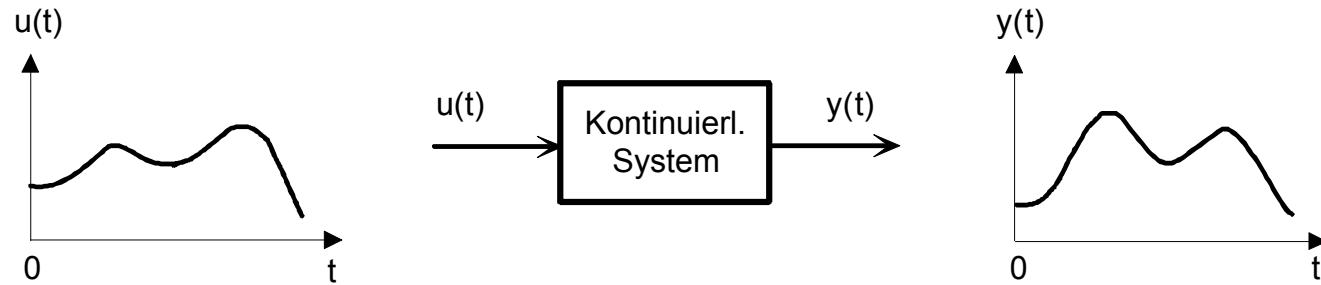
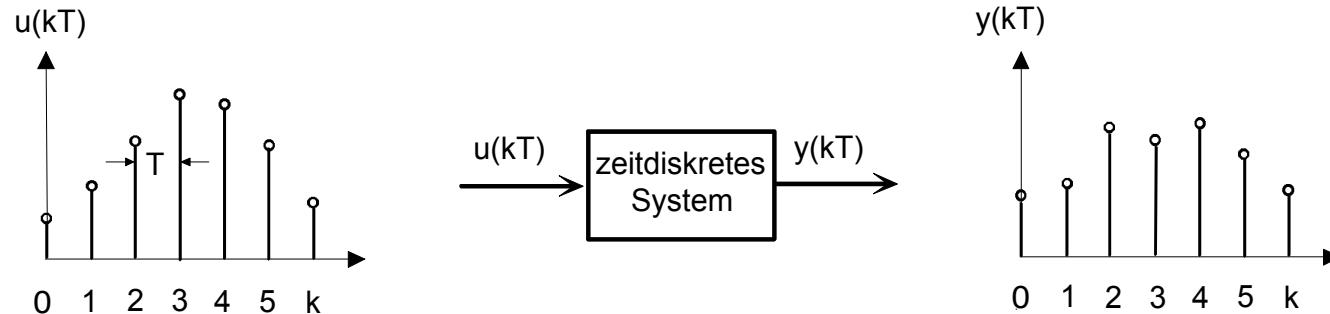


Zeitdiskrete Übertragungssysteme

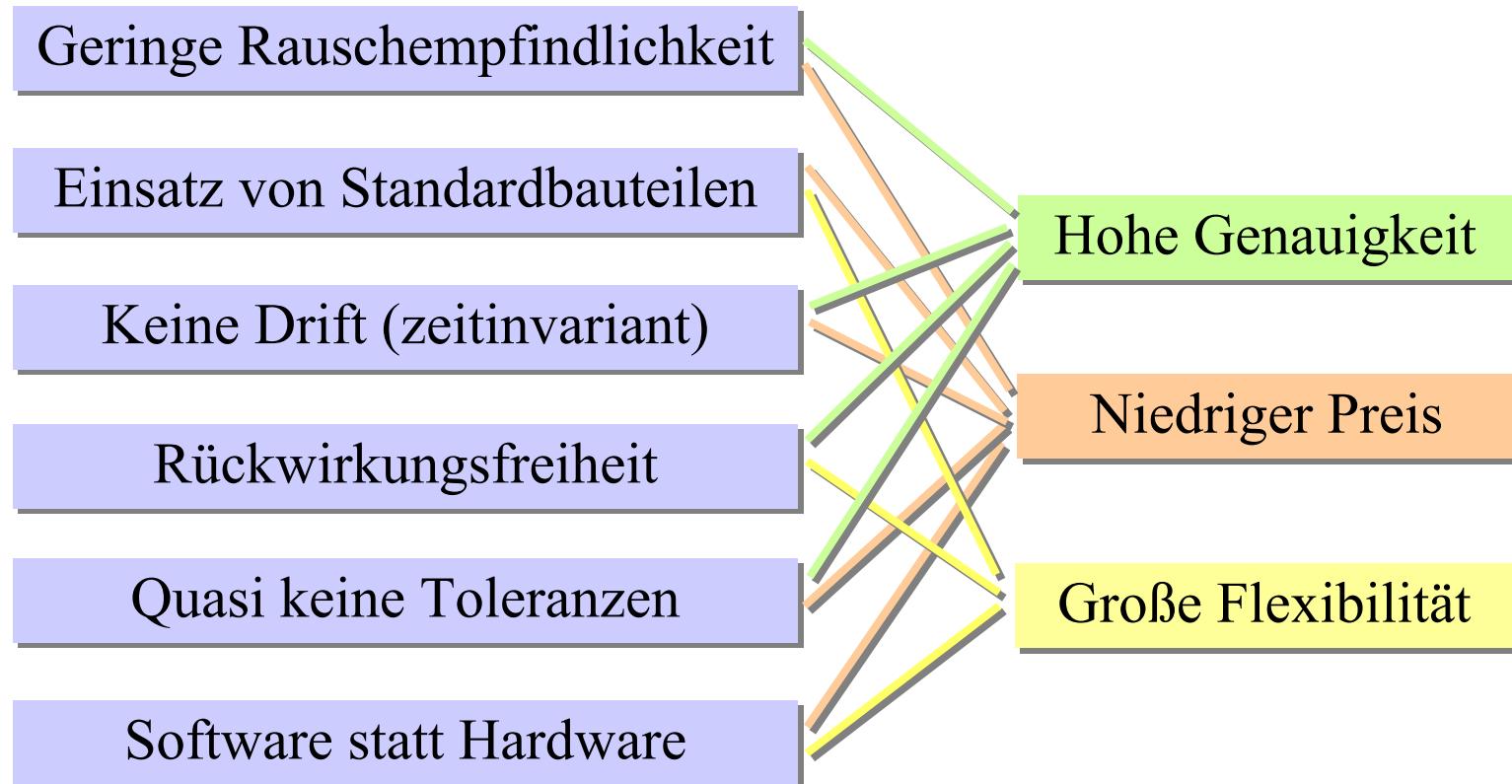
Bisher wurde ausschließlich die Übertragung zeitkontinuierlicher Signale über analoge LTI-Systeme analysiert und modelliert



