Bestimmung von Systemeigenschaften aus der Übertragungsfunktion

Bisher wurden verschiedene Darstellungsformen von Systemen im Zeit- Frequenz- und Laplace-Bereich mathematisch behandelt

Neben dem Frequenzgang erhält hierbei die Systembeschreibung durch die Übertragungsfunktion G(s) besondere Bedeutung

Aus der Übertragungsfunktion können die wesentlichen System-eigenschaften durch einfache Umformungen bestimmt werden

Ausgangspunkt ist hierbei G(s) in der sogenannten Polynomform, wie sie aus der Zustandsform oder aus dem Frequenzgang folgt

Normalformen von Übertragungsfunktionen

Polynomform (a_i , b_i : reell)

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot s^i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Produktform (K: reell; s_{Zi} , s_{Ni} : komplex oder reell)

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - s_{Zi})}{\prod_{i=1}^{n} (s - s_{Ni})} = K \cdot \frac{(s - s_{Z1}) \cdot (s - s_{Z2}) \cdot \cdots \cdot (s - s_{Zm})}{(s - s_{N1}) \cdot (s - s_{N2}) \cdot \cdots \cdot (s - s_{Nn})}$$

Partialbruchform (K_0 , K_i : reell; s_{Ni} : komplex oder reell)

$$G(s) = K_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - s_{N1}} = K_0 + \frac{K_1}{s - s_{N1}} + \frac{K_2}{s - s_{N2}} + \cdots + \frac{K_n}{s - s_{Nn}}$$

Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen bestehen aus dem Quotienten zweier Polynome:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

mit: P(s): Zählerpolynom vom Grad m
Q(s): Nennerpolynom vom Grad n

Die Rechentechnik der **Partialbruchzerlegung** dient zur Aufspaltung komplizierter rationaler Funktionen in Summen von einfachen Termen

Angewendet auf Übertragungsfunktionen kann danach eine wesentlich einfachere Rücktransformation in den Zeitbereich durchgeführt werden

Falls Zähler- und Nennerpolynom von G(s) den selben Grad aufweisen, muss vorher eine sogenannte **Polynomdivision** durchgeführt werden

Polynomdivision

Ziel der Polynomdivision ist die Aufspaltung einer rationalen Funktion in die echt gebrochene Form mit Zählergrad kleiner als Nennergrad:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = K_0 + \frac{P_1(s)}{Q(s)}$$

mit: K_0 = konst. , Grad(Q) = n , Grad(P_1) = m_1

$m_1 < n$

Beispiel:

$$G(s) = \frac{3s^2 + 5s + 4}{s^2 + s + 1}$$

$$3s^2 + 5s + 4 \;:\; s^2 + s + 1 = 3 + \frac{2s+1}{s^2 + s + 1} = G(s)$$

$$\underline{3s^2 + 3s + 3}$$

$$2s + 1$$

Ansatz für eine Partialbruchzerlegung

Annahme: Q(s) habe mehrfach reelle aber nur einfach komplexe Nullstellen

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-\alpha_1)^k \cdot (s-\alpha_2)^\ell \cdot \left(s^2+ps+q\right) \cdot \;\cdots}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} G(s) = {} & \frac{A_k}{(s-\alpha_1)^k} + \frac{A_{k-1}}{(s-\alpha_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(s-\alpha_1)^2} + \frac{A_1}{(s-\alpha_1)} \\ & + \frac{B_\ell}{(s-\alpha_2)^\ell} + \frac{B_{\ell-1}}{(s-\alpha_2)^{\ell-1}} + \cdots + \frac{B_2}{(s-\alpha_2)^2} + \frac{B_1}{(s-\alpha_2)} \\ & + \frac{Cs+D}{\left(s^2+ps+q\right)} + \cdots \end{aligned}$$

Berechnung der Zählerkoeffizienten

<u>Regel</u>: Zur Berechnung der Zählerkoeffizienten werden die Partialbrüche auf ihren Hauptnenner gebracht und dann ein Vergleich der Koeffizienten mit dem Zählerpolynom P(s) durchgeführt

<u>Beispiel</u>:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$= \frac{A_1(s+1)(s+3) + A_2 s(s+3) + A_3 s(s+1)}{s(s+1)(s+3)}$$

$$= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)s^2 + (4A_1 + 3A_2 + A_3)s + 3A_1}{s(s+1)(s+3)}$$

