第二章 电阻电路的等效变换

重点

1. 电路等效的概念
2. 电阻的串、并联
3. Y—Δ 变换
4. 实际电源的等效变换
5. 输入电阻

下 页

2.1 引言

线性电路 → 由线性时不变无源元件、线性受控源和独立电源组成的电路。

线性电阻电路 → 仅由电源、线性受控源和线性电阻构成的电路。

分析方法 →

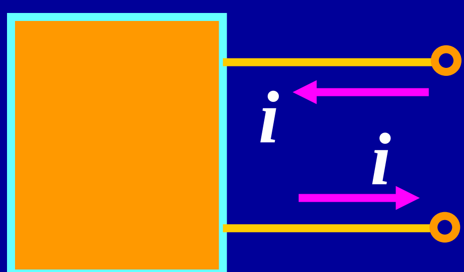
（1）欧姆定律和基尔霍夫定律是分析电阻电路的依据；

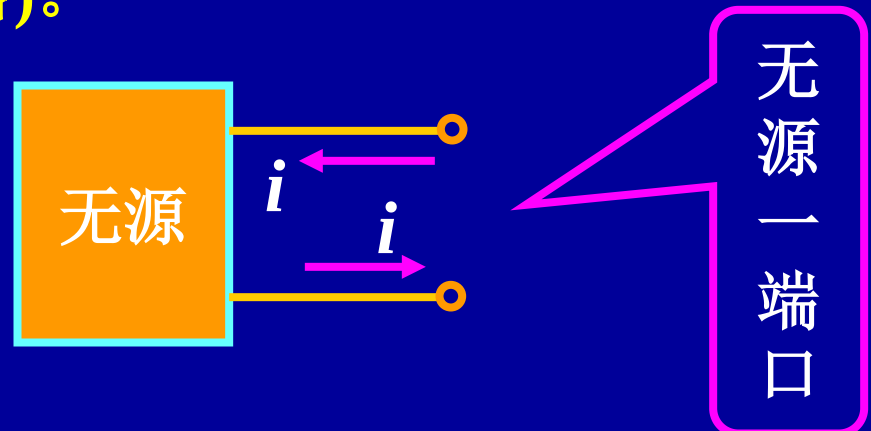
（2）等效变换的方法,也称化简的方法。

2.2 电路的等效变换

1. 二端网络（一端口）

任何一个复杂的电路, 向外引出两个端钮，且从一个端子流入的电流等于从另一端子流出的电流，则称这一电路为二端网络(或一端口网络)。

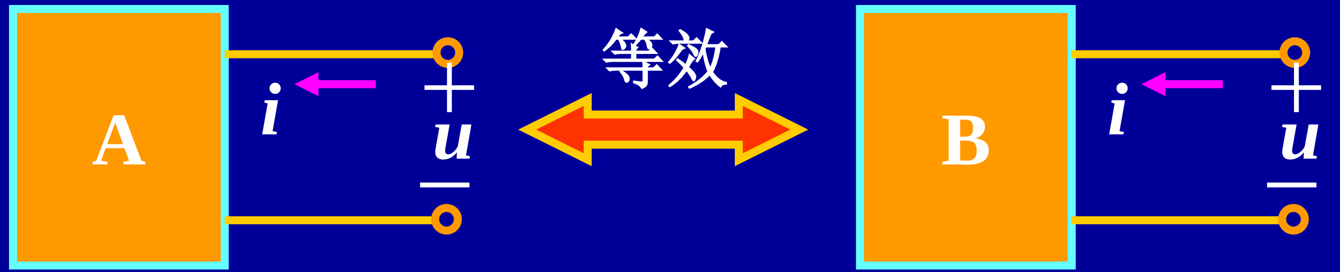


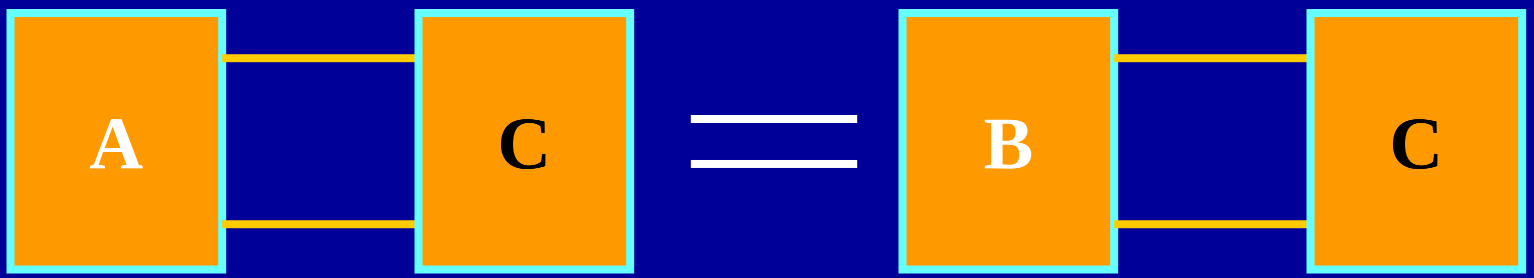


2. 二端电路等效的概念

两个内部结构不同的二端网络，端口具有完全相同的电压、电流关系，则称它们是等效的电路。

上 页 下 页





明确

（1）电路等效变换的条件 → 两电路具有**相同的**VCR

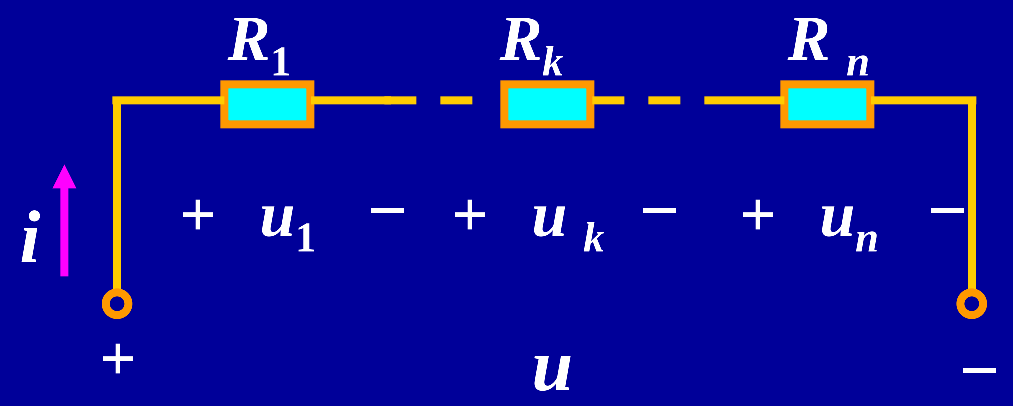
（2）等效变换指**对外等效** → 未变化的外电路 C 中的电压、电流和功率均保持不变。

（3）电路等效变换的目的 → 化简电路，方便计算

2.3 电阻的串联、并联和串并联

1. 电阻串联(Series Connection of Resistors)

（1） 电路特点

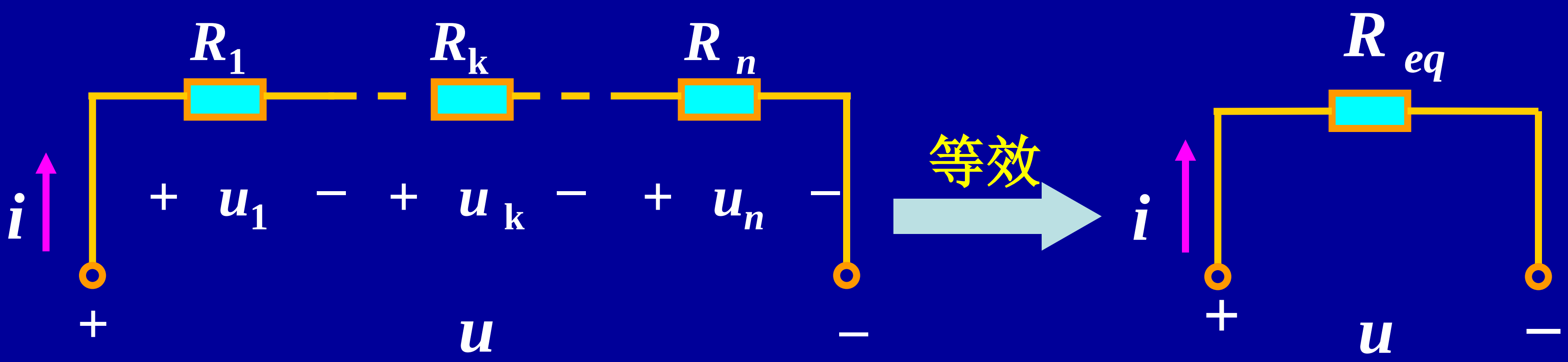


(a) 各电阻顺序连接，流过同一电流 (KCL);

(b) 总电压等于各串联电阻的电压之和 (KVL)。

$$u = u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

（2）等效电路



由欧姆定律

$$u = R_1 i + \cdots + R_K i + \cdots + R_n i = (R_1 + \cdots + R_n) i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k > R_k$$

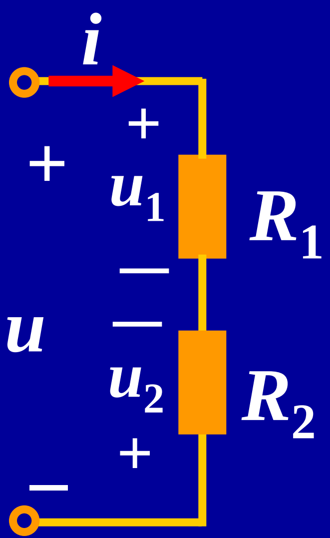
结论：串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

（3）串联电阻的分压

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u < u$$

说明电压与电阻成正比，因此串联电阻电路可作分压电路

例 两个电阻的分压：



$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} u$$

注意方向！

（4）功率

$$p_1 = R_1 i^2,\quad p_2 = R_2 i^2,\quad \cdots,\quad p_n = R_n i^2$$

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = R_1 : R_2 : \cdots : R_n$$

总功率 $p = R_{eq} i^2 = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i^2$

$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

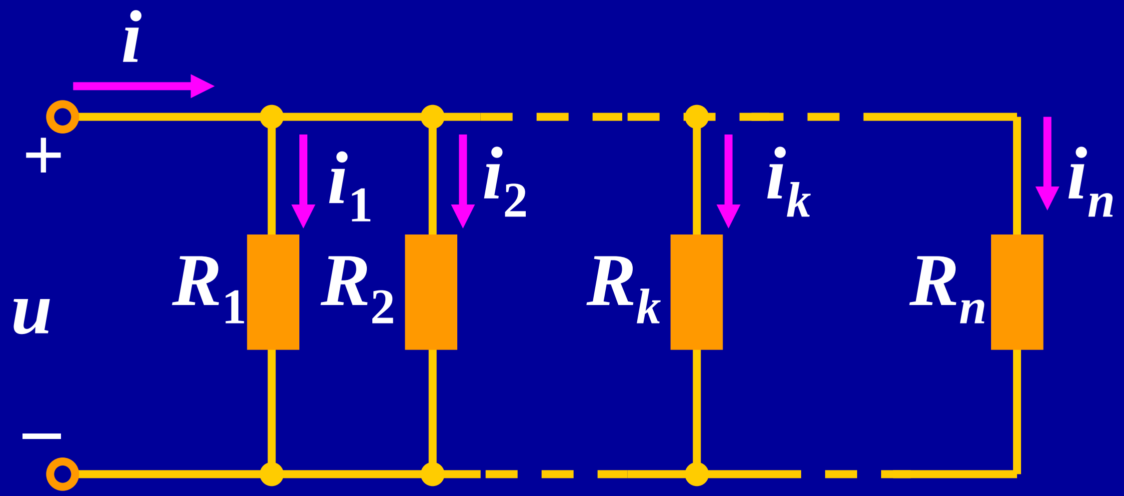
表明

（1） 电阻串联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成正比

（2） 等效电阻消耗的功率等于各串联电阻消耗功率的总和

2. 电阻并联 (Parallel Connection)

（1） 电路特点



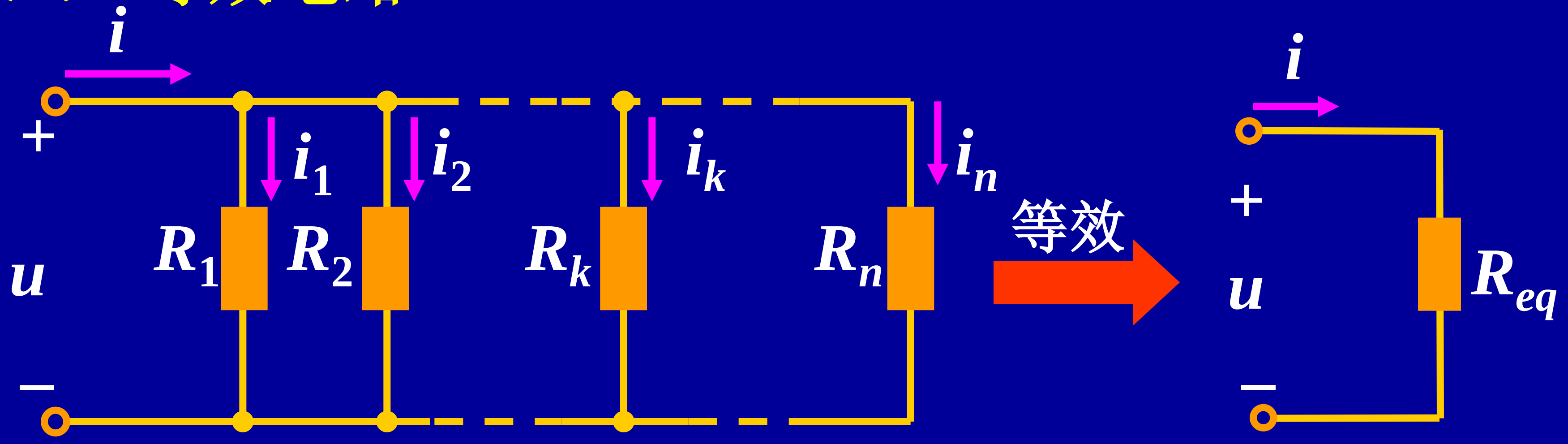
(a) 各电阻两端分别接在一起，两端为同一电压 (KVL)；

(b) 总电流等于流过各并联电阻的电流之和 (KCL)。

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n$$

上 页 下 页

（2）等效电路



由KCL:

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + \cdots + i_n$$

$$= G_1 u + G_2 u + \cdots + G_k u + \cdots + G_n u = G_{eq} u$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k > G_k$$

等效电导等于并联的各电导之和

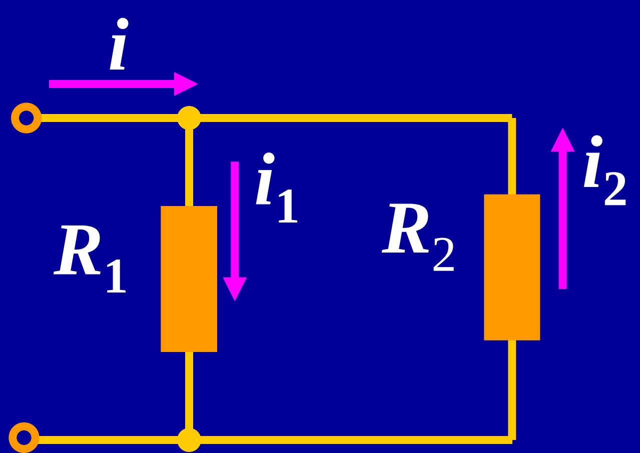
$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$ 即 $R_{eq} < R_k$