Bei Einsatz von getakteten Systemen (z. B. Computern) können Signale jedoch nur zu diskreten Zeitpunkten $k \cdot T$ betrachtet werden



Vorteile der digitalen Signalverarbeitung



Anwendungen digitaler Systeme

Bild- und Sprachverarbeitung (Codierung, Filterung)

Steuer- und Regelungstechnik (SPS, Embedded Systems)

Simulation elektronischer Schaltungen (z.B. mit SPICE)

Nachrichtenübertragung (Modulation, Detektion)

Militärtechnik (Radar, Feuerleitsysteme)

Medizintechnik (CT, MRT)



System-Diskretisierung durch numerische Lösung von Zustandsmodellen

Vorgehensweise:

1. Ersetzen der Differenzialquotienten durch Differenzenquotienten

$$\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x_i(t)}{\Delta t}$$

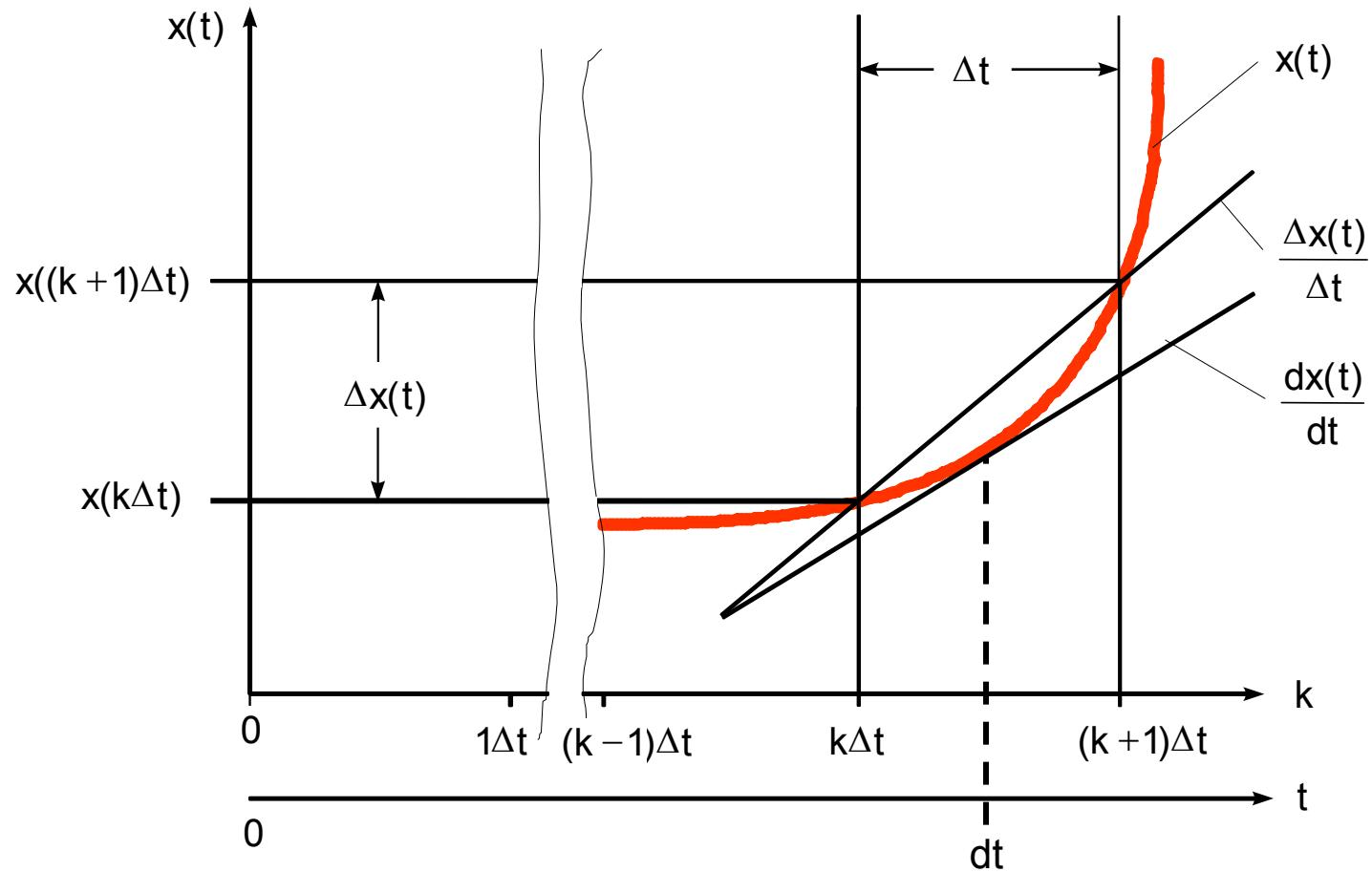
2. Betrachtung der Funktion nur zu diskreten Zeitpunkten $t = k \cdot \Delta t$

$$x_i(t) \approx x_i(k \cdot \Delta t), \quad u(t) \approx u(k \cdot \Delta t) \quad \text{und} \quad y(t) \approx y(k \cdot \Delta t)$$

$$\frac{\Delta x_i(t)}{\Delta t} = \frac{x_i((k+1)\Delta t) - x_i(k\Delta t)}{\Delta t}$$



