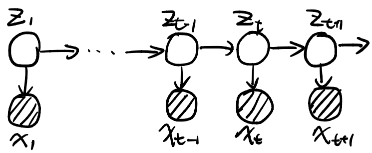
# 粒子滤波（Particle Filter）

## 一. Background

Dynamic Model $\begin{cases} \text{HMM} \rightarrow \text{关注 decoding} \\ \text{Linear Dynamic System} \rightarrow \text{关注 filtering} \\ \text{Non-Linear, Non-Guassion} \rightarrow \text{关注 filtering} \end{cases}$




$\begin{cases} \text{齐次 Markov 假设} \\ \text{观测独立假设} \end{cases}$

$\begin{cases} z_t = g(z_{t-1}, u, \varepsilon) & \text{相当于 HMM 中的 A} \\ x_t = h(z_t, u, \delta) & \text{相当于 HMM 中的 B} \end{cases}$

对于 Kalman Filter，由于它服从 Guassian 分布，它是可以由上节中的 step 1, step 2 一步步求得其解析解的，但对于 Particle Filter，由于其 $z_t$ 和 $z_{t+1}$，$x_t$ 和 $z_t$ 之间的关系是任意的，因此无法求出其解析解，只能通过采样的方法求解.

## 二. Importance Sampling & SIS.

$P(z|x)$，求 $E_{z|x}[f(z)]$，我们可以从 $p(z|x)$ 中采样 $N$ 个样本，即 $z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots z^{(N)} \sim p(z|x)$，则 $E_{z|x}[f(z)] = \int f(z) \cdot p(z|x)\, dz = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(z^{(i)})$

但是通常来说，由于 $p(z|x)$ 的维度过高，我们无法直接从 $p(z|x)$ 这个分布中采样，因此，我们会引入一个易于采样的分布 $q(z)$，从其中采取 $N$ 个样本：

$$z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots z^{(N)} \sim q(z)，q(z) \text{ 称为提议分布.}$$

则 $E_{z|x}[f(z)] = \int f(z) \cdot p(z)\, dx = f(z) \cdot \frac{p(z)}{q(z)} \cdot q(z)\, dz = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(z^{(i)}) \cdot \underbrace{\frac{p(z^{(i)})}{q(z^{(i)})}}_{\text{weight } w^{(i)}}$

回到 Filtering 问题：

设 $x_1, \cdots x_t = x_{1:t}$，Filtering 问题即求解 $P(z_t|x_{1:t})$

$$w^{(i)} = \frac{p(z_t^{(i)}|x_{1:t})}{q(z_t^{(i)}|x_{1:t})}$$

对于不同的 $t$：$t=1$：$w_1^{(1)}, w_1^{(2)}, \cdots w_1^{(N)}$

$t=2$：$w_2^{(1)}, \cdots\cdots w_2^{(N)}$

而 $p(z_t^{(i)}|x_{1:t})$ 不好求，如果我们按 Importance Sampling 采样，我们要计算许多次 $w$，计算量过大，因此我们希望减少 $w$ 的计算量.

寻找不同时刻 $w$ 之间的递推关系从而减少 $w$ 的计算量.

## Sequential Importance Sampling (SIS)

SIS 关注的对象是 $P(z_{1:t}|x_{1:t})$，而 Filtering 问题关注的 $P(z_t|x_{1:t})$ 是其边缘概率.

(更确切地来讲，在每个时刻 weight 都应该做归一化，即 $\sum_{i=1}^{N} w_t^{(i)}=1$，之前为了简化运算并未提及)

因此，$w_t^{(i)} \propto \frac{p(z_{1:t}^{(i)}|x_{1:t})}{q(z_{1:t}^{(i)}|x_{1:t})}$，我们要求 $w_{t-1}^{(i)}$ 和 $w_t^{(i)}$ 之间的关系.

推导：

分子：
$$P(z_{1:t}|x_{1:t}) = \frac{P(z_{1:t}, x_{1:t})}{\underbrace{P(x_{1:t})}_{C}} = \frac{1}{C} P(z_{1:t}, x_{1:t})$$

$$= \frac{1}{C} \cdot P(x_t|z_{1:t}, x_{1:t-1}) \cdot P(z_{1:t}, x_{1:t-1})$$
$$= \frac{1}{C} P(x_t|z_t) \cdot P(z_{1:t}, x_{1:t-1})$$
$$= \frac{1}{C} P(x_t|z_t) \cdot P(z_t|z_{1:t-1}, x_{1:t-1}) \cdot P(z_{1:t-1}, x_{1:t-1})$$
$$= \frac{1}{C} P(x_t|z_t) \cdot P(z_t|z_{t-1}) \cdot P(z_{1:t-1}, x_{1:t-1})$$
$$= \frac{1}{C} P(x_t|z_t) \cdot P(z_t|z_{t-1}) \cdot P(z_{1:t-1}|x_{1:t-1}) \cdot \underbrace{P(x_{1:t-1})}_{D}$$
$$= \frac{D}{C} P(x_t|z_t) \cdot P(z_t|z_{t-1}) \cdot P(z_{1:t-1}|x_{1:t-1})$$

