

Technische Fachhochschule Berlin
Fachbereich VI (Informatik und Medien)

Manfred Ottens

GRUNDLAGEN DER SYSTEMTHEORIE

Skript zur Lehrveranstaltung

Berlin, Sommersemester 2008

Vorwort

Die Systemtheorie ist eine Basiswissenschaft , der es gelingt, viele technische Einzelerscheinungen durch allgemeingültige Grundkonzepte zu beschreiben.

Für Ingenieure hat die Betrachtung von Anlagen, Geräten und Baugruppen unter systemtheoretischen Gesichtspunkten den Sinn, eine möglichst große Klasse solcher Systeme mit weitgehend einheitlichen Methoden analysieren und beschreiben zu können. Einerseits sollen dadurch die vielgestaltigen Realisierungsformen technischer Systeme durch Erkennen des Wesentlichen begreif- und überschaubar gemacht werden, andererseits soll die Systemtheorie auch als Handwerkszeug dienen, zum Beispiel

- zur Simulation technischer Wirkungsanordnungen auf Digitalrechnern,
- zur Signalbeeinflussung, z.B. durch digitale Filter,
- zur Systembeeinflussung (Steuerungs- und Regelungstechnik) und
- zum zielsicheren Entwurf analoger elektronischer Schaltungen.

Eines der wichtigsten Grundkonzepte der Systemtheorie ist der Begriff des Übertragungssystems und seine Beschreibung durch sogenannte mathematische Modelle. Das vorliegende Skript hat den Anspruch, die dazu notwendigerweise abstrakten Methoden und Verfahren praxisorientiert und mit einer gewissen Geschlossenheit zu vermitteln. Dies findet seien Ausdruck darin, daß überall dort, wo es möglich ist, ein Bezug zu praktischen Anwendungen hergestellt wird. Bei der Ableitung von Zusammenhängen wird großer Wert auf Anschaulichkeit gelegt, so daß zugunsten eines besseren Verständnisses an einigen Stellen auf mathematische Exaktheit verzichtet wird. Um den gelernten Stoff ingenieurmäßig, d.h. mit angemessenem Aufwand praktisch nutzen zu können, werden auch Ansätze grundlegender numerischer Methoden, z.B. zur Lösung von Differentialgleichungs-Systemen, angesprochen. In den Übungen zur Vorlesung "Systemtheorie" wird das Programmsystem Matlab konsequent eingesetzt.

Die Stoffinhalte wurden so gewählt, daß ohne Heranziehung von weiterer Literatur die grundlegenden Methoden zur Beschreibung und Analyse linearer kontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme erlernt werden können.

Berlin, im August 2005

Inhaltsverzeichnis

- 1. Grundlagen der Systemtheorie linearer, kontinuierlicher Übertragungssysteme**
 - 1.1 Der Begriff des Übertragungssystems
 - 1.1.1 Mathematische Modelle von Übertragungssystemen
 - 1.1.2 Klassifizierung von Übertragungssystemen
 - 1.1.3 Systemeigenschaften kontinuierlicher, linearer, zeitinvarianter Eingrößensysteme mit konzentrierten Parametern
 - 1.1.3.1 Statisches und dynamisches Verhalten
 - 1.1.3.2 Das Globalverhalten von Übertragungssystemen
 - 1.1.3.3 Stabile und instabile Systeme
 - 1.2 Mathematische Modellbildung von Übertragungssystemen
 - 1.2.1 Systembeschreibung im Zeitbereich
 - 1.2.1.1 Theoretische Modellbildung
 - 1.2.1.2 Das mathematische Zustandsmodell
 - 1.2.1.3 Die Linearisierung nichtlinearer Systemmodelle
 - 1.2.1.4 Systemantworten mathematischer Zustandsmodelle
 - 1.2.2 Systembeschreibung im Laplace-Bereich
 - 1.2.2.1 Die Laplace-Transformation
 - 1.2.2.2 Die Übertragungsfunktion
 - 1.2.3 Nachtrag zur Systembeschreibung im Zeitbereich
 - 1.2.3.1 Analytische Berechnung von Systemantworten
 - 1.2.4 Praktische Bezüge zwischen Übertragungsfunktion und Übertragungssystem
 - 1.2.5 Systembeschreibung im Frequenzbereich
 - 1.2.5.1 Der Frequenzgang
 - 1.2.5.2 Das Bodediagramm des Frequenzganges
 - 1.2.6 Gekoppelte Übertragungssysteme
 - 1.2.7 Eine Übersicht über Modellierungsformen von Übertragungssystemen und deren Umrechnung
 - 1.2.7.1 Berechnung von Zustandsmodellen aus gegebenen Übertragungsfunktionen
 - 1.2.7.2 Grafische Analyse von Bodediagrammen
 - 1.2.7.3 Theoretische Modellbildung nach der symbolischen $j\omega$ -Methode
 - 1.3 Stabilität von Übertragungssystemen
 - 1.4 Eine Übersicht über die Beschreibungsformen der wichtigsten Übertragungsglieder

