

Übertragung von Eigenfunktionen über LTI-Systeme

Die Form des Ausgangssignal eines LTI-Systems unterscheidet sich im Allgemeinen vom Eingangssignal und berechnet sich durch Faltung:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad u(t) * g(t) = g(t) * u(t)$$

Bestimmte Eingangssignale – sogenannte Eigenfunktionen – werden bei der Übertragung jedoch nur in Amplitude und Phase beeinflusst!

Eigenfunktionen von LTI-Systemen:

$$u_E(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t$$

$$\Rightarrow y_E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} \cdot g(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot g(\tau) d\tau}_{\neq f(t)} = u_E(t) \cdot G(\omega)$$



Fourier-Transformation

Allgemein kann für jedes Zeitsignal die komplexe Amplitude $F(\omega)$ einer Eigenfunktion mit der Frequenz ω angegeben werden

Umgekehrt lässt sich jedes Zeitsignal als Überlagerung von gewichteten Eigenfunktionen (\sin bzw. \cos) darstellen

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = F \{f(t)\}$$
 •—○ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}\{F(\omega)\}$
mit: $F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{j\varphi\{F(\omega)\}}$

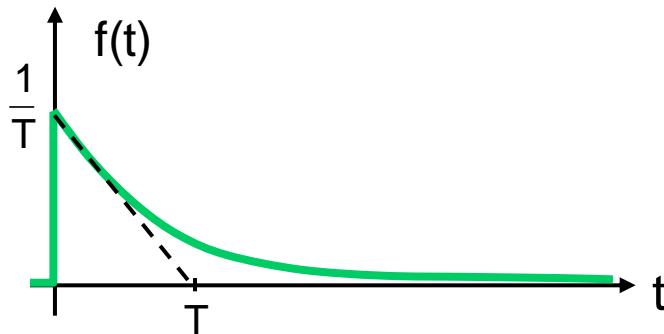
Falls $f(t)$ reelle Zeitfunktion ist:

$$\Rightarrow |F(-\omega)| = |F(\omega)|$$
$$\varphi\{F(-\omega)\} = -\varphi\{F(\omega)\}$$
 $\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} |F(\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi\{F(\omega)\}) d\omega$

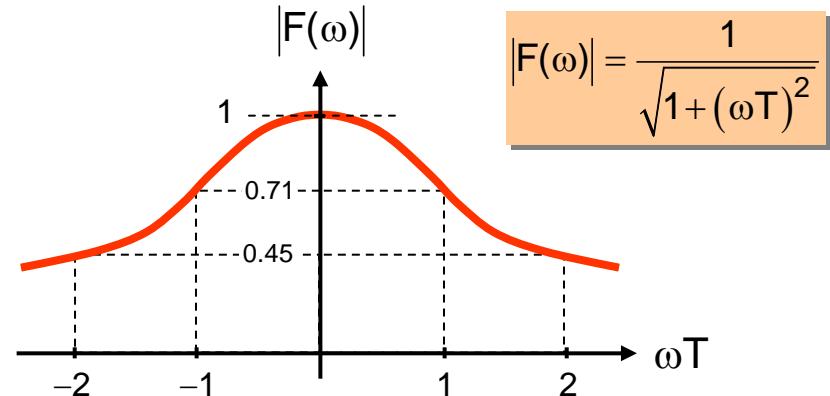


Beispiel 1: Spektrum eines Exponentialimpulses

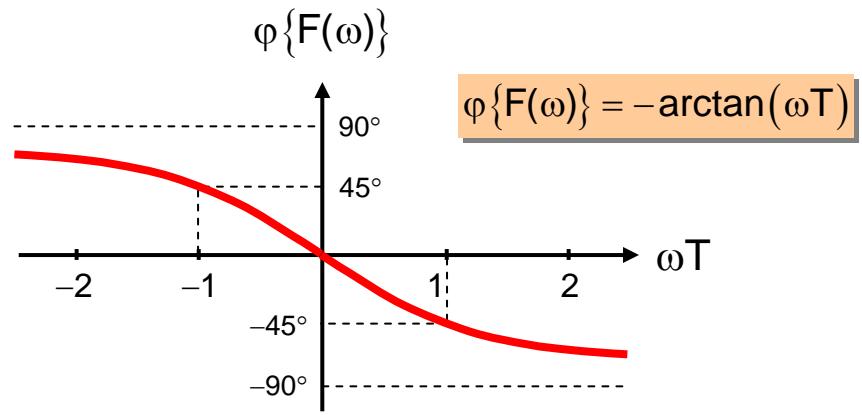
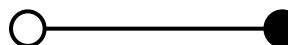
$$f(t) = \sigma(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$