分母：由于 $q$ 是我们自己假设的，因此：

假定有：$q(z_{1:t}|x_{1:t}) = q(z_t|z_{1:t-1}, x_{1:t}) \cdot q(z_{1:t-1}|x_{1:t-1})$

$$\text{则 } w_t^{(i)} \propto \frac{p(z_{1:t}|x_{1:t})}{q(z_{1:t}|x_{1:t})} \propto \frac{P(x_t|z_t) \cdot P(z_t|z_{t-1}) \cdot \boxed{P(z_{1:t-1}|x_{1:t-1})}}{q(z_t|z_{1:t-1}, x_{1:t}) \cdot \boxed{q(z_{1:t-1}|x_{1:t-1})}}$$
$$= \frac{P(x_t|z_t) \cdot P(z_t|z_{t-1})}{q(z_t|z_{1:t-1}, x_{1:t})} \cdot \boxed{w_{t-1}^{(i)}}$$

# Sequential Importance Sampling Filter (SIS)

$$w_t^{(i)} \propto \frac{p(z_{1:t}|x_{1:t})}{q(z_{1:t}|x_{1:t})} \propto \frac{p(x_t|z_t)\cdot p(z_t|z_{t-1})}{q(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}\, w_{t-1}^{(i)}$$

↳ $q(z_t|z_{t-1},x_{1:t})$，可以设$z_t$只和$z_{t-1}$有关.

Alogrithm:

前提：t-1时刻采样已完成 ⇒ $w_{t-1}^{(i)}$已知

t时刻： for $i=1,\cdots,N$

①Sampling: $z_t^{(i)} \sim q(z_t|z_{t-1},x_{1:t})$

$$w_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} \cdot \frac{p(x_t|z_t)\cdot p(z_t|z_{t-1})}{q(z_t|z_{t-1},x_{1:t-1})}$$

end

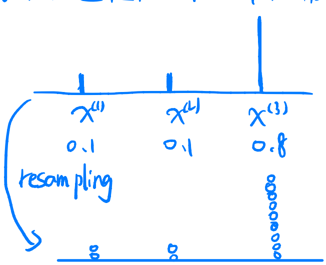
②Normalized: $w_t^{(i)}$归一化，使$\sum_{i=1}^{N} w_t^{(i)}=1$.　③Resampling

但SIS在实际运行时，会出现权值退化的问题：在运行一定步数后，$w_t^{(i)}$会变得越来越不平均，这是由高维空间所引起的.

为了应对这一问题，有{Resampling；选择一个更好的提议分布$q(z)$} 两种方法来解决.

Resampling.

假设采到3个样本$x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}$，它们的权重分别为0.1，0.1，0.8. 重采样就是以它们的权重值作为概率分布进行采样，用样本个数来代替权重.




SIS + Resampling ⇒ Basic Particle Filter

如何选择一个好的$q(z)$？

一般选择状态转移概率：

$$q(z_t|z_{1:t-1}, x_{1:t}) = p(z_t|z_{t-1})$$

此时：

$$w_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} \cdot \frac{p(x_t|z_t^{(i)}) \cdot p(z_t^{(i)}|z_{t-1}^{(i)})}{q(z_t^{(i)}|z_{t-1}^{(i)}, x_{1:t-1})}$$

$$= w_{t-1}^{(i)} \cdot \frac{p(x_t|z_t^{(i)}) \cdot p(z_t^{(i)}|z_{t-1}^{(i)})}{p(z_t^{(i)}|z_{t-1}^{(i)})}$$

$$= w_{t-1}^{(i)} \cdot p(x_t|z_t^{(i)})$$

其中：

$$z_t^{(i)} \sim p(z_t, z_{t-1}^{(i)})$$

此时算法称为 Sampling - Importance - Resampling Filter (SIR Filter)

↳ $SIS + Resampling + q(z) = p(z_t|z_{t-1})$