Veranschaulichung der Diskretisierung



Diskretisierung der Zustandsform von LTI-Systemen

$$\frac{x_1((k+1)\Delta t) - x_1(k\Delta t)}{\Delta t} = a_{11} x_1(k\Delta t) + a_{12} x_2(k\Delta t) + \dots + a_{1n} x_n(k\Delta t) + b_1 u(k\Delta t)$$

$$\frac{x_2((k+1)\Delta t) - x_2(k\Delta t)}{\Delta t} = a_{21} x_1(k\Delta t) + a_{22} x_2(k\Delta t) + \dots + a_{2n} x_n(k\Delta t) + b_2 u(k\Delta t)$$

⋮

$$\frac{x_n((k+1)\Delta t) - x_n(k\Delta t)}{\Delta t} = a_{n1} x_1(k\Delta t) + a_{n2} x_2(k\Delta t) + \dots + a_{nn} x_n(k\Delta t) + b_n u(k\Delta t)$$

$$y(k\Delta t) = c_1 x_1(k\Delta t) + c_2 x_2(k\Delta t) + \dots + c_n x_n(k\Delta t) + d u(k\Delta t)$$

Näherung um so besser, je kleiner Δt gewählt wird, aber Aufwand steigt

Zeitdiskrete Laufvariable $k \cdot \Delta t$ kann durch Index k ersetzt werden



Zeitdiskrete Zustandsform

Umformung der Zustandsgleichungen nach $\underline{x}(k+1)$ ermöglicht bei bekanntem Anfangszustand $\underline{x}(k=0)$ die rekursive Berechnung beliebiger Systemantworten:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t \cdot [a_{11} x_1(k) + a_{12} x_2(k) + \cdots + a_{1n} x_n(k) + b_1 u(k)]$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t \cdot [a_{21} x_1(k) + a_{22} x_2(k) + \cdots + a_{2n} x_n(k) + b_2 u(k)]$$

⋮

$$x_n(k+1) = x_n(k) + \Delta t \cdot [a_{n1} x_1(k) + a_{n2} x_2(k) + \cdots + a_{nn} x_n(k) + b_n u(k)]$$

$$y(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + \cdots + c_n x_n(k) + d \cdot u(k)$$

⇒ Allgemeine Darstellung in Matrizenform

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{b}_d \cdot u(k)$$

$$y(k) = \underline{c}_d \cdot \underline{x}(k) + d_d \cdot u(k)$$

mit:
 \underline{A}_d : n x n Matrix
 \underline{b}_d : n x 1 Eingangsvektor
 \underline{c}_d : 1 x n Ausgangsvektor
 d_d : skalarer Durchgangsfaktor



Rekursive Differenzengleichungen

Die zeitdiskrete Zustandsform ermöglicht durch Auswertung zu den Zeiten k bis $k - n$ die Eliminierung der n Zustandsgrößen

Damit kann das System durch eine einzige Gleichung beschrieben werden, in der das aktuelle Ausgangssignal nur noch von bis zu n vergangenen Ausgangs- sowie Eingangswerten abhängig ist

Allgemeine Form:

$$y(k) = \sum_{i=1}^n -\alpha_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m \beta_j u(k-j) \quad \text{mit: } \alpha_i, \beta_j \text{ reell}$$

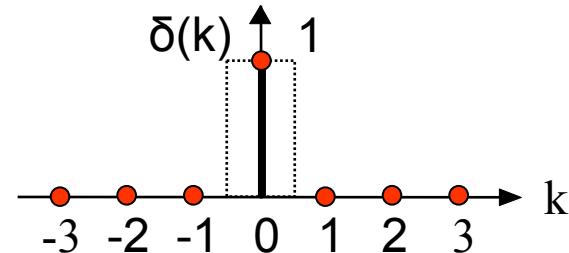
Diese Systemdarstellung wird **rekursive Differenzengleichung** genannt



Zeitdiskrete Elementarsignale

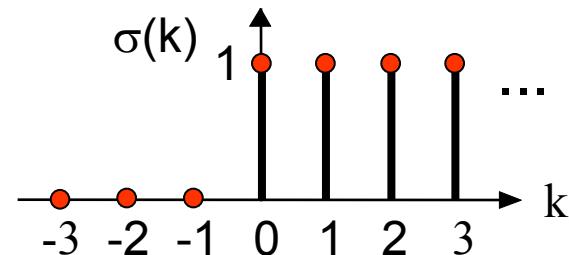
Zeitdiskreter Diracstoß:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$



Zeitdiskreter Einheitssprung:

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$$



Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal zeitdiskreter LTI-Systeme



gesucht:

$$y(k) = \Phi \{u(k)\}$$

Eigenschaften von Φ :

$$\Phi \{a \cdot u_1(k) + b \cdot u_2(k)\} = a \cdot y_1(k) + b \cdot y_2(k)$$

$$\Phi \{u(k - k_0)\} = y(k - k_0)$$

$$u(k) = \cdots + u(0) \cdot \delta(k) + u(1) \cdot \delta(k-1) + u(2) \cdot \delta(k-2) + \cdots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i) \cdot \delta(k-i)$$

$$y(k) = \Phi \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i) \cdot \delta(k-i) \right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi \{u(i) \cdot \delta(k-i)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i) \cdot \underbrace{\Phi [\delta(k-i)]}_{\text{Stoßantwort } g(k-i)}$$

$$\Rightarrow y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i) \cdot g(k-i) = u(k) * g(k)$$

Stoßantwort
 $g(k-i)$

Wie bei zeitkontinuierlichen Systemen!