Koeffizientenvergleich: $A_1+A_2+A_3 = 0$ $\quad 4A_1+3A_2+A_3 = 1$ $\quad 3A_1 = 2$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $A_1 = 2/3$ $\quad A_2 = -1/2$ $\quad A_3 = -1/6$

Faktorisierte V-Normalform von G(s)

Aus der Produktform folgt durch Ausklammern sämtlicher s_{Zi} und s_{Ni} sowie Einführung der neuen Konstanten T_{Zi} , T_{Nj} bzw. d_j die sogenannte **V-Normalform** der Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{V}{s^k} \cdot \frac{\left(1 + sT_{Z1}\right)^m \cdot \left(1 + sT_{Z2}\right)^n \cdot \; \cdots}{\left(1 + sT_{N1}\right)^\ell \cdot \left(1 + sT_{N2}\right)^k \cdot \; \cdots \; \cdot \left(1 + 2dT_N s + \left(T_N s\right)^2\right) \cdot \; \cdots}$$

Komplexe Polstellenpaare:

$$s_{N,j\pm} = -\frac{d}{T_N} \pm \frac{j}{T_N}\sqrt{1-d^2}$$

d : Dämpfungsgrad

$T_N > 0$: Zeitkonstante des ungedämpften Systems

Hinweis:

Quadratische Terme der Form $1+2dT_N s+\left(T_N s\right)^2$ treten immer nur bei konjugiert komplexen Pol- und Nullstellen auf (|d| < 1), da sonst eine Faktorisierung erfolgt

Pol- und Nullstellenplan von G(s)

Das dynamische Verhalten wird durch Lage und Wertigkeit der Pol- und Nullstellen in der komplexen Ebene eindeutig festgelegt

Diese können aus der Produktform von G(s) direkt abgelesen werden

Beispiel:

$$G(s) = 2 \cdot \frac{(s+2)\cdot(s+3)}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4s + 8\right)}$$

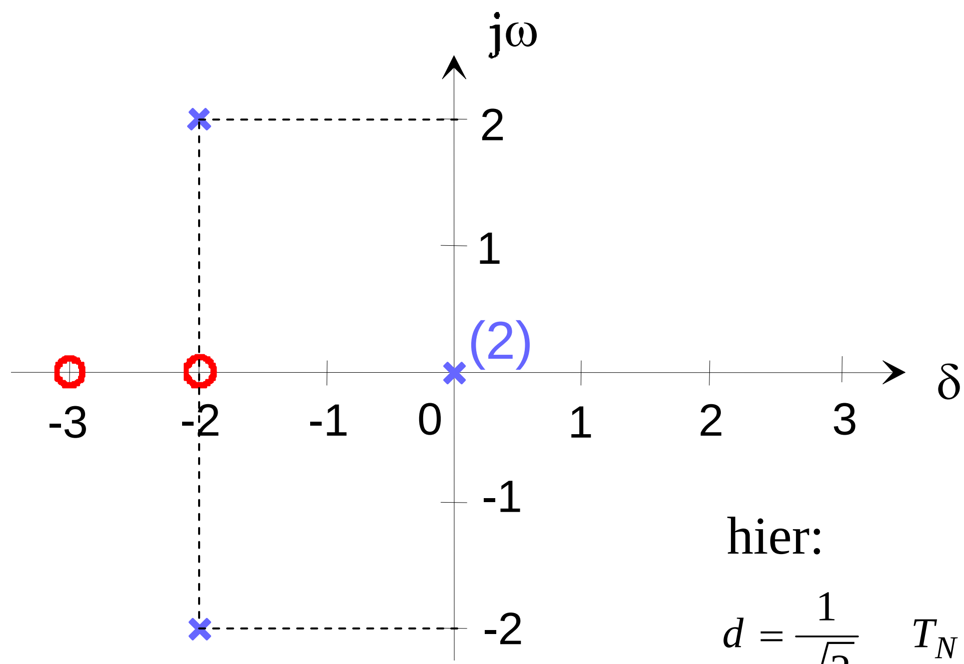
$s_{Z1} = -2$

$s_{Z2} = -3$

$s_{N1} = -2 + j2$

$s_{N2} = -2 - j2$

$s_{N3} = 0$



hier:

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad T_N = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Pol- und Nullstellen in der komplexen Ebene

Für die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems sind allgemeine Aussagen über die mögliche Lage der Pol- und Nullstellen möglich

G(s) kann (jeweils einfach oder mehrfach)...