2. Grundlagen der Systemtheorie linearer, zeitdiskreter Übertragungssysteme

- 2.1 Kontinuierliche und zeitdiskrete Systeme
- 2.2 Zeitdiskrete Systeme mit kontinuierlichen Eingangssignalen
- 2.3 Kontinuierliche Systeme mit zeitdiskreten Eingangssignalen
- 2.4 Die z-Transformation
- 2.5 Mathematische Modelle zeitdiskreter Systeme
 - 2.5.1 Beschreibung zeitdiskreter Systeme im z-Bereich
 - 2.5.1.1 Eigenschaften der z-Übertragungsfunktion
 - 2.5.1.2 Berechnung der z-Übertragungsfunktion kontinuierlicher Systeme
 - 2.5.1.3 Andere Diskretisierungs-Transformationen
 - 2.5.2 Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich
 - 2.5.2.1 Strukturbilder zeitdiskreter Systeme
 - 2.5.3 Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich
- 2.6 Stabilität zeitdiskreter Systeme
- 2.7 Anwendungen der zeitdiskreten Systemtheorie

Literaturverzeichnis

Anhang

A1 Ausgewählte Kapitel zur Systemtheorie

- A1.1 Strukturbilder von Zustandsmodellen
- A1.2 Berechnung von Übertragungsfunktionen aus Zustandsmodellen
- A1.3 Kataloggestützte experimentelle Modellbildung
- A1.4 Berücksichtigung von Einheiten in Zustandsmodellen

A2 Grundlagen der Matrizenrechnung und linearer Gleichungssysteme

1 Grundlagen der Systemtheorie linearer kontinuierlicher Übertragungssysteme

1.1 Der Begriff des Übertragungssystems

Trotz der Vielfalt technischer, wirtschaftlicher und biologischer Wirkungsabläufe sind die grundsätzlichen Zusammenhänge ihrer Funktion weitgehend identisch. In allen Wirkungsabläufen werden in einer materiellen Umgebung Signale in Form von Energie, Masse oder Information weitergeleitet oder in irgendeiner Form zielgerecht beeinflußt. Die erwähnte materielle Umgebung wollen wir als Übertragungssystem oder auch als System, Übertragungsglied oder dynamisches System bezeichnen. Wir beschränken uns bei unseren Betrachtungen auf technische Systeme und definieren den Begriff des Übertragungssystems wie folgt :

Ein Übertragungssystem ist eine Funktionseinheit mit mindestens einem Signaleingang und mindestens einem Signalausgang

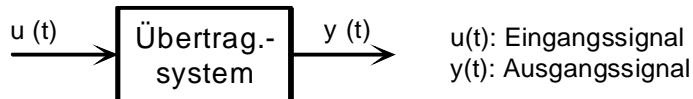


Bild 1.1.1 Symbolisierte Darstellung eines Übertragungssystems.

und einer eindeutigen Signalflußrichtung, die durch die Pfeile in der Darstellung nach Bild 1.1.1 beschrieben wird.

