第六章 储能元件

6.1 电容元件

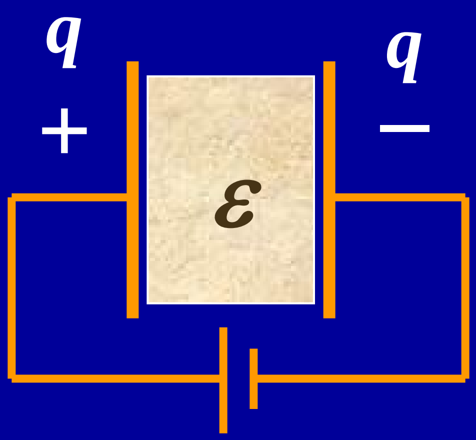
6.2 电感元件

6.3 储能元件的串联和并联

下 页

6.1 电容元件 (Capacitor)

电容器 → 在外电源作用下，两极板上分别带上等量异号电荷，撤去电源，板上电荷仍可长久地集聚下去，是一种储存电能的部件。

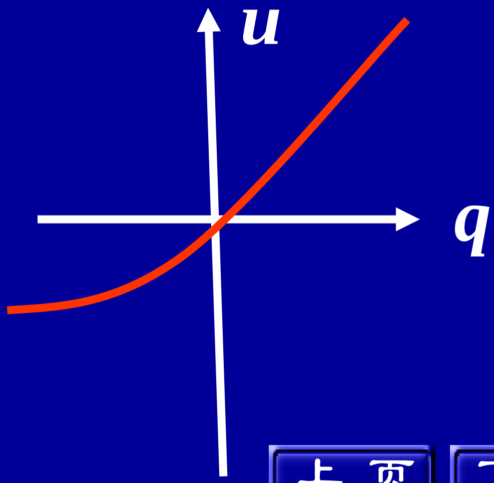


1. 定义

电容元件 → 储存电能的元件。其特性可用$u \sim q$ 平面上的一条曲线来描述

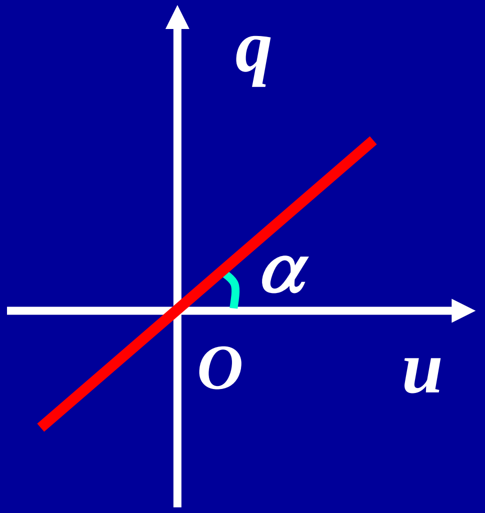
$$f(u,q)=0$$

库伏特性



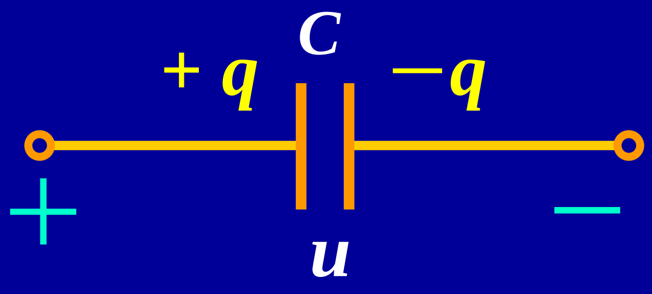
2. 线性电容元件

任何时刻，电容元件极板上的电荷q与电压 u 成正比，$q \sim u$ 特性是过原点的直线。



$$q = Cu \quad 或者 \quad C = \frac{q}{u} \propto \tan\alpha$$

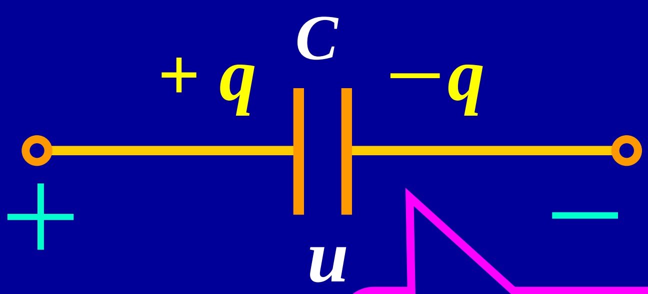
电路符号



单位

C 称为电容器的电容, 单位：F (法) (Farad，法拉)，常用μF、$p F$、$n F$等表示。

线性电容的电压、电流关系



u、i 取关联参考方向

电容元件VCR的微分形式

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

表明:

(1) i 的大小取决于 u 的变化率，与 u 的大小无关，电容是动态元件；

(2) 当 u 为常数(直流)时，$i=0$。电容相当于开路，电容有隔断直流作用；

(3) 实际电路中通过电容的电流 i 为有限值，则电容电压 u 必定是时间的连续函数。

