

# 第四章 电路定理(Circuit Theorems)

4.1 叠加定理 (Superposition Theorem)

4.2 替代定理 (Substitution Theorem)

4.3 戴维宁定理和诺顿定理  
(Thevenin-Norton Theorem)

**重点**

掌握叠加定理和戴维宁定理

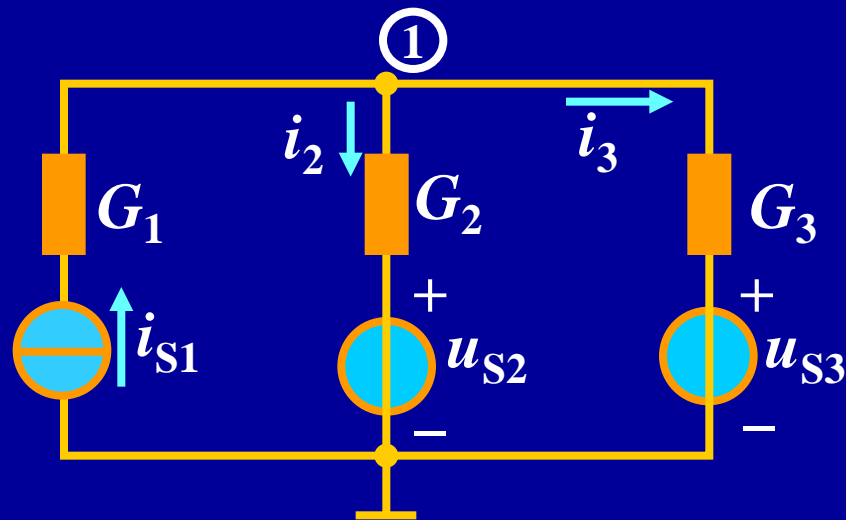
# 4.1 叠加定理 (Superposition Theorem)

## 1. 叠加定理

在线性电路中，任一支路的电流（或电压）可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时，在该支路产生的电流（或电压）的代数和。

## 2. 定理的证明

用结点法：



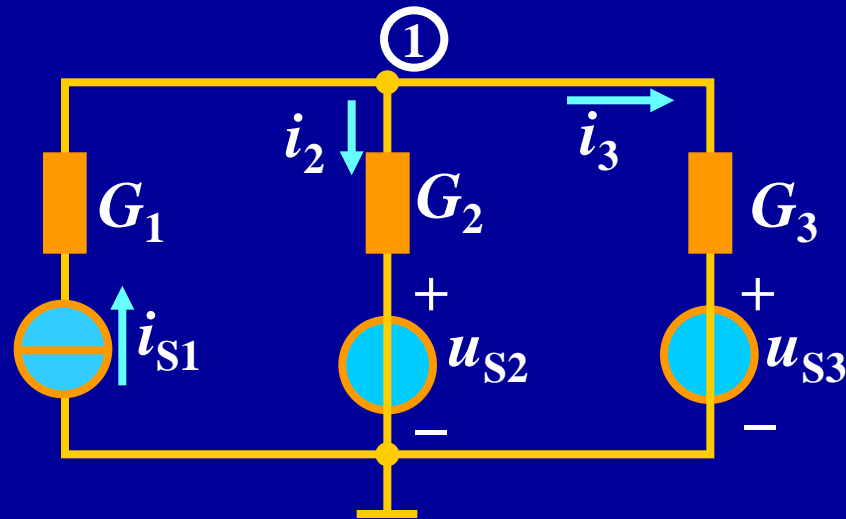
$$(G_2 + G_3)u_{n1} = G_2 u_{S2} + G_3 u_{S3} + i_{S1}$$

$$u_{n1} = \frac{i_{s1}}{G_2 + G_3} + \frac{G_2 u_{s2}}{G_2 + G_3} + \frac{G_3 u_{s3}}{G_2 + G_3}$$

或表示为:

$$u_{n1} = a_1 i_{s1} + a_2 u_{s2} + a_3 u_{s3}$$

$$= u_{n1}^{(1)} + u_{n1}^{(2)} + u_{n1}^{(3)}$$



支路电流为:

$$i_2 = (u_{n1} - u_{s2})G_2 = \frac{G_2}{G_2 + G_3} i_{s1} - \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} u_{s2} + \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} u_{s3}$$

$i_3 = (u_{n1} -$  结点电压和支路电流均为各电源的一次函数，均可看成各独立电源单独作用时，产生的响应之叠加。

$$= i_3^{(1)} + i_3^{(2)} + i_3^{(3)}$$

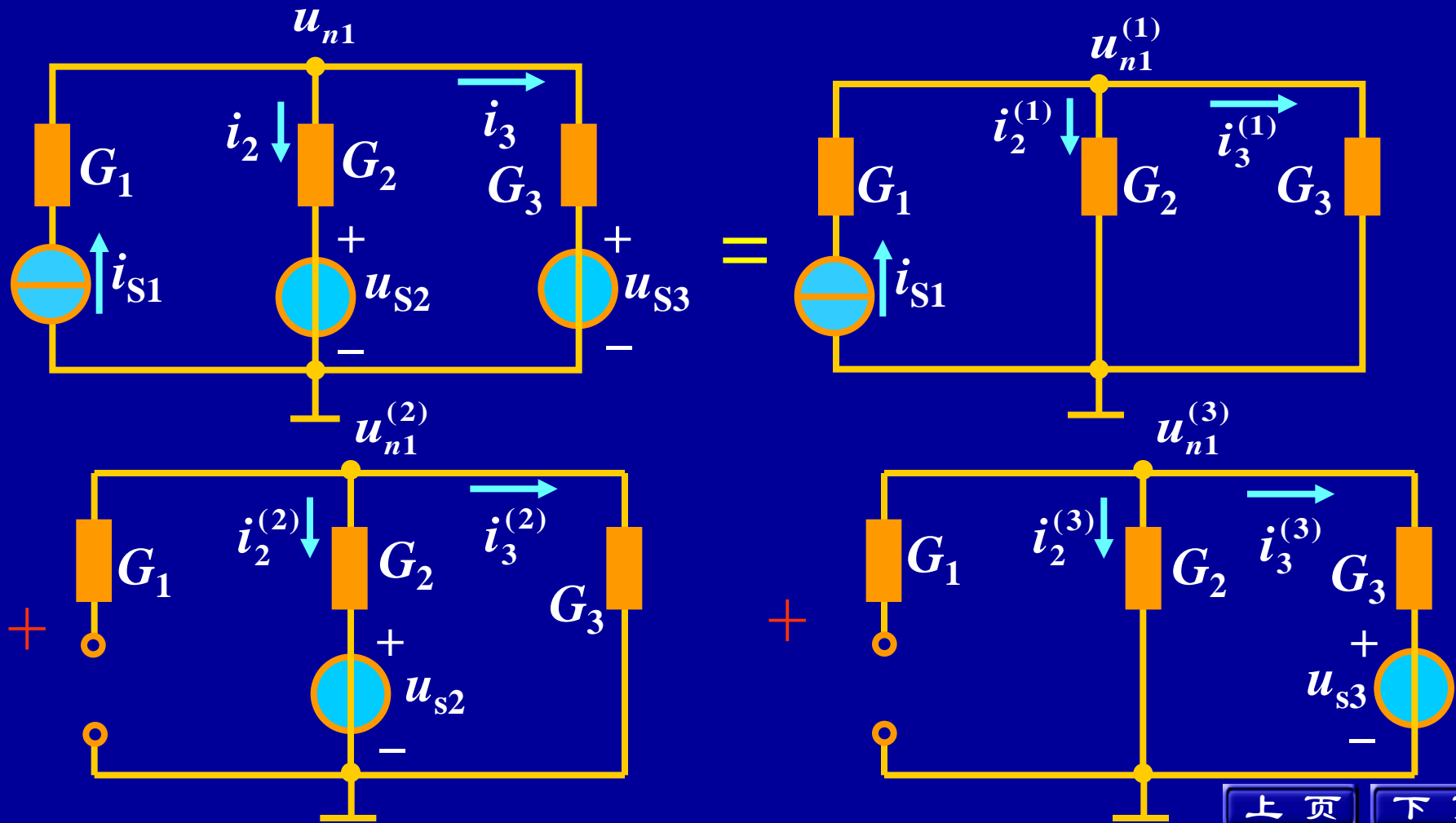
### 3. 几点说明

1. 叠加定理只适用于线性电路。

2. 分电路中不作用的独立源要置零

→ 电压源为零 — 短路。

→ 电流源为零 — 开路。



3. 计算功率时，**不可以**在各分电路中求出每个元件的功率，然后利用叠加定理进行叠加（功率为电压和电流的乘积，为电源的**二次函数**）。
4.  $u, i$  叠加时要注意各分电路中电压、电流的**参考方向**。
5. 含受控源（线性）电路亦可用叠加定理，但只能画出独立源单独作用的分电路，**受控源应保留在每个分电路中**。

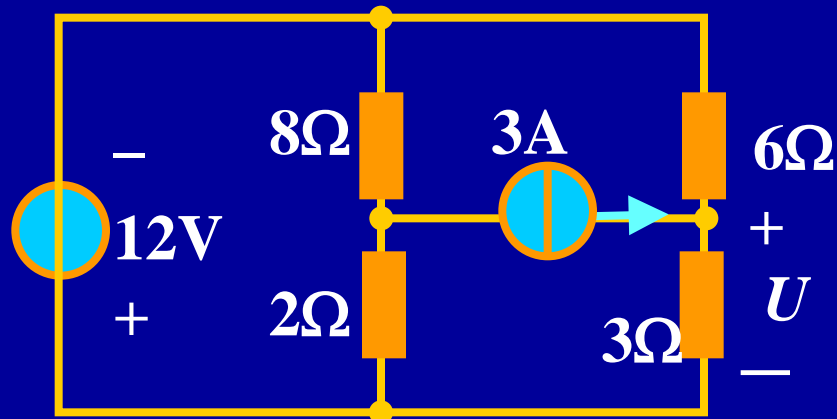
### 注意

- （1）**必须**画出独立源单独作用的分电路；
- （2）不作用的电源如何置零；
- （3）受控源不能单独作用。

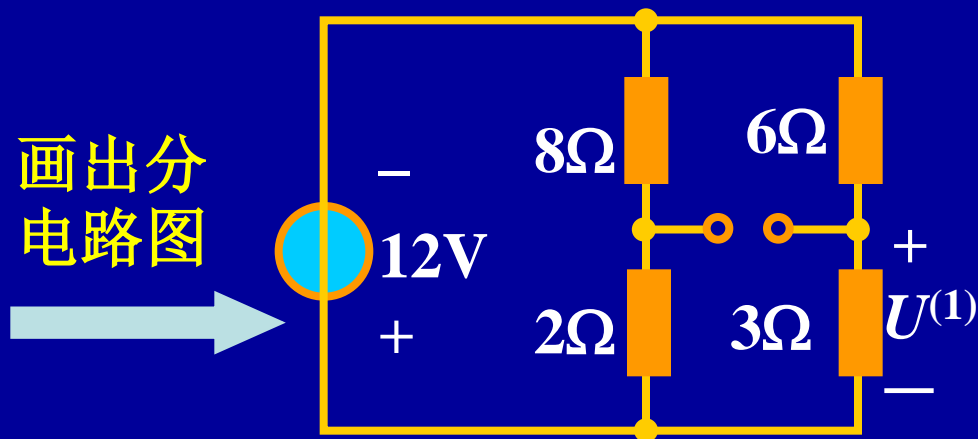
## 4. 叠加定理的应用

例1 求电压 $U$ .