Übertragungssysteme mit einem Eingang und einem Ausgang werden auch als SISO–Systeme (single input – single output) bezeichnet. Es existieren auch Systeme mit mehreren Eingängen und mehreren Ausgängen

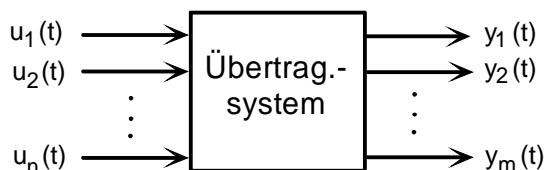


Bild 1.1.2 Ein Mehrgrößensystem mit n Eingängen und m Ausgängen

Solche Systeme werden als Mehrgrößen– oder MIMO–Systeme (multiple input – multiple output) bezeichnet.

1.1.1 Mathematische Modelle von Übertragungssystemen

Um unsere eingangs gemachte Behauptung beweisen zu können, daß sich die grundlegenden Zusammenhänge auch bei verschiedensten Übertragungssystemen weitgehend einheitlich beschreiben lassen, muß das Wirkungsverhalten der Systeme zunächst mit einheitlichen Methoden beschrieben werden. An dieser Stelle hat sich die sog. mathematische Modellierung des Übertragungssystems bewährt. Man kann zeigen (und später machen wir das auch), daß man das Verhalten eines Systems auf Grund physikalischer und anderer Gesetzmäßigkeiten oder durch Messungen analysieren kann. Formuliert man die dadurch gewonnenen Erkenntnisse durch mathematische Formeln, erhält man eine beliebig genaue Beschreibung des Wirkungsverhaltens des Übertragungssystems. Wir nennen diese Beschreibung des Übertragungssystems dann sein mathematisches Modell.

Vergleicht man solche mathematischen Modelle verschiedener Übertragungssysteme, erkennt man, daß sie häufig eine identische Struktur haben, sich also zum Teil einheitlich beschreiben lassen. Auch ohne Kenntnis der mathematischen Modellierungsverfahren kann man an folgenden anschaulichen Beispielen erkennen,

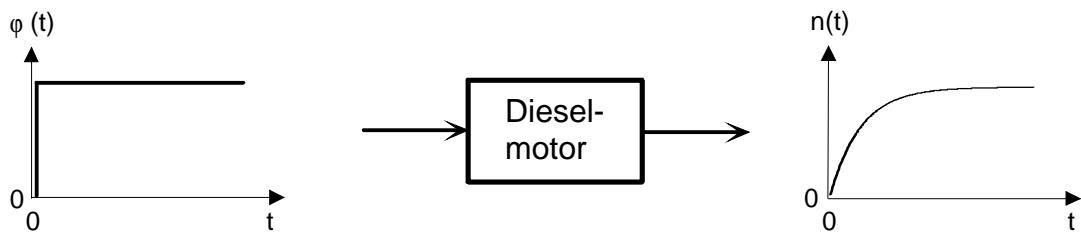


Bild 1.1.3a Hochlaufverhalten der Drehzahl $n(t)$ eines Dieselmotors bei sprungförmiger Erhöhung des Gaspedalwinkels $\varphi(t)$

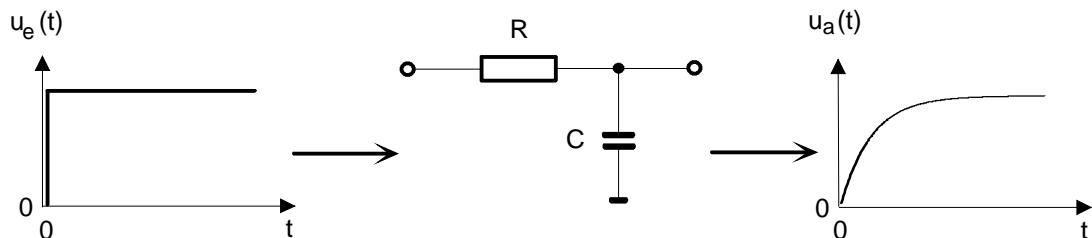


Bild 1.1.3b Ausgangsspannung $u_a(t)$ eines RC-Gliedes bei sprungförmiger Eingangsspannung $u_e(t)$