Kopplung von analogen und digitalen Systemen

Bisher wurde gezeigt, wie Systemantworten von analogen Systemen durch Diskretisierung näherungsweise berechnet werden können

Außerdem wurde hergeleitet, dass sich die Ausgangssignale zeitdiskreter Systeme mittels Faltung aus diskreten Eingangssignalen berechnen lassen

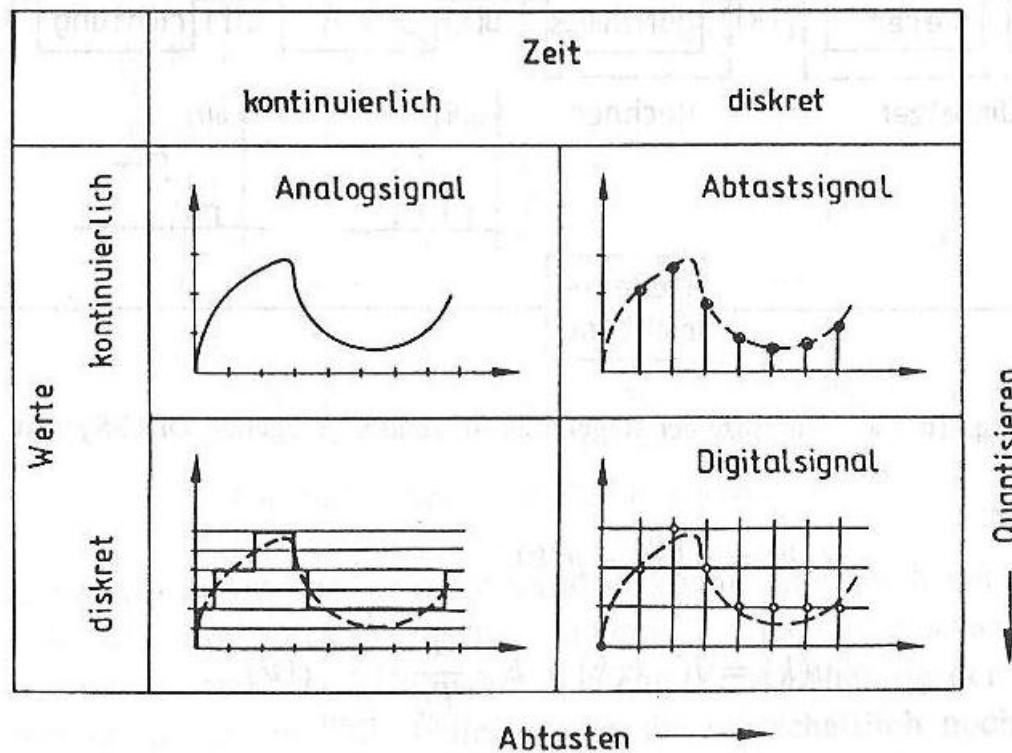
Weitere wichtige Erkenntnisse ergeben sich, wenn die Eigenschaften gekoppelter analoger und digitaler Systeme betrachtet werden

Diese Kopplungen treten immer dann auf, wenn analoge physikalische Systeme durch Digitalrechner gesteuert oder analysiert werden sollen



Diskretisierung von analogen Signalen

Digitale Systeme können Zeit und Amplitudenwerte nur diskret verarbeiten

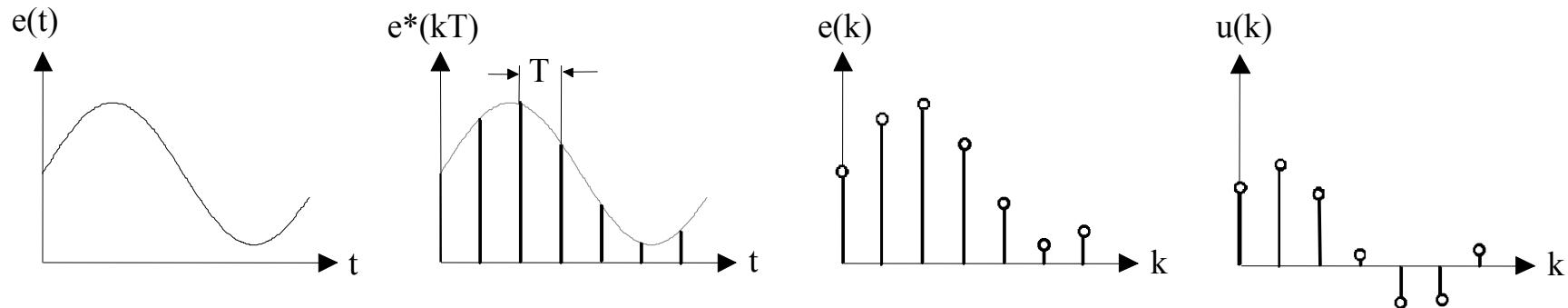
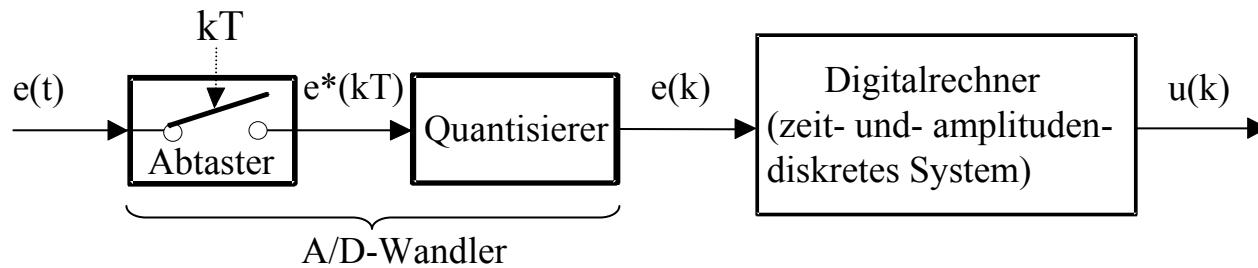