（3） 并联电阻的电流分配

电流分配与电导成正比

$$\frac{i_k}{i}=\frac{u/R_k}{u/R_{eq}}=\frac{G_k}{G_{eq}} \quad\Rightarrow\quad i_k=\frac{G_k}{G_{eq}}i$$

对于两电阻并联，有：



$$R_{eq}=\frac{1}{1/R_1+1/R_2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$i_1=\frac{R_{eq}i}{R_1}=\frac{R_2 i}{R_1+R_2}$$

$$i_2=-\frac{R_{eq}i}{R_2}=-\frac{R_1 i}{R_1+R_2}$$

注意方向！

（4） 功率

$$p_1 = G_1 u^2, \quad p_2 = G_2 u^2, \quad \cdots, \quad p_n = G_n u^2$$

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = G_1 : G_2 : \cdots : G_n$$

总功率 $$p = G_{eq} u^2 = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n) u^2$$
$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

表明

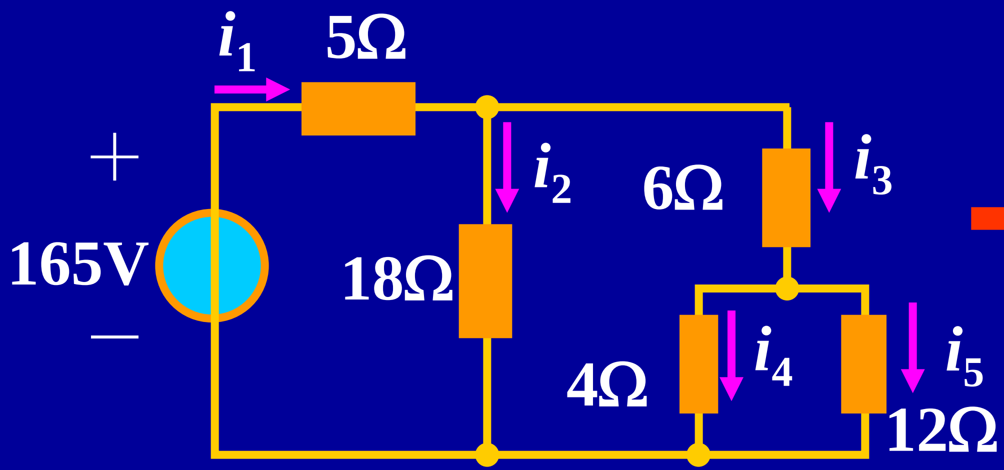
（1） 电阻并联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成反比

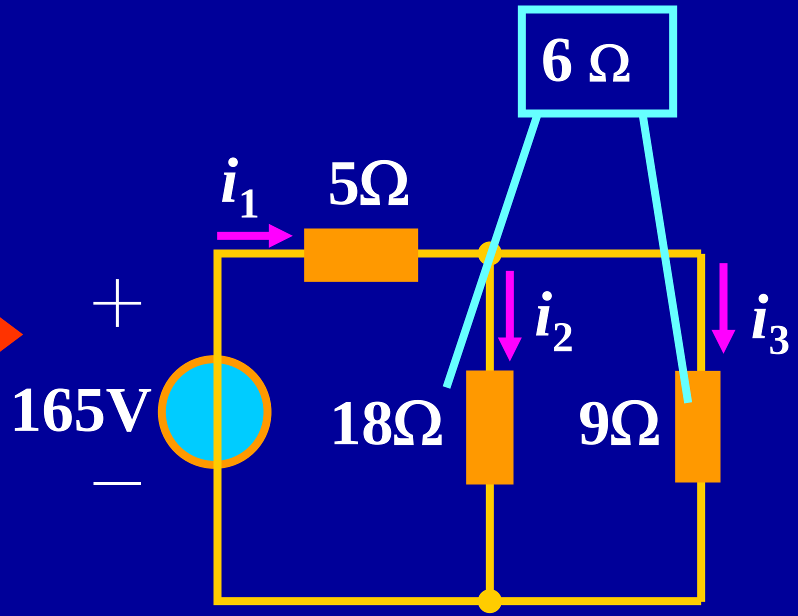
（2） 等效电阻消耗的功率等于各并联电阻消耗功率的总和

（3） 并联电阻彼此独立，互不影响。

3. 电阻的串并联

例 计算各支路的电流。





$$i_1 = 165/11 = 15\text{A}$$

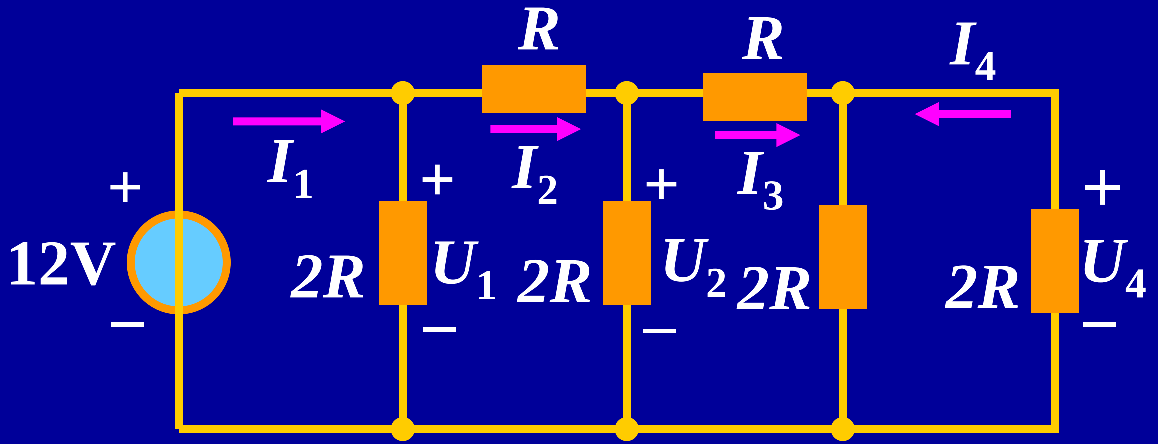
$$i_2 = \frac{9}{18+9} \times 15 = 5\text{A}$$

$$i_3 = 15 - 5 = 10\text{A}$$

$$i_4 = \frac{12}{12+4} \times 10 = 7.5\text{A}$$

$$i_5 = 10 - 7.5 = 2.5\text{A}$$

例



求：I_1, I_4, U_4

解

① 用分流方法

$$I_1 = \frac{12}{R}$$

$$I_4 = -\frac{1}{2} I_3 = -\frac{1}{4} I_2 = -\frac{1}{8} I_1 = -\frac{3}{2R}$$

$$U_4 = -I_4 \times 2R = 3\text{V}$$

②用分压方法

$$U_4 = \frac{U_2}{2} = \frac{1}{4} U_1 = 3\text{V} \qquad I_4 = -\frac{3}{2R}$$

上 页　下 页

从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤：

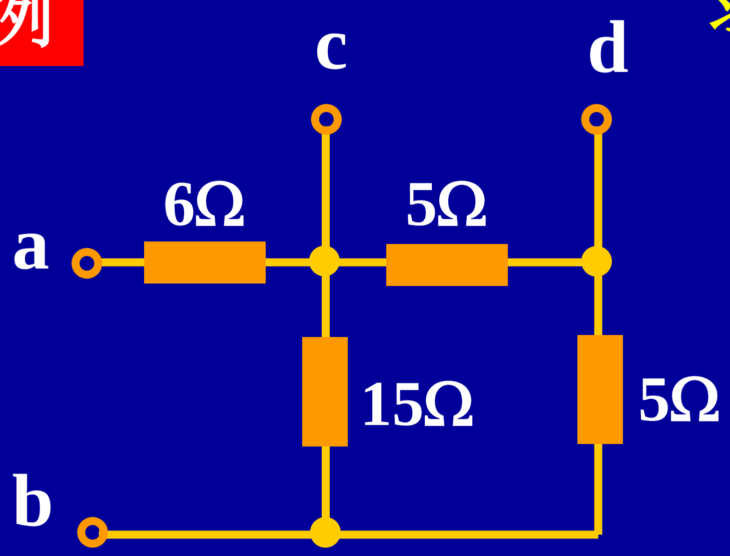
（1） 求出等效电阻或等效电导；

（2）应用欧姆定律求出总电压或总电流；

（3）应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压

以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

例



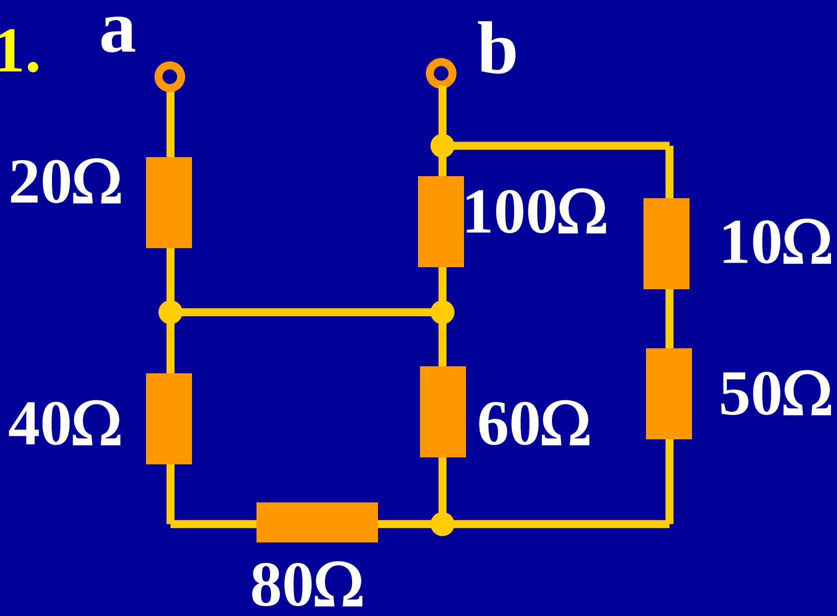
求：R_{ab}，R_{cd}

$$R_{ab} = (5+5)//15+6 = 12\Omega$$

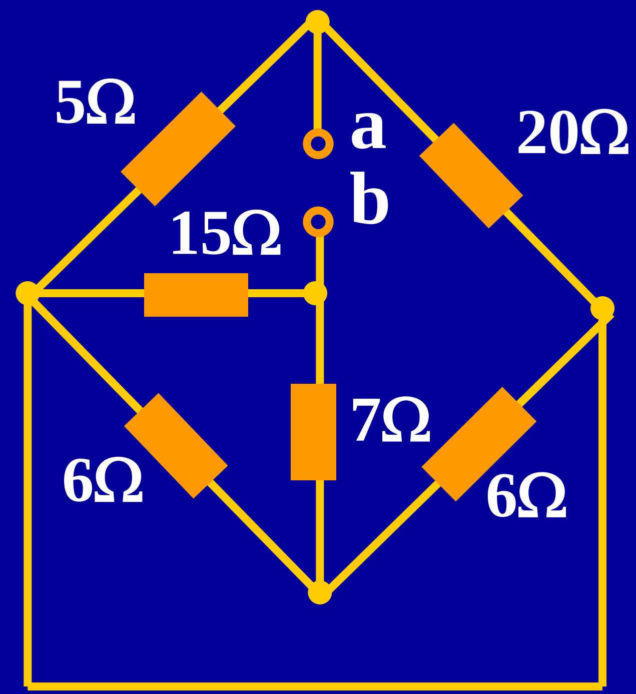
$$R_{cd} = (15+5)//5 = 4\Omega$$

等效电阻针对电路的某两端而言，否则无意义。

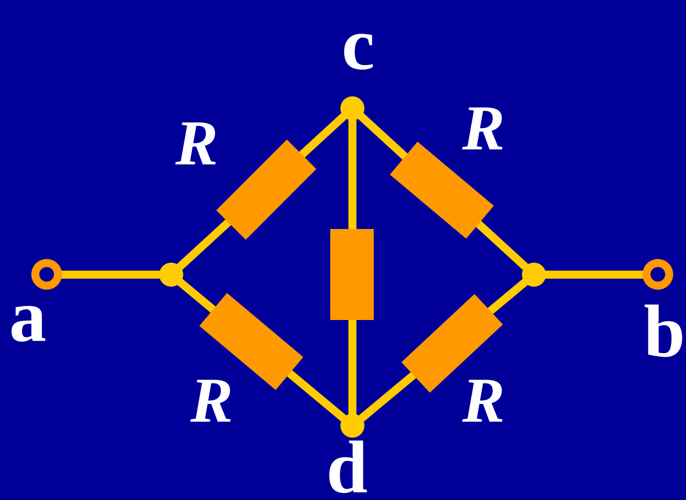
1.



2.

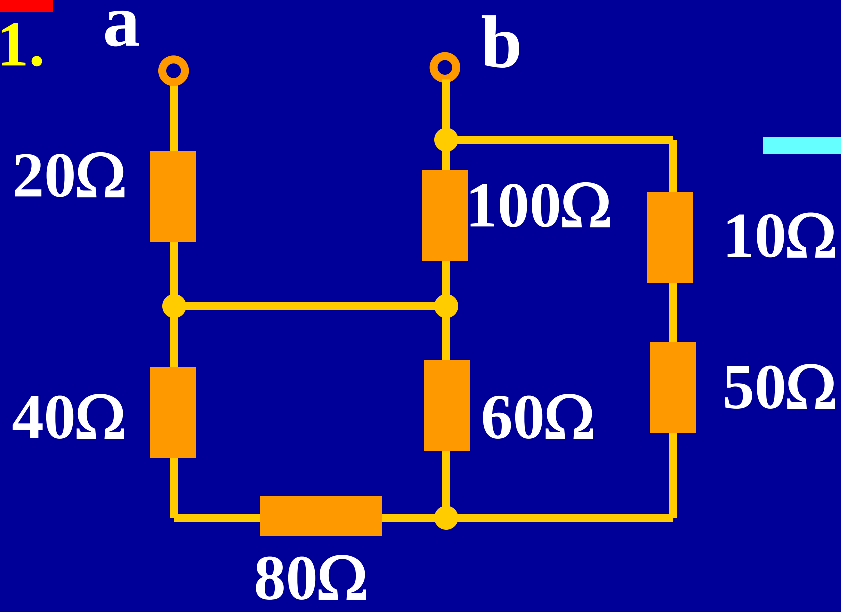


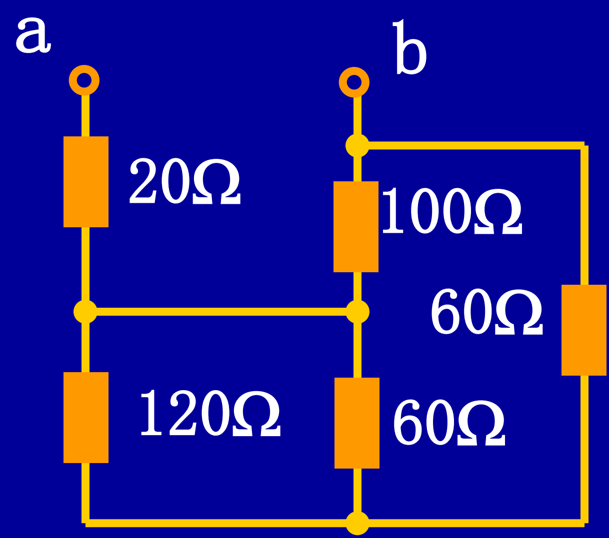
3.