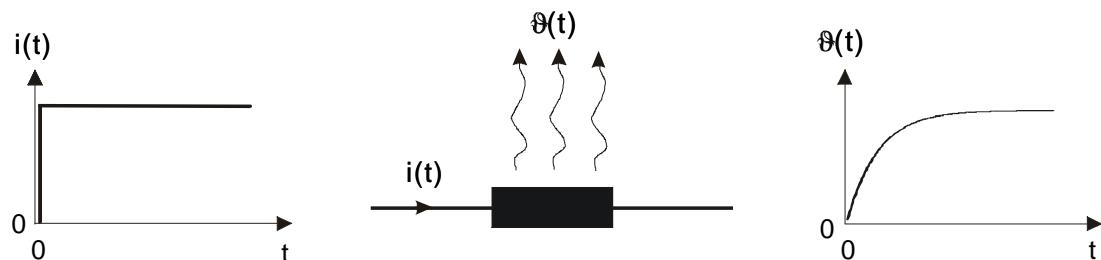


Bild 1.1.3c Anstieg der Temperatur $\theta(t)$ eines stromdurchflossenen Widerstandes bei sprungförmiger Erhöhung des Stromes $i(t)$

daß das Wirkungsverhalten verschiedener Übertragungssysteme sehr ähnlich sein kann. Trotz völlig verschiedener technischer Systeme reagieren die Ausgangssignale bei einer einheitlichen sprungförmigen Eingangserregung mit gleichförmigen Signalverläufen. Um komplizierte technische Wirkungsmechanismen begreifen und damit auch beeinflussen zu können, ist es daher sinnvoll, sich nicht mit technischen Geräten, sondern mit ihren gemeinsamen Systembeschreibungen auseinanderzusetzen. Dies muß zwangsläufig auf einer wesentlich abstrakteren Ebene geschehen als die Beschäftigung mit Gerätetechnik, nämlich auf der Ebene mathematischer Modelle.

Bevor wir uns mit den Methoden der mathematischen Modellierung im Einzelnen auseinandersetzen, wollen wir im nächsten Kapitel – zunächst weitgehend anschaulich – eine erste Klassifizierung von Übertragungssystemtypen vornehmen.

1.1.2 Klassifizierung von Übertragungssystemen

Technische Übertragungssysteme lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren, von denen wir die wichtigsten kurz betrachten wollen. Eine solche Klassifikation ist sinnvoll, weil sie den Systembegriff etwas deutlicher herausstellt und Konsequenzen auf die anzuwendenden Methoden zur Modellbildung aufzeigt.

- **Dynamische und statische Systeme**

Hängt der Wert des Ausgangssignals $y(t)$ eines Übertragungssystems zu jedem Zeitpunkt t nur vom aktuellen Wert des Eingangssignals $u(t)$ ab, also nicht von vergangenen Werten $u(t)$, so nennt das System ein statisches (oder gedächtnisloses) System. Hängt dagegen das Ausgangssignal zum Zeitpunkt t_1 von $u(t)$ mit $t < t_1$ ab, nennt man es ein dynamisches System.

Ein statisches System ist z.B. ein reiner Spannungsteiler aus Widerständen. Ein RC-Glied, wie es in Bild 1.1.3a dargestellt ist, ist dagegen ein dynamisches System, weil die Form des Ausgangssignals in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ von den Werten des Eingangssignals vor t_1 abhängig ist. Dieses "Gedächtnis" des Systems hat seine Ursache darin, daß das System einen Ladungsspeicher in Form des Kondensators enthält. Alle dynamischen Systeme enthalten Masse- oder Energiespeicher.