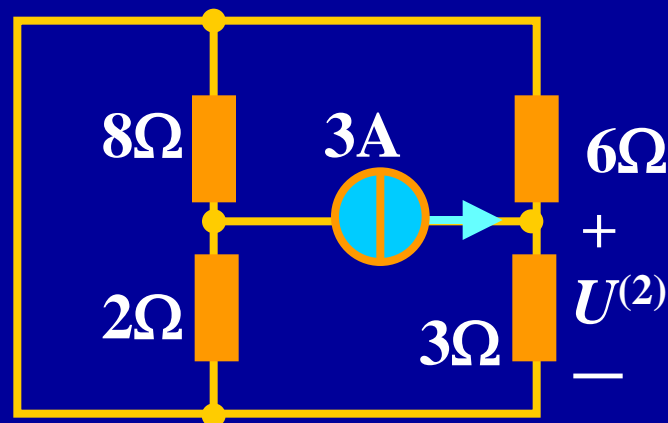
解



画出分  
电路图



+

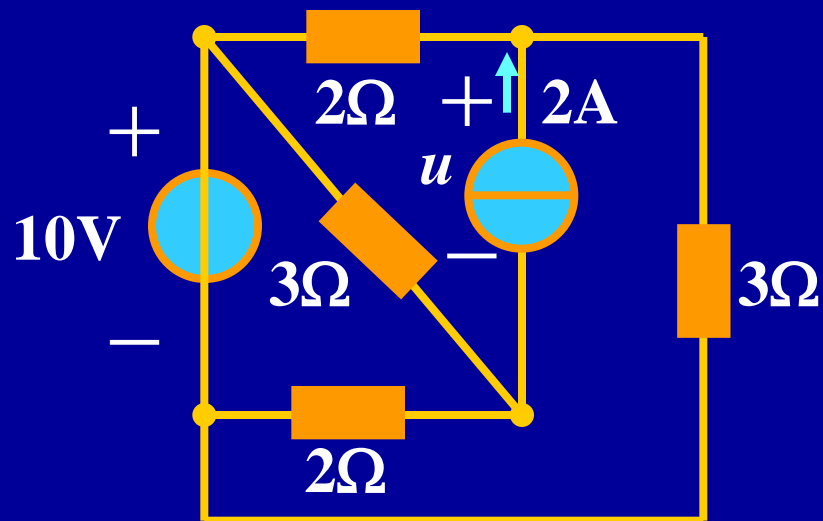


12V电源作用:  $U^{(1)} = -\frac{12}{9} \times 3 = -4V$

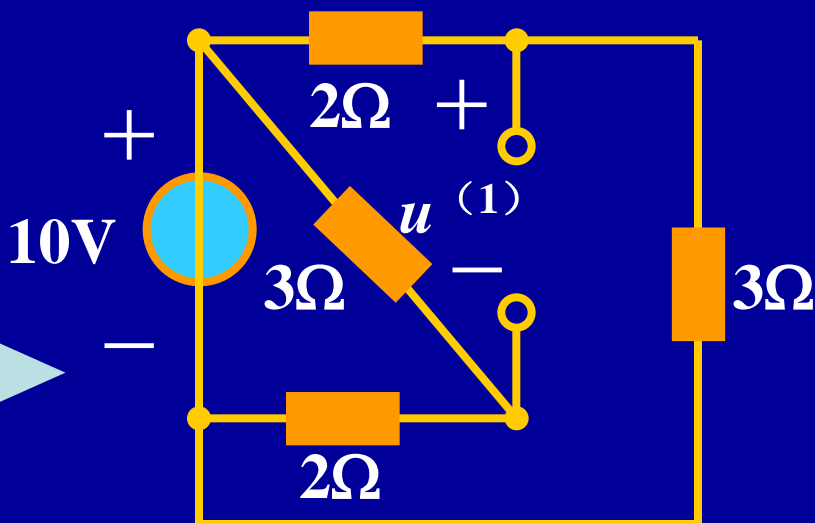
3A电源作用:  $U^{(2)} = (6 // 3) \times 3 = 6V$

$$U = -4 + 6 = 2V$$

## 例2 求电流源的电压和发出的功率



画出分  
电路图



**解** 10V电源作用:

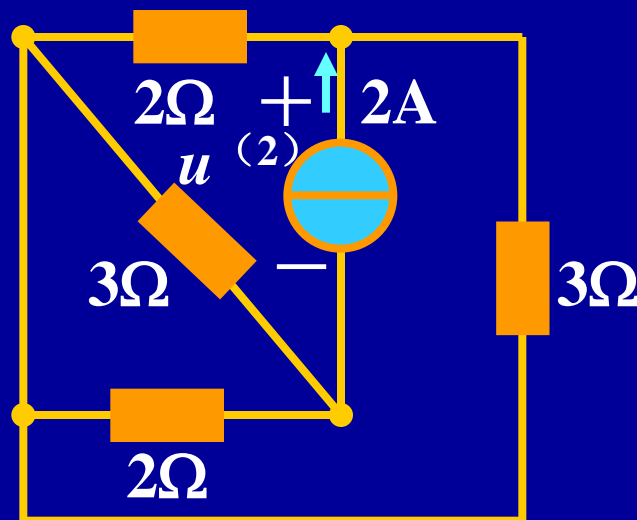
$$u^{(1)} = \frac{10}{5} \times 3 - \frac{10}{5} \times 2 = 2\text{V}$$

2A电源作用:

$$u^{(2)} = \frac{2 \times 3}{5} \times 2 \times 2 = 4.8\text{V}$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = 6.8\text{V}$$

$$P = 6.8 \times 2 = 13.6\text{W}$$



### 例3 计算电压 $u$ 。

解

3A电流源作用：

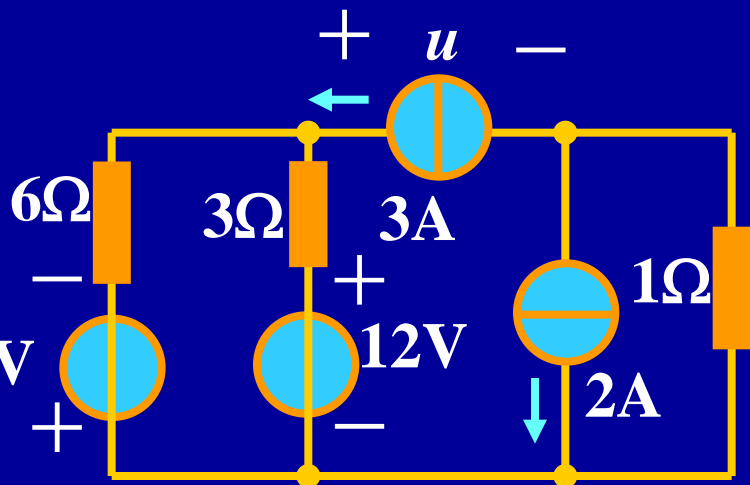
$$u^{(1)} = (6 // 3 + 1) \times 3 = 9V$$

其余电源作用：

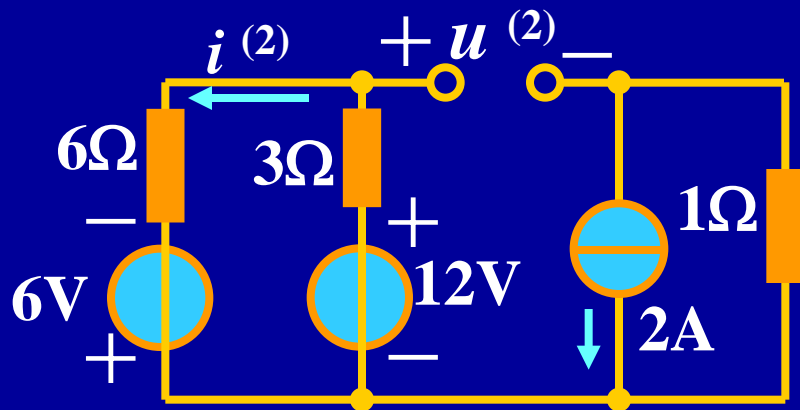
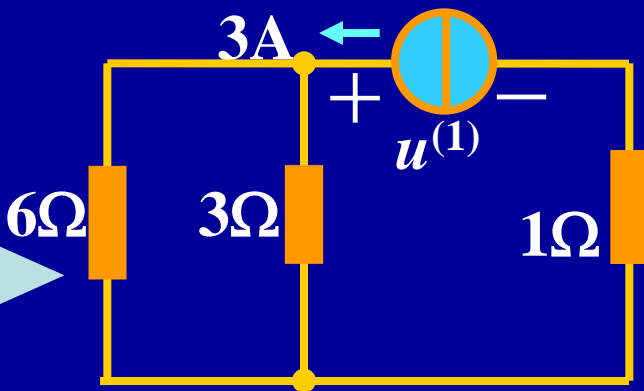
$$i^{(2)} = (6 + 12) / (6 + 3) = 2A$$

$$u^{(2)} = 6i^{(2)} - 6 + (2 \times 1) = 8V$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = 9 + 8 = 17V$$



画出分  
电路图



说明：叠加方式是任意的，可以一次一个独立源单独作用，也可以一次几个独立源同时作用，取决于使分析计算简便。



**例4** 计算电压 $u$ 和电流 $i$ 。

**解** 10V电源作用：

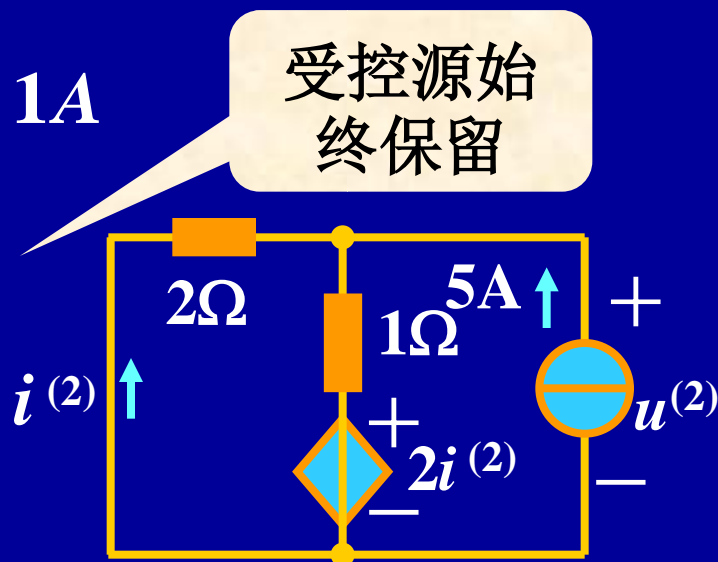
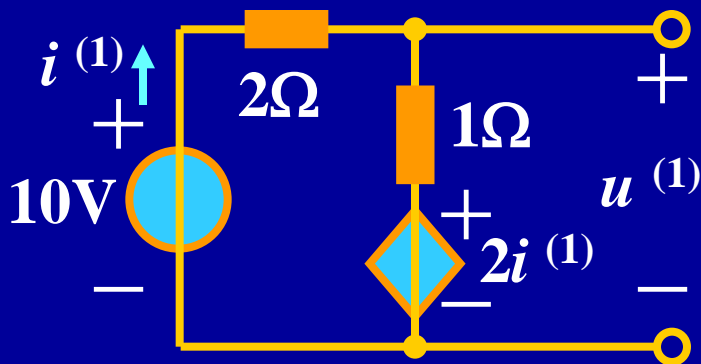
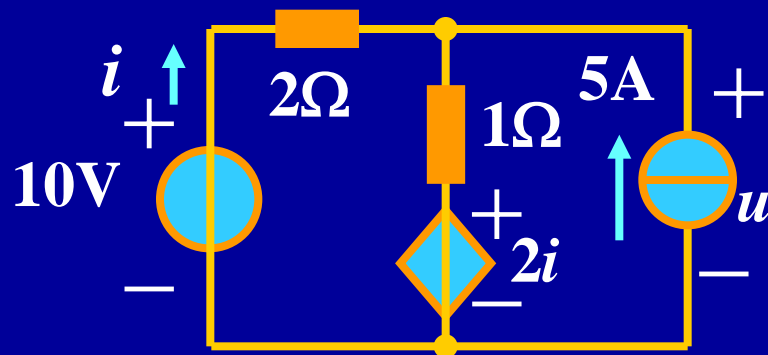
$$(2+1)i^{(1)} + 2i^{(1)} = 10 \quad i^{(1)} = 2A$$

$$u^{(1)} = 1 \times i^{(1)} + 2i^{(1)} = 3i^{(1)} = 6V$$

5A电源作用：  $2i^{(2)} + 1 \times (5 + i^{(2)}) + 2i^{(2)} = 0 \quad i^{(2)} = -1A$

$$u^{(2)} = -2i^{(2)} = -2 \times (-1) = 2V$$

$$u = 6 + 2 = 8V \quad i = 2 + (-1) = 1A$$



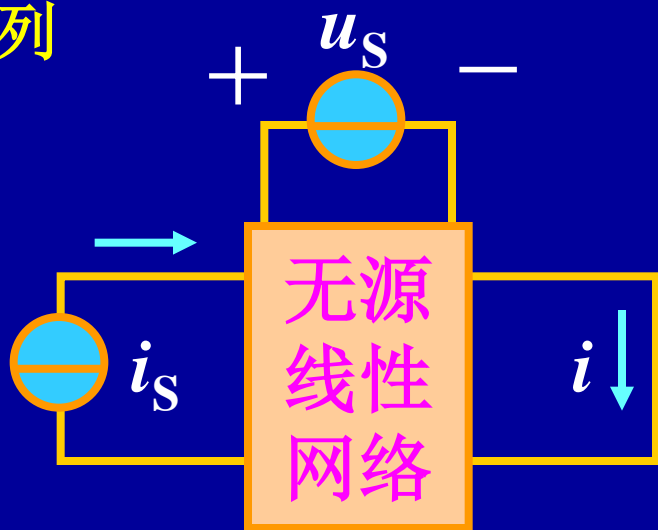
**例5** 封装好的电路如图，已知下列实验数据：

当  $u_S = 1V$ ，  $i_S = 1A$  时，

响应  $i = 2A$

当  $u_S = -1V$ ，  $i_S = 2A$  时，

响应  $i = 1A$



求  $u_S = -3V$ ，  $i_S = 5A$  时，响应  $i = ?$

**解** 根据叠加定理，有：  $i = k_1 i_S + k_2 u_S$

代入实验数据，得：

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 2k_1 - k_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