$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-t(1/T + j\omega)} dt \\ &= \frac{-1}{T(1/T + j\omega)} \cdot e^{-t(1/T + j\omega)} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{1 + j\omega T} \end{aligned}$$



$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$



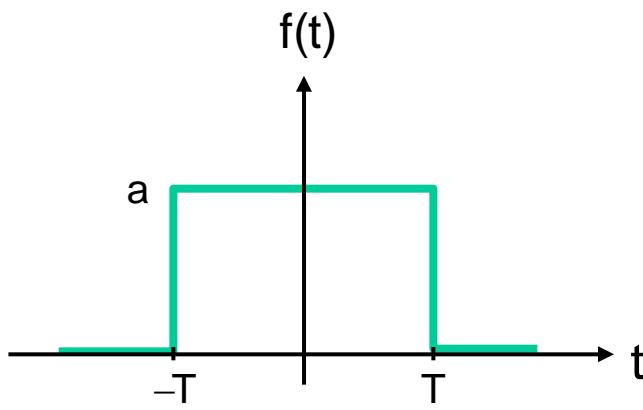
$$\varphi\{F(\omega)\} = -\arctan(\omega T)$$



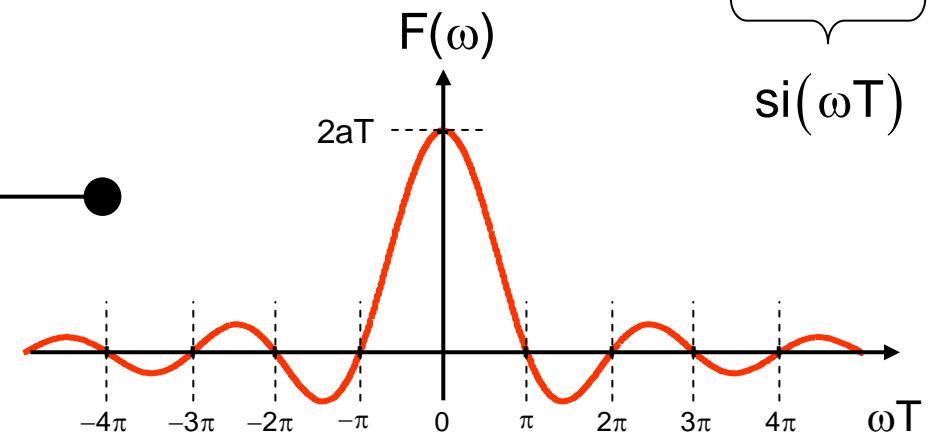
Beispiel 2: Spektrum eines Rechteckimpulses

$$f(t) = a \cdot [\sigma(t + T) - \sigma(t - T)]$$

$$F(\omega) = 2aT \cdot \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$



○ ●



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = a \cdot \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t} dt = -\frac{a}{j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{t=-T}^{t=T} = \frac{2a}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j} = 2a \cdot \frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

Allgemein: Die Fourier-Transformierte von geraden Zeitfunktionen mit $f(t) = f(-t)$ ist rein reell, bei ungeraden Zeitfunktionen mit $f(t) = -f(-t)$ ist sie rein imaginär



Wichtige Theoreme der Fourier-Transformation

Transformation:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \longleftrightarrow S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Faltung:

$$s_1(t) * s_2(t) \longleftrightarrow S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$

Multiplikation:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) \longleftrightarrow S_1(\omega) * S_2(\omega)$$

Linearkombination:

$$a_1 \cdot s_1(t) + a_2 \cdot s_2(t) \longleftrightarrow a_1 \cdot S_1(\omega) + a_2 \cdot S_2(\omega)$$

Verschiebung:

$$s(t - t_0) \longleftrightarrow S(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