Quantisierungfehler dürfen bei großer Wortbreite vernachlässigt werden



Digitale Systeme mit kontinuierlichen Eingangssignalen

analoge Eingangssignale müssen zuerst digitalisiert werden, um sie anschließend mit einem zeitdiskreten System verarbeiten zu können

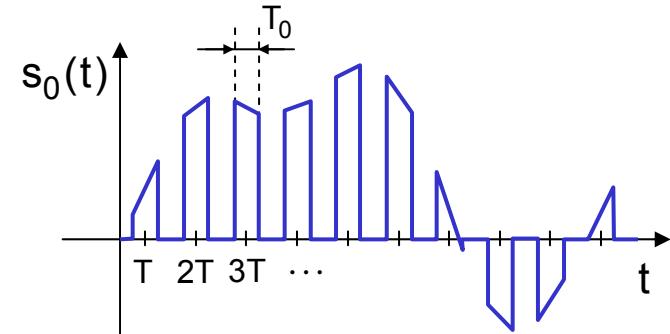
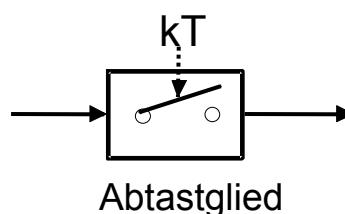
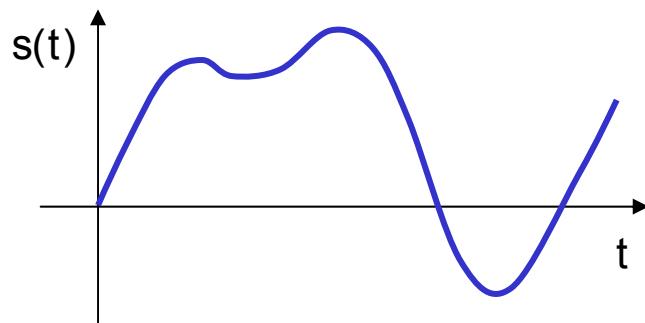


Hierbei ist die Festlegung der Abtastzeit T von entscheidender Bedeutung



Abtastung zeitkontinuierlicher Signale

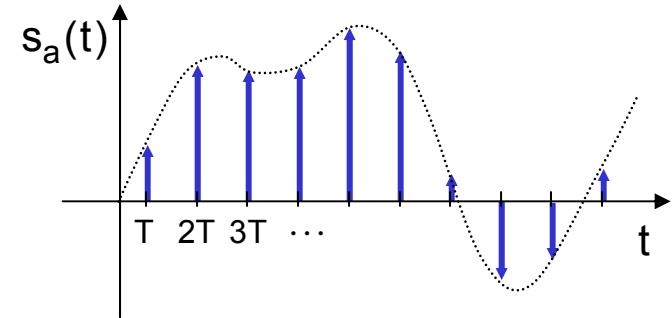
Die Amplitude von $s(t)$ wird periodisch mittels einer Torschaltung gemessen



$$s_0(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sigma(t-kT + \frac{T_0}{2}) - \sigma(t-kT - \frac{T_0}{2}) \right) = s(t) \cdot \left[\left(\sigma(t + \frac{T_0}{2}) - \sigma(t - \frac{T_0}{2}) \right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \right]$$

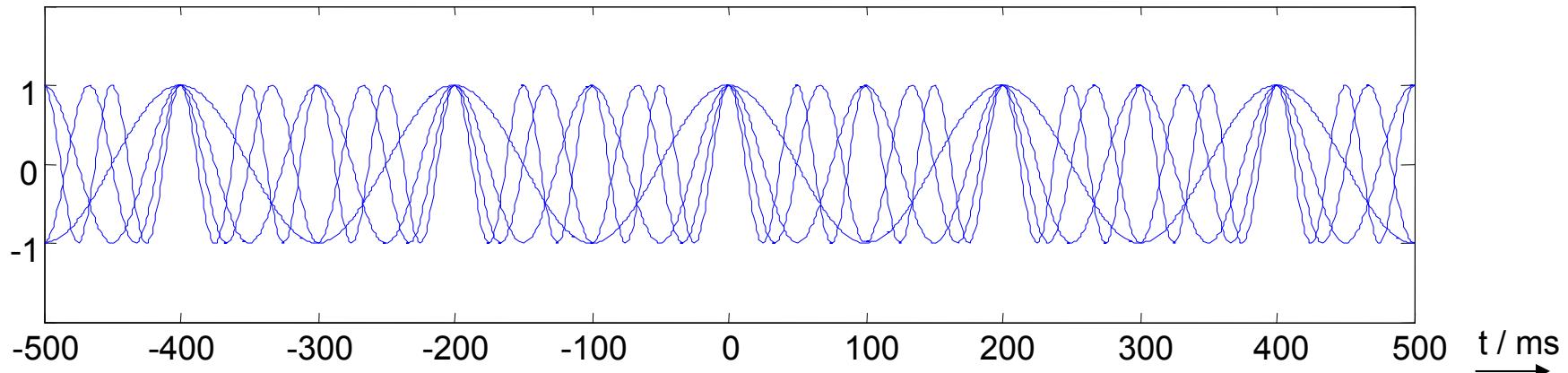
Ideale Abtastung, falls Torbreite $T_0 \rightarrow 0$ läuft:

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

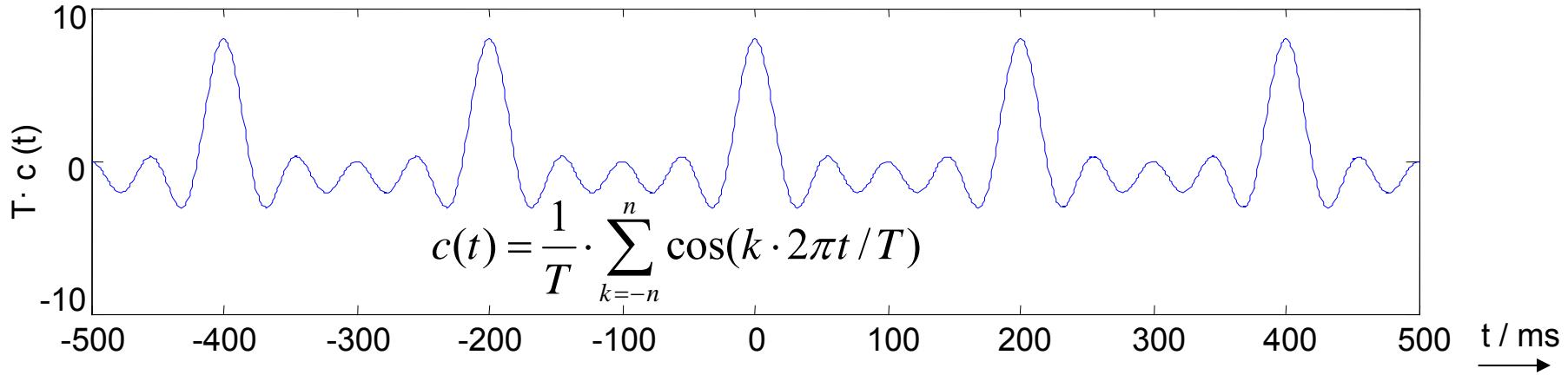


Zur Identität von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ mit cos-Summe

Überlagerung von cos-Funktionen ($n = 4$, $T = 200$ ms)



Summe von cos-Funktionen ($n = 4$, $T = 200$ ms)



Berechnung von Spektren ideal abgetasteter Signale

Summe der Dirac-Stöße kann durch cos-Summe ersetzt werden:

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = s(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(k \cdot t \frac{2\pi}{T}) \quad (\text{exakter Beweis z. B. durch Fourier-Reihenentwicklung})$$

$$= s(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j \cdot k \cdot \omega_T t} + e^{-j \cdot k \cdot \omega_T t}}{2} = s(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j \cdot k \cdot \omega_T t} \quad \text{mit: } \omega_T = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f_T$$

Spektrum ergibt sich durch Fourier-Transformation von $s_a(t)$:

$$S_a(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j \cdot k \cdot \omega_T t} \right] \cdot e^{-j \omega t} dt = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j(\omega - k \cdot \omega_T)t} dt \right]}_{S(\omega - k \cdot \omega_T)}$$

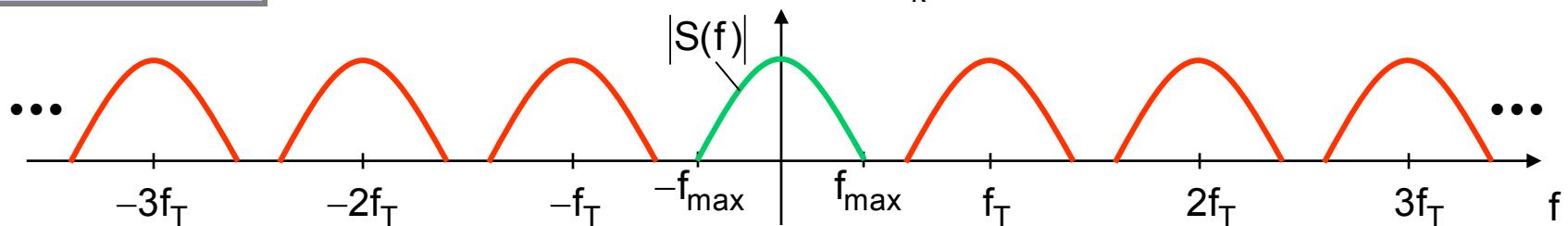
$$\Rightarrow S_a(f) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - k \cdot f_T) = S(f) * \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \cdot f_T)$$