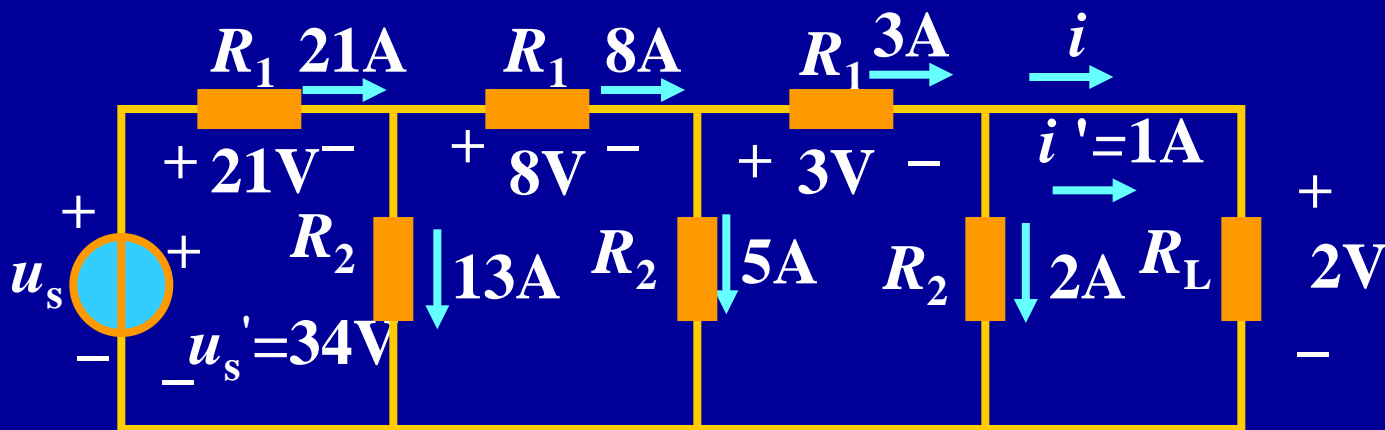
$$i = u_S + i_S = -3 + 5 = 2A$$

## 5. 齐性定理 (Homogeneity Property)

线性电路中，所有激励(独立源)都增大(或减小)同样的倍数，则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。

当激励只有一个时，则响应与激励成正比。

例6.  $R_L=2\Omega$   $R_1=1\Omega$   $R_2=1\Omega$   $u_s=51V$  求电流  $i$ 。



解

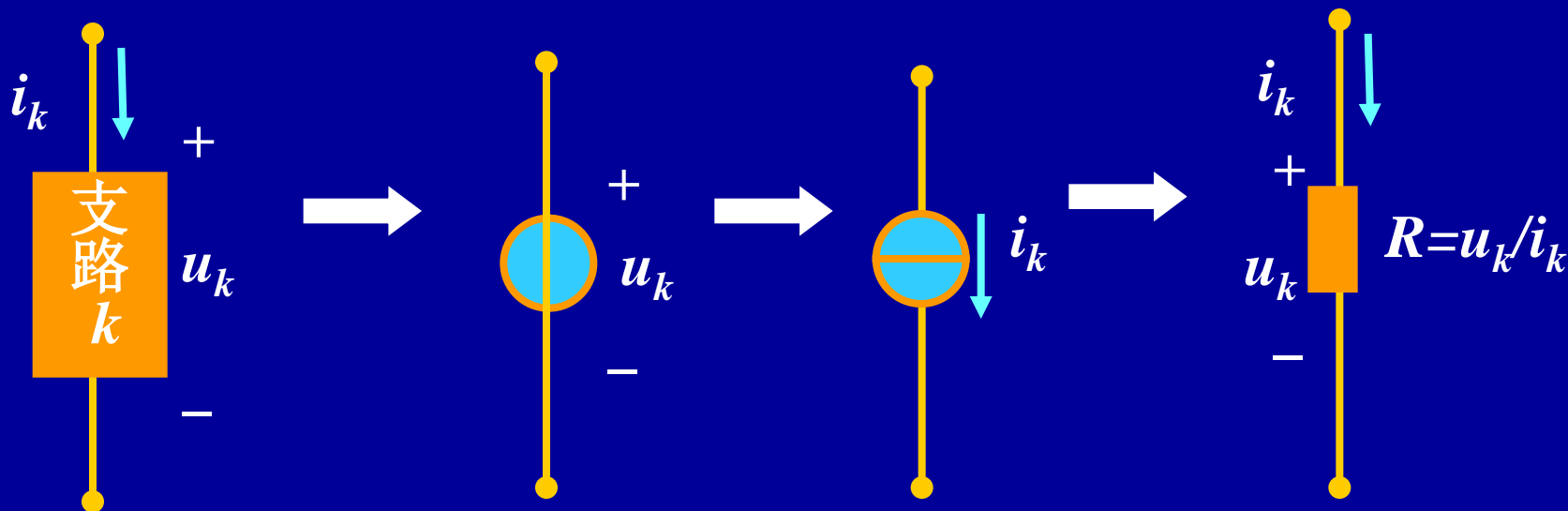
采用倒推法：设  $i'=1A$ 。

$$\text{则 } \frac{i}{i'} = \frac{u_s}{u'_s} \quad \text{即 } i = \frac{u_s}{u'_s} i' = \frac{51}{34} \times 1 = 1.5A$$

## 4.2 替代定理 (Substitution Theorem)

### 1. 替代定理

对于给定的任意一个电路，若某一支路电压为 $u_k$ 、电流为 $i_k$ ，那么这条支路就可以用一个电压等于 $u_k$ 的独立电压源，或者用一个电流等于 $i_k$ 的独立电流源，或用一个 $R=u_k/i_k$ 的电阻来替代，替代后电路中全部电压和电流均保持原有值(解答唯一)。



