，Ω及Σ_0在xOy平面上的投影区域$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$.

由 Gauss 公式，

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy-\iint_{\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial y}(y-z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+2z)]dv-\iint_{\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy$$

$$=3\iiint_{\Omega}dv-\iint_{\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy.$$

因为Σ_0垂直于zOx平面，Σ_0在zOx平面上的投影区域面积为零，

所以 $\iint_{\Sigma_0}(y-z)dzdx=0$.

$$I=3\iint_{D_{xy}}[\int_{x^2+y^2}^{1}dz]dxdy-\iint_{D_{xy}}[x+2(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(3-5x^2-5y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(3-5r^2)rdr=\frac{\pi}{2}.$$

九.（4 分） 设函数$\varphi(y)$具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上，曲线积分$\oint_L\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数．证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有$\oint_C\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$；

【证明】将C分解为：$C=l_1+l_2$，另作一条曲线l_3围绕原点且与C相接，则

$$\oint_C\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=\oint_{l_1+l_3}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\oint_{l_2+l_3}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0.$$