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i d\xi=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i d\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i d\xi$$

$$=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i d\xi$$

电容元件VCR
的积分形式

表明: 电容元件有记忆电流的作用，故称电容为记忆元件

注

（1）当 u，i 为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

（2）上式中 $u(t_0)$ 称为电容电压的初始值，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

3. 电容的功率和储能

u、i 取关联参考方向

功率

$$p = ui = u \cdot C\frac{du}{dt}$$

电容的储能

$$W_C = \int_{-\infty}^{t} u\,i\,d\xi = \int_{-\infty}^{t} uC\frac{du}{d\xi}d\xi = \frac{1}{2}Cu^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(-\infty) \overset{\text{若}u(-\infty)=0}{=} \frac{1}{2}Cu^2(t) \ge 0$$

表明

（1）电容的储能只与当时的电压值有关，电容电压不能跃变，反映了储能不能跃变；

（2）电容储存的能量一定大于或等于零。

从 t_1 时刻到 t_2时刻电容储能的变化量：

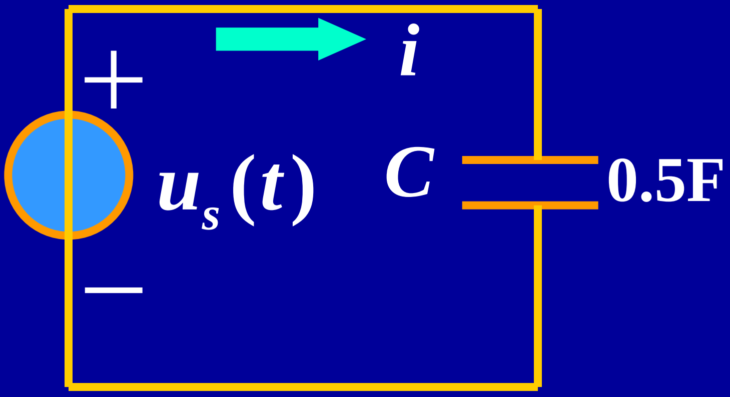
$$W_C = \frac{1}{2}Cu^2(t_2) - \frac{1}{2}Cu^2(t_1) = \frac{1}{2C}q^2(t_2) - \frac{1}{2C}q^2(t_1)$$