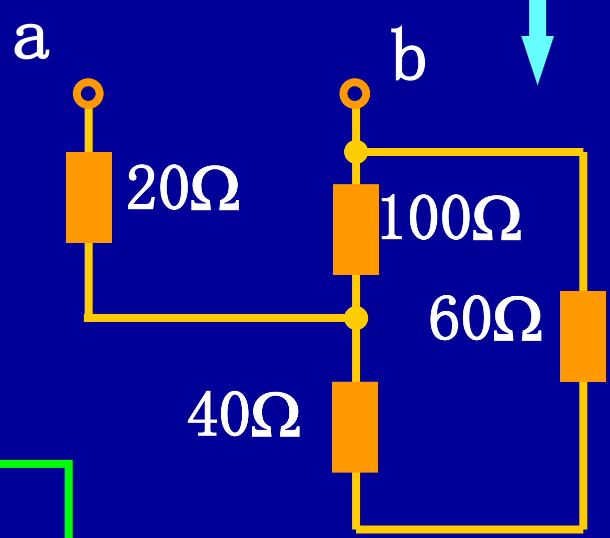


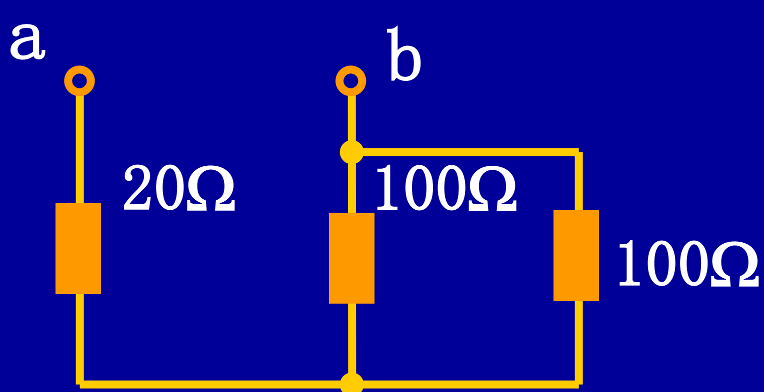
解

1.





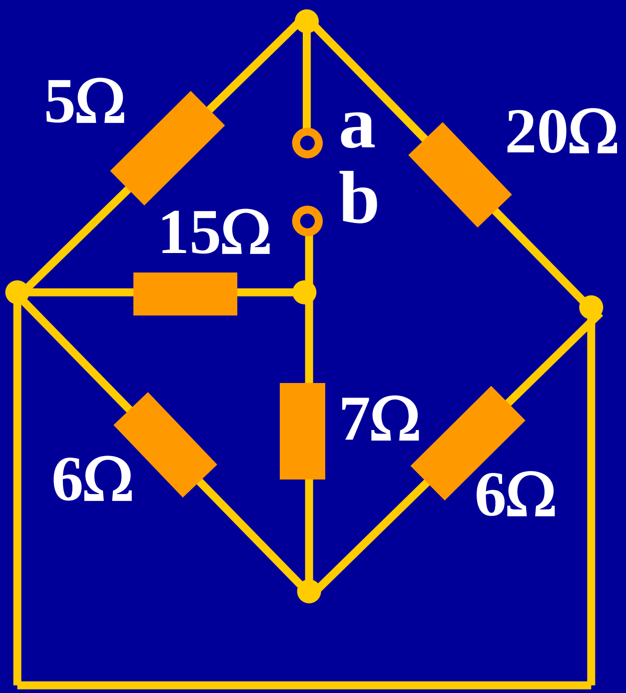




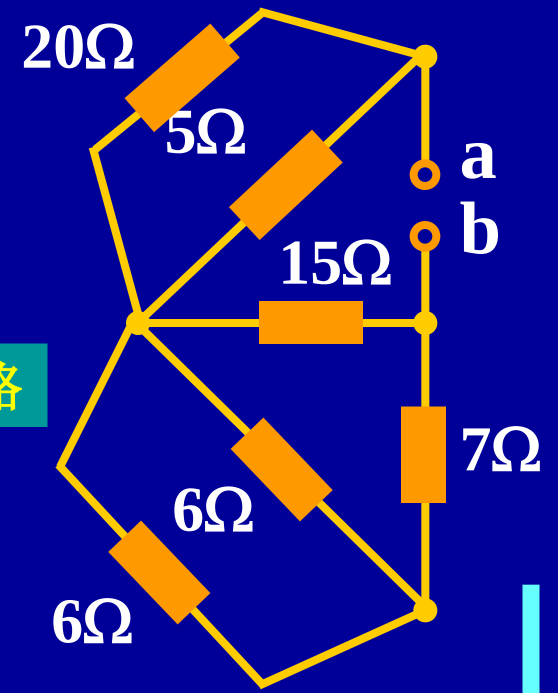
$$R_{ab}=70\Omega$$

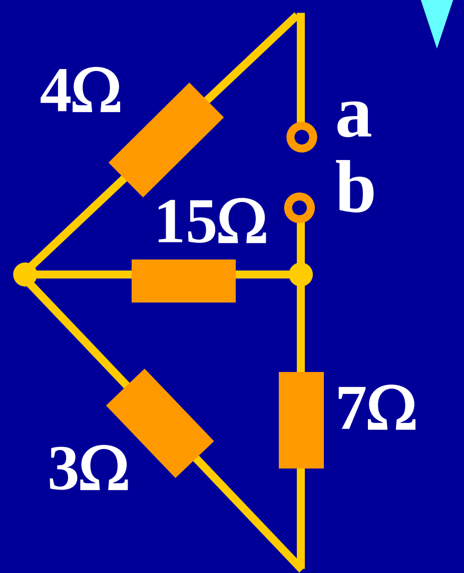
上 页 下 页

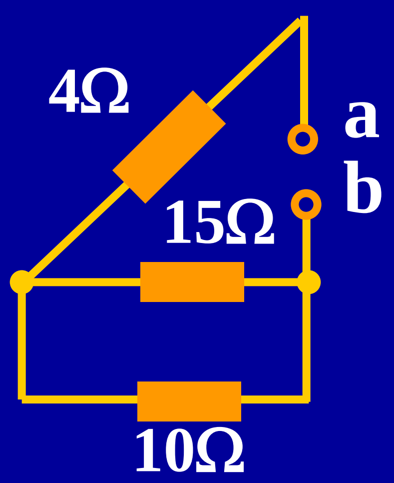
2.



缩短无电阻支路

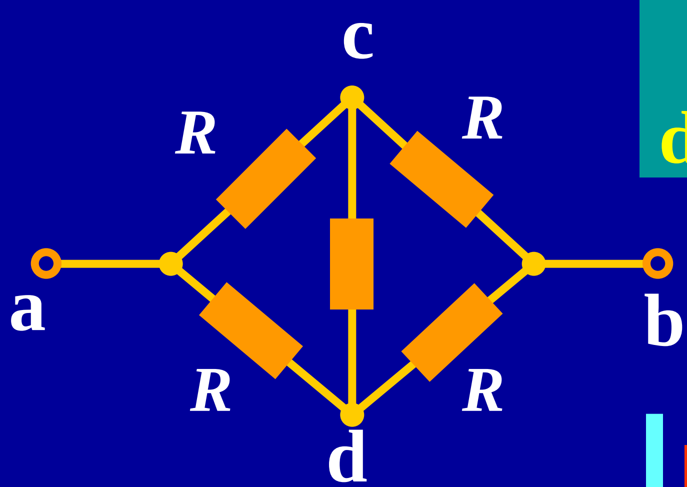






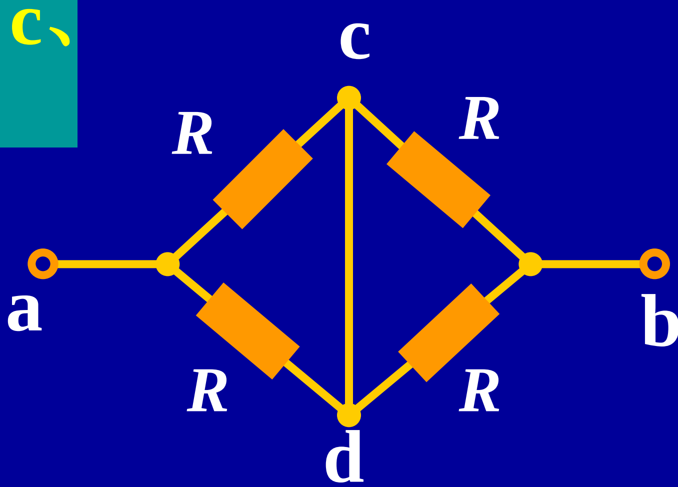
$R_{ab}=10\Omega$

3.

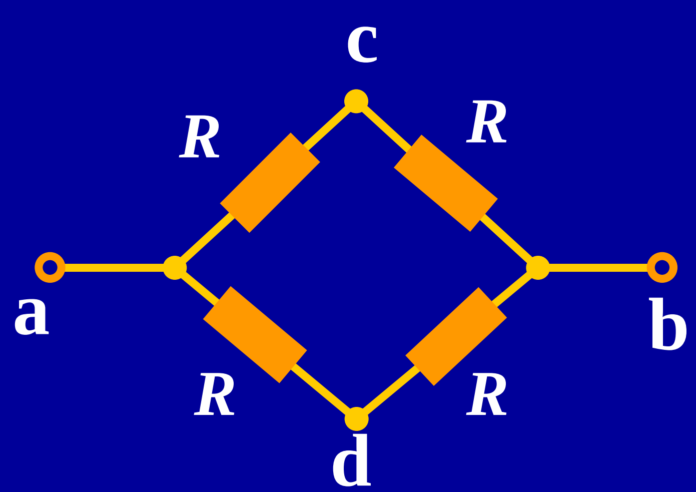


对称电路 c、d等电位

短路



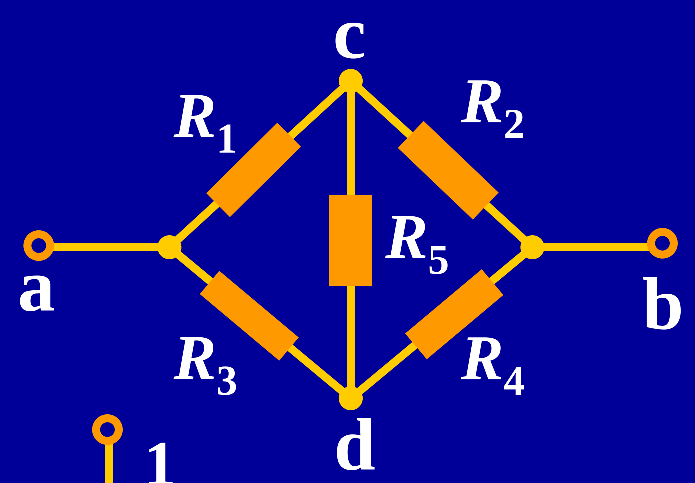
断路



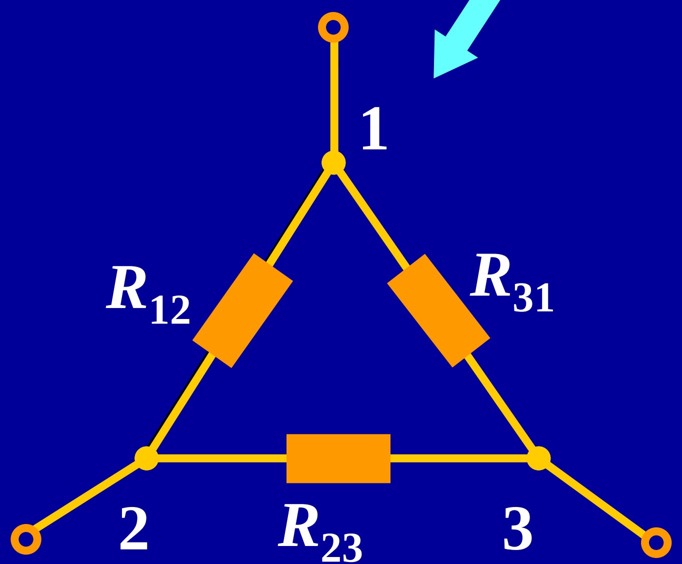
$$\boxed{R_{ab} = R}$$

2.4 电阻的Y形连接和Δ形连接的等效变换

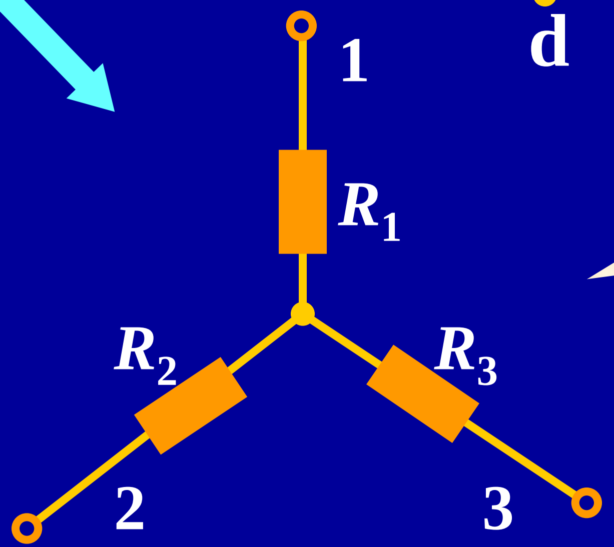
1. 电阻的Δ、Y连接



包含



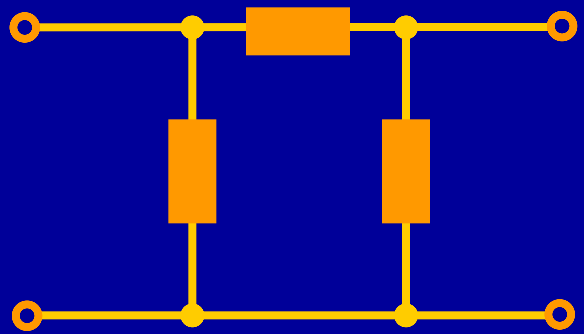
Δ 型网络



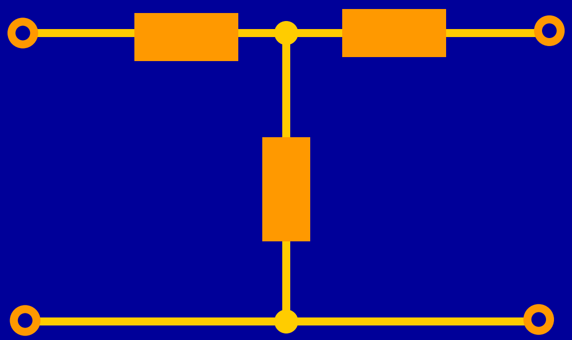
三端网络

Y型网络

Δ， Y 网络的变形



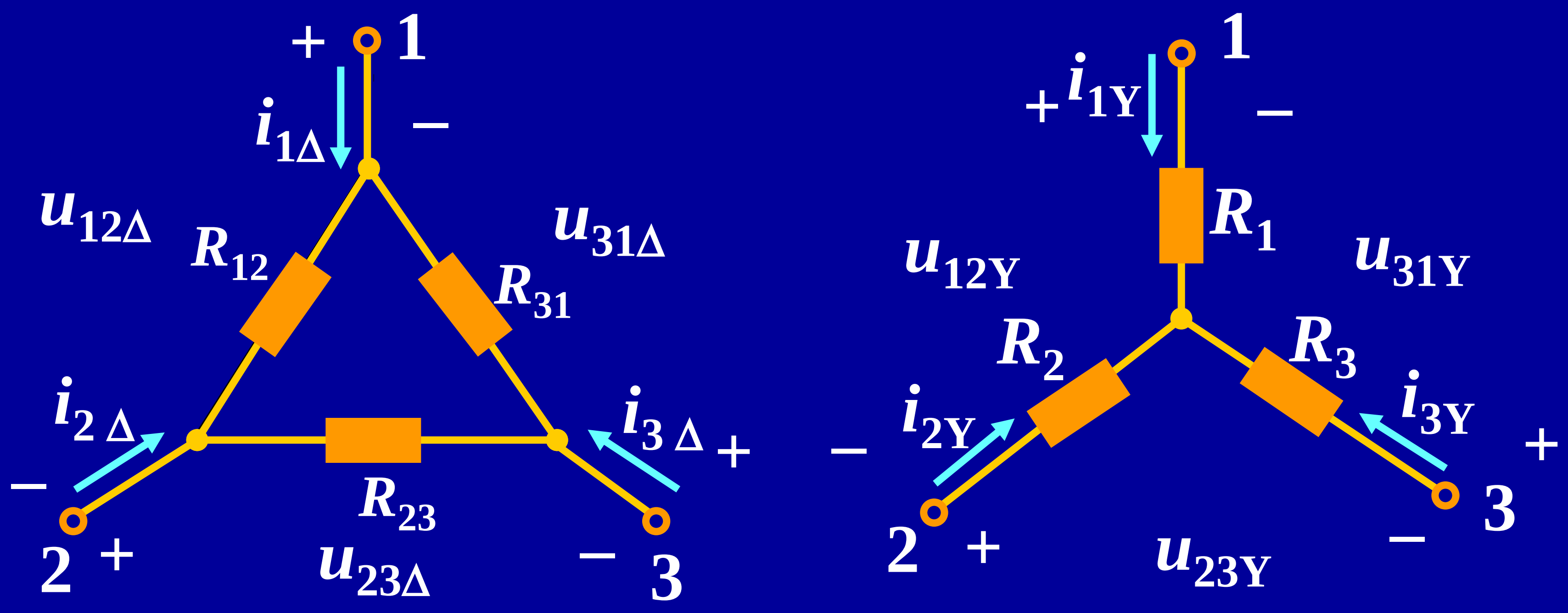
π 型电路 (Δ 型)