**例** 求图示电路的支路电压和电流。

**解**  $i_1 = 110 / [5 + (5 + 10) // 10] = 10A$

$$i_2 = 3i_1 / 5 = 6A \quad i_3 = 2i_1 / 5 = 4A$$

$$u = 10i_2 = 60V$$

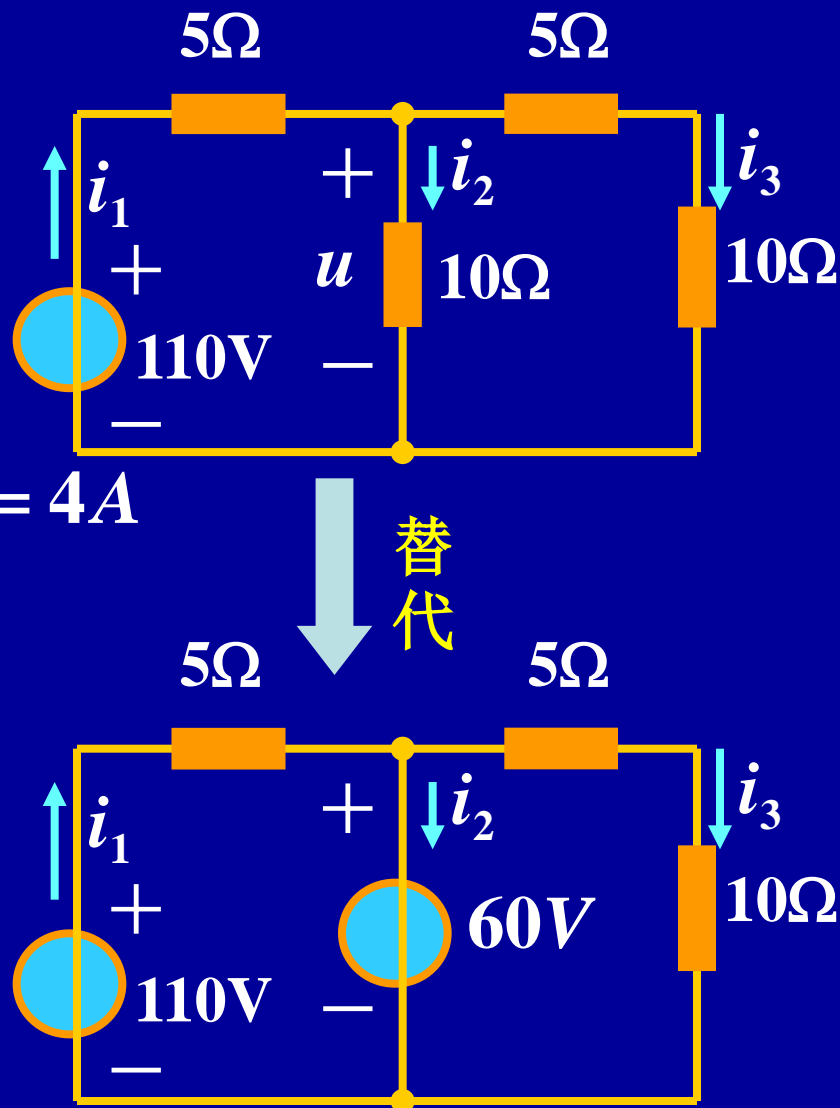
替代以后有：

$$i_1 = (110 - 60) / 5 = 10A$$

$$i_3 = 60 / 15 = 4A$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = 6A$$

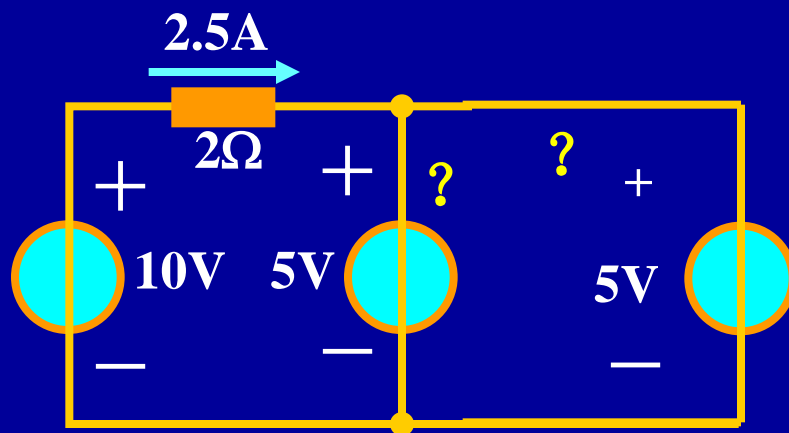
替代后各支路电压和电流完全不变。



注

1. 替代定理既适用于线性电路，也适用于非线性电路。

2. 替代后电路必须有唯一解 { 无纯电压源回路;  
无纯电流源节点(含广义结点)。

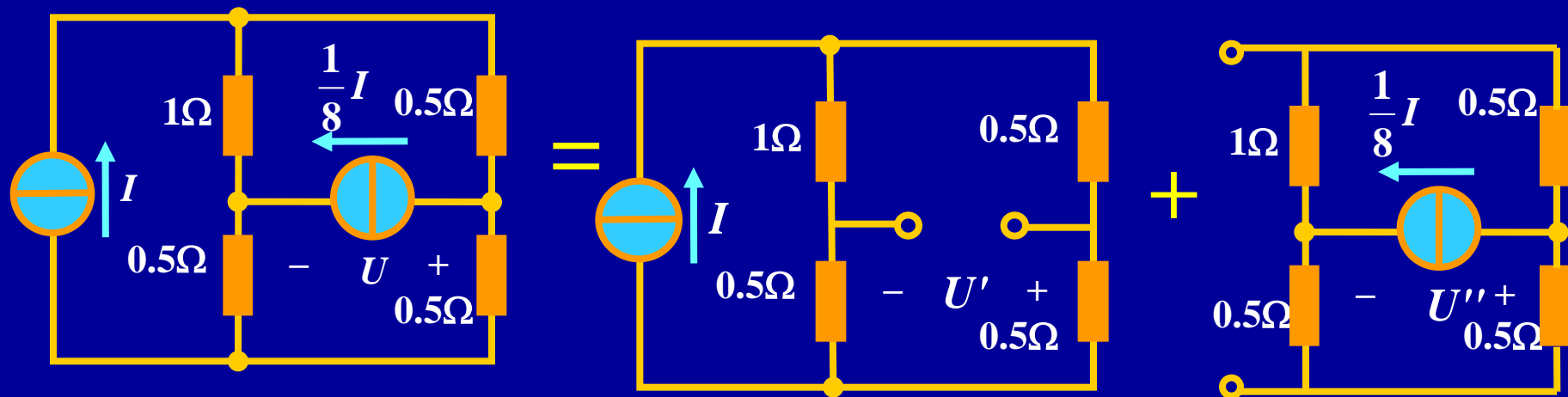
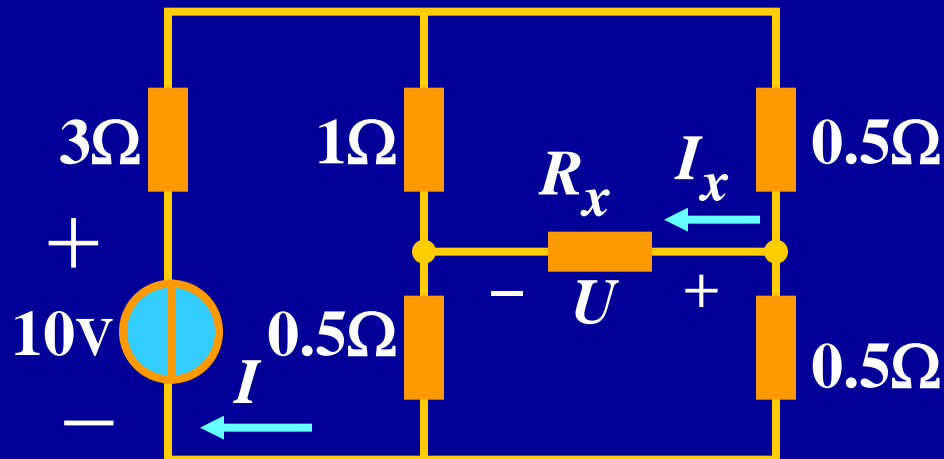


3. 替代后其余支路及参数不能改变。

### 3. 替代定理的应用

**例1** 若要使  $I_x = \frac{1}{8}I$ ,  
试求  $R_x$ 。

**解** 用替代定理:



$$U' = \frac{1.5}{2.5}I \times 0.5 - \frac{1}{2.5}I \times 0.5 = 0.1I$$

$$U'' = -\frac{1.5}{2.5} \times \frac{1}{8}I = -0.075I$$

$$U = U' + U'' = 0.025I = 0.2I_x$$

$$R_x = \frac{U}{I_x} = 0.2\Omega$$

例2

2V电压源用多大的电阻置换而不影响电路的工作状态。

解

应用结点电压法得：

$$u_{n1} = 4V$$

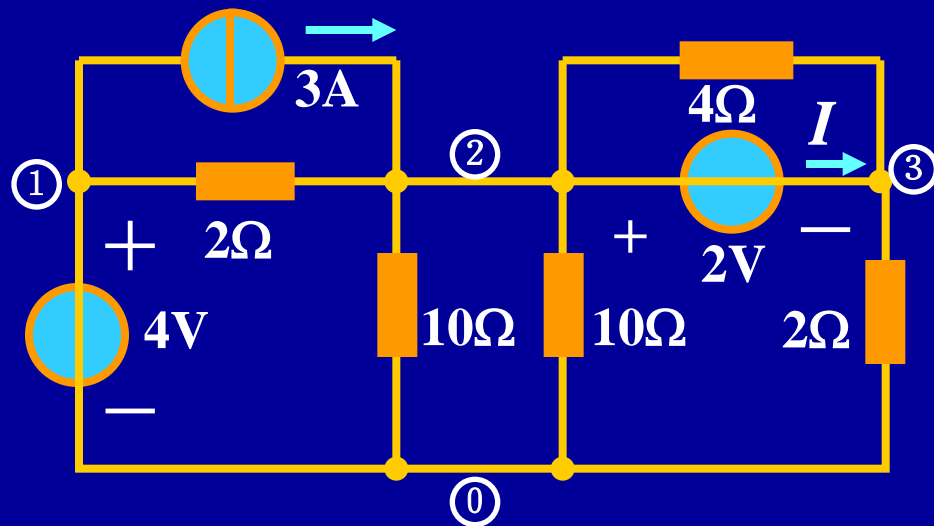
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right)u_{n2} - \frac{1}{2}u_{n1} - \frac{1}{4}u_{n3} = 3 - I$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)u_{n3} - \frac{1}{4}u_{n2} = I$$

$$\longrightarrow I = 1A$$

$$u_{n2} - u_{n3} = 2V$$

$$R = 2/1 = 2\Omega$$





## 4.3 戴维宁定理和诺顿定理 (Thevenin-Norton Theorem)

工程应用中，常常遇到只需研究某一支路的电压、电流或功率的问题。另外，电路中还经常包含非线性电路元件。

对所关心的支路来说，电路的其余部分就成为一个含源一端口网络，可等效变换为较简单的含源支路(电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路)，使分析和计算简化。戴维宁定理和诺顿定理给出了等效含源支路及其计算方法。

# 关于替代定理和戴维宁定理的再说明

**替代定理：**是在原电路中，如果一个支路的电压（或电流）是恒定的，那么**该支路**可以用一个电压源（或电流源）代替；注意**原电路的结构没有改变**，只是将其中的一条支路做了代换。

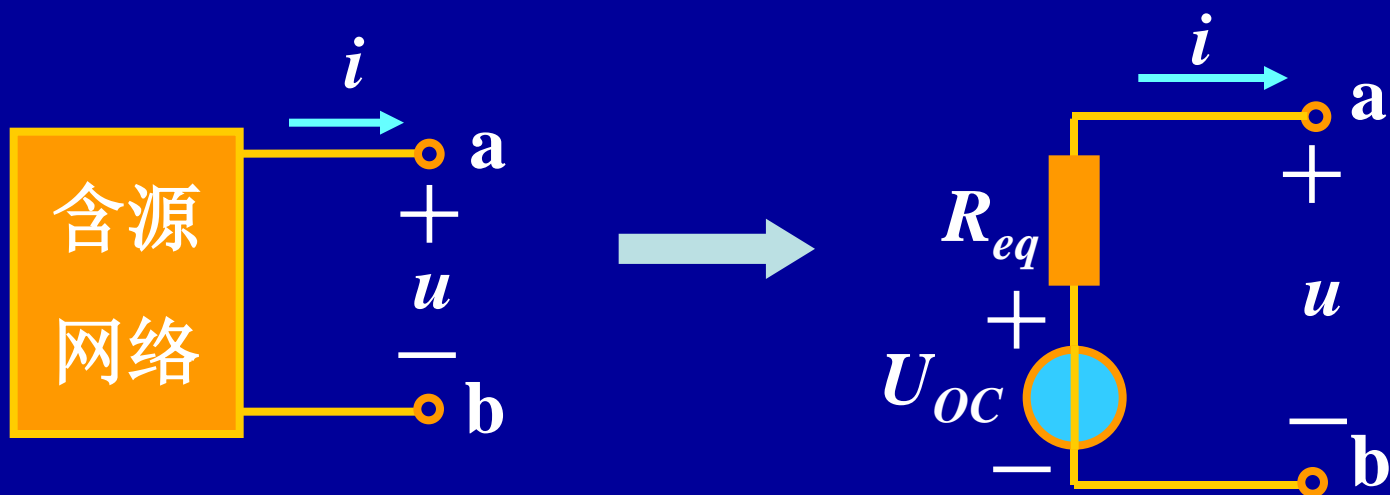
**戴维宁定理：**将除了所求元件的支路从电路中断开，求出开路电压  $U_{oc}$  和等效电阻  $R_{eq}$ ，然后采用全电路欧姆定律进行求解。

替代定理和戴维宁定理并不矛盾，可以共同使用，也可以分开使用。对于大多数问题，各支路的电压（或电流）并不知道，因此**替代定理应用并不广泛**；电路中各元件参数一般都给出，**采用戴维宁定理的较多**。如果题目中给出了某电阻支路的电压（或电流），就可以使用替代定理，否则只能使用戴维宁定理。总的来说，戴维宁是通用的，替代定理需要看题目给出的条件。

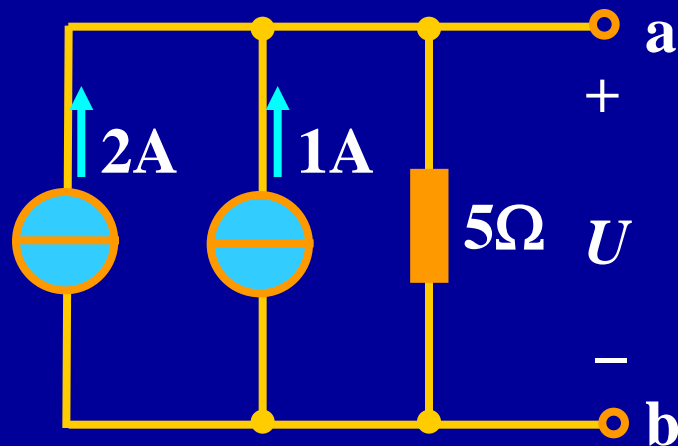
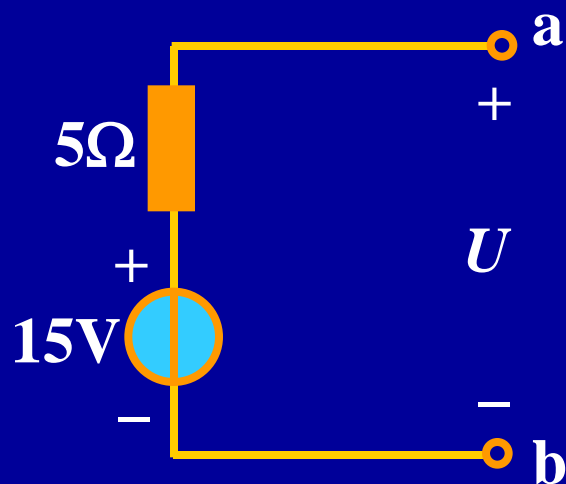
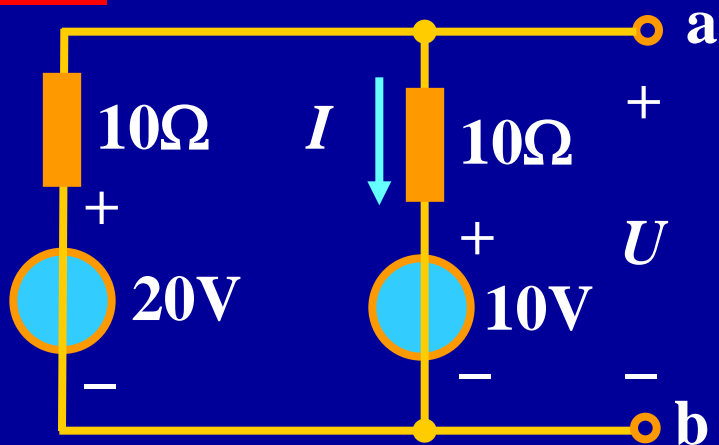
从使用方法上可以看出，替代定理**只适用于一条支路**的代替，而戴维宁定理**可用于支路、也可用于含源一端口网络**。戴维宁定理使用电压源串联电阻的形式“替代”，指的是负载在断开情况下的替代，原**电路结构已经发生变化**；而替代定理的“替代”，电路原结构未发生变化、没有负载断开情况下的替代。所以二者“替代”的情况是不相同的，因此等效的性质也不一样。

# 1. 戴维宁定理

任何一个线性含源一端口网络，对外电路来说，总可以用一个电压源和电阻的串联组合来等效置换；此电压源的电压等于外电路断开时端口处的开路电压 $u_{oc}$ ，而电阻等于一端口的输入电阻（或等效电阻 $R_{eq}$ ）。