充电时，有$|u(t_2)| > |u(t_1)|$，故$W_C(t_2) > W_C(t_1)$

放电时，有$|u(t_2)| < |u(t_1)|$，故$W_C(t_2) < W_C(t_1)$

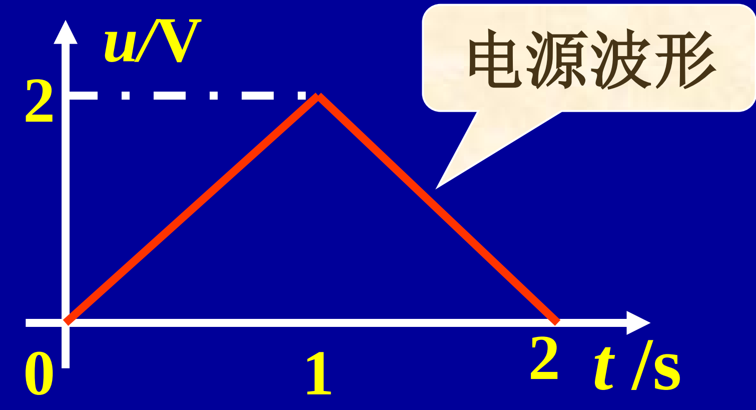
电容能在一段时间内吸收外部供给的能量，转化为电场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电容元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

例 求电流i、功率$P(t)$和储能$W(t)$



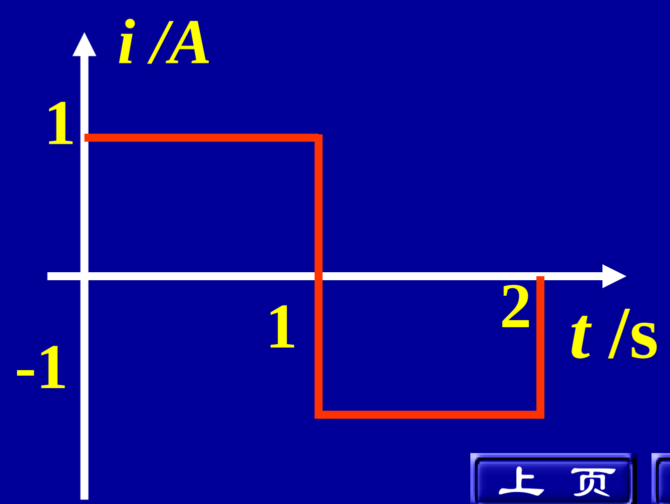
解 $u_S(t)$的函数表示式为:

$$u_s(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1s\\ -2t+4 & 1\le t\le 2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



解得电流

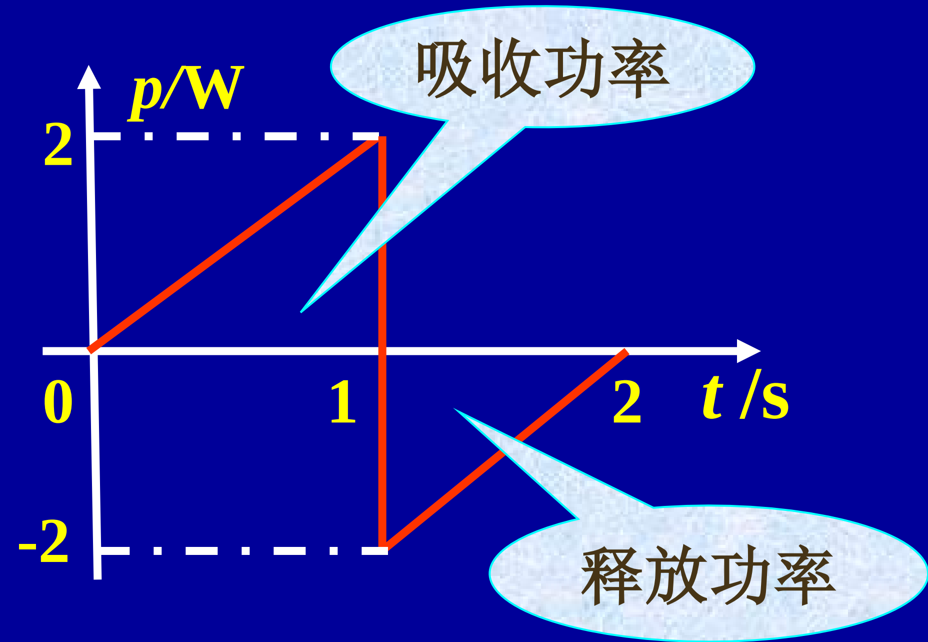
$$i(t)=C\frac{du_s}{dt}=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1s\\ -1 & 1\le t<2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