T 型电路 (Y、星型)

这两个电路当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效

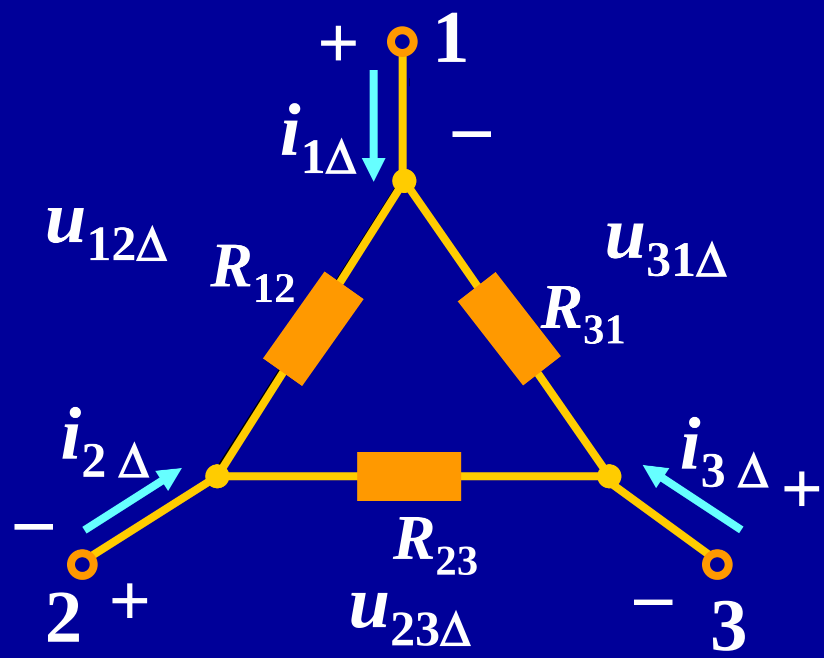
2. Δ—Y 变换的等效条件

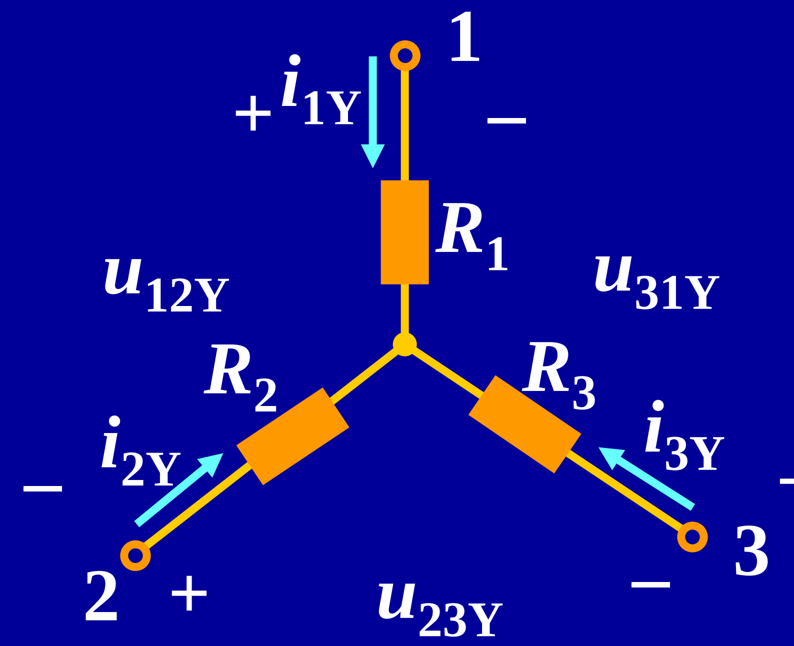


等效条件:

$i_{1\Delta}=i_{1Y}$, $i_{2\Delta}=i_{2Y}$, $i_{3\Delta}=i_{3Y}$,

$u_{12\Delta}=u_{12Y}$, $u_{23\Delta}=u_{23Y}$, $u_{31\Delta}=u_{31Y}$





Δ接: 用电压表示电流

Y接: 用电流表示电压

$$
\left.\begin{aligned}
i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\
i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\
i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
u_{12Y} &= R_1 i_{1Y} - R_2 i_{2Y} \\
u_{23Y} &= R_2 i_{2Y} - R_3 i_{3Y} \\
u_{31Y} &= R_3 i_{3Y} - R_1 i_{1Y} \\
i_{1Y} &+ i_{2Y} + i_{3Y} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

由式(2)解得：

$$\left.\begin{aligned} i_{1Y} &= \frac{u_{12Y}R_3 - u_{31Y}R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_{2Y} &= \frac{u_{23Y}R_1 - u_{12Y}R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_{3Y} &= \frac{u_{31Y}R_2 - u_{23Y}R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned} i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\ i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\ i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23} \end{aligned}\right\} (1)$$

根据等效条件，比较式(3)与式(1)，得Y型→Δ型的变换条件：

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2} \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{23} &= \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{31} &= \frac{G_3G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \end{aligned}\right\}$$

类似可得到由Δ型→ Y型的变换条件：

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12}G_{31}}{G_{23}} \\ G_2 &= G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23}G_{12}}{G_{31}} \\ G_3 &= G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31}G_{23}}{G_{12}} \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}\right\}$$

简记方法：

$$R_{\mathrm{Y}} = \frac{\Delta\text{相邻电阻乘积}}{\sum R_{\Delta}}$$

Δ变Y

或

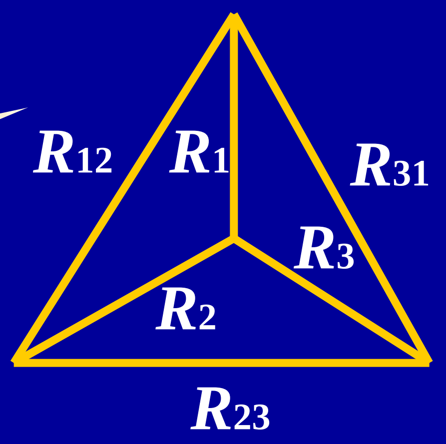
$$G_{\Delta} = \frac{\mathrm{Y}\text{相邻电导乘积}}{\sum G_{\mathrm{Y}}}$$