Zeitspiegelung:

$$s(-t) \longleftrightarrow S^*(\omega) \quad , \text{ falls } s(t) \text{ reell}$$



Energie- und Leistungsberechnung im Spektralbereich

Ansatz: Korrelationsfunktion als Faltungsprodukt darstellen

$$\begin{aligned}\varphi_{ss}^E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(t + \tau) d\tau \stackrel{(\tau = -\theta)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s(-\theta) \cdot s(t - \theta) (-d\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-\theta) \cdot s(t - \theta) d\theta \\ &= s(-t) * s(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$


$$S^*(\omega) \cdot S(\omega) = |S(\omega)|^2$$

$$\Rightarrow \varphi_{ss}^E(0) = E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Die Signalenergie ergibt sich als Integral über das Quadrat des Betragsspektrums

Für Leistungssignale:

$\Phi_{ss}(f)$: Leistungsdichtespektrum

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(f) df$$

mit:

$$\Phi_{ss}(f) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T s(t) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t} dt \right|^2$$



Laplace-Transformation

Fourier-Transformierte von Signalen mit $E \rightarrow \infty$ enthalten Dirac-Stöße und sind deshalb mathematisch relativ umständlich handhabbar

Daher Beschränkung auf Funktionen, die nur für $t > 0$ existieren, und Einführung eines reellen Dämpfungsfaktors δ zur Garantie der Konvergenz:

Das heißt: $f(t) = 0$ für $t < 0$ und $s = \delta + j\omega$

\Rightarrow **Laplace-Transformation:**

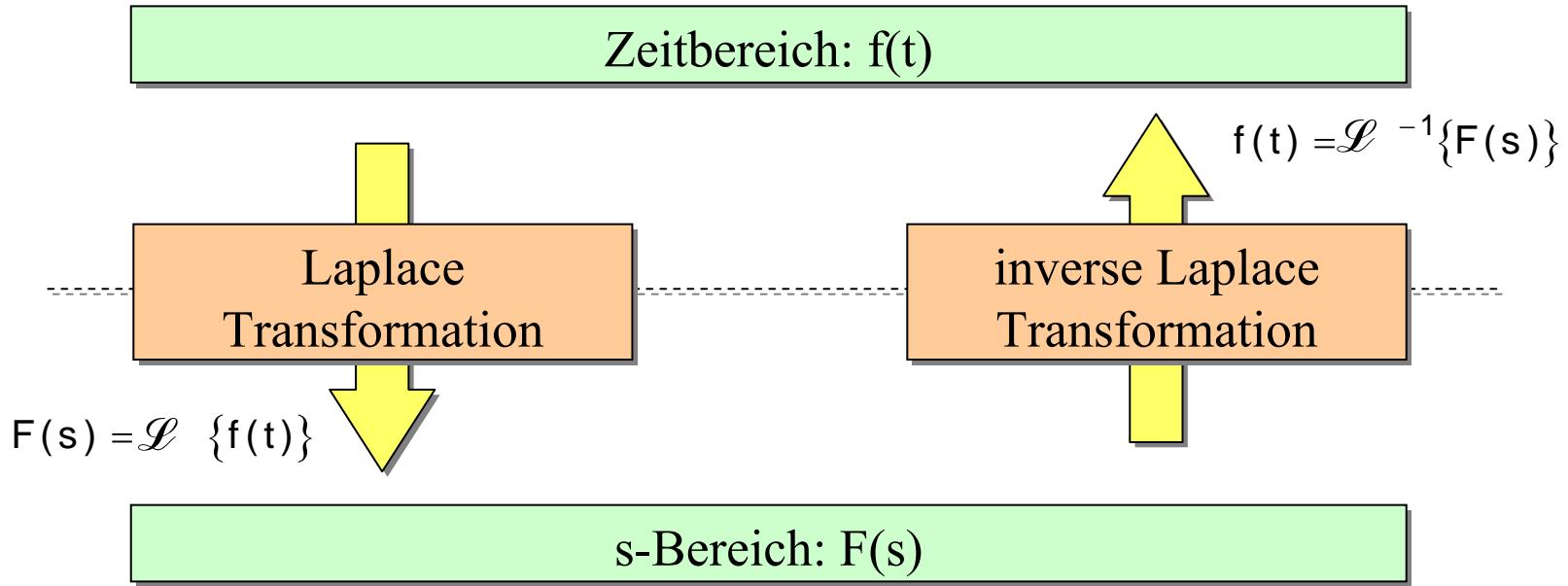
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$



