Gekoppelte Übertragungssysteme

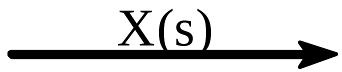
Bisher wurden verschiedene Methoden zur mathematischen Modellierung von technischen Übertragungssystemen betrachtet

Dabei wurde vorausgesetzt, dass das zu beschreibende System eine Einheit mit einem Eingang und einem Ausgang darstellt

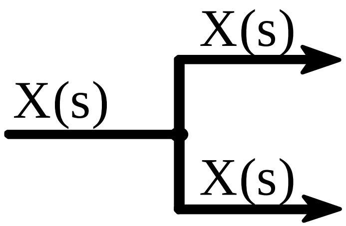
Technische Wirkungsanordnungen sind jedoch oft aus miteinander gekoppelten Übertragungssystemen zusammengesetzt

Solche oft komplizierten Verkopplungen werden häufig durch sogenannte Strukturbilder (Blockschaltbilder) dargestellt

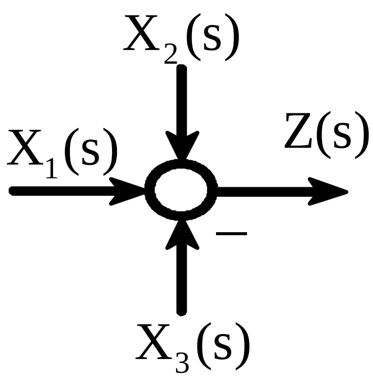
Strukturbildelemente für gekoppelte Systeme



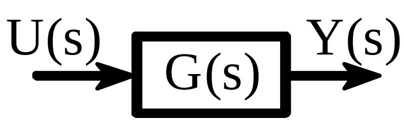
Rückwirkungsfreie Wirkungslinie eines Signals



Verzweigungsstelle eines Signals ohne Signalveränderung



Summationsstelle von Signalen. Negativ zu bewertende Signale werden mit einem Minuszeichen versehen, positive Signale mit einem Pluszeichen oder ohne Kennzeichnung.
Hier: $Z(s) = X_1(s) + X_2(s) - X_3(s)$



Signaldurchgang durch ein rückwirkungsfreies Übertragungsglied mit: $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

Grundverknüpfungsformen von Übertragungsgliedern

Mit den eingeführten Strukturbildelementen lassen sich sämtliche Verknüpfungen linearer Systeme beschreiben

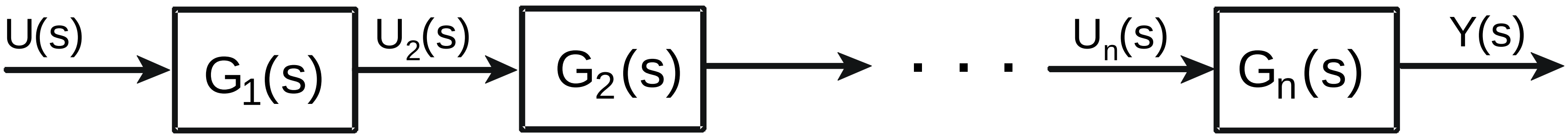
Hierzu werden insgesamt drei Grundverknüpfungsformen benötigt:

Reihenschaltung von Übertragungssystemen

Parallelschaltung von Übertragungssystemen

Kreisschaltung von Übertragungssystemen

Reihenschaltung von Übertragungssystemen

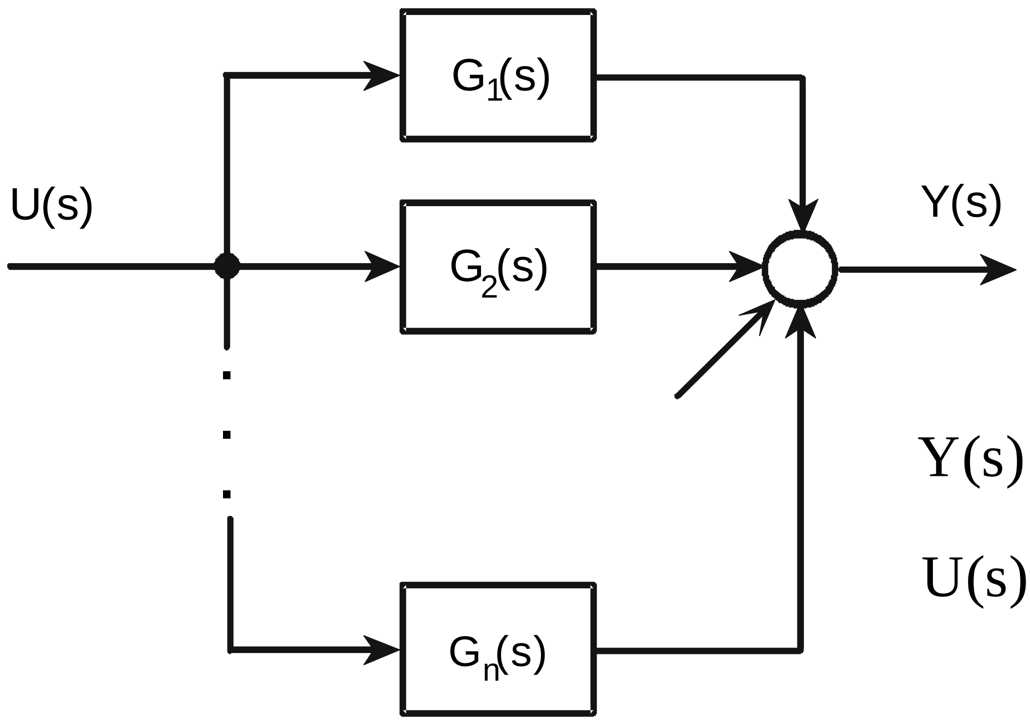


$$Y(s) = Y_n(s) = U_n(s) \cdot G_n(s) = U_{n-1}(s) \cdot G_{n-1}(s) \cdot G_n(s)$$

$$= U(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \cdots \cdot G_n(s)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \prod_{i=1}^{n} G_i(s)}$$

Parallelschaltung von Übertragungssystemen

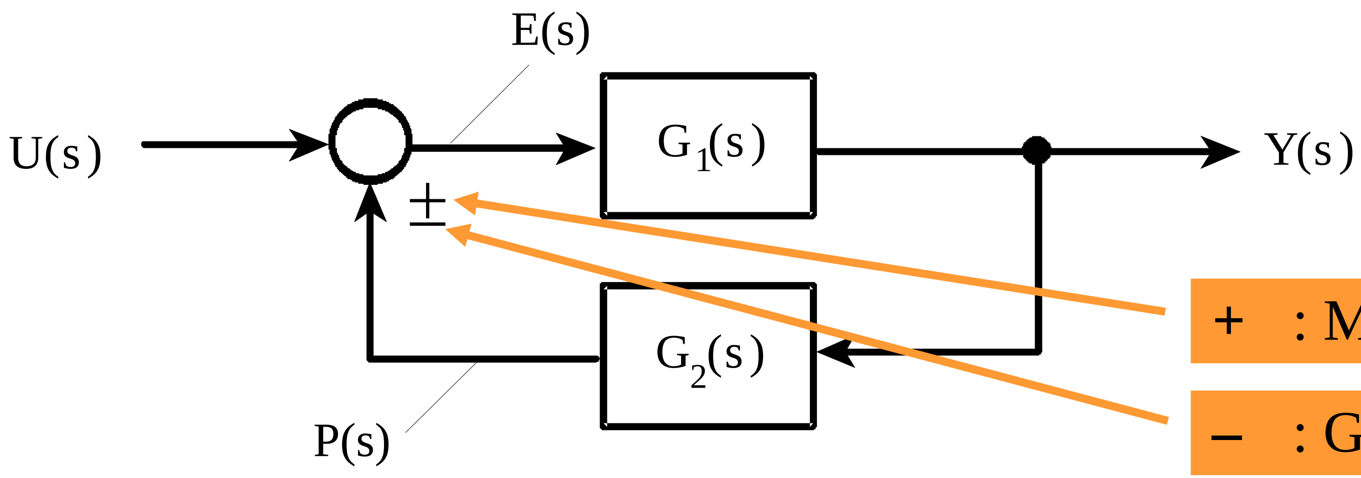


$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \cdots + Y_n(s)$$

$$U(s) = U_1(s) = U_2(s) = \cdots = U_n(s)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s) + Y_2(s) + \cdots + Y_n(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^{n} G_i(s)}$$