Darstellung des Abtastspektrums

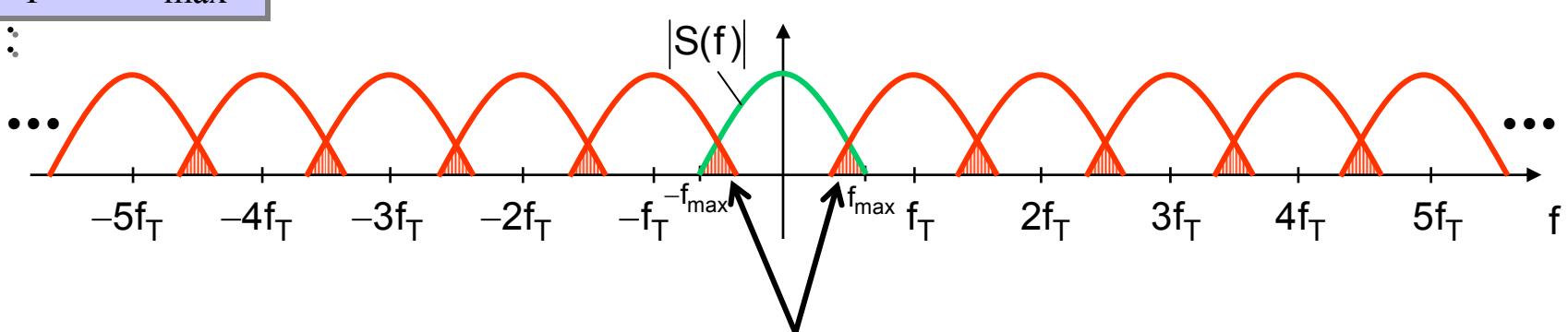
$f_T > 2 \cdot f_{\max} :$

$$T \cdot |S_a(f)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S(f - k \cdot f_T)|$$



$f_T < 2 \cdot f_{\max}$

$$T \cdot |S_a(f)|$$



Spektrale Überlappungen führen zu Signalverzerrungen (Aliasing)



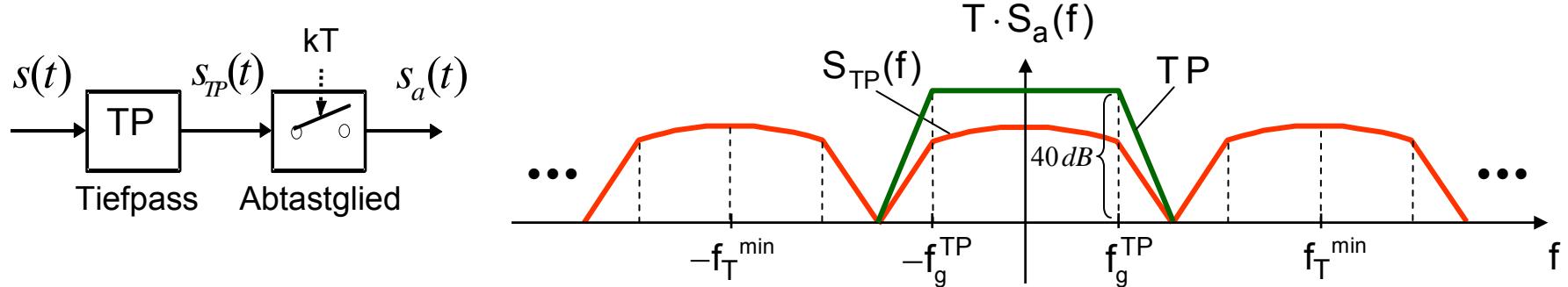
Abtasttheorem und Anti-Aliasing Filterung

Zur Vermeidung von Aliasing muss die Abtastung analoger Signale mindestens mit der doppelten maximalen Signalfrequenz erfolgen:

$$f_T \geq 2 \cdot f_{\max}$$

(Shannon'sches Abtasttheorem)

Vor Abtastung TP-Filterung zu breitbandiger oder verrauschter Signale:

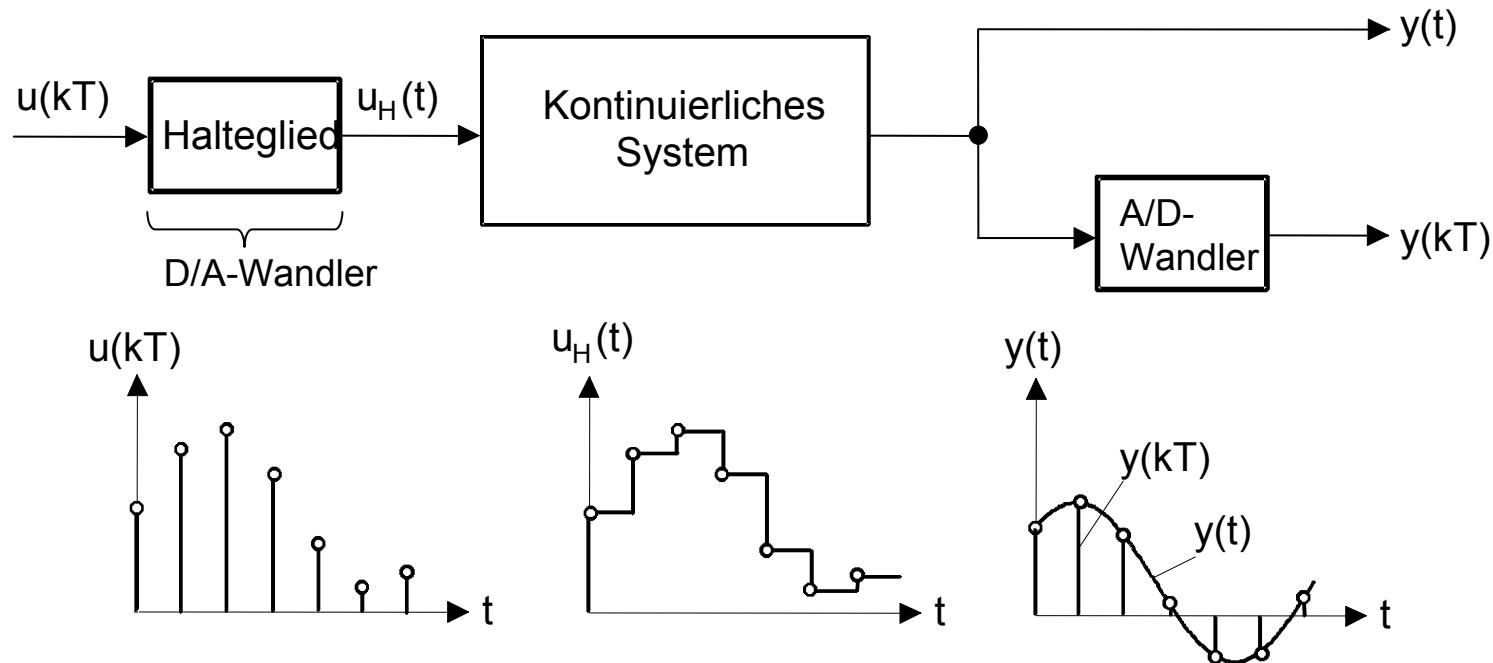


f_T bzw. das TP-Filter sollte so gewählt werden, dass vor der Abtastung die Amplitude bei der Frequenz $f = \frac{1}{2} f_T$ um ca. 60 dB gedämpft wird



Kontinuierliche Systeme mit zeitdiskreten Eingangssignalen

Nach der Verarbeitung werden zeitdiskrete Signale oft in analoge Größen gewandelt, um kontinuierliche Systeme zu steuern

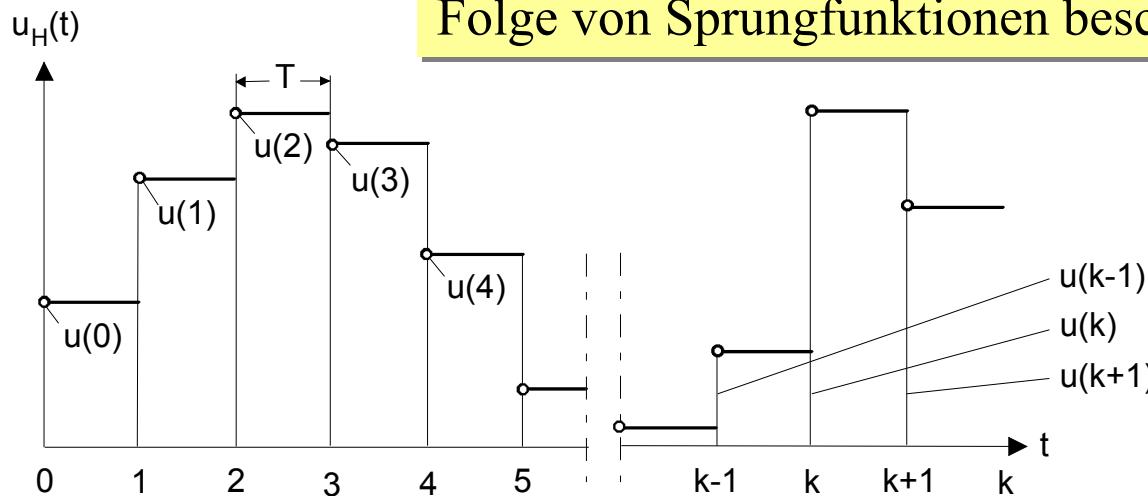


Hierbei muss der Einfluss des Halteglieds beachtet werden



Modellierung des Haltegliedes im Zeitbereich

Das Ausgangssignal eines Haltegliedes kann als Folge von Sprungfunktionen beschrieben werden:



$$u_H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) [\sigma(t - kT) - \sigma(t - (k+1)T)] = \underbrace{[\sigma(t) - \sigma(t - T)]}_{\text{Stoßantwort eines Halteglieds}} * \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u(k) \delta(t - kT)}_{\text{Abtastfolge im Zeitbereich}}$$

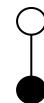
Stoßantwort eines Halteglieds

Abtastfolge im Zeitbereich

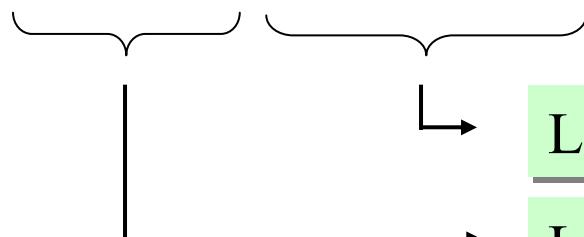


Betrachtung des Haltegliedes im Laplace-Bereich

$$u_H(t) = [\sigma(t) - \sigma(t-T)] * \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \delta(t - kT)$$



$$\begin{aligned} U_H(s) &= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-sT} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \cdot 1 \cdot e^{-skT} \\ &= \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \cdot e^{-skT} = G_H(s) \cdot \mathcal{L}\{u(kT)\} \end{aligned}$$



Laplace-Transformierte der Abtastfolge

Laplace-Transformierte des Halteglieds



Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Bei Beschränkung der komplexen Variablen $s = \delta + j\omega$ auf rein imaginäre Werte geht die Laplace-Transformierte von Abtastfolgen in die Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale $f(k)$ mit N Abtastwerten über:

$$F_d(\omega) = \mathcal{F}\{f(k)\} = \mathcal{L}\{f(k)\}|_{s=j\omega} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\omega kT}$$

Reduziert man aufgrund der Periodizität der Spektren die Bestimmung von $F_d(\omega)$ auf N diskrete Stützstellen im Abstand von $\Delta\omega = 2\pi f_T / N$, so folgt:

$$F_d(n \cdot \Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi \cdot n \cdot k / N} \quad \text{für: } n = 0, 1, \dots, N-1$$

$F_d(n)$ wird *Diskrete Fourier-Transformation (DFT)* genannt, zur Berechnung dient ein schneller Algorithmus, die sogenannte *Fast Fourier-Transformation (FFT)*