上 页 下 页

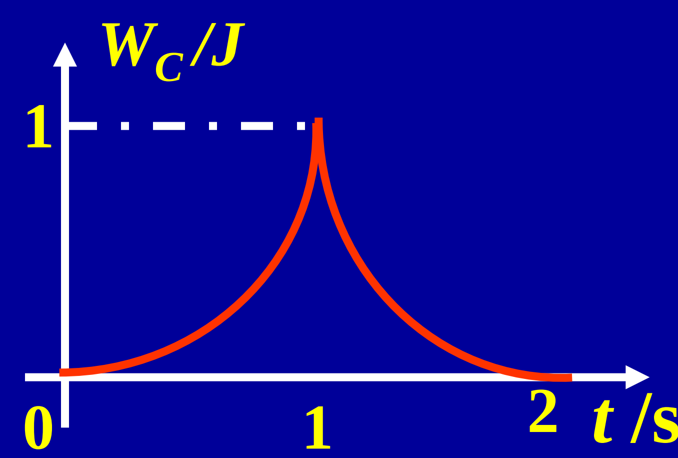
$$p(t) = u(t)i(t)$$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 2t & 0 \le t \le 1s \\ 2t-4 & 1 \le t \le 2s \\ 0 & t \ge 2s \end{cases}$$



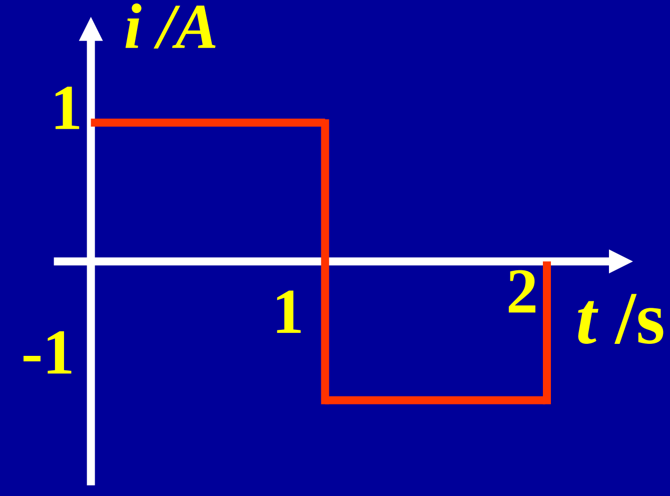
$$W_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t^2 & 0 \le t \le 1s \\ (t-2)^2 & 1 \le t \le 2s \\ 0 & t \ge 2s \end{cases}$$



若已知电流求电容电压，有

$$i(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1s\\ -1 & 1\le t<2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



当$0\le t\le 1s$ $$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0}0d\xi+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}1d\xi=0+2t=2t$$

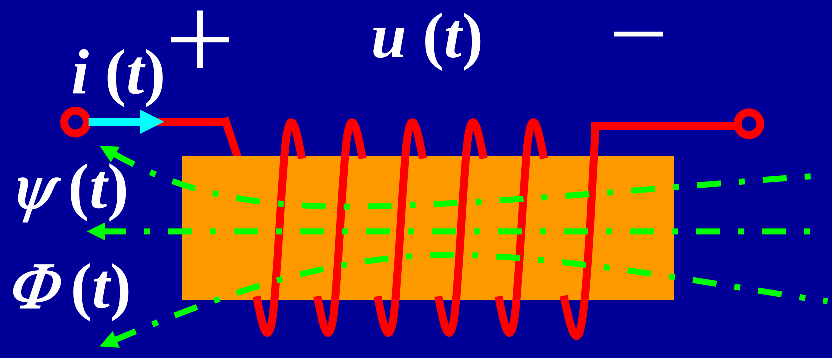
当 $1\le t\le 2s$ $$u_C(t)=u(1)+\frac{1}{0.5}\int_{1}^{t}(-1)d\xi=4-2t$$