Y变Δ

特例：若三个电阻相等(对称)，则有

$$R_\Delta = 3R_Y$$

外大内小



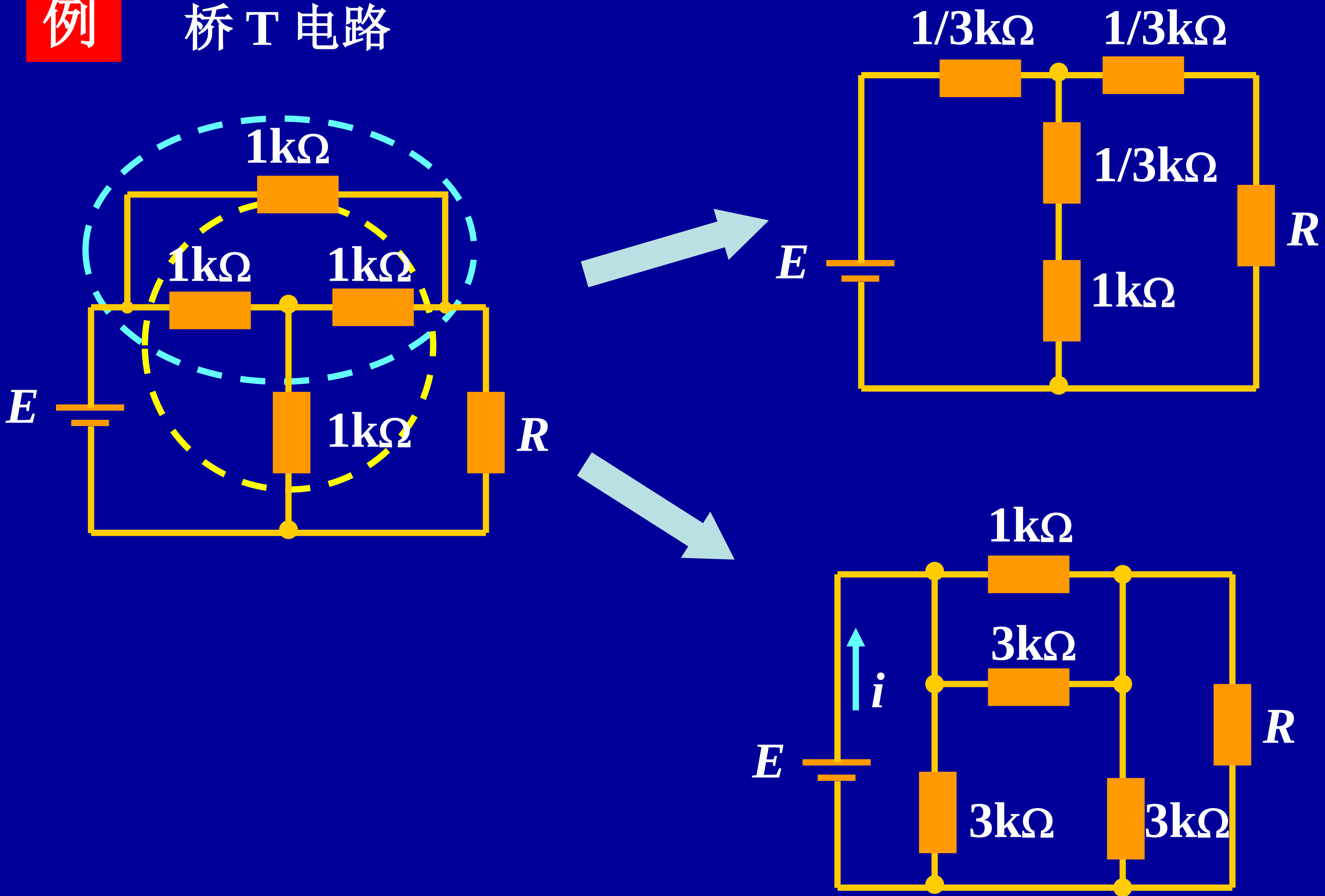
注意

(1) 等效对外部(端钮以外)有效，对内不成立；

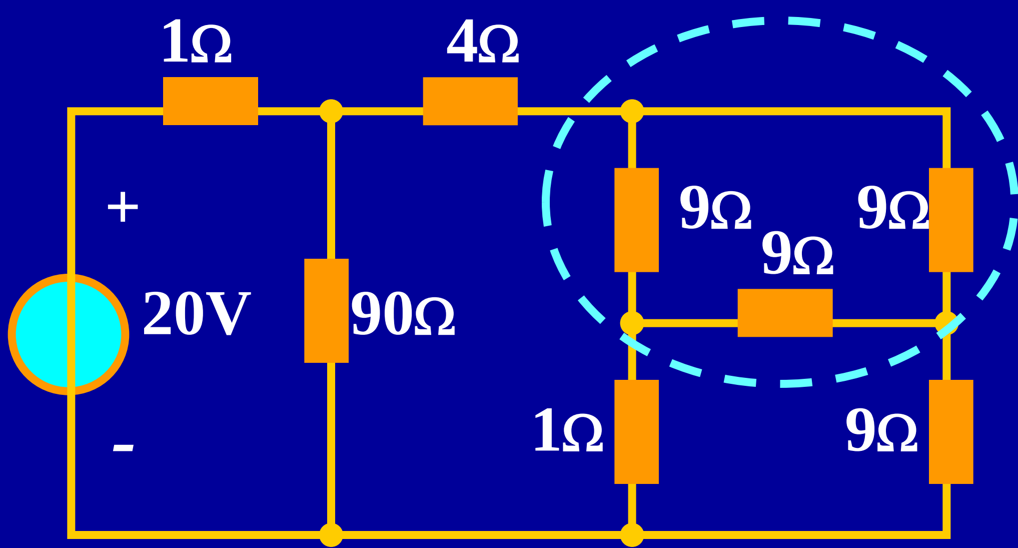
(2) 等效电路与外部电路无关；

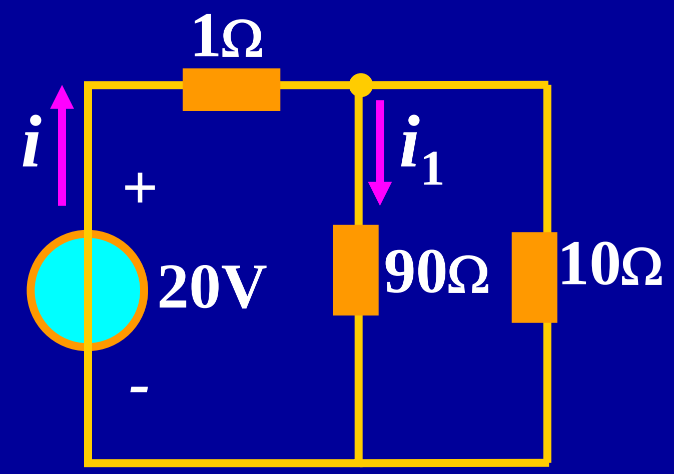
(3) 用于简化电路。

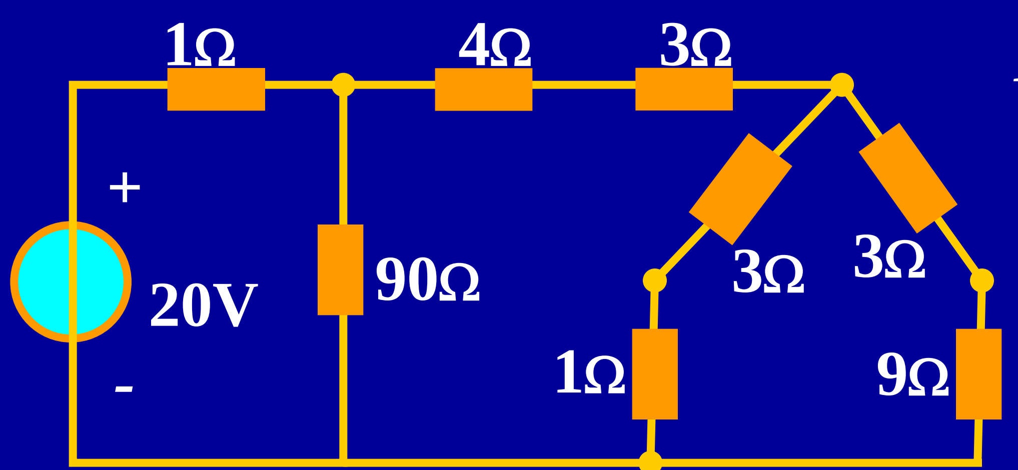
例 桥 T 电路



例 计算90Ω电阻吸收的功率







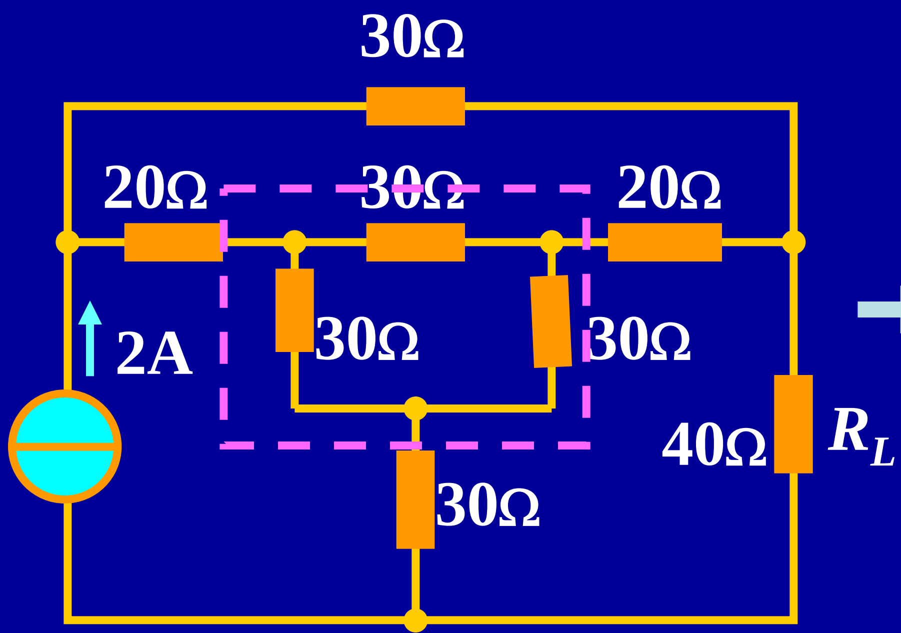
$$R_{eq} = 1 + \frac{10\times 90}{10+90} = 10\Omega$$

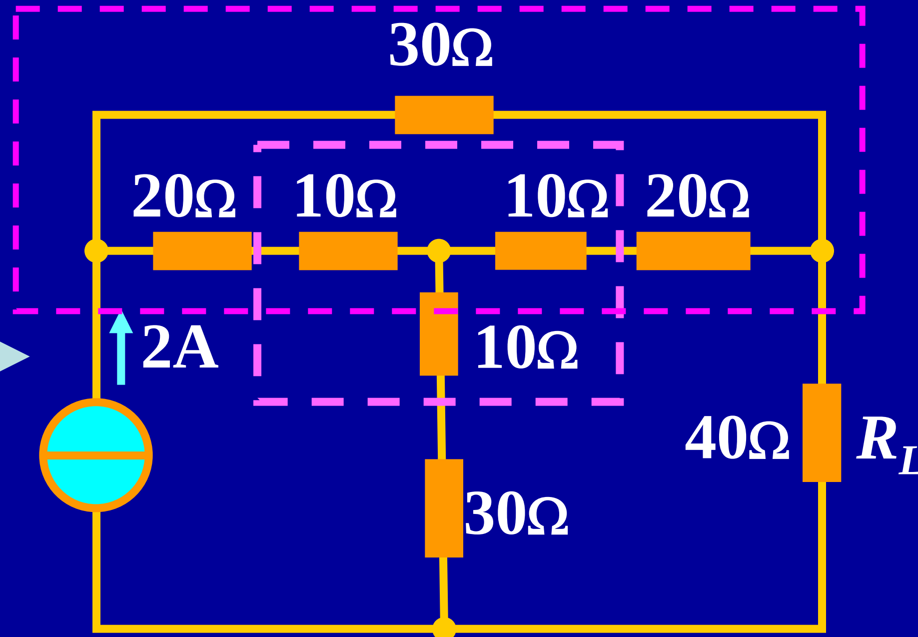
$$i = 20/10 = 2\text{A}$$

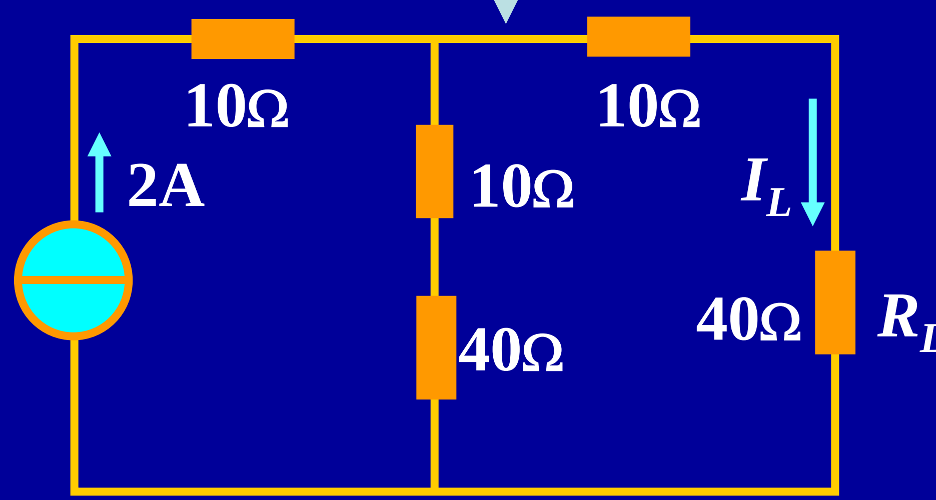
$$i_1 = \frac{10\times 2}{10+90} = 0.2\text{A}$$

$$P = 90 i_1^2 = 90\times(0.2)^2 = 3.6\text{W}$$

例 求负载电阻 R_L 消耗的功率。







$$I_L = 1\text{A}$$

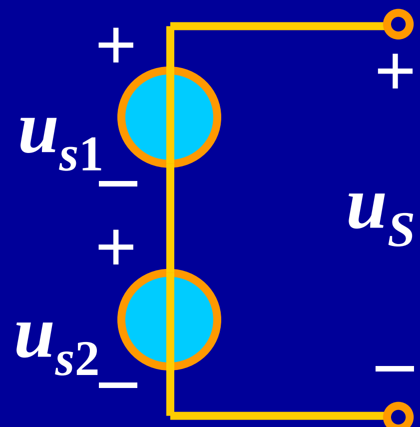
$$P_L = R_L I_L^2 = 40\text{W}$$

2.5 电压源和电流源的串联和并联

1. 理想电压源的串联和并联

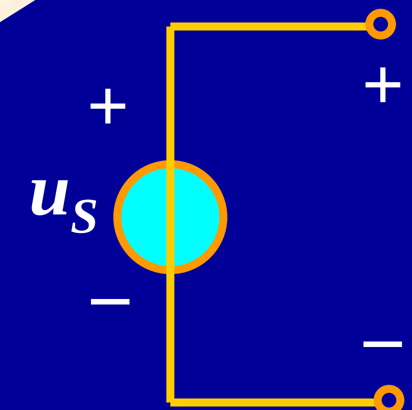
注意参考方向

串联

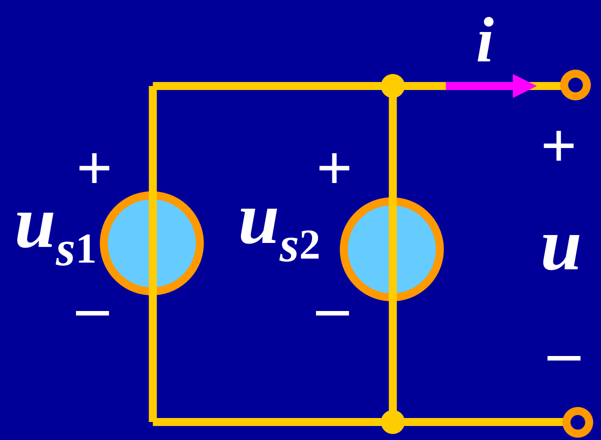


$$u_s = u_{s1} + u_{s2} = \sum u_{sk}$$

等效电路



并联

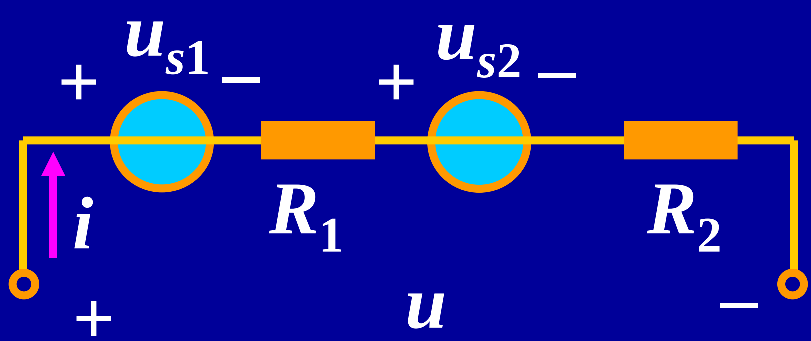


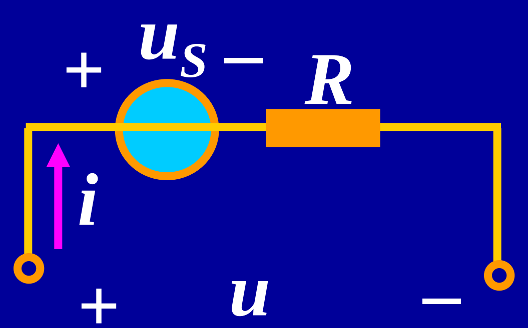
等效电路

$$u_s = u_{s1} = u_{s2}$$

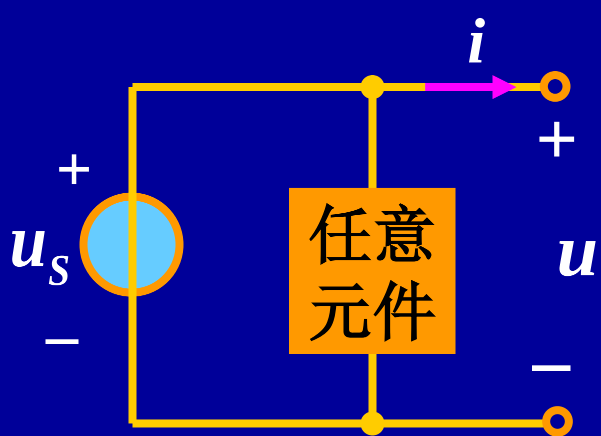
相同的电压源才能并联，电源中的电流不确定。

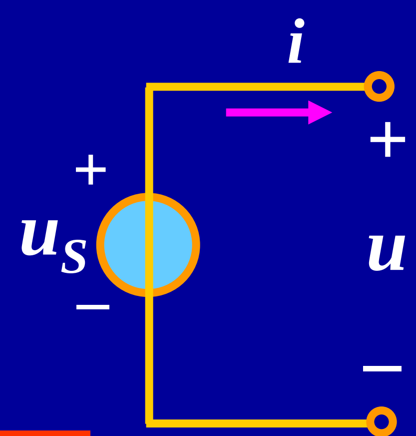
电压源与支路的串、并联等效





$$u = u_{S1} + R_1 i + u_{S2} + R_2 i = (u_{S1} + u_{S2}) + (R_1 + R_2)i = u_S + Ri$$





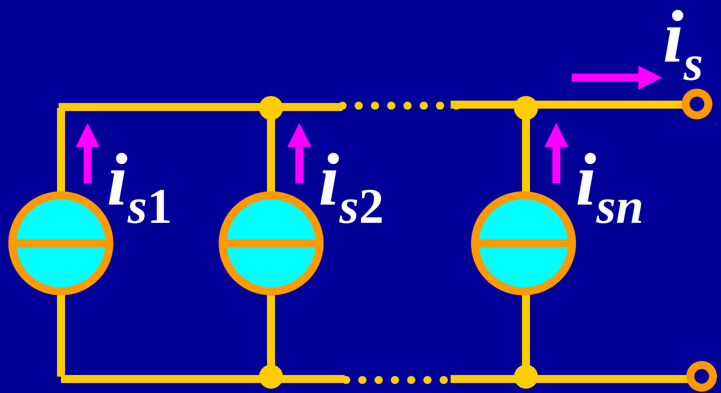
对外等效！

2. 理想电流源的串联并联

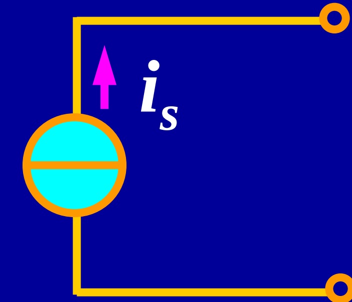
注意参考方向

并联

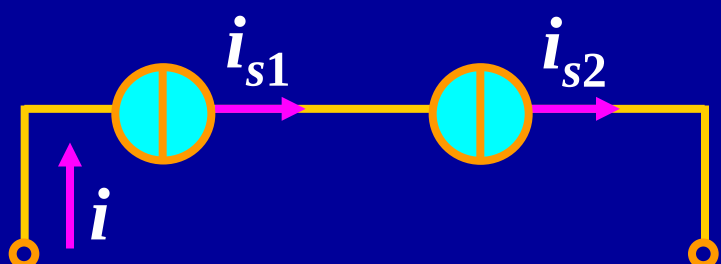
$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum i_{sk}$$