例



(1) 求开路电压  $U_{oc}$

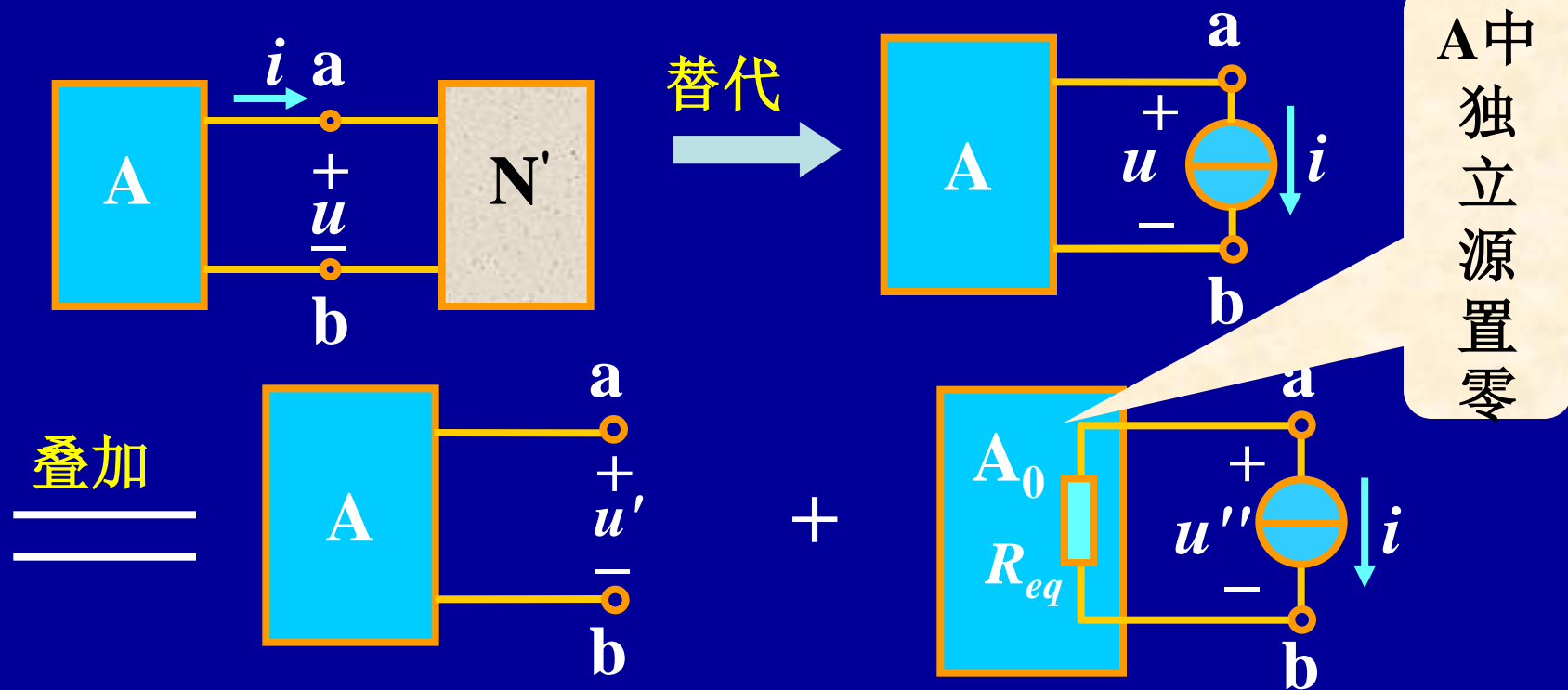
$$I = \frac{20 - 10}{20} = 0.5A$$

$$U_{oc} = 0.5 \times 10 + 10 = 15V$$

(2) 求等效电阻  $R_{eq}$

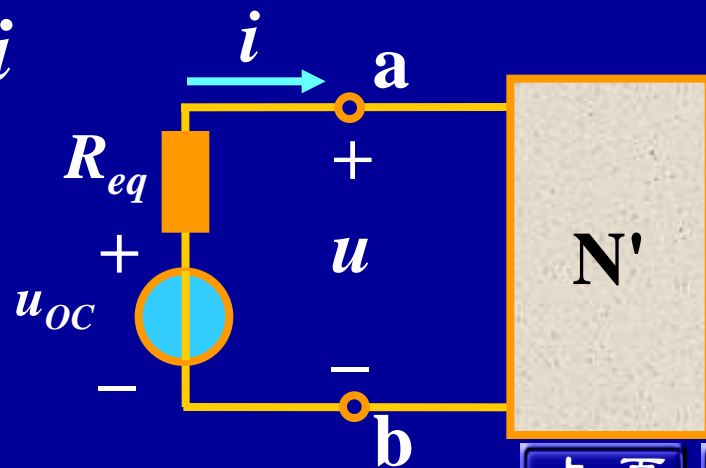
$$R_{eq} = 10 // 10 = 5$$

## 2. 定理的证明



则  $u' = u_{oc}$        $u'' = -R_{eq}i$

$$\begin{aligned} u &= u' + u'' \\ &= u_{oc} - R_{eq}i \end{aligned}$$



### 3. 定理的应用

#### (1) 开路电压 $U_{OC}$ 的计算

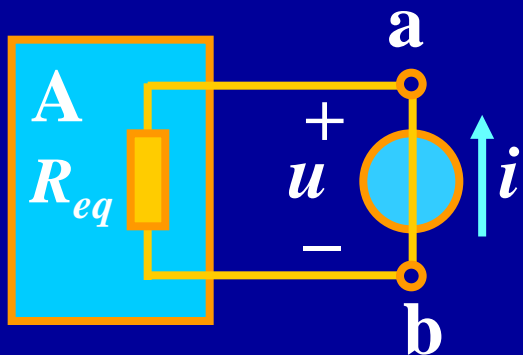
戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压 $U_{OC}$ ，电压源方向与所求开路电压方向一致。计算 $U_{OC}$ 的方法根据电路形式选择前面学过的任意方法，使易于计算。

- a、利用KCL、KVL列方程；
- b、利用等效变换方法（分压、分流、电源等效变换法）；
- c、利用电路一般分析方法（支路电流法、网孔电流法、结点电压法）；
- d、利用叠加定理和替代定理。

## (2) 等效电阻的计算

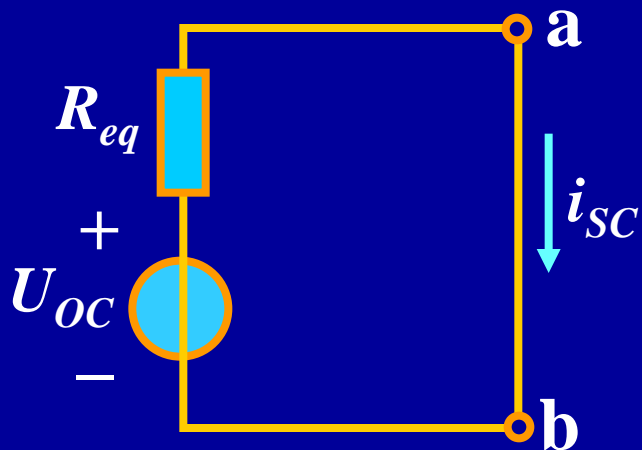
等效电阻 $R_{eq}$ 为将含源一端口内所有独立电源置零（电压源**短路**，电流源**开路**）后，所得到的无源一端口网络的输入电阻。常用下列方法计算：

- a、当无源一端口内部不含有受控源时可采用电阻串、并联和 $\Delta$ -Y 等效变换的方法计算等效电阻；
- b、含有受控源时采用**外加电源法**（加压求流或加流求压）；



$$R_{eq} = \frac{u}{i}$$

c、开路电压，短路电流法。



$$R_{eq} = \frac{u_{OC}}{i_{SC}}$$

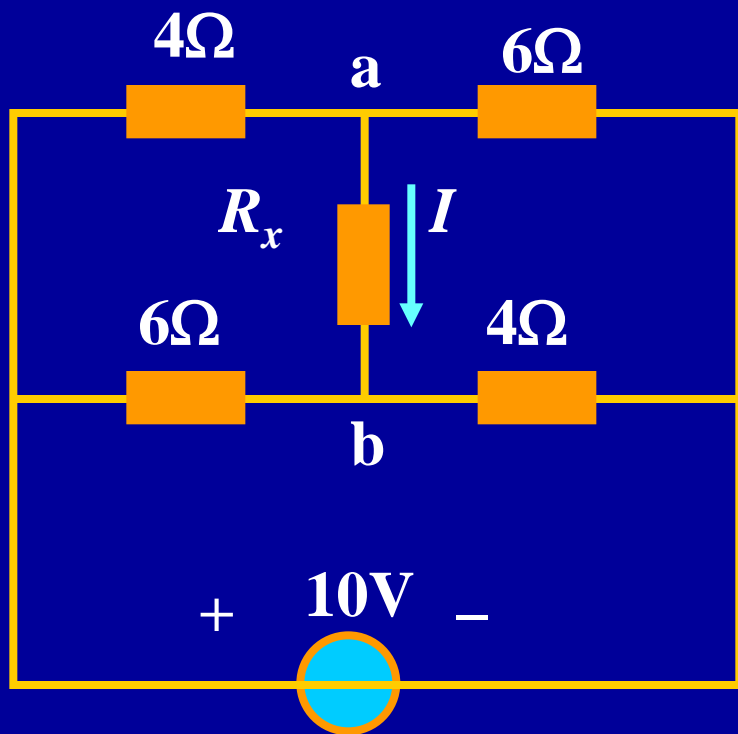
方法 b 和 c 更具有一般性

注

- (1) 外电路可以是任意的线性或非线性电路，外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变(伏安特性等效)。
- (2) 当一端口内部含有受控源时，控制量支路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。



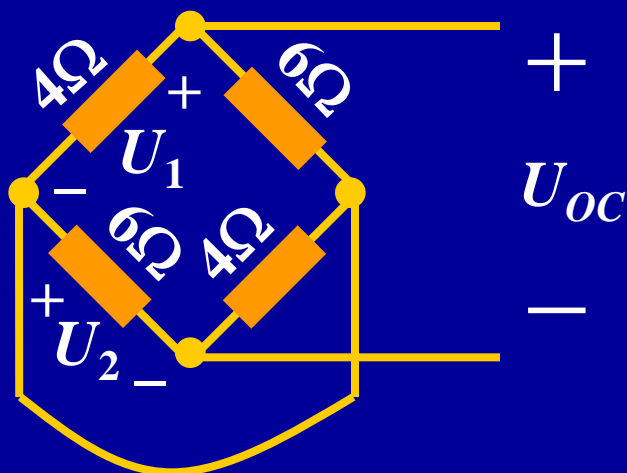
**例1** 计算 $R_x$ 分别为 $1.2\Omega$ 、 $5.2\Omega$ 时的 $I$ 。



**解**

由于 $R_x$ 取不同值，要想得到电流 $I$ ，需两次对方程组求解。

保留 $R_x$ 支路，将其余一端口网络化为戴维宁等效电路，然后再计算电流。



(1) 求开路电压

$$u_{oc} = U_1 + U_2$$

$$= -\frac{10}{4+6} \times 4 + \frac{10}{4+6} \times 6 = 2V$$

(2) 求等效电阻  $R_{eq}$

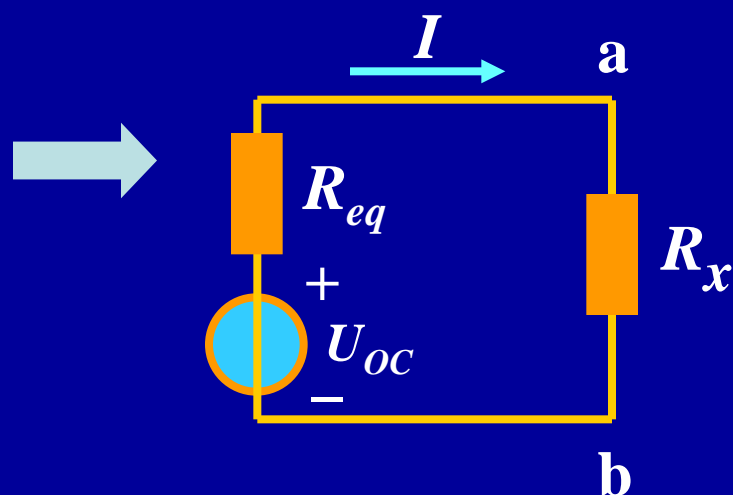
$$R_{eq} = 4 // 6 + 6 // 4 = 4.8\Omega$$