当 $2\le t$ $$u_C(t)=u(2)+\frac{1}{0.5}\int_{2}^{t}0d\xi=0$$

上 页 下 页

6.2 电感元件 (Inductor)

电感器 → 把金属导线绕在一骨架上构成一实际电感器，当电流通过线圈时，将产生磁通，是一种储存磁场能量的部件。



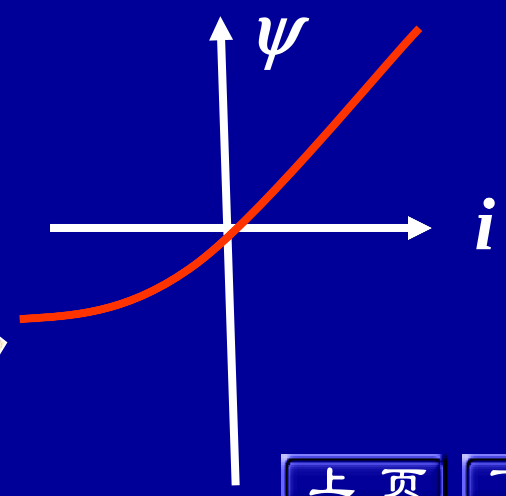
$$\psi(t) = N\,\Phi(t)$$

1.定义

电感元件 → 储存磁能的元件。其特性可用 $\psi \sim i$ 平面上的一条曲线来描述。

$$f(\psi, i) = 0$$

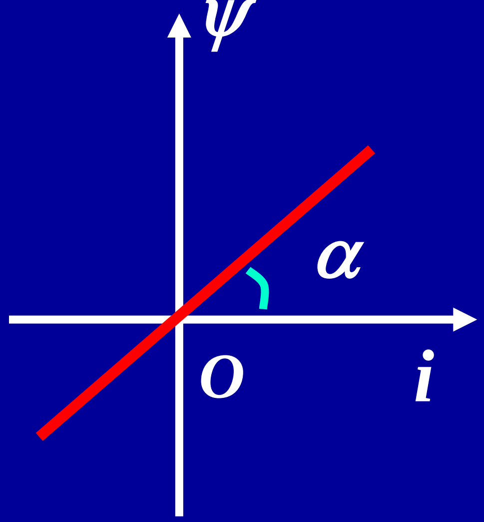
韦安特性



2. 线性电感元件

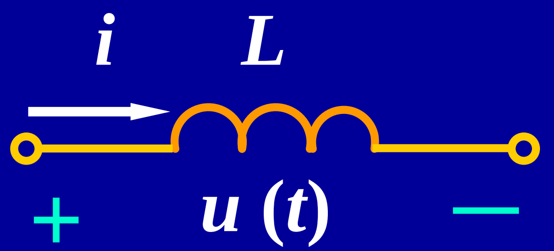
任何时刻，通过电感元件的电流i与其磁链ψ成正比。

$\psi \sim i$ 特性是过原点的直线。



$$\psi(t) = Li(t) \quad or \quad L = \frac{\psi}{i} \propto \tan\alpha$$

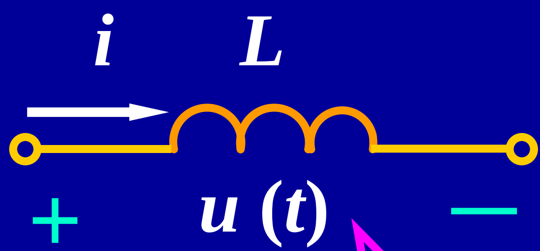
电路符号



单位

L 称为电感器的自感系数, L的单位：H (亨) (Henry，亨利)，常用μH，mH表示。

线性电感的电压、电流关系



u、i 取关联参考方向

电感元件VCR的微分关系

$$u(t)=\frac{d\psi}{dt}=L\frac{di(t)}{dt}$$

表明

(1) 电感电压u 的大小取决于i 的变化率，与i 的大小无关，电感是动态元件；

(2) 当i为常数(直流)时，u =0。电感相当于短路；

(3) 实际电路中电感的电压 u为有限值，则电感电流 i 不能跃变，必定是时间的连续函数。

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u d\xi \quad =\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u d\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u d\xi$$