Kreisschaltung von Übertragungssystemen



+ : Mitkopplung

– : Gegenkopplung

$$Y(s) = E(s)\cdot G_1(s) = \big(U(s) \pm P(s)\big)\cdot G_1(s) = \big(U(s) \pm Y(s)\cdot G_2(s)\big)\cdot G_1(s)$$

$$Y(s) \mp Y(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s) = U(s)\cdot G_1(s)$$

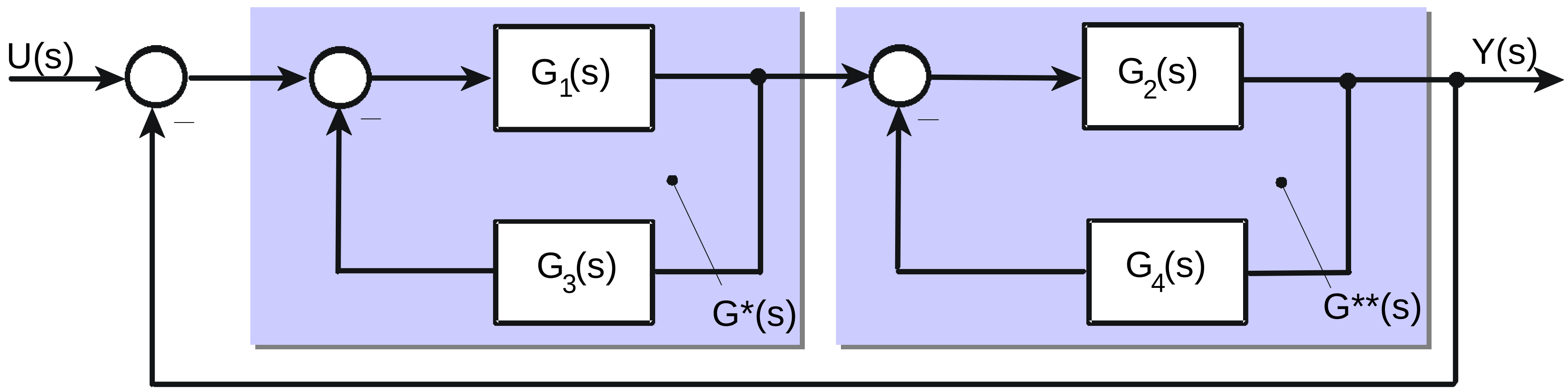
$$\Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)\cdot G_2(s)}}$$

– : Mitkopplung

+ : Gegenkopplung

Beispiel 1 zur Kopplung von Übertragungssystemen

Folgendes System soll vereinfacht werden:

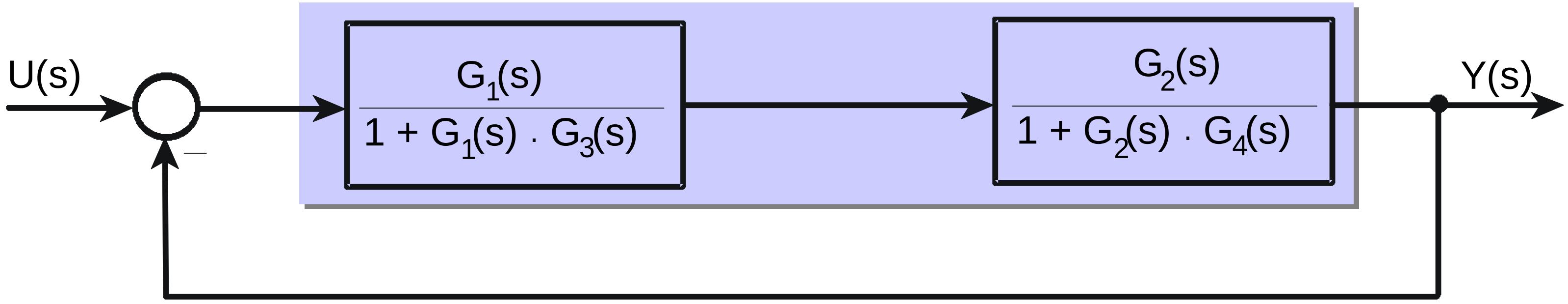


1. Schritt: G*(s) und G**(s) jeweils zusammenfassen

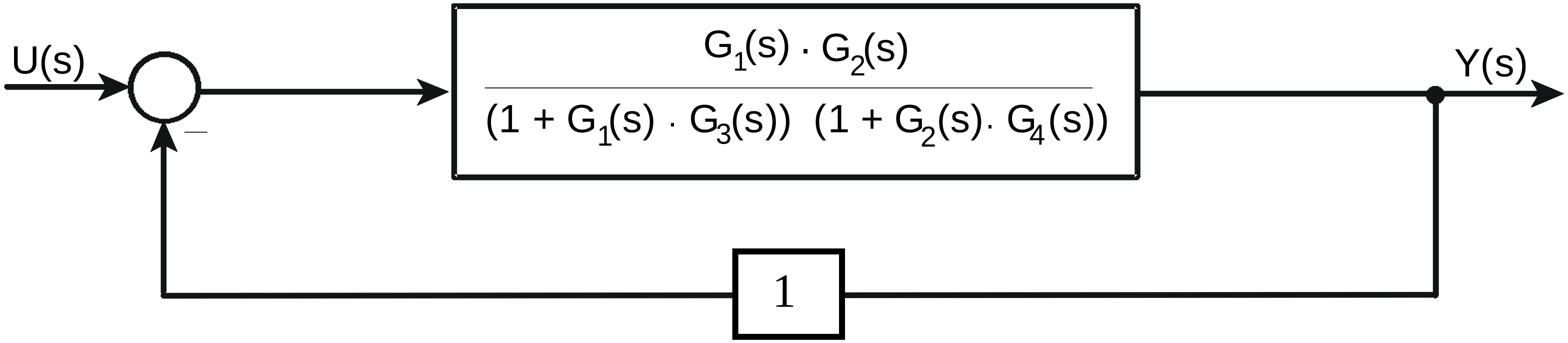
$$G^*(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_3(s)} \; ; \quad G^{**}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_4(s)}$$

Beispiel 1 (Fortsetzung)

Ergebnis der ersten Vereinfachung:



2. Schritt: Reihenschaltung von G*(s) und G**(s) zusammenfassen

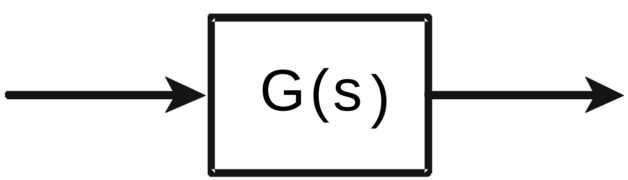


Beispiel 1 (Fortsetzung)

3. Schritt: Erneute Anwendung der Regel für die Kreisschaltung

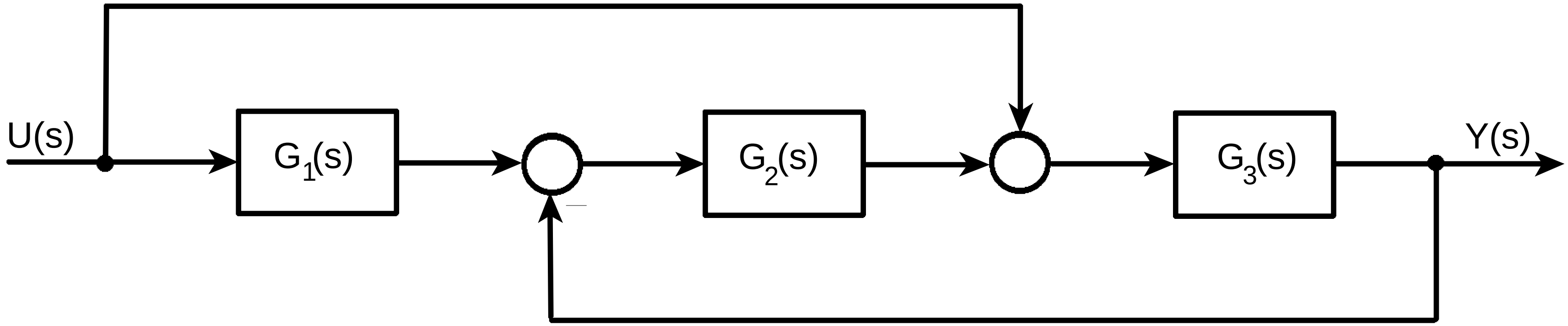
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{\left(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)\right) \cdot \left(1 + G_2(s) \cdot G_4(s)\right)}}{1 + \dfrac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{\left(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)\right) \cdot \left(1 + G_2(s) \cdot G_4(s)\right)}}$$

$$= \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{\left(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)\right) \cdot \left(1 + G_2(s) \cdot G_4(s)\right) + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$