(3)  $R_x = 1.2\Omega$  时

$$I = \frac{U_{oc}}{R_{eq} + R_x} = 0.33A$$

$R_x = 5.2\Omega$  时

$$I = \frac{U_{oc}}{R_{eq} + R_x} = 0.2A$$

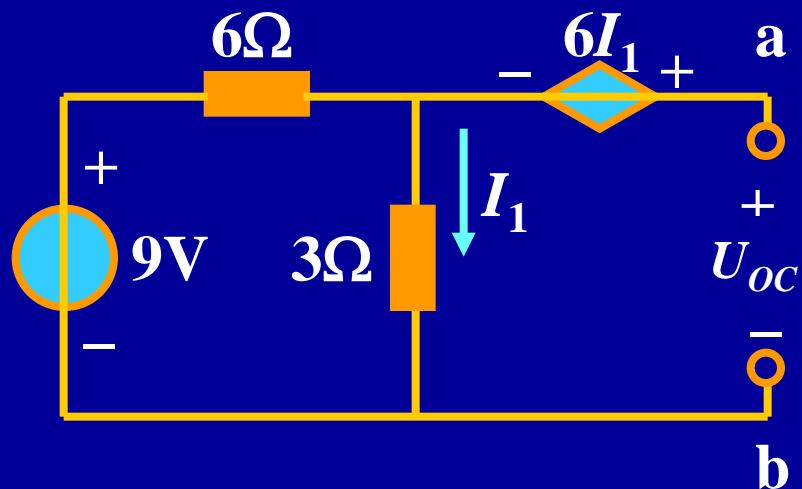


例2

求  $U_0$ 。

解

(1) 求开路电压  $U_{oc}$



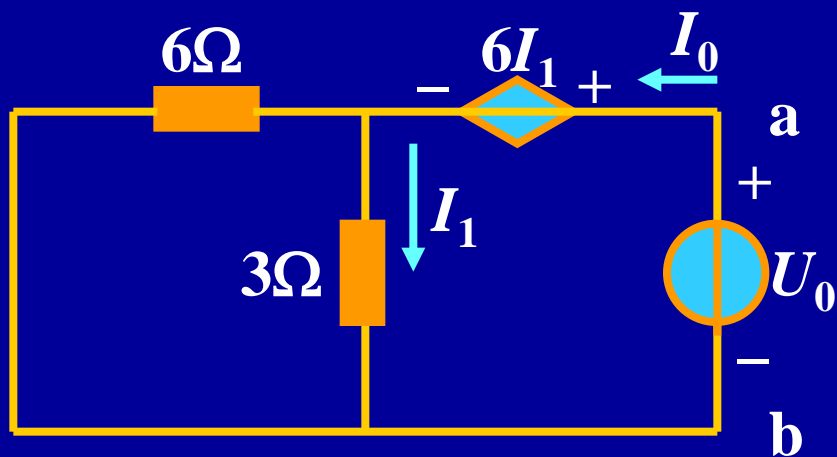
$$U_{oc} = 6I_1 + 3I_1 = 9I_1$$

$$I_1 = \frac{9}{6+3} = 1A$$

$$U_{oc} = 9V$$

(2) 求等效电阻  $R_{eq}$

方法1: 加压求流

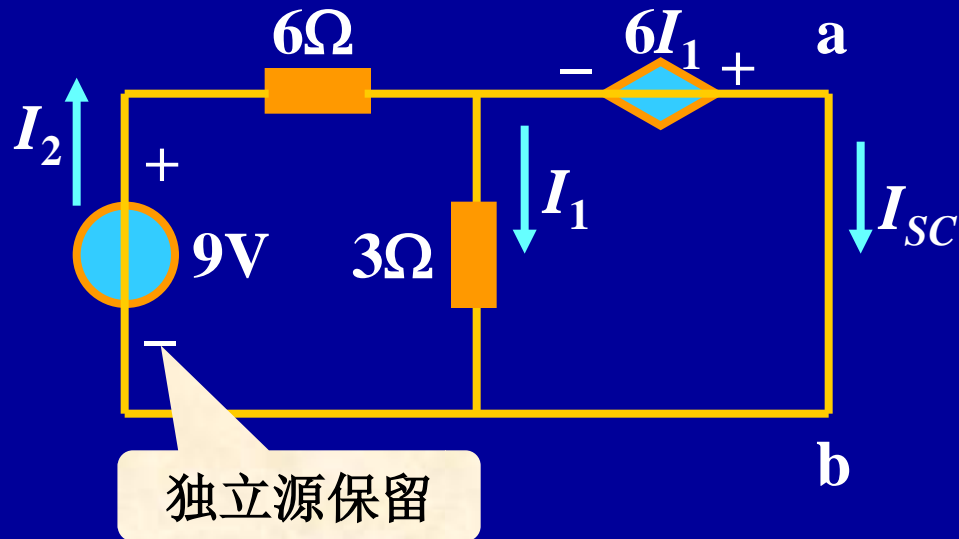


$$U_0 = 6I_1 + 3I_1 = 9I_1$$

$$I_0 = I_1 + \frac{3I_1}{6} = 1.5I_1$$

$$R_{eq} = \frac{U_0}{I_0} = 6\Omega$$

## 方法2：开路电压、短路电流



$$U_{oc} = 9V$$

$$6I_2 + 3I_1 = 9$$

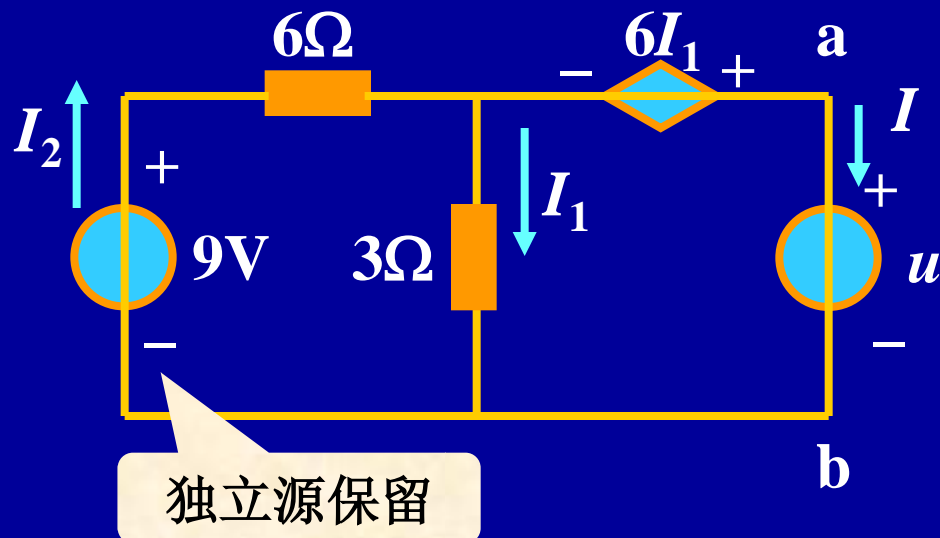
$$6I_1 + 3I_1 = 0 \longrightarrow I_1 = 0$$

$$I_2 = 1.5A$$

$$I_{sc} = I_2 - I_1 = 1.5A$$

$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = 6\Omega$$

## 方法3：端口伏安特性关系法



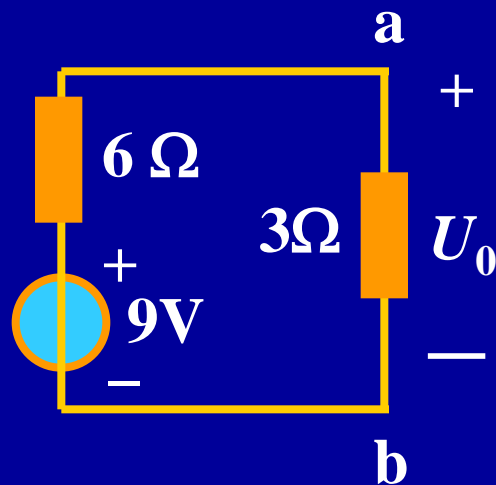
$$\begin{cases} 6I_2 + 3I_1 = 9 \\ 6I_1 + 3I_1 = u \\ I_2 = I_1 + I \end{cases}$$

$$u = 9 - 6I$$

$$U_{oc} = 9V \quad R_{eq} = 6\Omega$$

(3) 利用等效电路求 $U_0$

$$U_0 = \frac{3}{6+3} \times 9 = 3\text{V}$$



计算含受控源电路的等效电阻是用外加电源法还是开路、短路法，要具体问题具体分析，以计算最简便为好。端口伏安特性法在分析含有受控源电路时有较大优势。

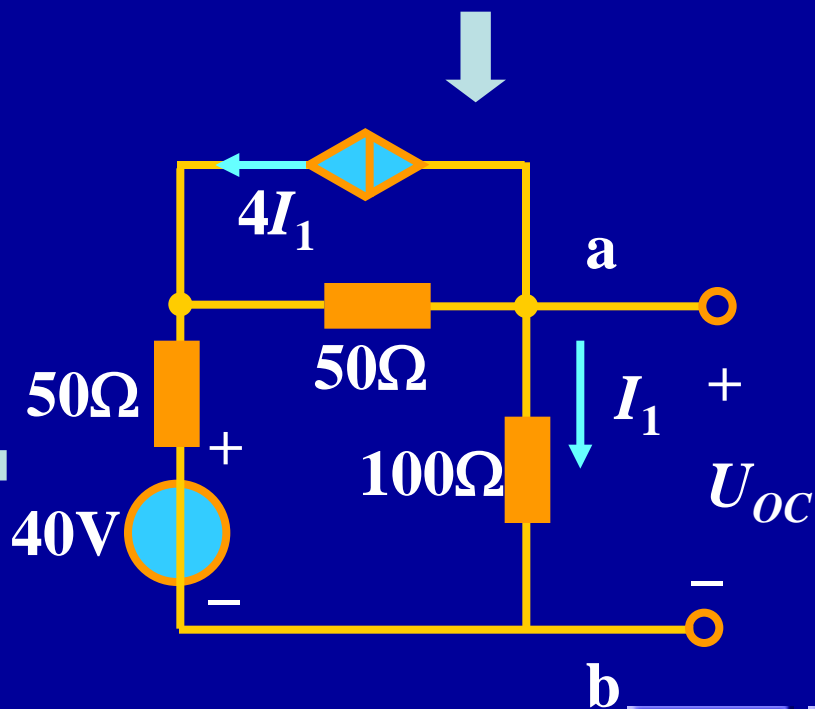
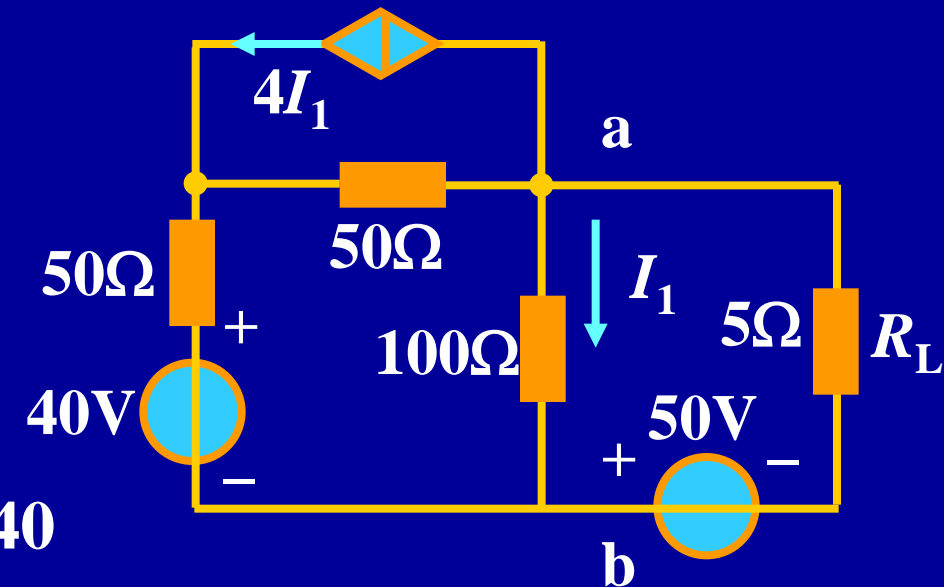
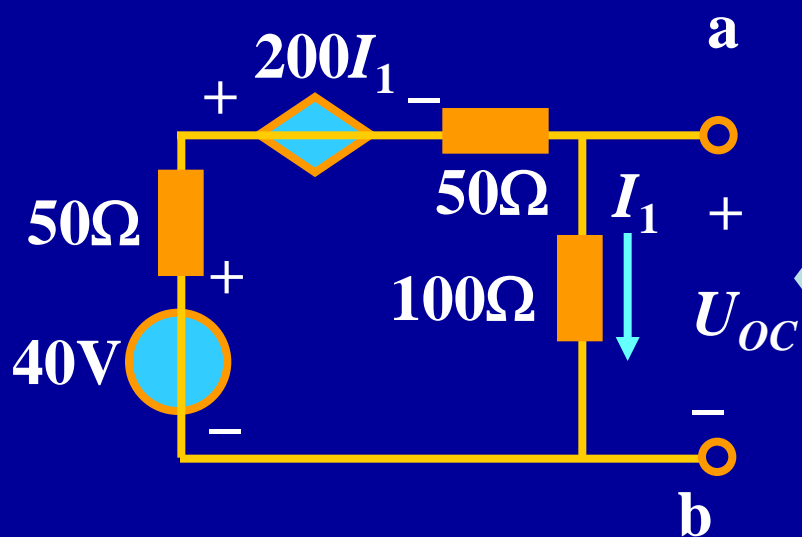
**例3** 求负载 $R_L$ 消耗的功率。