等效电路



串联

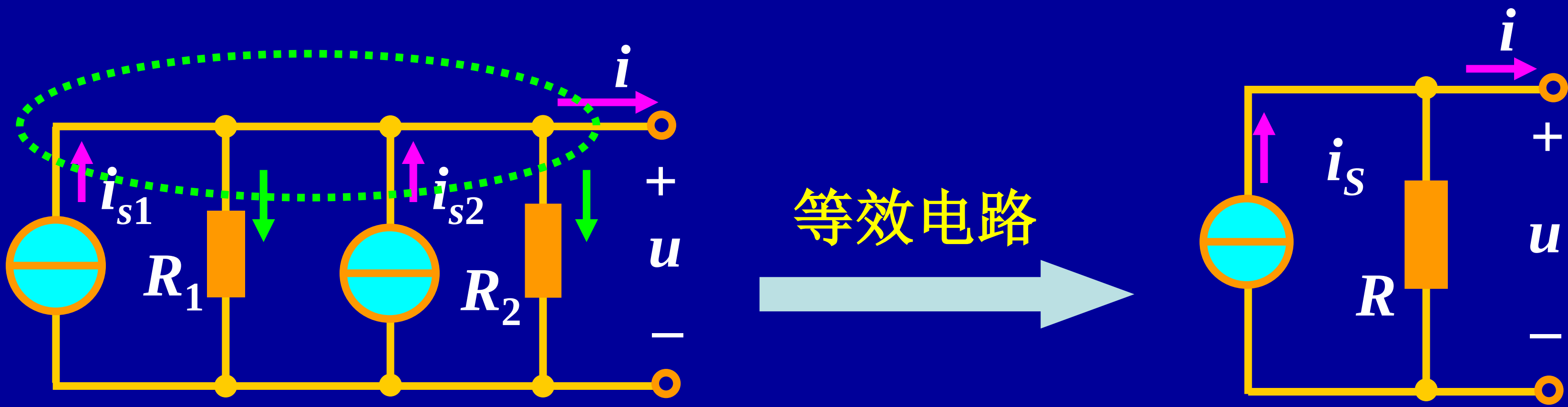


等效电路

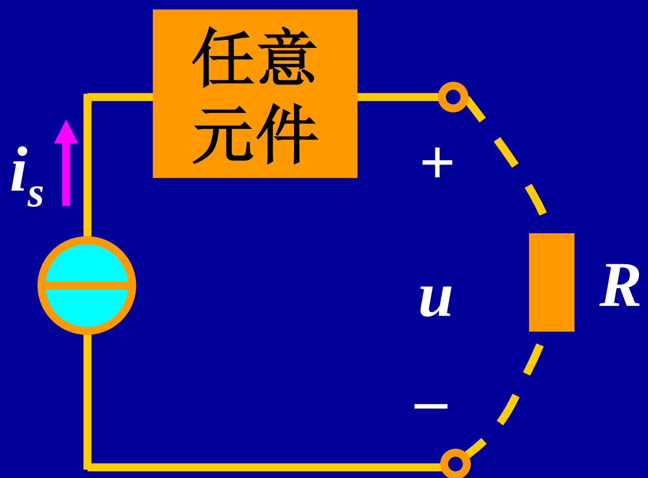
$$i_s = i_{s1} = i_{s2}$$

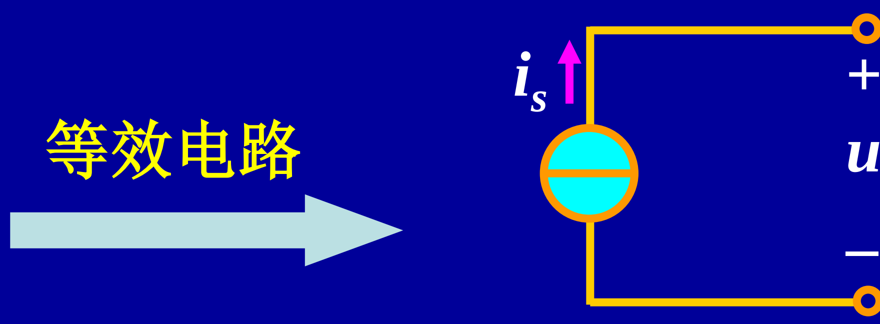
相同的理想电流源才能串联, 每个电流源的端电压不能确定

电流源与支路的串、并联等效



$$i = i_{S1} - u/R_1 + i_{S2} - u/R_2 = (i_{S1} + i_{S2}) - (1/R_1 + 1/R_2)u = i_S - u/R$$

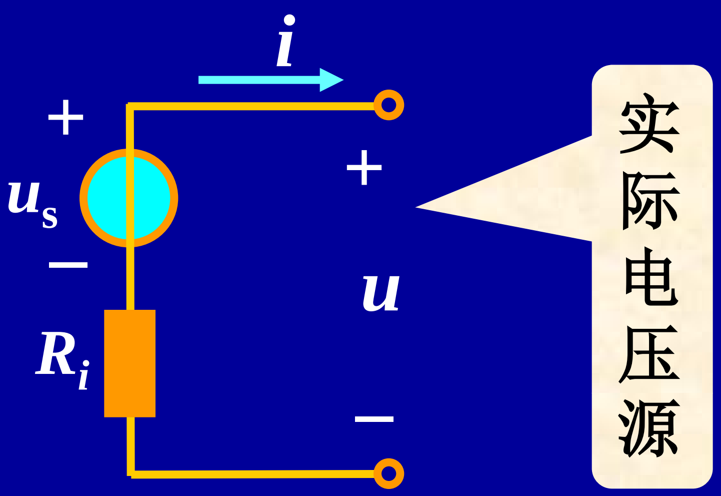


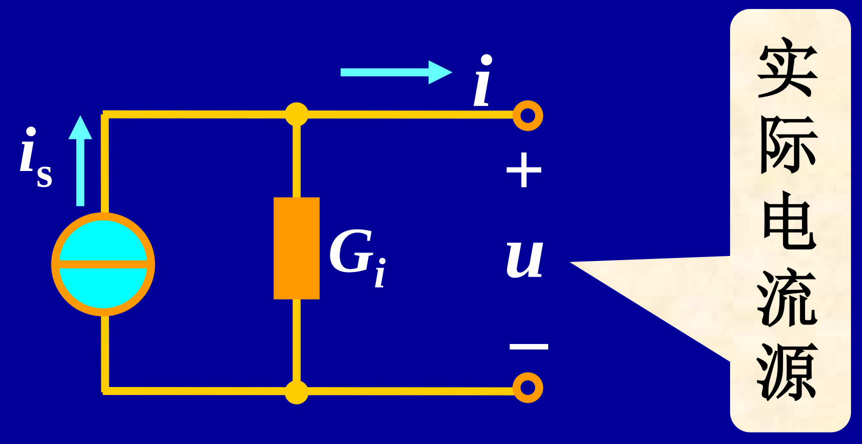


对外等效！

2.6 实际电压源和实际电流源的等效变换

实际电压源、实际电流源两种模型可以进行等效变换，所谓的等效是指端口的电压、电流在转换过程中保持不变。





$$u = u_S - R_i\, i$$

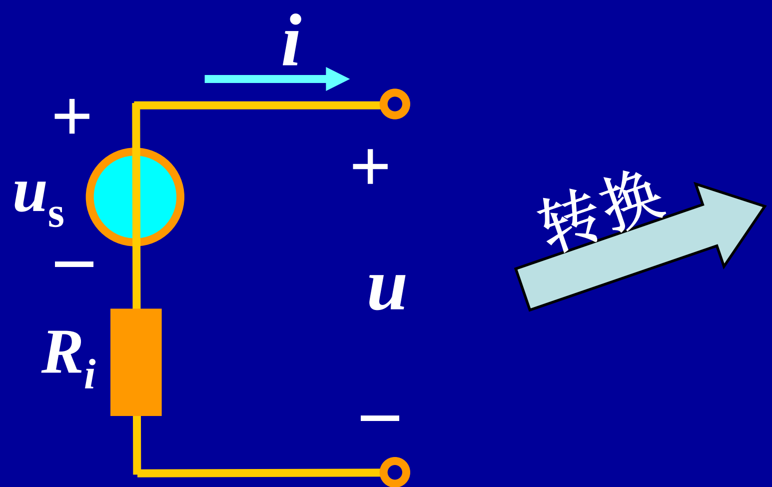
$$i = i_S - G_i u$$

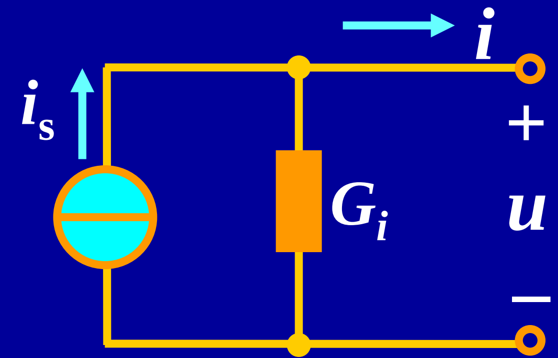
$$i = \frac{u_S}{R_i} - \frac{u}{R_i}$$

可得等效的条件

$$i_S = \frac{u_S}{R_i},\; G_i = \frac{1}{R_i}$$

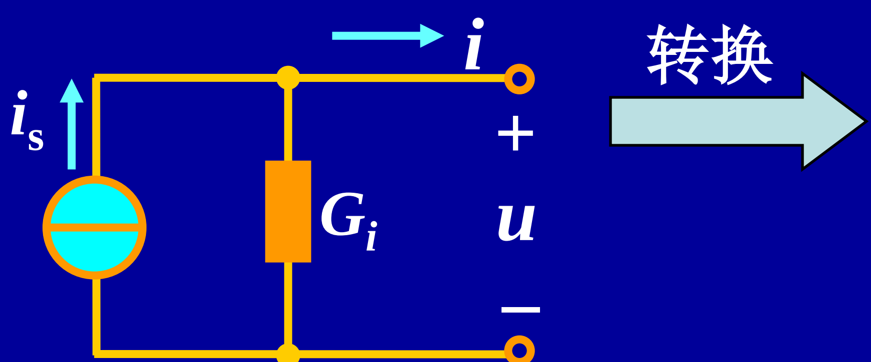
由电压源变换为电流源：

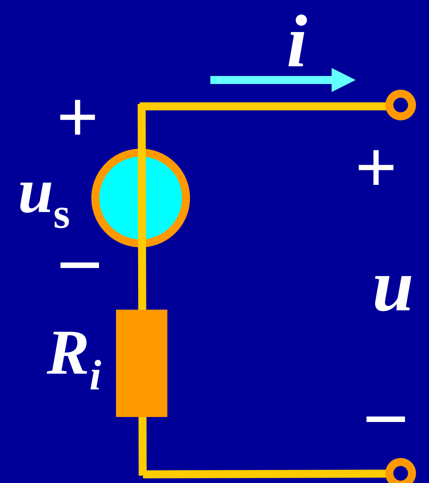




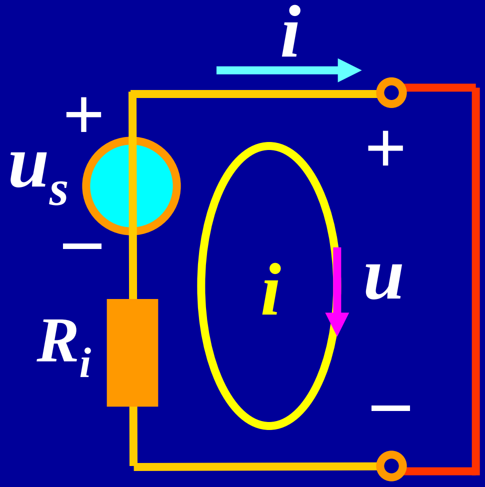
$$i_S = \frac{u_S}{R_i},\quad G_i = \frac{1}{R_i}$$

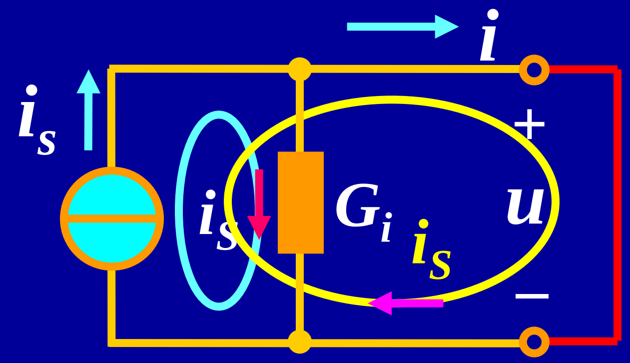
由电流源变换为电压源：





$$u_S = \frac{i_S}{G_i},\quad R_i = \frac{1}{G_i}$$





注意

(1) 变换关系 { 数值关系；
方向：电流源电流方向为电压源电压升方向。

(2) 等效是对外部电路等效，对内部电路是不等效的。

表现在

- 开路的电压源中无电流流过 R_i；
  开路的电流源可以有电流流过并联电导 G_i。
- 电压源短路时，电阻中 R_i 有电流；
  电流源短路时，并联电导 G_i 中无电流。

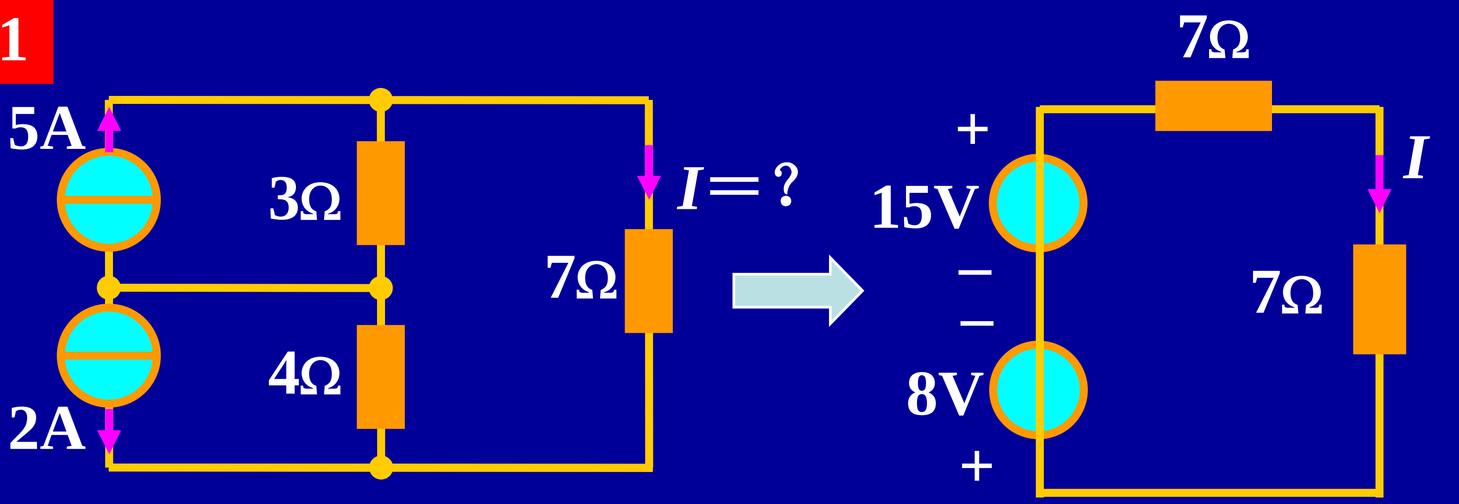
(3) 理想电压源与理想电流源不能相互转换。

理想电压源的特性是：端电压恒定、端电流任意。
理想电流源的特性是：端电压任意、端电流恒定。
所以，当一个理想电压源和一个理想电流源并联在一起时，总端电压是由理想电压源决定的，对外部电路来说这个并联电路等效为一个电压源。这个并联的电流源对外电路没有影响，但它对内部电路的电压源是有影响的---会影响电压源的电流。

类似的，一个理想电压源和一个理想电流源串联在一起时，总端电流是由理想电流源决定的，对外部电路来说这个串联电路等效为一个电流源。这个串联的电压源对外电路没有影响，但它对内部电路的电流源是有影响的---会影响电流源的端电压。