Statische Systeme lassen sich durch algebraische, dynamische Systeme durch Differentialgleichungen beschreiben. Wir werden uns im folgenden Skript sehr eingehend mit dynamischen Systemen auseinandersetzen.

- **Eingrößen– und Mehrgrößensysteme**

Dieses Klassifikationsmerkmal wurde schon in Kap. 1.1 erläutert. Es soll an dieser Stelle nur noch hervorgehoben werden, daß das Problem der Mehrgrößensysteme bzw. ihrer Beeinflussung darin besteht, daß bei einem Mehrgrößensystem nach Bild 1.1.2 die Eingangsgröße $u_1(t)$ nicht nur die Ausgangsgröße $y_1(t)$ beeinflussen kann, sondern mehrere Ausgangsgrößen. Diese Tatsache kann für alle Eingangsgrößen gelten. Das heißt, es besteht eine starke innere Verkopplung zwischen den Eingangs– und Ausgangsgrößen. Will man mittels Regelungstechnik die Ausgangsgrößen gezielt beeinflussen, muß man durch sogenannte Entkopplungsnetzwerke eindeutige Beeinflussungsbeziehungen zwischen den Ein– und Ausgängen herstellen. In /4/ wird der Entwurf solcher Entkopplungsstrukturen eingehend beschrieben. Wir werden uns in diesem Skript nur mit Eingrößensystemen beschäftigen.

- **Systeme mit konzentrierten und verteilten Parametern**

Betrachtet man ein elektrisches Signal auf einer etwas längeren Leitung, mißt man praktisch an jedem Punkt der Leitung die gleiche Spannung. Genau genommen liegt aber zwischen jedem Punkt der Leitung ein Widerstand, an dem Spannung abfällt. Die gemessene Spannung ist also ortsabhängig. Normalerweise spricht auch von einer Raumtemperatur, wenn man einen geheizten Raum betrachtet. Real liegt aber auch hier eine von Orte abhängige Temperaturverteilung vor, die auch noch von der Zeit abhängig ist, wenn man die Heiztemperatur ändert. Wirkungsanordnungen mit ortsabhängigen Signalen nennt man Systeme mit verteilten Parametern. Liegt keine Ortsabhängigkeit vor, nennt man sie Systeme mit konzentrierten Parametern. Häufig ist die Systembeschreibung mit konzentrierten Parametern, wie an den Beispielen sieht, eine Approximation der Realität.

Dynamische Systeme mit verteilten Parametern werden durch partielle Differentialgleichungen (PDG) , Systeme mit konzentrierten Parametern durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben.

Eine praktische Anwendung von PDG auf Systeme mit verteilten Parametern ist die *Finite Element Methode* (FEM), mit der z.B. Karosserieverformungen bei simulierten Crash-Tests in der Automobilindustrie berechnet werden können.

Wir werden uns in diesem Skript ausschließlich mit Systemen mit konzentrierten Parametern auseinandersetzen

- **Lineare und nichtlineare Systeme**

Bezeichnet man wieder die Systemeingangsgröße mit $u(t)$ und die Ausgangsgröße mit $y(t)$ und hat das betrachtete Übertragungssystem die (zunächst abstrakte) Übertragungseigenschaft Φ

$$y(t) = \Phi\{u(t)\}, \quad (1.1.1)$$

dann wird das Übertragungssystem als linear bezeichnet, wenn es das *Überlagerungsprinzip* zweier Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$

$$\Phi\{u_1(t)\} + \Phi\{u_2(t)\} = \Phi\{u_1(t) + u_2(t)\} = y(t) \quad (1.1.2)$$

und das Verstärkungsprinzip mit einem konstanten Faktor k

$$\Phi\{k \cdot u(t)\} = k \cdot \Phi\{u(t)\} = y(t) \quad (1.1.3)$$

erfüllt. Sonst ist das System nichtlinear. Wir wollen uns die Linearitätsprüfung an zwei Beispielen deutlich machen:

Beispiel 1.1.1: Ist das Übertragungssystem, welches das Quadrat seiner Eingangsgröße

$$y(t) = \Phi\{u(t)\} = u^2(t)$$

als Ausgangsgröße ausgibt, linear?