- reelle Nullstellen aufweisen
- konjugiert komplexe Nullstellen aufweisen
- reelle Polstellen aufweisen
- konjugiert komplexe Polstellen aufweisen

Analyse der Übertragungsfunktion

Das Systemverhalten kann besonders einfach aus der V-Normalform kann ermittelt werden

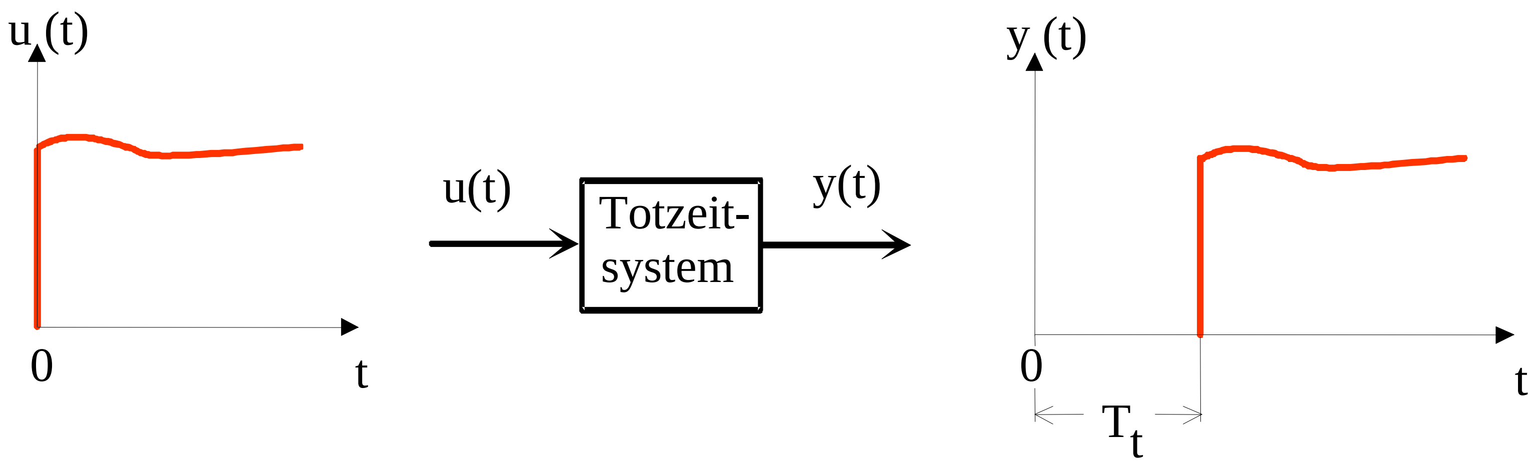
$$G(s) = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}^k} \cdot \frac{\left(1 + \mathrm{sT_{Z1}}\right)^m \cdot \left(1 + \mathrm{sT_{Z2}}\right)^n \cdot \cdots}{\left(1 + \mathrm{sT_{N1}}\right)^\ell \cdot \left(1 + \mathrm{sT_{N2}}\right)^k \cdot \cdots \left(1 + 2\mathrm{dT_N} s + \left(\mathrm{T_N} s\right)^2\right) \cdot \ \cdots} \cdot e^{-sT_t}$$

Folgende Eigenschaften sind aus G(s) bestimmbar:

- Verstärkungsfaktor
- Stationäres Verhalten des Systems
- Transientes Verhalten des Systems
- Totzeitverhalten des Systems

Totzeitsysteme

Reine Totzeitsysteme zeigen am Ausgang exakt die um T_t verschobene Eingangsfunktion



$$y(t) = u(t - T_t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = U(s) \cdot e^{-sT_t}$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = e^{-sT_t}$$

Transientes Systemverhalten und Stabilität

Bestimmung der Sprungantwort aus der Partialbruchzerlegung von G(s)

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{\mathrm{A}}{s \cdot (1 + s\mathrm{T}_{\mathrm{N1}})} + \frac{\mathrm{B}_0 + s \cdot \mathrm{B}_1}{s \cdot \left(1 + 2d\mathrm{T}_{\mathrm{N}} s + (\mathrm{T}_{\mathrm{N}} s)^2\right)} + \cdots$$

$$h(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{N1}}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-t \cdot \frac{d}{T_N}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-d^2} \cdot \frac{t}{T_N} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right)\right)\right) + \cdots$$

h(t) ist für t $\rightarrow \infty$ nur dann beschränkt, falls die e-Funktionen konvergieren