Beispiel 2 zur Kopplung von Übertragungssystemen

Folgendes System soll vereinfacht werden:



Problem:

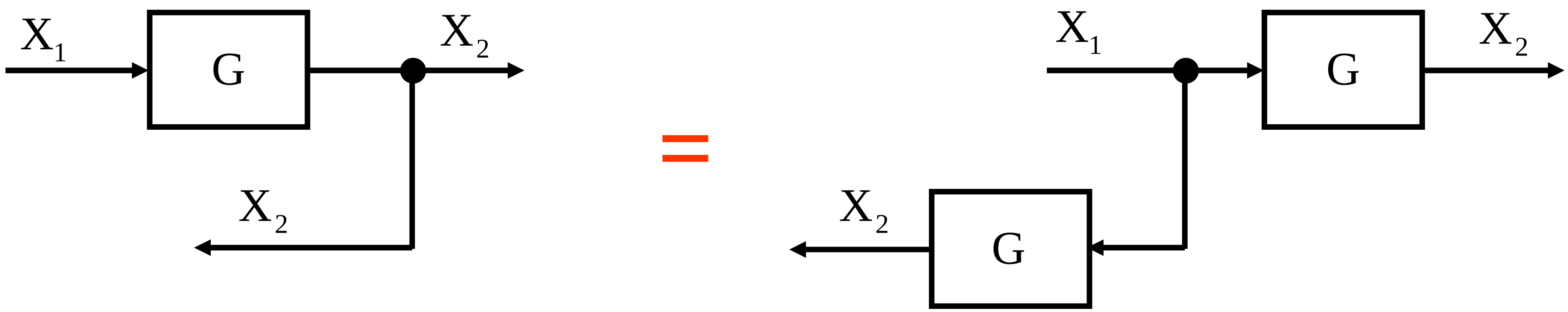
Offensichtlich ist hier eine direkte Anwendung der Kreisschaltung nicht möglich, da die Kreise ineinander verschränkt sind

Lösung:

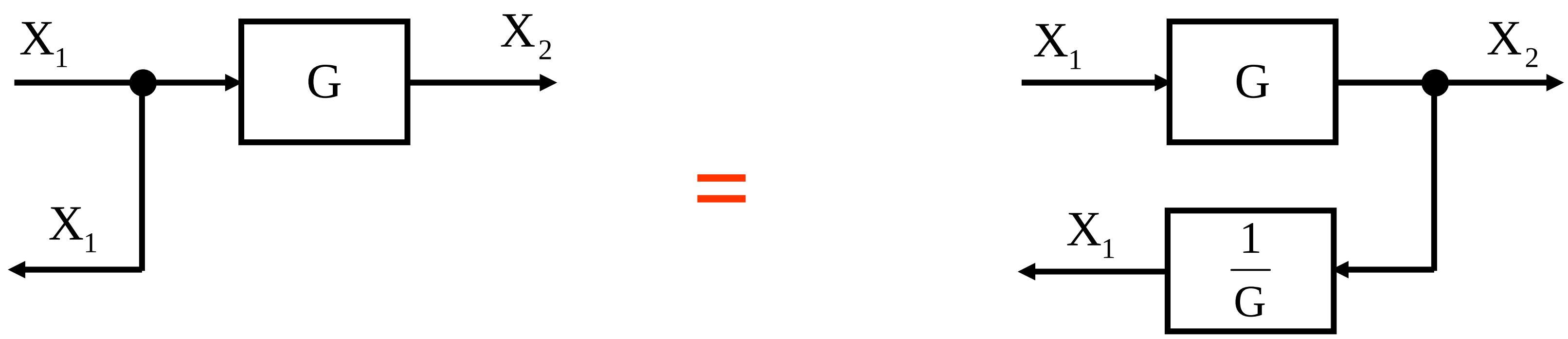
Durch gezielte Verschiebung von Summationspunkten kann die ineinander greifende Vermaschung jedoch aufgelöst werden