$$=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u d\xi$$

电感元件VCR
的积分形式

表明

电感元件有记忆电压的作用，故称电感为记忆元件。

注

（1）当 u，i 为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

（2）上式中 $i(t_0)$ 称为电感电流的初始值，它反映电感初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

3. 电感的功率和储能

u、i 取关联参考方向

功率

$$p = ui = L\frac{di}{dt}\cdot i$$

电感的储能

$$W_L = \int_{-\infty}^{t} p d\xi = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di}{d\xi} i d\xi = \frac{1}{2}Li^2(\xi)\Big|_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(-\infty) \overset{\text{若}\, i(-\infty)=0}{=} \frac{1}{2}Li^2(t) \geq 0$$

表明

（1）电感的储能只与当时的电流值有关，电感电流不能跃变，反映了储能不能跃变；

（2）电感储存的能量一定大于或等于零。

从t_0到 t 电感储能的变化量：

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(t_0) = \frac{1}{2L}\psi^2(t) - \frac{1}{2L}\psi^2(t_0)$$

当电流$|i(t)|$增加时，$\Delta W_L(t) > 0$，元件吸收能量

当电流$|i(t)|$减少时，$\Delta W_L(t) < 0$，元件释放能量

电感能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为磁场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电感元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

电容元件与电感元件的比较

	电容 C	电感 L
变量	电压 u 电荷 q	电流 i 磁链 ψ
关系式	$q = Cu$ $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $W_C = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{1}{2C}q^2$	$\psi = Li$ $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $W_L = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2L}\psi^2$

结论

(1) 元件方程的形式是相似的；

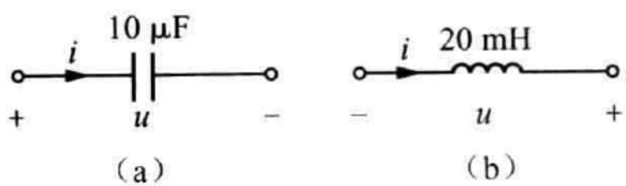
(2) 若把 $u-i$，$q-\psi$ ，$C-L$ 互换,可由电容元件的方程得到电感元件的方程；