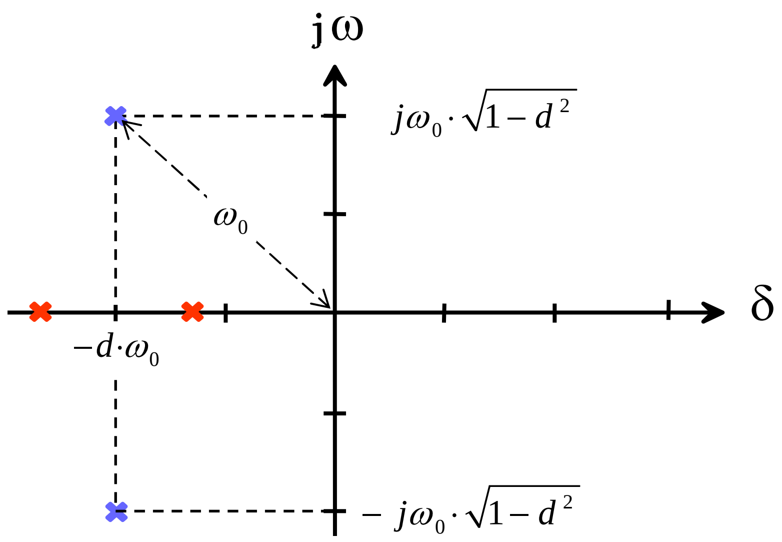
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{T_{N1}} > 0 \quad \mathit{und} \quad \frac{d}{T_N} > 0 \qquad \Rightarrow \quad s_{N1} < 0 \quad \mathit{und} \quad \mathrm{Re}\{s_{N\pm}\} < 0$$

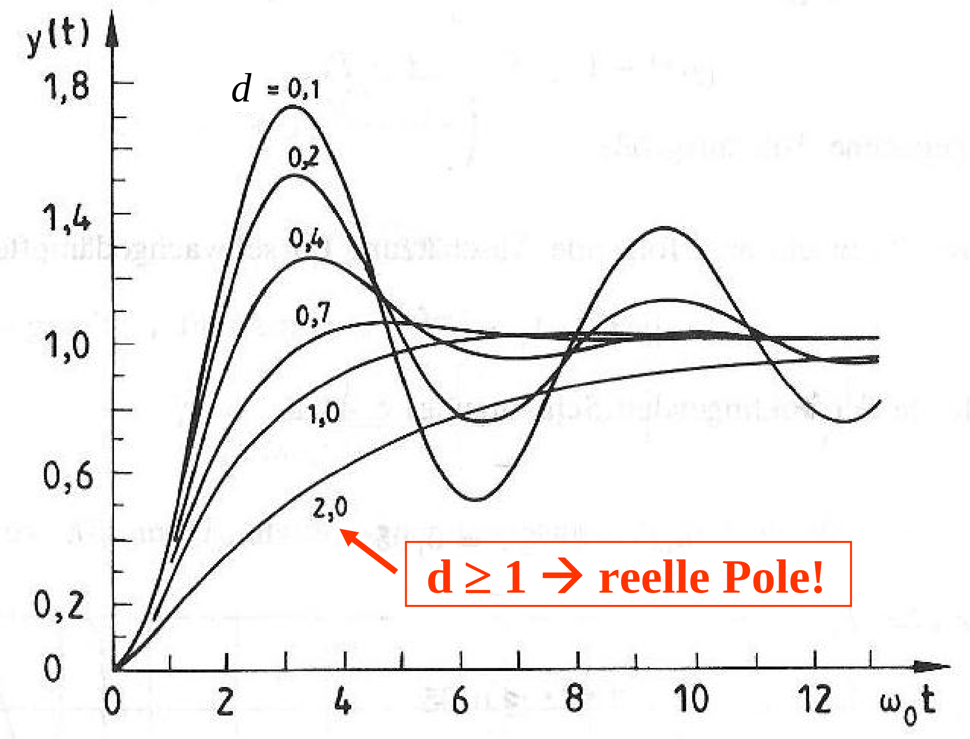
Allgemein gilt für die Stabilität eines Systems die Bedingung, dass sämtliche Polstellen von G(s) negative Realteile aufweisen müssen

Polstellenplan und Sprungantwort eines Systems 2. Ordnung

$$\frac{\omega_0^{\,2}}{s\cdot\left(\omega_0^{\,2} + 2d\omega_0 s + s^2\right)} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad 1-\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\cdot e^{-d\cdot\omega_0\cdot t}\cdot\sin\left(\sqrt{1-d^2}\cdot\omega_0 t+\arctan\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right)\right)$$