Verschieben von Verzweigungsstellen

Verschiebung einer Verzweigung vor einen Block:

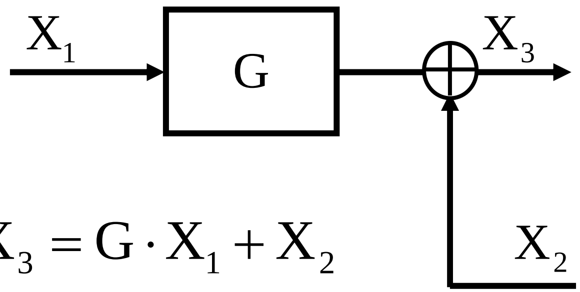


Verschiebung einer Verzweigung hinter einen Block:



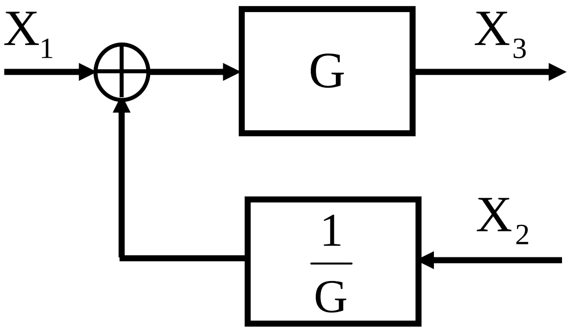
Verschiebung von Summationspunkten

Verschiebung eines Summenpunktes vor einen Block:

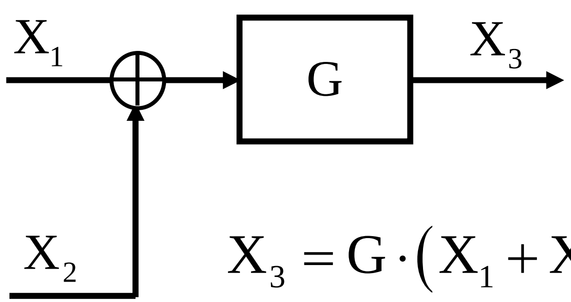


$$X_3 = G \cdot X_1 + X_2$$

=

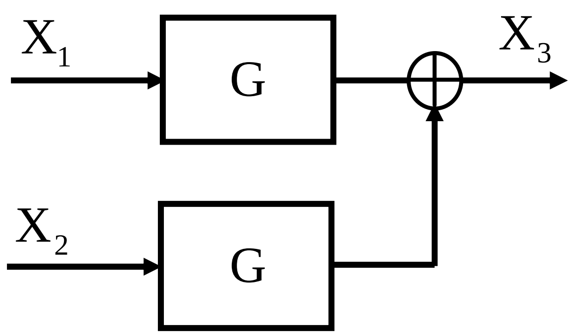


Verschiebung eines Summenpunktes hinter einen Block:



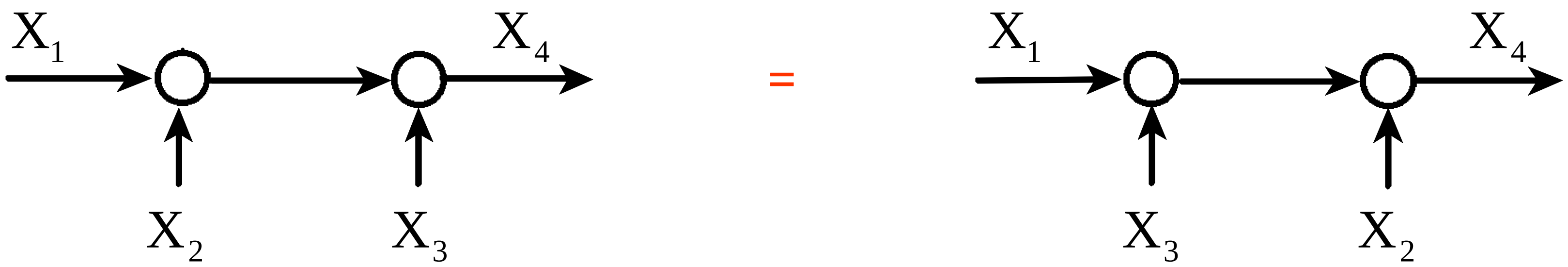
$$X_3 = G \cdot \left(X_1 + X_2 \right)$$