(3) C 和 L称为对偶元件, ψ、q 等称为对偶元素。

【6-1】 电容元件与电感元件中电压、电流参考方向如题6-1图所示，且知 $u_C(0)=0, i_L(0)=0$，

(1) 写出电压用电流表示的约束方程；

(2) 写出电流用电压表示的约束方程。



题 6-1 图

【分析】 本题考查的是电容元件和电感元件在关联方向$i(t)$和 $u_C(t)$的微分和积分关系。

【解】 (1) 对题 6-1 图(a)，电容元件

$$u(t)=u_C(0)+\int_0^t \frac{i}{C}d\xi$$

又由 $u_C(0)=0$

可得 $u(t)=\int_0^t \frac{i}{C}d\xi=10^5\int_0^t i d\xi$

对题 6-1 图(b)，电感元件 $u=L\frac{di}{dt}$

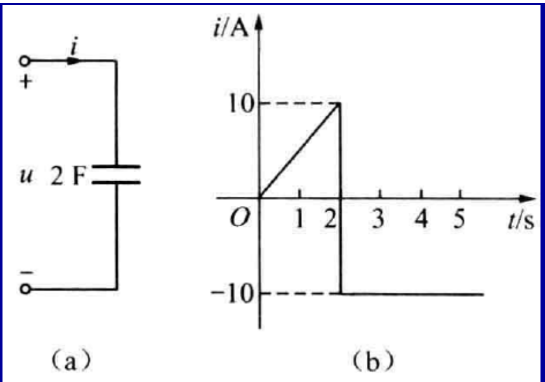
(2) 对题 6-1 图(a)，电容元件 $i=C\frac{du}{dt}$

对题 6-1 图(b)，电感元件 $i(t)=i_L(0)+\int_0^t \frac{u}{L}d\xi$

又由 $i_L(0)=0$

可得 $i(t)=\int_0^t \frac{u}{L}d\xi=50\int_0^t u d\xi$

【6-3】 题 6-3 图(a)中电容中电流 i 的波形如题 6-3 图(b)所示，现已知 $u(0)=0$，试求 $t=1$ s，$t=2$ s和 $t=4$ s时电容电压 u。



题 6-3 图

【分析】 先分析题 6-3 图电容所加电压波形图，再由电容元件在关联方向 $i(t)$ 和 $u_C(t)$ 的积分关系 $u(t)=u_C(0)+\dfrac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}\xi$ 即可求得。

【解】 由题 6-3 图(b)可得电压 $i(t)$ 的函数表达式为

$$i(t)=\begin{cases}5t\ \mathrm{A} & 0\leqslant t\leqslant 2\ \mathrm{s}\\ -10\ \mathrm{A} & 2\ \mathrm{s}<t\leqslant 5\ \mathrm{s}\end{cases}$$

又由 $u(t)=u_C(0)+\dfrac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}\xi,\ u_C(0)=0$

可得 $u(t)=\dfrac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}\xi$

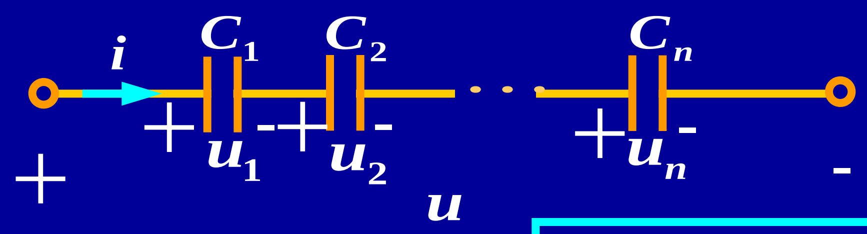
$$t=1\ \mathrm{s},\ u(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_0^1 5t\mathrm{d}t=\frac{5}{4}\ \mathrm{V}$$

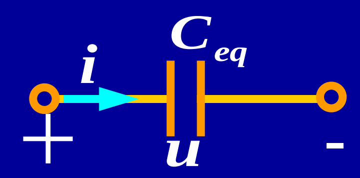
$$t=2\ \mathrm{s},\ u(t)=\frac{1}{2}\int_0^2 5t\mathrm{d}t=5\ \mathrm{V}$$

$$t=4\ \mathrm{s},\ u(t)=\frac{1}{2}\int_0^2 5t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_2^4(-10)\mathrm{d}t=-5\ \mathrm{V}$$

6.3 电容、电感元件的串联与并联

电容的串联





$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$\boxed{u = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i d\xi}$$

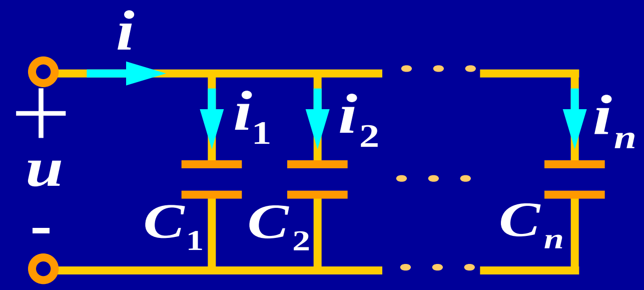
$$= u_1(t_0) + \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i d\xi + u_2(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i d\xi + \cdots + u_n(t_0) + \frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i d\xi$$