Polstellenplan ($\omega_0 = 1/T_N$):

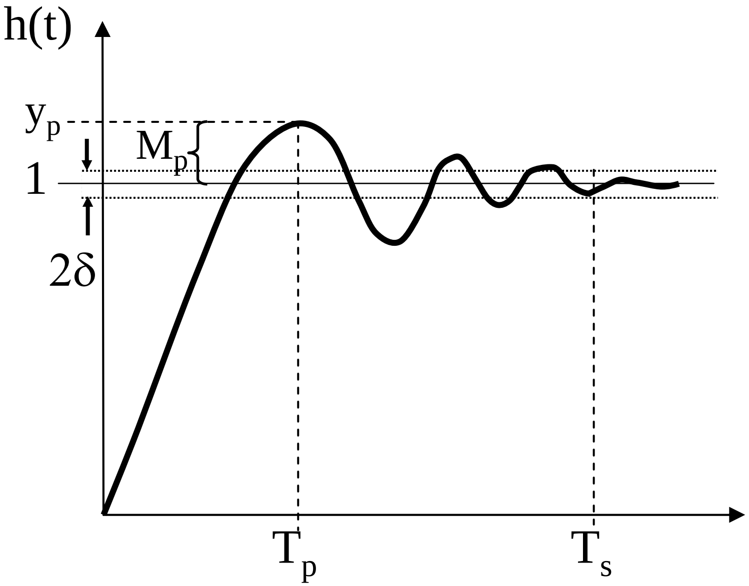




Charakteristische Größen für ein System 2. Ordnung

Die Sprungantwort eines Systems mit einem komplexen Polstellenpaar wird durch drei charakteristische Größen T_s, T_p und M_p abhängig von T_N und d beschrieben

$$H(s) = \frac{1}{s \cdot \left(1 + 2dT_N s + (T_N s)^2\right)}$$



Einstellzeit (Settling Time):

$$T_s \approx T_N \cdot \frac{3}{d}$$

Überschwingzeit (Peak Time):

$$T_p = T_N \cdot \frac{\pi}{\sqrt{1-d^2}}$$

Max. Überschwingung (max. Overshoot):

$$M_p = y_p - 1 = e^{-\frac{\pi \cdot d}{\sqrt{1-d^2}}}$$

Dominante Polpaare

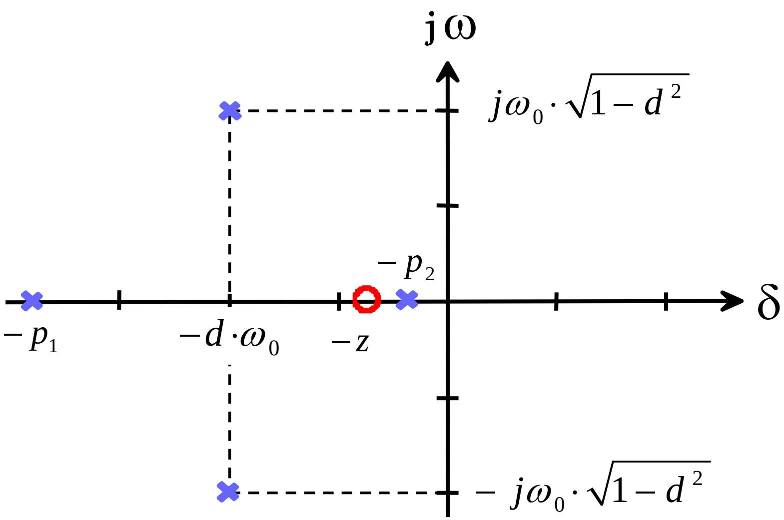
Betrachtung von Y(s) mit einem Polpaar, sowie einer zusätzlichen Pol- und Nullstelle

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{(s+z)}{s \cdot \left(\omega_0{}^2 + 2\mathrm{d}\omega_0 s + s^2\right)(s+p_i)} = \frac{A_0}{s} + \frac{B_1 s + B_0}{\omega_0{}^2 + 2\mathrm{d}\omega_0 s + s^2} + \frac{C_0}{s+p_i}$$

$$h(t) = A_0 + K \cdot e^{-d \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin\left(\tilde{K} \cdot \omega_0 t + \alpha\right) + C_0 \cdot e^{-p_i \cdot t}$$

mit:

$$C_0 = \frac{(z - p_i)}{(-p_i) \cdot \left(\omega_0{}^2 - 2\mathrm{d}\omega_0 p_i + p_i{}^2\right)}$$