=



Vertauschen von Strukturelementen

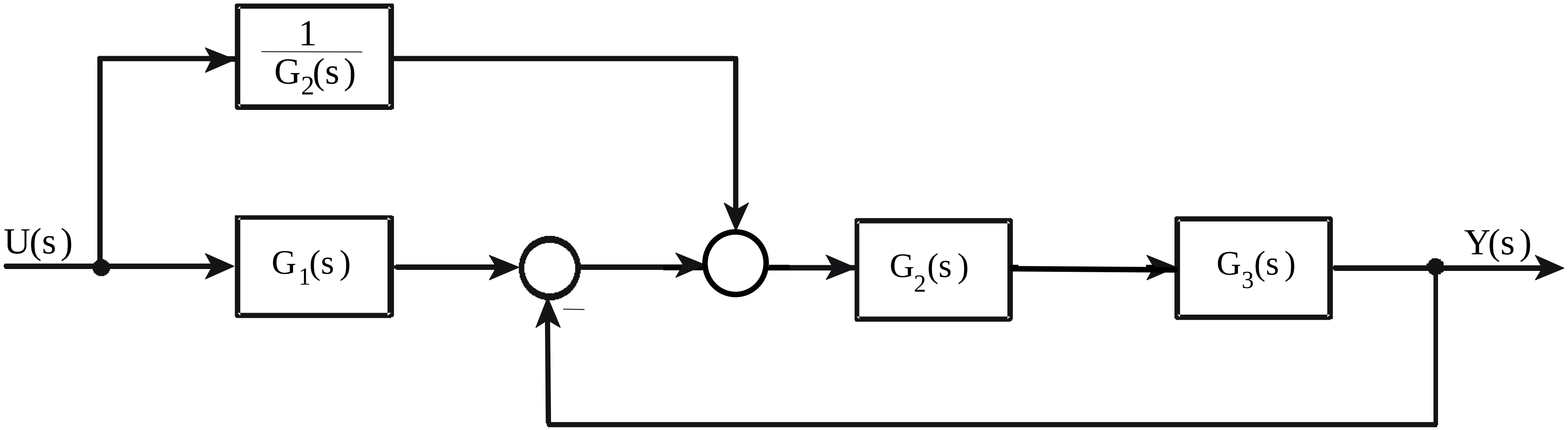
Vertauschen der Reihenfolge von Summenpunkten



Vertauschen der Reihenfolge von Systemblöcken

Fortsetzung Beispiel 2

Verschiebung des rechten Summenpunktes vor G_2:



System besteht aus der Reihenschaltung einer Parallel- und einer Kreisschaltung

$$\Rightarrow \qquad G(s) = \left[G_1(s) + \frac{1}{G_2(s)}\right] \cdot \left[\frac{G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s)}\right] = \frac{G_3(s) \cdot \left(1 + G_1(s) \cdot G_2(s)\right)}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s)}$$

Realisierung von Übertragungsfunktionen durch Teilsysteme

Die vorgestellten Methoden der Systemumformung durch Anwendung der Regeln für Übertragungsglieder erlauben es, Übertragungsfunktionen für beliebige vermaschte Systeme zu berechnen

Meistens ist jedoch genau das umgekehrte Problem zu lösen, nämlich die Synthese gegebener Übertragungsfunktionen aus Teilsystemen

Diese Zerlegung komplizierter technischer Systeme in einfach zu realisierende Teilsysteme ist eine der wesentlichen Aufgaben des Ingenieurs

Die Schwierigkeit liegt hierbei darin, die Schnittstellen zwischen den Teilsystemen geeignet festzulegen, um so die Gesamtkomplexität und Kosten eines gegebenen Systems zu minimieren

Realisierung von Systemen in Reihen- und Parallelschaltung

In Reihe geschaltete Systeme können durch das Produkt und parallel geschaltete Systeme durch die Summe der Teilübertragungsfunktionen zu einer Gesamtübertragungsfunktion zusammengefasst werden

Hieraus folgt:

Für eine Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen erfolgt die Umrechnung der Übertragungsfunktion in ihre Produktform

Soll eine Parallelschaltung realisiert werden, muss die Übertragungsfunktion in die Partialbruchform überführt werden

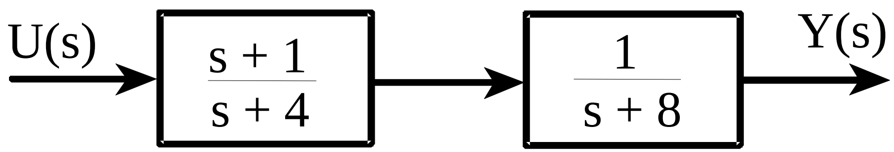
Beispiel zur Parallel- und Reihenschaltung von Teilsystemen

Gegeben sei das folgende System:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 12s + 32}$$

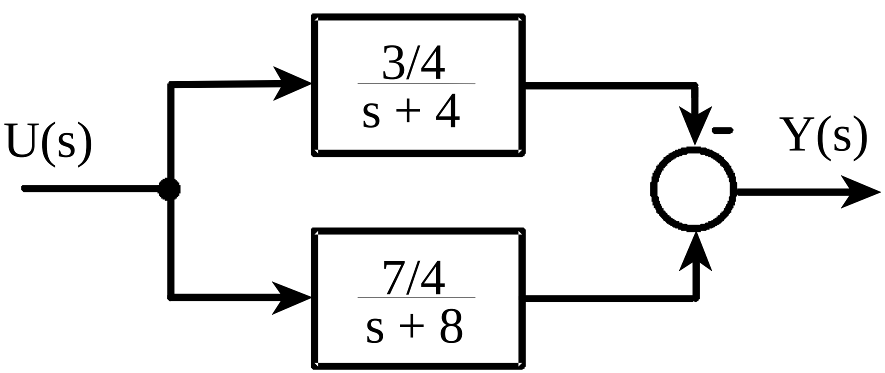
Produktform und Realisierung durch eine Reihenschaltung:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+4) \cdot (s+8)}$$



Partialbruchform und Realisierung durch eine Parallelschaltung:

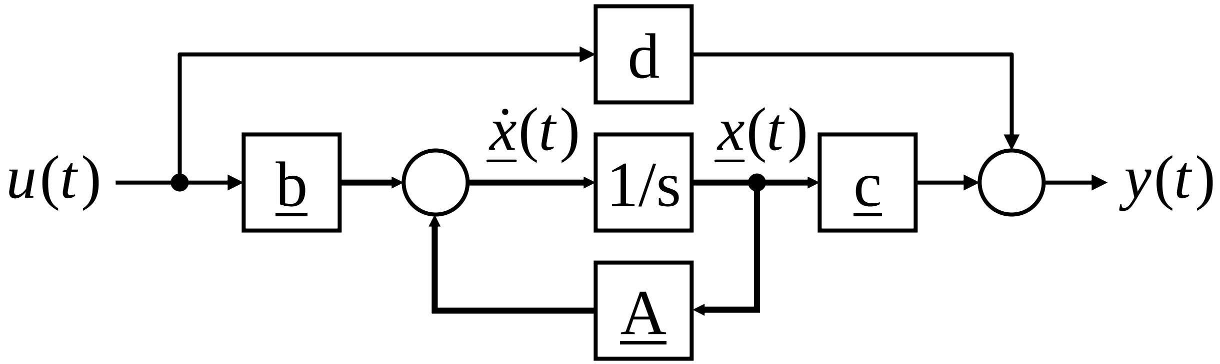
$$G(s) = \frac{-3/4}{(s+4)} + \frac{7/4}{(s+8)}$$



Darstellung der Zustandsform als Strukturbild

Auch die Zustandsform von Systemen kann aus einzelnen Elementarsystemen zusammengesetzt werden, wobei für jede Zustandsvariable $x_i(t)$ ein eigener Integrator mit $G(s) = 1/s$ benötigt wird

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \underline{c} \cdot \underline{x}(t) + d \cdot u(t)$$



Betrachtet man die fett dargestellten Pfeile als Wirkungslinien der Vektoren $\underline{x}(t)$ bzw. $\dot{\underline{x}}(t)$, so ergibt sich ein allgemeingültiges Strukturbild