利用电源转换简化电路计算。

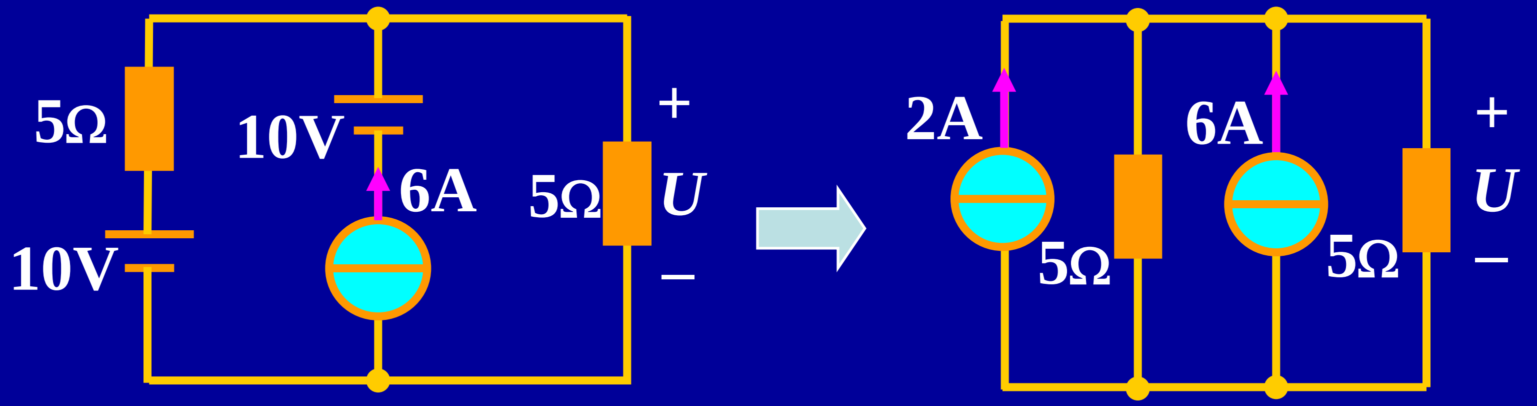
例1



$I=0.5\text{A}$

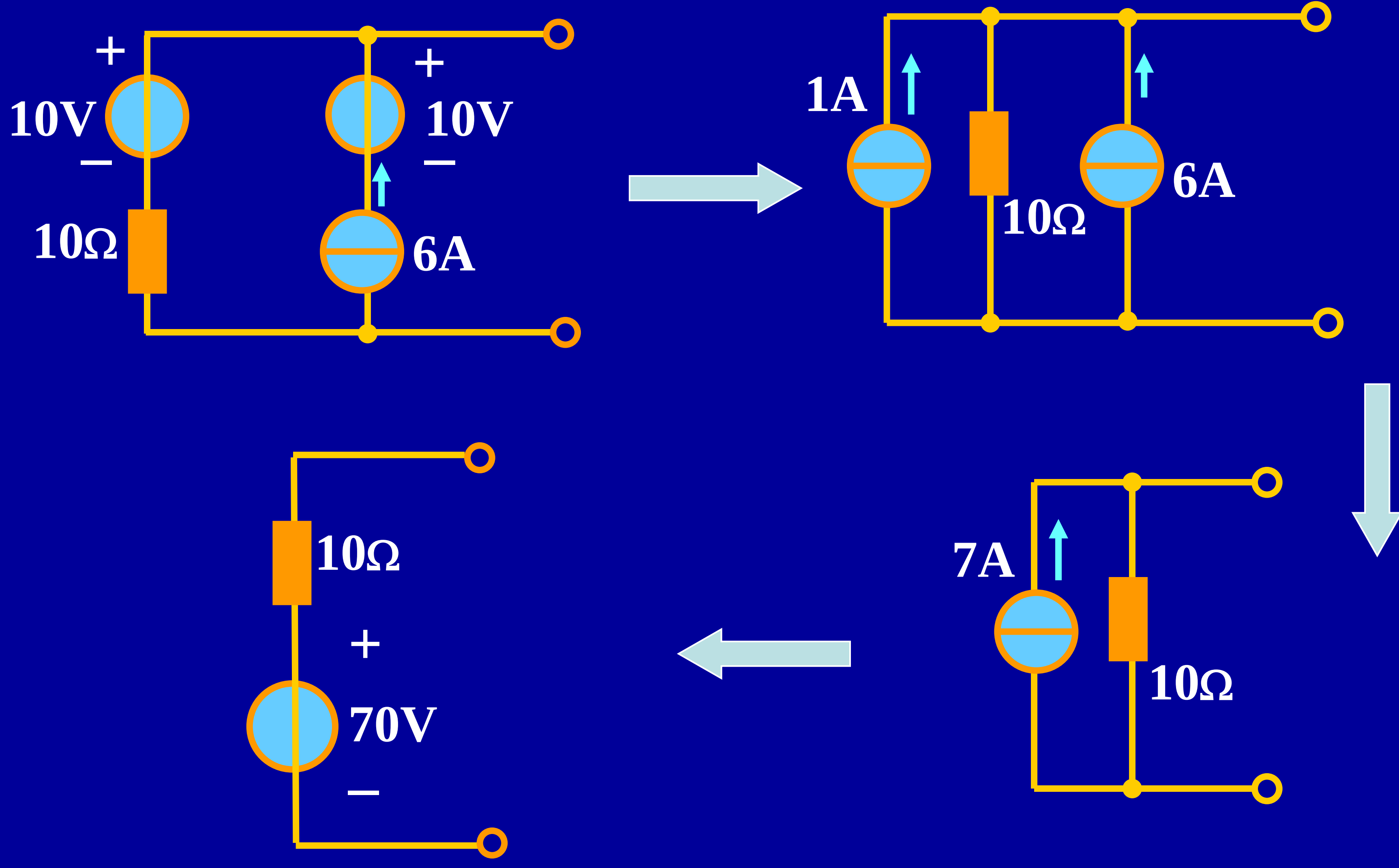
例2

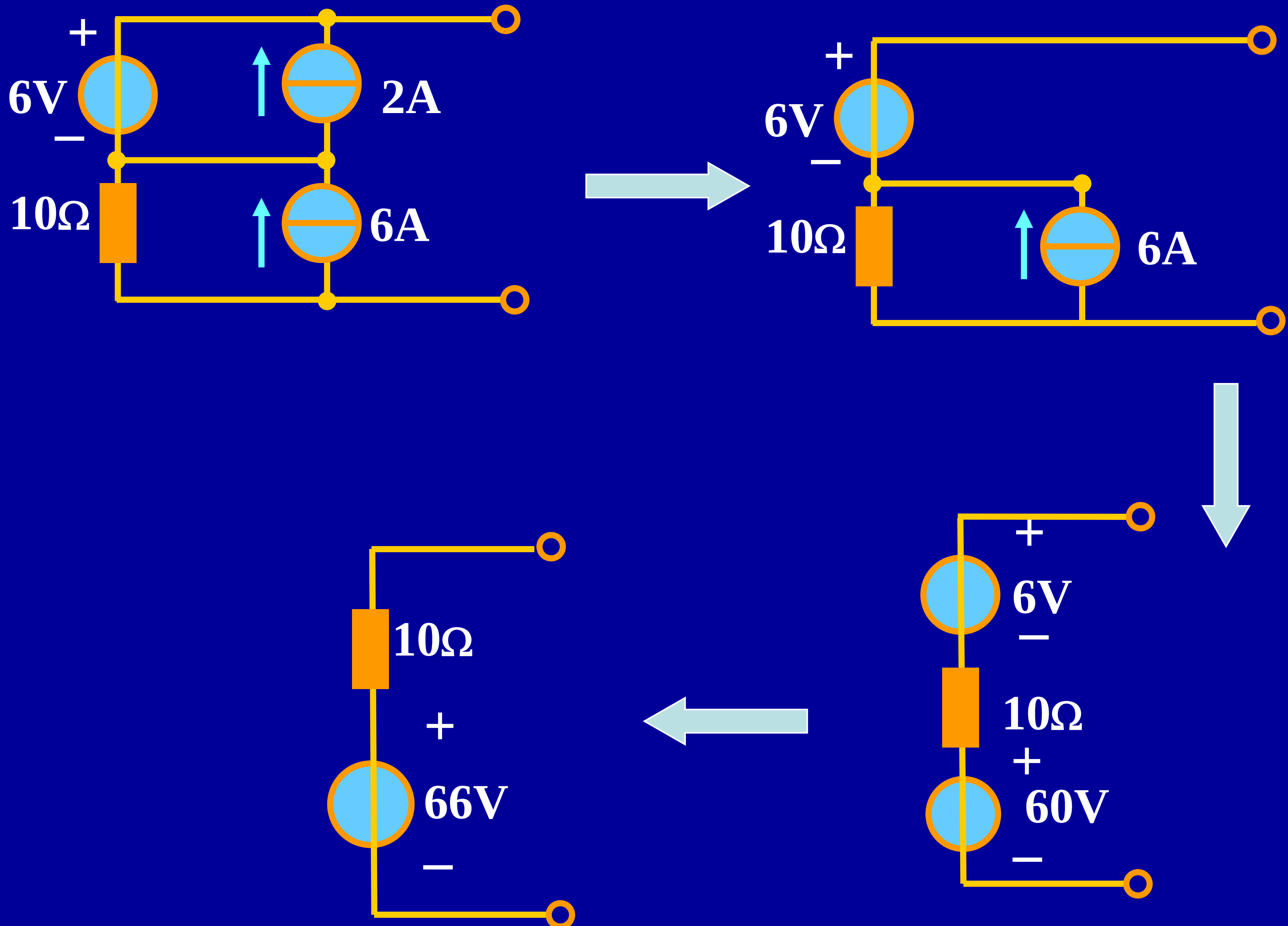
$U=?$



$U=20\text{V}$

例3 把电路化简成一个电压源和一个电阻的串联。

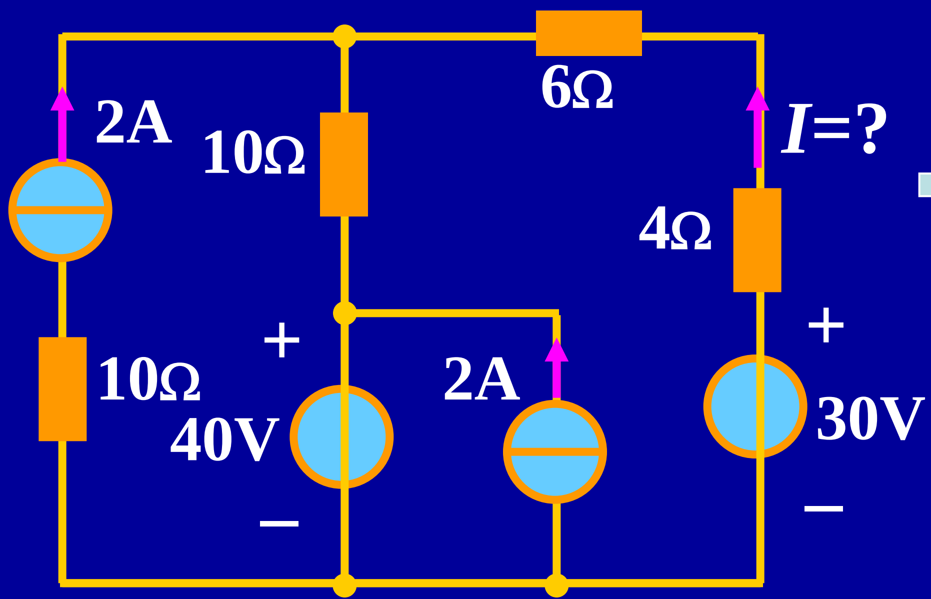


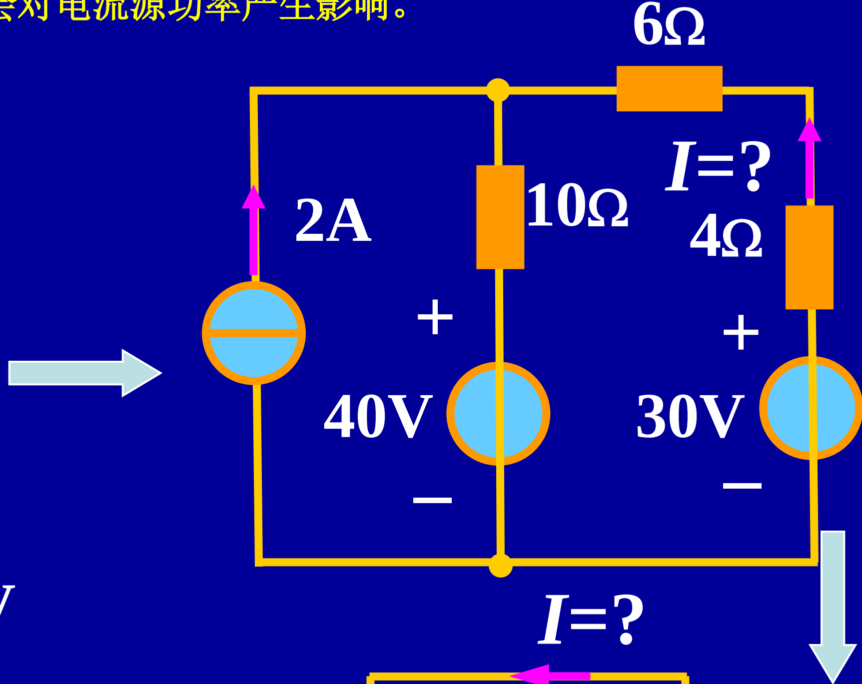

+
6V
–
2A
10Ω
6A
+
6V
–
10Ω
6A
+
6V
–
10Ω
+
60V
–
10Ω
+
66V
–

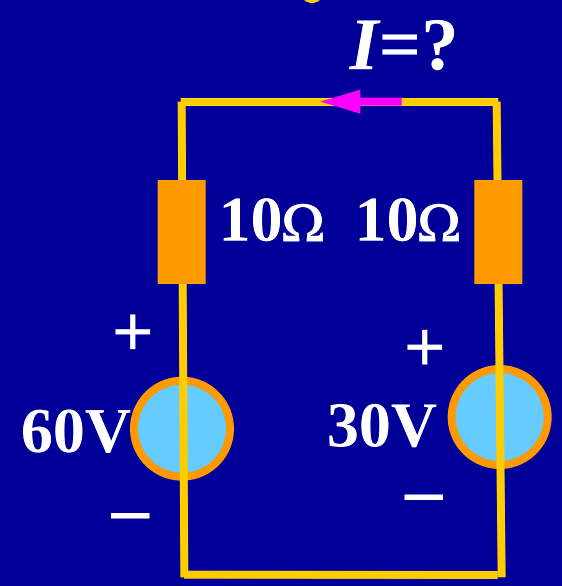
根据KVL，理想电压源与任何负载（含电流源）并联，其对外端口电压不变，故所并联的电流源在计算中无法起作用，故可看成“无效”。但这只是对外而已，对电压源所提供的功率还是有变化的。

根据KCL，理想电流源串联任何电气元件对无法改变电流源的输出电流，与之串联的电压源在对其它元件计算中无法起作用，故也可视为“无效”，但同样会对电流源功率产生影响。

例4

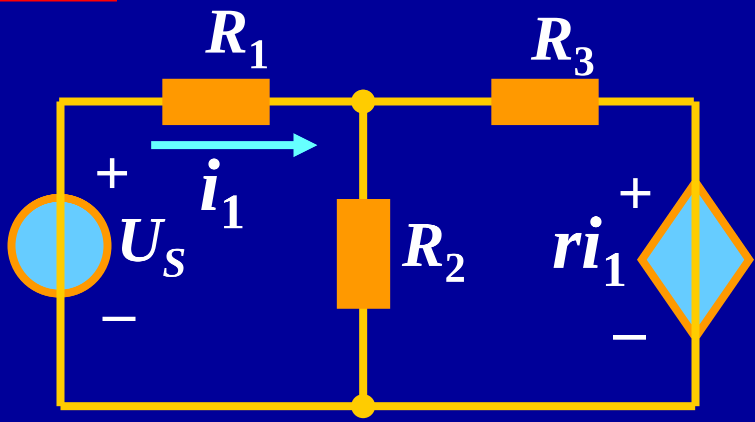


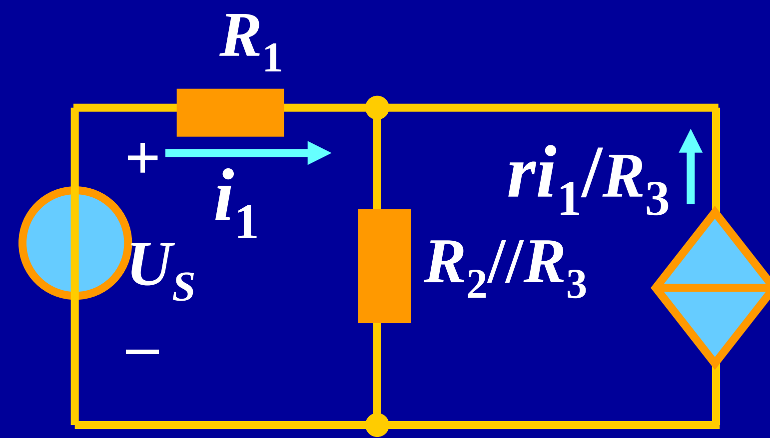


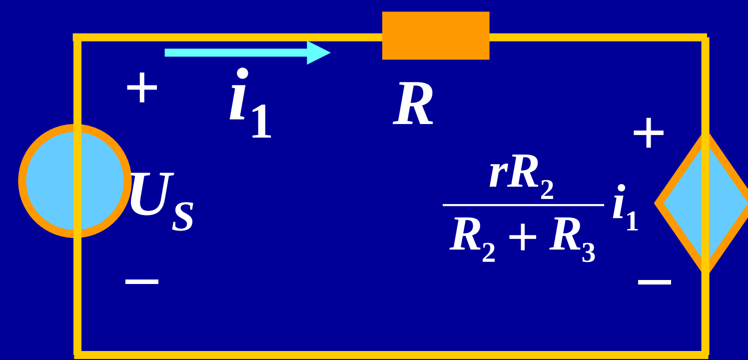


$$I=\frac{30-60}{20}=-1.5A$$

例5 求电流i_1







$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$Ri_1 + \frac{rR_2}{R_2 + R_3} i_1 = U_S$$