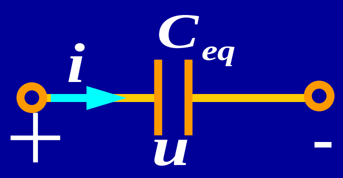
$$= u_1(t_0) + u_2(t_0) + \cdots + u_n(t_0) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)\int_{t_0}^{t} i d\xi$$

$$= u(t_0) + \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i d\xi$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

电容的并联





$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

$$= C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + \cdots + C_n \frac{du}{dt}$$

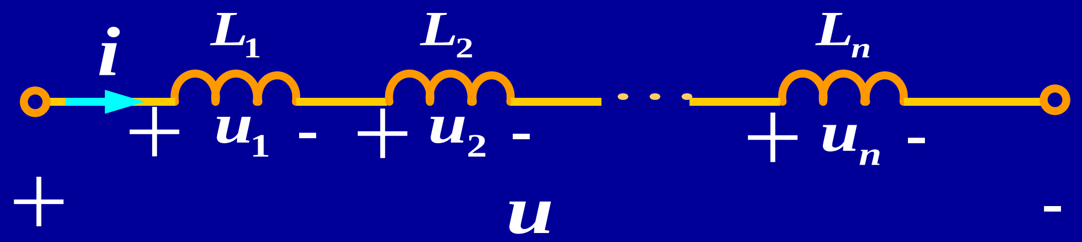
$$= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \frac{du}{dt}$$

$$= C_{eq} \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{i = C \frac{du}{dt}}$$

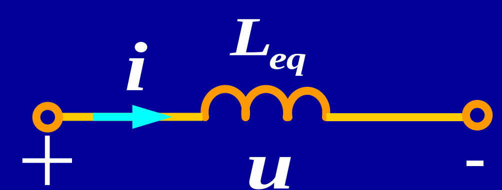
$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$

电感的串联



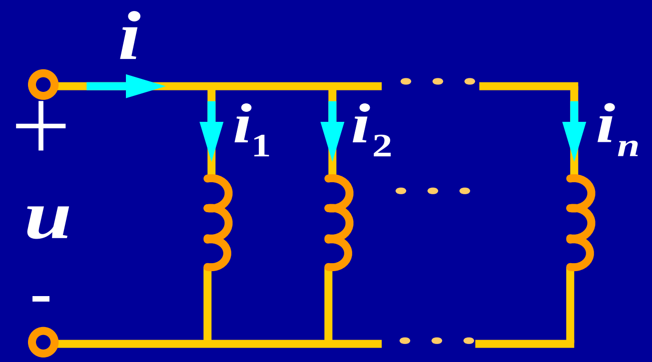
$$u = L\frac{di}{dt}$$

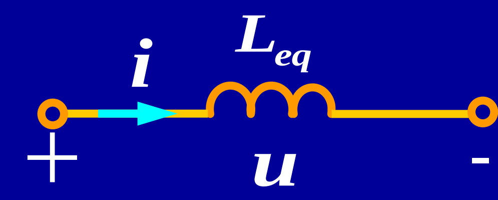
$$
\begin{aligned}
u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \cdots + L_n\frac{di}{dt} \\
&= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n)\frac{di}{dt} \\
&= L_{eq}\frac{di}{dt}
\end{aligned}
$$



$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n}$$

电感的并联





$$\boxed{i = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u d\xi}$$

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

$$= i_1(t_0) + \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} u d\xi + i_2(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} u d\xi + \cdots + i_n(t_0) + \frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} u d\xi$$

$$= i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_n(t_0) + (\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n})\int_{t_0}^{t} u d\xi$$

$$= i(t_0) + \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} u d\xi$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}}$$

上 页