Zusammenhang zwischen Zeit- und s-Bereich



Die Laplace-Transformation kann nicht anschaulich interpretiert werden, ermöglicht aber eine einfache mathematische Handhabung im s-Bereich



Laplace-Transformation einfacher Signale

Laplace-Transformierte des Einheitssprunges $\sigma(t)$:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s}$$

Laplace-Transformierte des Dirac-Stoßes $\delta(t)$:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

mit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) u(-t) dt = u(0)$$



Laplace-Transformation der Ableitung einer beliebigen Zeitfunktion

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(t)}{\partial t} e^{-st} dt$$

partielle Integration:

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$= f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-s) e^{-st} dt = 0 - f(t=0) + s \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt}_{F(s)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = s F(s) - f(0)$$



Laplace-Transformierte einer Linearkombination von Zeitfunktionen

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t)\} \quad \underline{\text{mit:}} \quad a_i = \text{konst.}$$

$$= \int_0^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t)\} e^{-st} dt$$

$$= a_1 \underbrace{\int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt}_{F_1(s)} + a_2 \underbrace{\int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt}_{F_2(s)} + \cdots + a_n \underbrace{\int_0^{\infty} f_n(t) e^{-st} dt}_{F_n(s)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) + \cdots + a_n F_n(s)}$$



Laplace-Transformierte einer um t_0 verschobenen Zeitfunktion

$$\mathcal{L}\{ f(t - t_0) \} = \int_0^{\infty} f(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) e^{-st} dt$$

Substitution:

$$t - t_0 = t' \Rightarrow dt' = dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} f(t') e^{-s(t'+t_0)} dt' \\ &= e^{-st_0} \cdot \int_0^{\infty} f(t') e^{-st'} dt' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\{ f(t - t_0) \} = e^{-st_0} \cdot F(s)}$$



Laplace-Transformation der Faltung und des Produktes zweier Zeitfunktionen

$$\mathcal{L}\left\{ f_1(t) * f_2(t) \right\} = \mathcal{L}\left\{ \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

Substitution:

$$t - \tau = t' \Rightarrow dt' = dt$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t') d\tau e^{-s(t'+\tau)} dt'$$

$$= \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\left\{ f_1(t) * f_2(t) \right\} = F_1(s) \cdot F_2(s)}$$



Zusammenfassung

Fourier-Transformierte stellen die Amplitude und Phase von Sinusschwingungen dar, aus denen sich ein Signal zusammensetzt

Laplace-Transformierte sind zwar unanschaulich, können aber quasi für beliebige Zeitsignale einfach berechnet werden

Die mathematische Behandlung von Signalen und Systemen ist im s-Bereich häufig wesentlich einfacher als im Zeitbereich

Durch Rücktransformation vom s- in den Zeitbereich kann die Systemantwort für beliebige Eingangssignale angegeben werden

Die meisten Analysen zum Systemverhalten sind allerdings auch ohne Rücktransformation bereits im s-Bereich möglich



Die Übertragungsfunktion

Als Übertragungsfunktion eines Systems wird der Quotient der Laplace-Transformierten des Ausgangssignals zu der Laplace-Transformierten des Eingangssignals bezeichnet

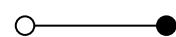
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \Big|_{\underline{x}(0)=0}$$

Der Systemzustand zum Zeitpunkt $t = 0$ wird hierbei zu Null angenommen, also $\underline{x}(t=0)=0$



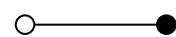
Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion und Stoßantwort

$$y(t) = u(t) * g(t)$$



$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

Spezialfall: $u(t) = \delta(t)$



$$U(s) = 1$$

$$y(t) = \delta(t) * g(t) = g(t)$$



$$Y(s) = 1 \cdot G(s) = G(s)$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Die Stoßantwort $g(t)$ ergibt sich als Rücktransformierte der Übertragungsfunktion in den Zeitbereich