**解** (1) 求开路电压 $U_{oc}$

$$50I_1 + 200I_1 + 50I_1 + 100I_1 = 40$$

$$I_1 = 0.1A$$

$$U_{oc} = 100I_1 = 10V$$



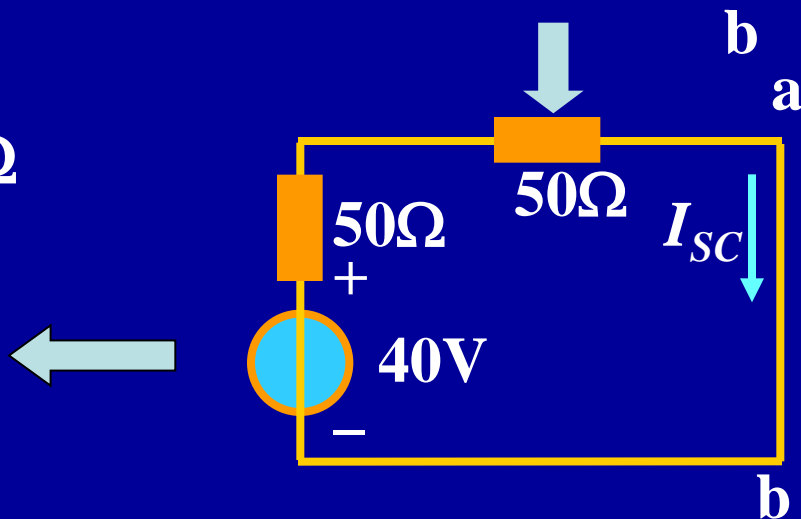
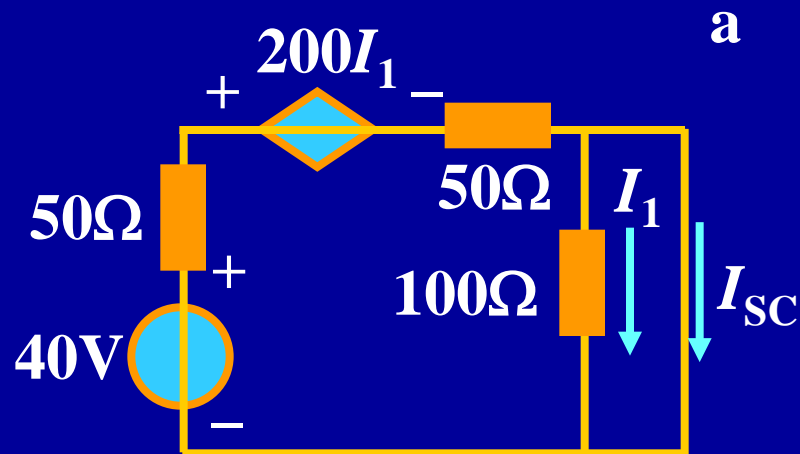
$$U_{oc} = 100I_1 = 10V$$

(2) 求等效电阻  $R_{eq}$

用开路电压、短路电流法

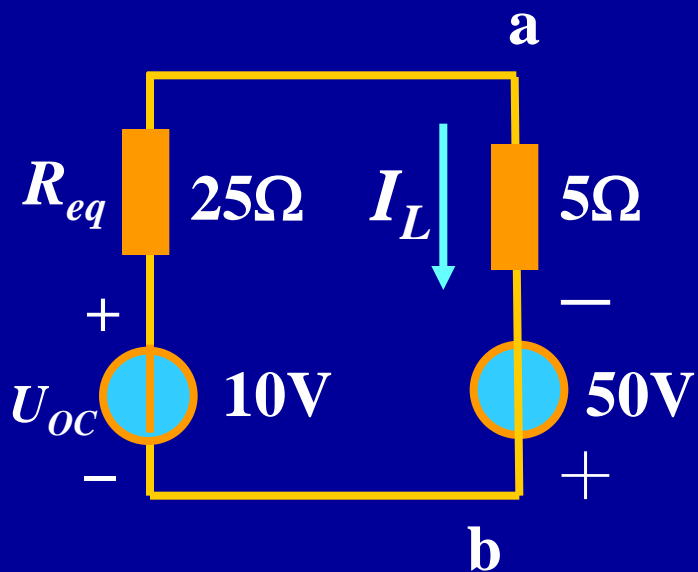
$$I_{sc} = 40 / 100 = 0.4A$$

$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = 10 / 0.4 = 25\Omega$$



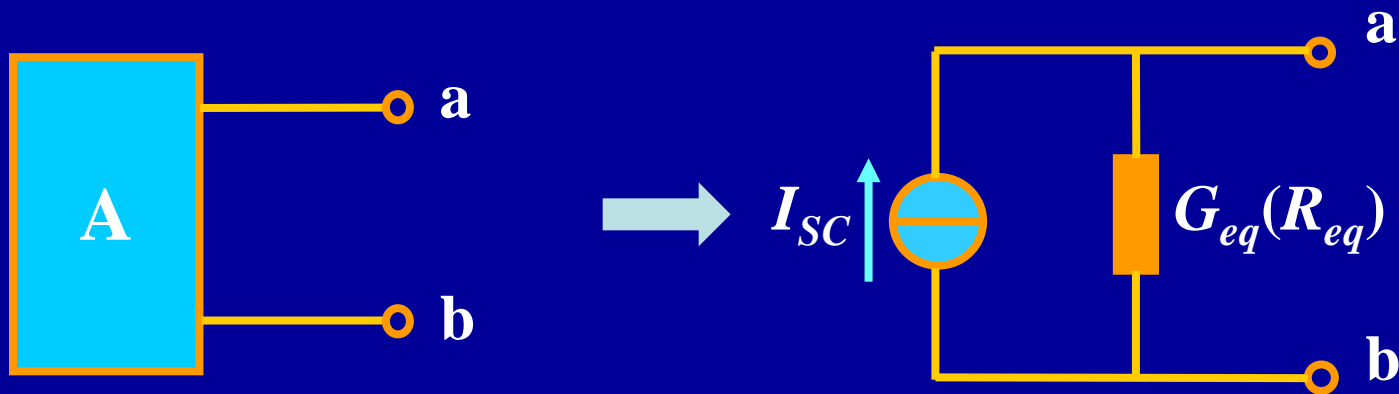
$$I_L = \frac{U_{oc} + 50}{25 + 5} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$P_L = 5I_L^2 = 5 \times 4 = 20W$$



## 4. 诺顿定理

任何一个含源线性一端口电路，对外电路来说，可以用一个**电流源和电导(电阻)的并联组合**来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，而电导(电阻)等于把该一端口的全部独立电源置零后的输入电导(电阻)。

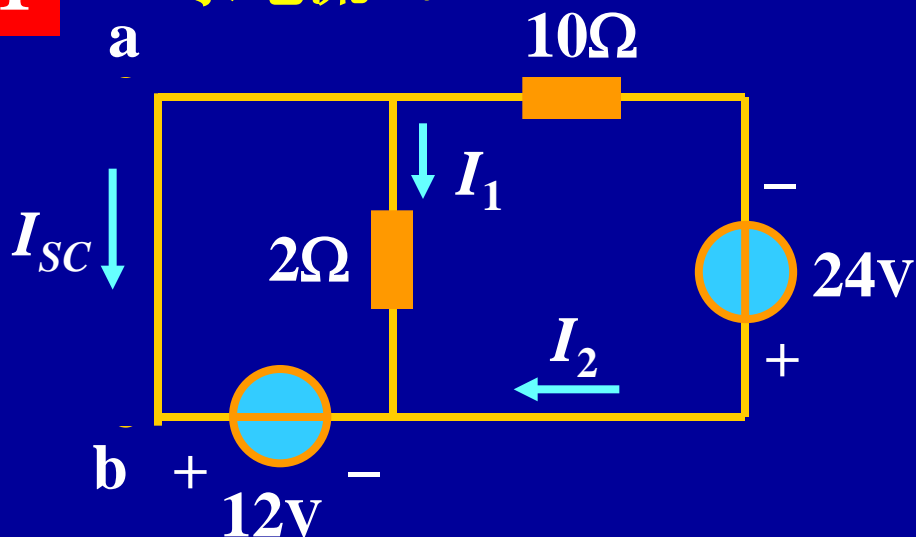


诺顿等效电路可由戴维宁等效电路经电源等效变换得到。诺顿等效电路可采用与戴维宁定理类似的方法证明。



# 例1

求电流 $I$ 。



# 解

(1) 求短路电流 $I_{sc}$

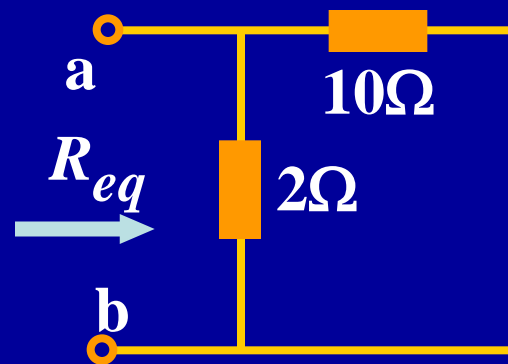
$$I_1 = 12 / 2 = 6A$$

$$I_2 = (24 + 12) / 10 = 3.6A$$

$$I_{sc} = -(I_1 + I_2) = -9.6A$$

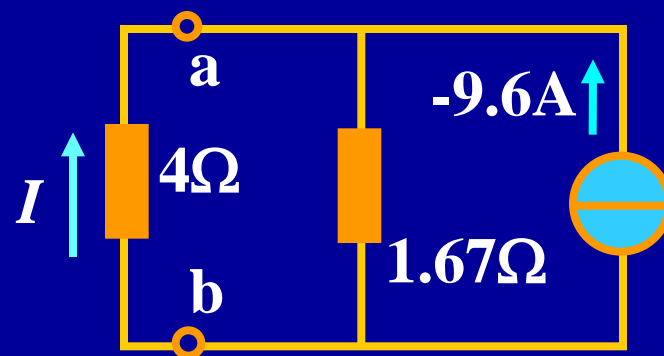
应用分流公式  $I = 2.83A$

(2) 求等效电阻 $R_{eq}$



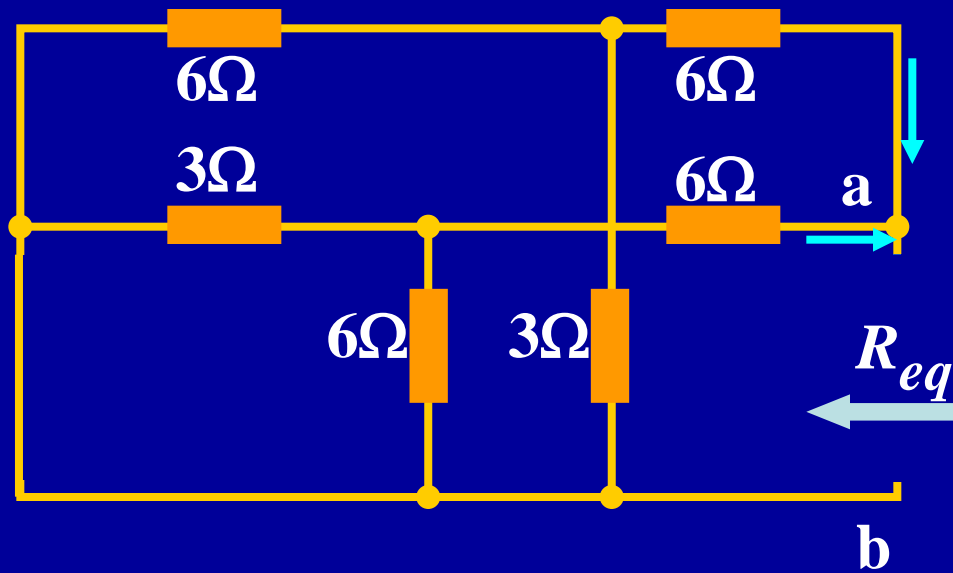
$$R_{eq} = 10 // 2 = 1.67\Omega$$

(3) 诺顿等效电路



**例2** 求电压 $U$ 。

**解** 本题用诺顿定理求比较方便。因a、b处的短路电流比开路电压容易求。



(1) 求短路电流 $I_{sc}$

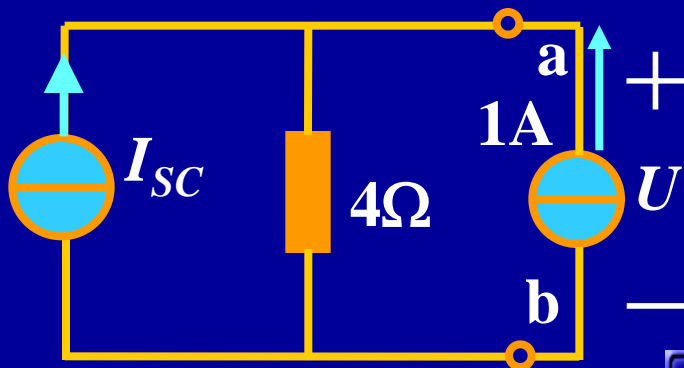
$$I_{sc} = \frac{24}{6 // 6 + 3} \times \frac{6}{6+6} + \frac{24}{3 // 6 + 6} \times \frac{3}{3+6} = 3A$$