Wir Prüfen zunächst das Überlagerungsprinzip. Aus (1.1.2) folgt

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) \stackrel{?}{=} (u_1(t) + u_2(t))^2$$

Berechnet man diesen Ausdruck

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) \neq u_1^2(t) + 2 \cdot u_1(t) \cdot u_2(t) + u_2^2(t)$$

erkennt man, daß das Überlagerungsprinzip nicht erfüllt ist. Das System ist also nichtlinear. Obwohl das Verstärkungsprinzip nicht mehr geprüft werden müßte, wollen wir es dennoch formal tun:

$$(k \cdot u(t))^2 \stackrel{?}{=} k \cdot u^2(t) \Rightarrow k^2 \cdot u^2(t) \neq k \cdot u^2(t).$$

Auch das Verstärkungsprinzip wird nicht erfüllt, was die Nichtlinearität noch einmal bestätigt.

Beispiel 1.1.2: Ist das Übertragungsglied, welches das Integral seiner Eingangsgröße als Ausgangsgröße

$$y(t) = \Phi\{u(t)\} = \int u(t) dt$$

ausgibt, linear?

Prüfung des Überlagerungsprinzips:

$$\int u_1(t) dt + \int u_2(t) dt \stackrel{?}{=} \int (u_1(t) + u_2(t)) dt.$$

Aus der Mathematik wissen wir, dass das Integral über einer Summe von Funktionen gleich der Summe der Integrale über den Summanden ist. Also ist das Überlagerungsprinzip erfüllt.

Prüfung des Verstärkungsprinzips:

$$\int k \cdot u(t) dt \stackrel{?}{=} k \cdot \int u(t) dt.$$

Da man einen konstanten Faktor vor das Integral ziehen kann, ist auch das Verstärkungsprinzip erfüllt und damit das integrale Übertragungsglied linear.

Da nur für lineare Systeme eine geschlossene Theorie für fast alle Problemstellungen der Systemanalyse und Beeinflussung existiert, reale Übertragungssysteme aber meist nichtlinear sind, ist man bestrebt nichtlineare Systeme durch lineare zu approximieren, um dann wieder die linearen Ansätze zur Systemanalyse und zur Systembeeinflussung auf sie anwenden zu können. Wir werden in Kapitel 1.2 Verfahren zur Linearisierung nichtlinearer Übertragungssysteme kennenlernen. Im Rahmen dieser Einführung beschäftigen wir uns sonst nur mit linearen Übertragungsgliedern. Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme befindet sich in /2/ und /6/.

- **Zeitvariable und zeitinvariante Systeme**

In den mathematischen Modellen von Übertragungssystemen, z.B. nach Bild 1.3b, treten zeitveränderliche Größen (z.B. das Eingangssignal $u_e(t)$, die Ausgangsspannung $u_a(t)$) und feste Konstanten R und C , die wir später Systemparameter nennen, auf. Nun gibt es aber auch Systeme deren Systemparameter sich mit der Zeit ändern. So nimmt z.B. die Masse einer fliegenden Rakete wegen des Treibstoffverbrauchs ständig ab. Solche Systeme nennt man zeitvariabel, im Gegensatz zu den Systemen mit konstanten

Systemparametern, die wir als zeitinvariant bezeichnen. Im Rahmen dieser Einführung werden wir uns ausschließlich mit zeitinvarianten Systemen beschäftigen. Es sei nur darauf hingewiesen, daß eine Systembeeinflussung (z.B. Regelung) zeitvariable Systeme sogenannte adaptive Regler erfordert. Ausführungen über adaptive Regelungen befinden sich in /3/, /6/ und /7/.