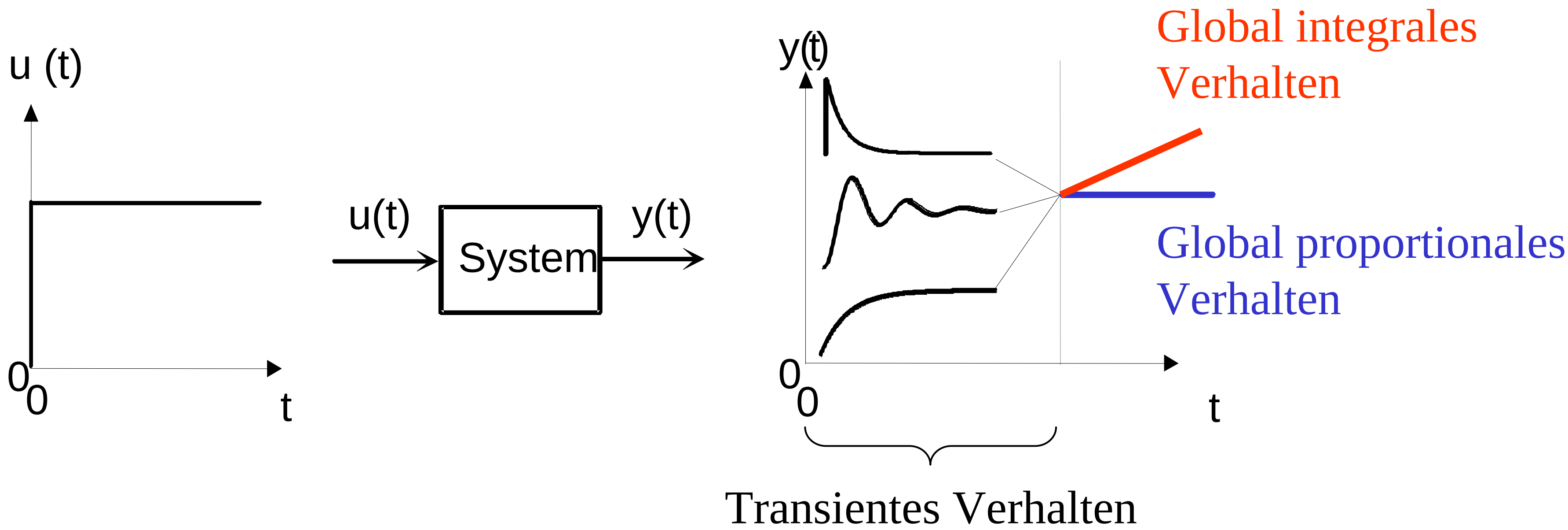
Der Einfluss der Polstelle bei $s = -p_i$ darf vernachlässigt werden, falls entweder p_i groß gegen $\mathrm{d} \cdot \omega_0$ ist oder C_0 sehr klein

Allgemein wird ein Polpaar als dominant bezeichnet, falls alle anderen Polstellen entweder weit links von dem Polpaar oder in der Nähe von Nullstellen liegen

Stationäres Systemverhalten

Das stationäre Verhalten gibt an, wie ein System auf eine gegebene Eingangsfunktion für den Grenzfall $t \to \infty$ reagiert

Als Testfunktion wird hierbei meistens der Einheitssprung verwendet

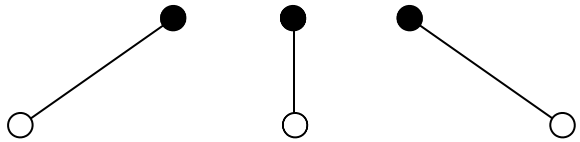


Bestimmung des stationären Verhaltens

Nach Abklingen des transienten Verhaltens wird das Globalverhalten nur durch den Term V/s^k bestimmt

Für die Laplace-Transformierte der Sprungantwort folgt hieraus:

$$\tilde{Y}(s) = \tilde{H}(s) = \frac{1}{s} \cdot \tilde{G}(s) = \frac{V}{s^{k+1}}$$



k = 0 k = 1 k = 2

$\tilde{h}(t) = V$ $\tilde{h}(t) = V \cdot t$ $\tilde{h}(t) = V \cdot t^2$

Global proportional Global integral