(2) 求等效电阻 $R_{eq}$

$$R_{eq} = [6 // 3 + 6] // [3 // 6 + 6] = 4\Omega$$

(3) 诺顿等效电路

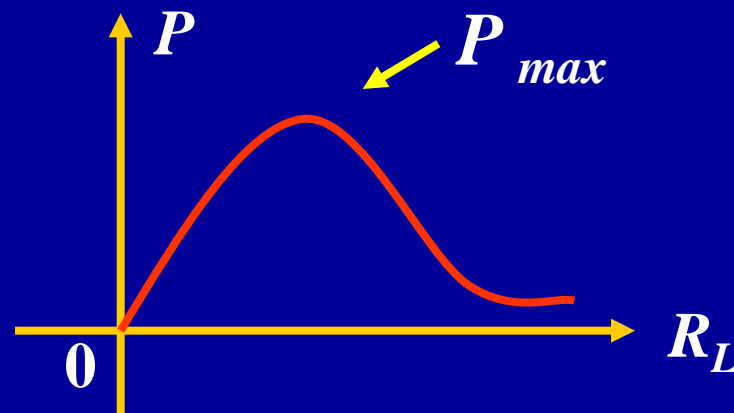
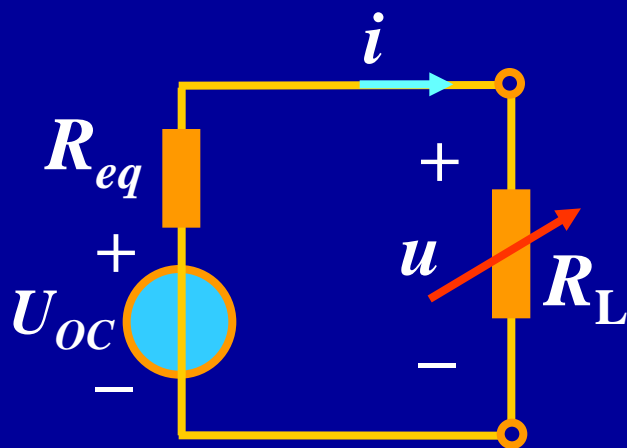
$$U = (3+1) \times 4 = 16V$$



## 4.4 最大功率传输定理

一个含源线性一端口电路，当所接负载不同时，一端口电路传输给负载的功率就不同，讨论负载为何值时能从电路获取最大功率，及最大功率的值是多少的问题是有工程意义的。





$$P = R_L \left( \frac{u_{OC}}{R_{eq} + R_L} \right)^2$$

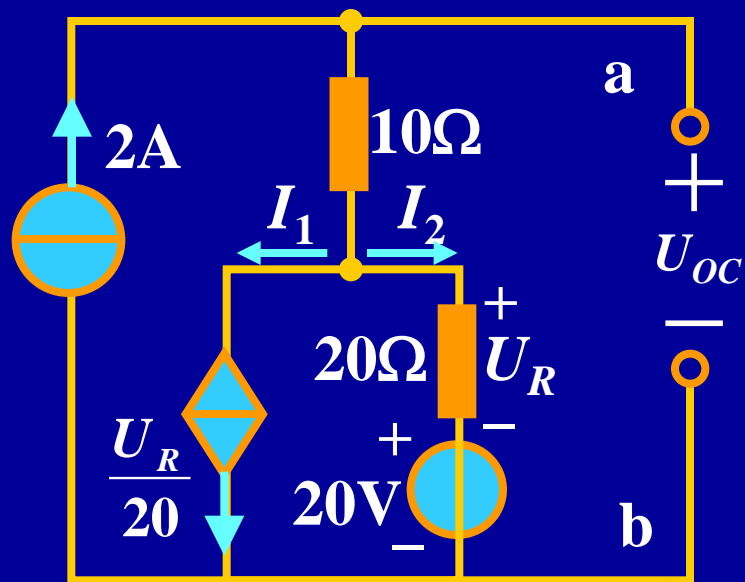
$$\frac{dP}{dR_L} = u_{OC}^2 \frac{(R_{eq} + R_L)^2 - 2R_L(R_{eq} + R_L)}{(R_{eq} + R_L)^4} = 0$$

$$\rightarrow R_L = R_{eq}$$

最大功率  
匹配条件

$$P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$$

**例1**  $R_L$ 为何值时其上获得最大功率，并求最大功率。



**解**

(1) 求开路电压  $U_{oc}$

$$I_1 = I_2 = U_R / 20 \quad I_1 + I_2 = 2A$$

$$\longrightarrow I_1 = I_2 = 1A$$

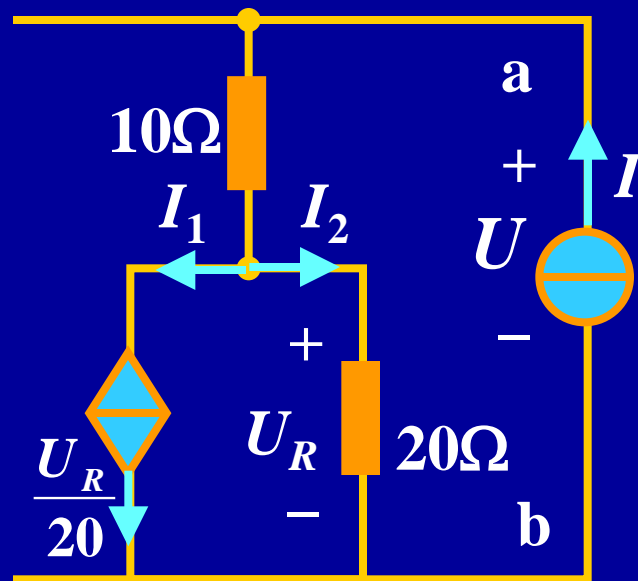
$$U_{oc} = 2 \times 10 + 20I_2 + 20 = 60V$$

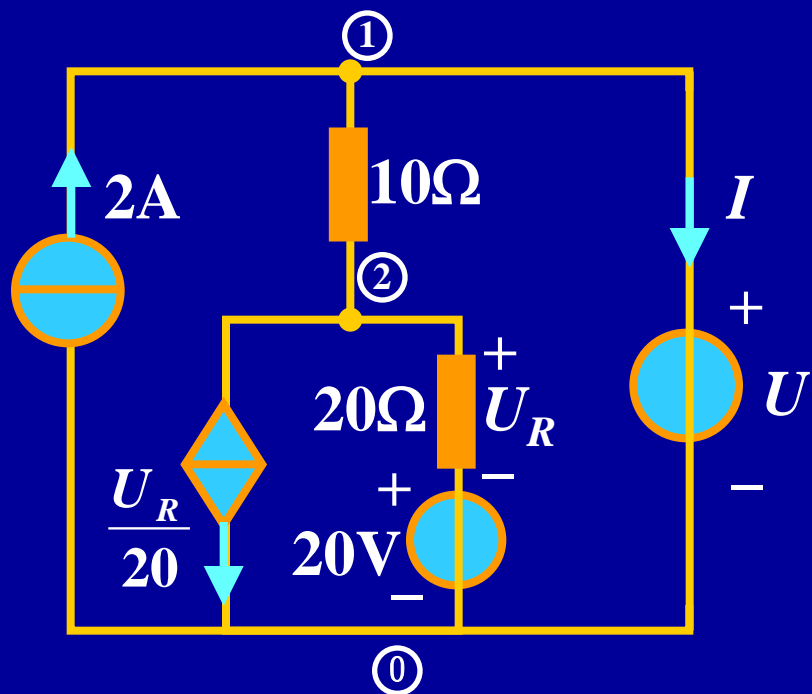
(2) 求等效电阻  $R_{eq}$

$$I_1 = I_2 = I / 2$$

$$U = 10I + 20 \times I / 2 = 20I$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 20\Omega$$





**解** 利用伏安特性关系求解

$$\frac{U_{n1}}{10} - \frac{U_{n2}}{10} = 2 - I$$

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right)U_{n2} - \frac{1}{10}U_{n1} = \frac{20}{20} - \frac{U_R}{20}$$

$$U_{n1} = U$$

$$U_R = U_{n2} - 20$$

→  $U = 60 - 20I$

$$U_{oc} = 60V$$

$$R_{eq} = 20\Omega$$

(3) 由最大功率传输定理得:

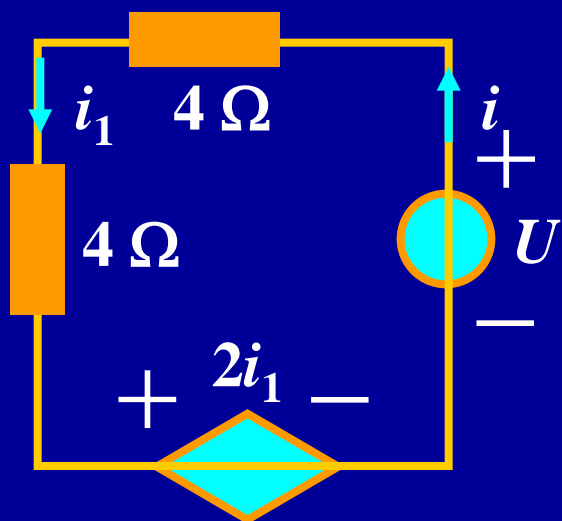
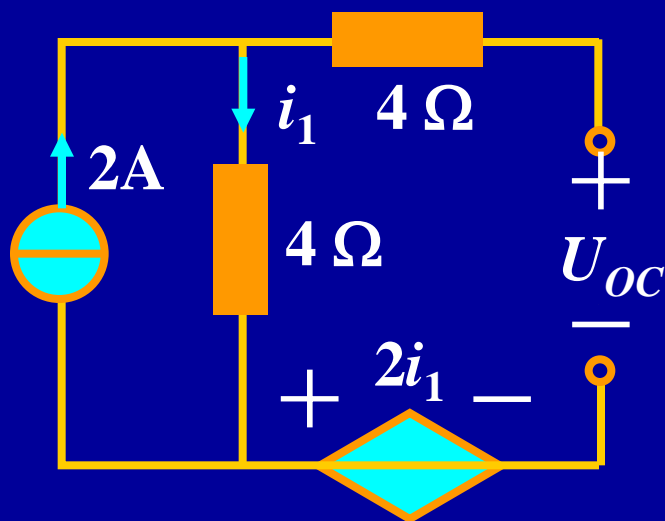
$$R_L = R_{eq} = 20\Omega \quad \text{时其上可获得最大功率}$$

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4 \times 20} = 45W$$

注

- (1) 最大功率传输定理用于一端口电路给定, 负载电阻可调的情况;
- (2) 一端口等效电阻消耗的功率一般并不等于端口内部消耗的功率, 因此当负载获取最大功率时, 电路的传输效率并不一定是50%;
- (3) 计算最大功率问题结合应用戴维宁定理 或诺顿定理最方便。

**例2**  $R_L$ 为何值时其上获得最大功率，并求最大功率。



**解** (1) 求开路电压  $U_{oc}$

$$U_{oc} = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1$$

$$i_1 = 2A \quad U_{oc} = 12V$$

(2) 求等效电阻  $R_{eq}$

$$U = 8i_1 + 2i_1 = 10i_1$$

$$R_{eq} = \frac{U}{i_1} = 10\Omega$$

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{12^2}{4 \times 10} = 3.6W$$