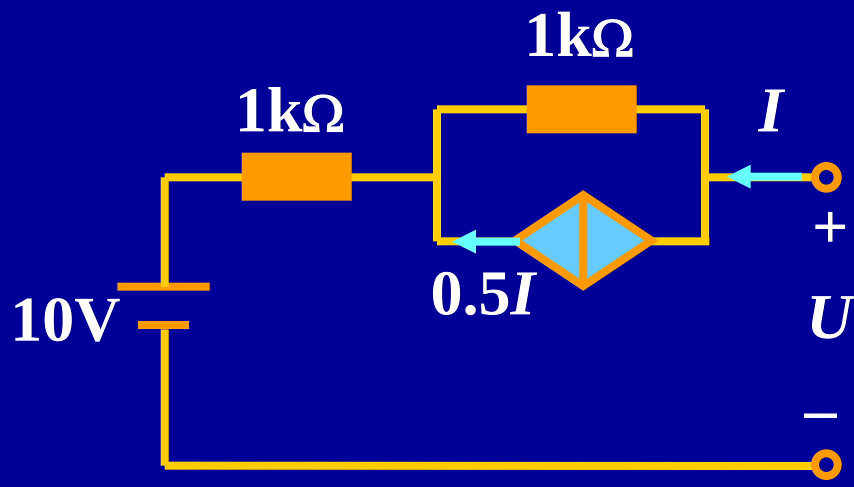
$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)U_S}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + rR_2}$$

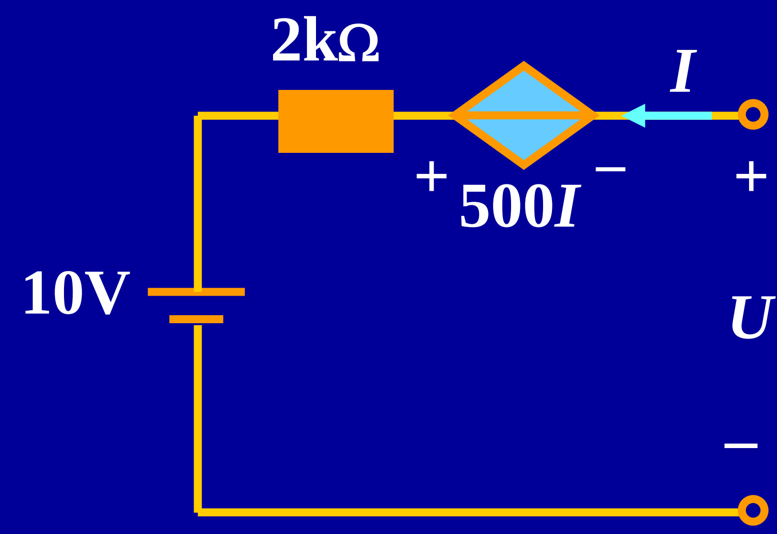
注意！！！

受控源和独立源一样可以进行电源转换；

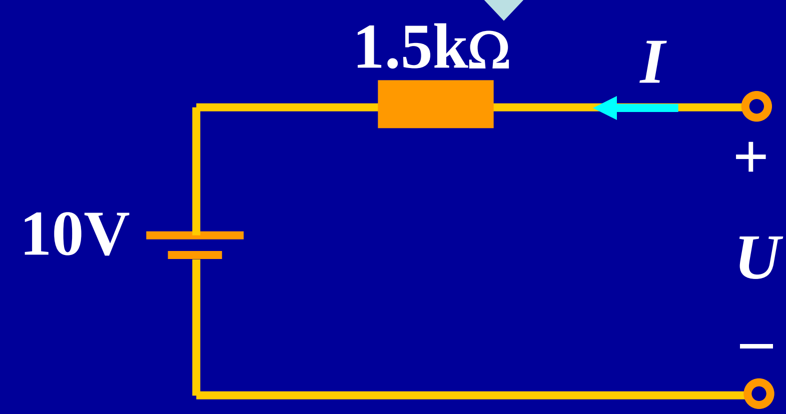
转换过程中注意不要丢失控制量。

例6 把电路转换成一个电压源和一个电阻的串联。



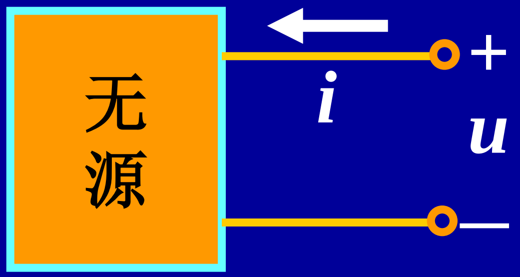


$$U = -500I + 2000I + 10$$
$$= 1500I + 10$$



2.7 输入电阻

1. 定义



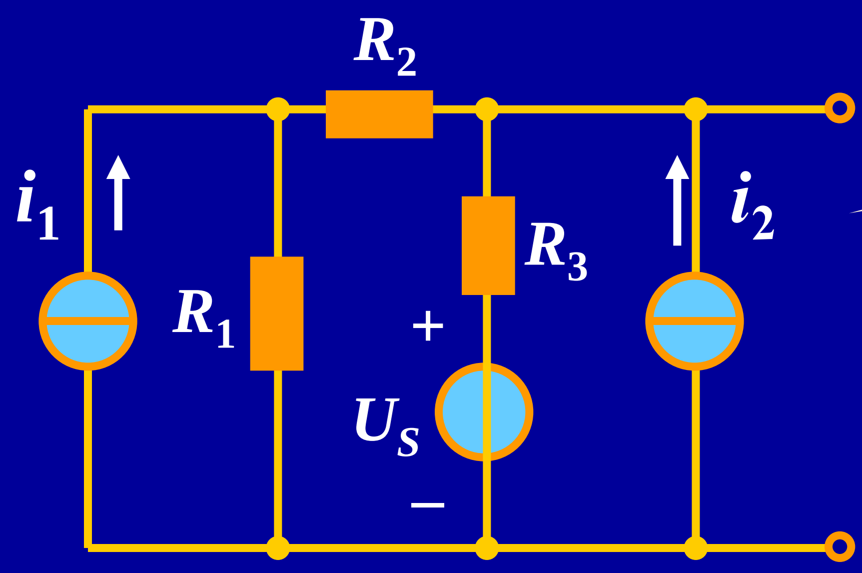
输入电阻 $$R_{in}=\frac{u}{i}$$

2. 计算方法

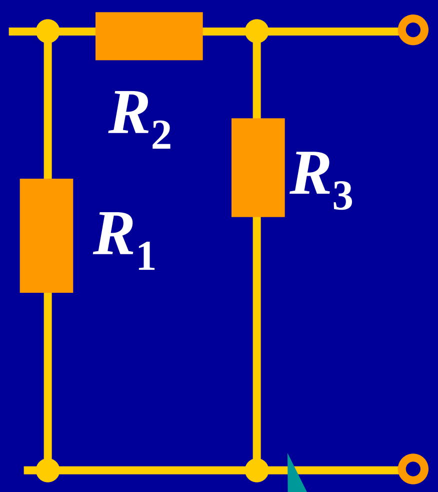
（1）如果一端口内部仅含电阻，则应用电阻的串、并联和Δ—Y变换等方法求它的等效电阻；

（2）对含有受控源和电阻的两端电路，用电压、电流法求输入电阻，即在端口加电压源，求得电流，或在端口加电流源，求得电压，得其比值。

例1 计算下例一端口电路的输入电阻



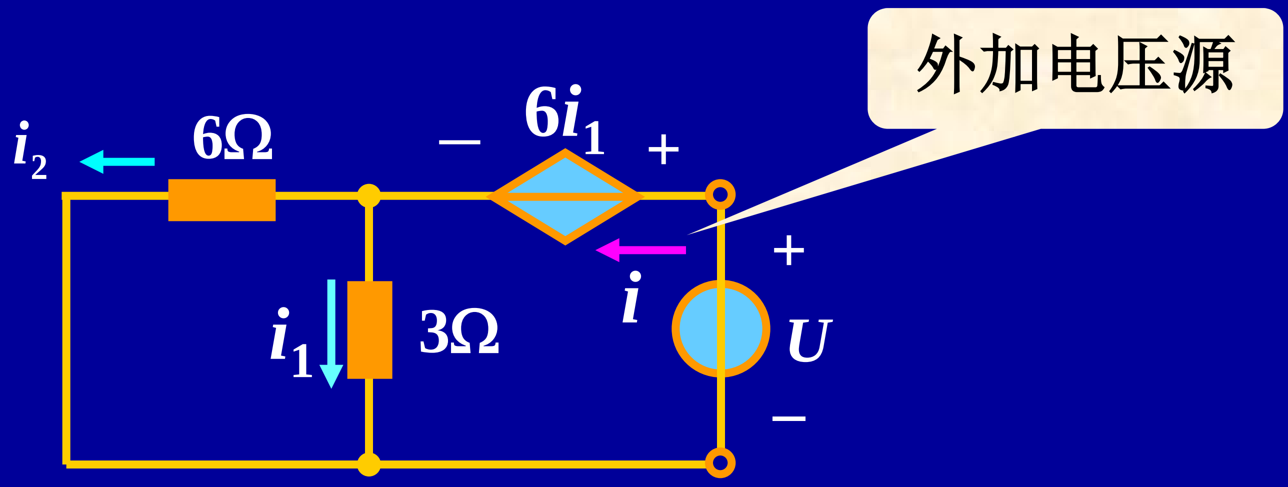
有源网络先把独立源置零：电压源短路；电流源断路，再求输入电阻



$$R_{in} = (R_1 + R_2) // R_3$$

无源电阻网络

例2 求一端口的等效输入电阻。

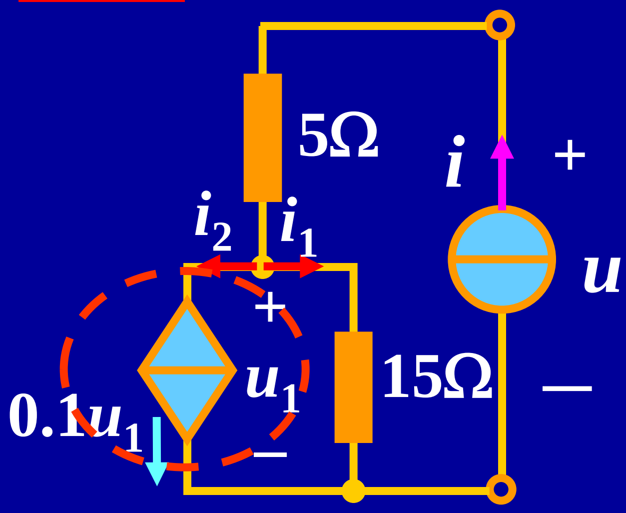


$$i = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{3i_1}{6} = 1.5i_1$$

$$U = 6i_1 + 3i_1 = 9i_1$$

$$R_{in} = \frac{U}{i} = \frac{9i_1}{1.5i_1} = 6\Omega$$

例3



$$u_1 = 15i_1$$

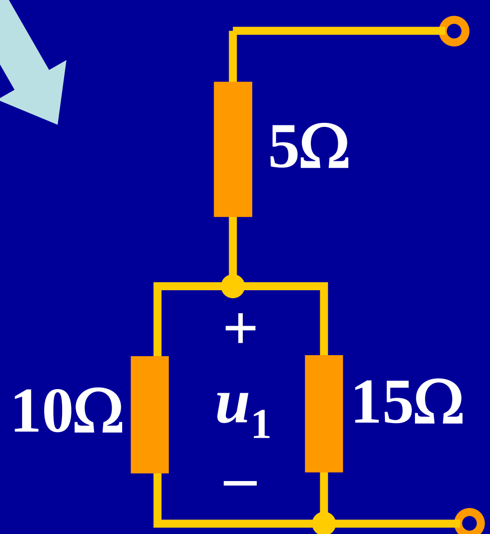
$$i_2 = 0.1u_1 = 1.5i_1$$

$$i = i_1 + i_2 = 2.5i_1$$

$$u = 5i + u_1 = 5\times 2.5i_1 + 15i_1 = 27.5i_1$$

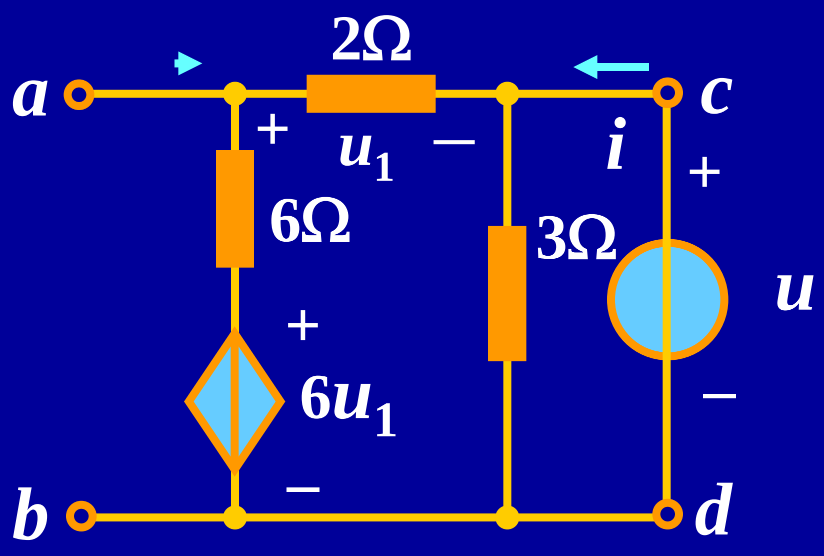
$$R_{in} = \frac{u}{i} = \frac{27.5i_1}{2.5i_1} = 11\Omega$$

等效



$$R_{in} = 5 + \frac{10\times 15}{10+15} = 11\Omega$$

例4 求R_{ab}和R_{cd}



$$u = u_1 + 3u_1/2 = 2.5u_1$$

$$u_1 = u/2.5 = 0.4u$$

$$i = \frac{u_1}{2} + \frac{u - 6u_1}{6} = \frac{-u}{30}$$

$$R_{ab} = \frac{u}{i} = -30\Omega$$

$$u = -u_1 + 6u_1 + 6\times(-\frac{u_1}{2}) = 2u_1$$

$$i = -u_1/2 + u/3 = u_1/6$$

$$R_{cd} = \frac{u}{i} = 12\Omega$$

上 页