Berechnung der Übertragungsfunktion aus der Zustandsform eines LTI-Systems

Zustandsform eines LTI-Systems in Matrzenschreibweise:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) \\ y(t) &= \underline{c} \cdot \underline{x}(t) + d \cdot u(t)\end{aligned}$$

Laplace-Transformierte der Zustandsform:

$$\begin{aligned}s \cdot \underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{A} \cdot \underline{X}(s) + \underline{b} \cdot U(s) \quad (1) \\ Y(s) &= \underline{c} \cdot \underline{X}(s) + d \cdot U(s) \quad (2)\end{aligned}$$

Ziel: Eliminierung der Laplace-transformierten Zustandsgrößen $\underline{X}(s)$ und Bestimmung von

$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{\underline{x}(t=0)=0}$$



Eliminierung der Zustandsgrößen

Aus Gleichung (1) folgt:

$$s \cdot \underline{X}(s) - \underline{A} \cdot \underline{X}(s) = (\underline{E} \cdot s - \underline{A}) \cdot \underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{b} \cdot U(s)$$

$$\underline{X}(s) = (\underline{E} \cdot s - \underline{A})^{-1} (\underline{x}(0) + \underline{b} \cdot U(s))$$

Einheitsmatrix:

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in (2) ergibt:

$$Y(s) = \underline{c} \cdot (\underline{E} \cdot s - \underline{A})^{-1} (\underline{x}(0) + \underline{b} \cdot U(s)) + d \cdot U(s)$$

Hieraus folgt mit $\underline{x}(0) = 0$ die gesuchte Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{\underline{x}(0)=0} = \underline{c} \cdot (\underline{E} \cdot s - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{b} + d$$



Auflösung der Matrizengleichung für $n = 2$

Invertierung der Matrix ($\underline{E} \cdot s - \underline{A}$) für $n = 2$ ergibt:

$$(\underline{E} \cdot s - \underline{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-a_{11})(s-a_{22}) - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} s-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s-a_{11} \end{pmatrix}$$

Damit folgt für die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \underline{c} \cdot (\underline{E} \cdot s - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{b} + d$$

$$G(s) = \frac{(c_1 b_1 + c_2 b_2)s + b_1(c_2 a_{21} - c_1 a_{22}) + b_2(c_1 a_{12} - c_2 a_{11})}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + d$$



Allgemeine Lösung für G(s) von LTI-Systemen

Übertragungsfunktion eines LTI-Systems beliebiger Ordnung n:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\tilde{b}_m s^m + \tilde{b}_{m-1} s^{m-1} + \tilde{b}_{m-2} s^{m-2} + \cdots + \tilde{b}_2 s^2 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{s^n + \tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + \tilde{a}_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}$$

Eigenschaften von G(s):

- G(s) ist eine gebrochen rationale Funktion
- Die höchste Potenz im Nenner entspricht der Ordnung n des mathematischen Zustandsmodells
- der Grad m des Zählerpolynoms ist bei realisierbaren Systemen immer kleiner oder gleich dem Grad n des Nennerpolynoms: $m \leq n$



Berechnung des Zustandsmodells aus der Übertragungsfunktion

Aus einer gegebenen Übertragungsfunktion kann durch eine eindeutige Abbildung die Zustandsform ermittelt werden

Dies ist z. B. erforderlich, falls eine numerische Berechnung der Sprungantwort durchgeführt werden soll

Die dabei ermittelten Zustandsgrößen müssen nicht immer ein physikalische Bedeutung besitzen

Ausgangspunkt für die Aufstellung der Zustandsgleichungen ist die Übertragungsfunktion in Polynomform mit Zählergrad < Nennergrad:

$$G(s) = \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + b_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$



Bestimmung des Zustandsmodells aus den Koeffizienten von G(s)

Zustandsmodell in Beobachter-Normalform:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 & -a_2 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$\underline{x}(0) = 0$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \ 1] \cdot \underline{x}(t) + d \cdot u(t)$$

Hinweis: Der Faktor d tritt nur auf, falls Zähler und Nenner von $G(s)$ den selben Grad n aufweisen und wird durch eine Polynomdivision bestimmt