- **Systeme mit kontinuierlichen und zeitdiskreten Signalen**

Existieren das Eingangssignal und das Ausgangssignal eines Übertragungssystems zu jedem beliebigen Zeitpunkt und können die Signalamplituden – in gewissen Grenzen – beliebige Werte annehmen, spricht man von einem Übertragungssystem mit kontinuierlicher ("analoger") Signalverarbeitung oder kurz ausgedrückt von einem kontinuierlichen System.

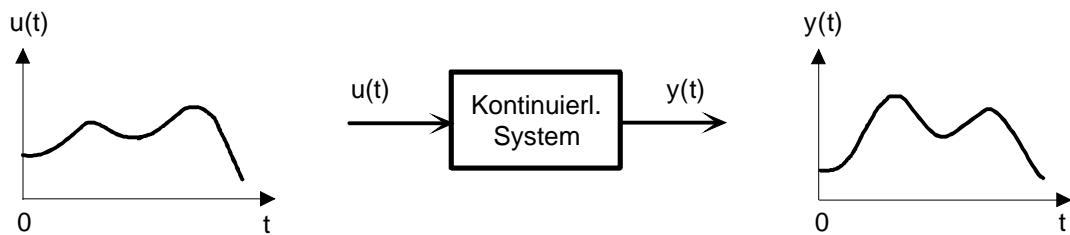


Bild 1.1.4 Ein Übertragungssystem mit kontinuierlicher Signalverarbeitung

Wir werden uns im Kapitel 1 ausschließlich mit kontinuierlichen Systemen auseinandersetzen.

Weil wir *Digitalrechner* zur Systemanalyse und Systembeeinflussung einsetzen wollen, müssen wir uns auch mit Systemen auseinandersetzen, die Signale nur zu einzelnen (diskreten) Zeitpunkten verarbeiten können, wie es bei der Signalverarbeitung mit einem Digitalrechner der Fall ist. Man nennt ein solches Übertragungssystem mit zeitdiskreter Signalverarbeitung kurz ein zeitdiskretes System oder Abtastsystem.

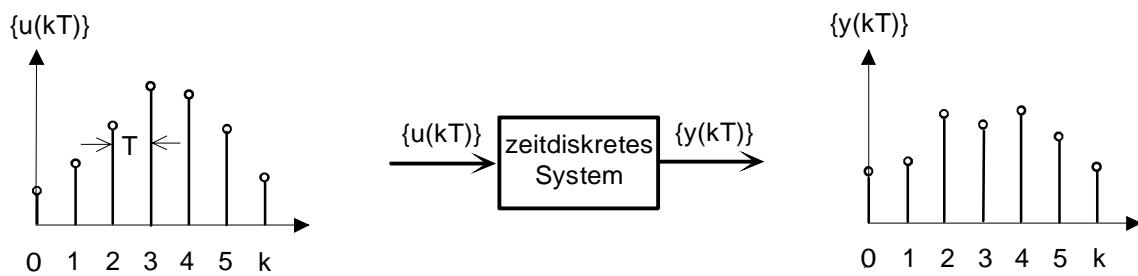


Bild 1.1.5 Ein Übertragungssystem mit zeitdiskreter Signalverarbeitung (Abtastsystem)

Mit diesen Systemen werden wir uns ausführlich in Kapitel 2 beschäftigen.

Systeme mit stochastischen ("regellosen") Signalen, deren Zusammenhänge nur mit statistischen Methoden beschrieben werden können, sog. stochastische Systeme, werden wir im Rahmen dieser Einführung in die Systemtheorie nicht betrachten.

1.1.3 Systemeigenschaften kontinuierlicher, linearer, zeitinvarianter Eingrößensysteme mit konzentrierten Parametern

Nachdem wir herausgearbeitet haben, mit welchem System wir uns im folgenden beschäftigen werden, nämlich mit den in der Überschrift genannten, wollen wir uns mit deren spezifischen Eigenschaften auseinandersetzen.

1.1.3.1 Statisches und dynamisches Verhalten

Bringt man ein Übertragungssystem von einem Betriebszustand in einen anderen, z.B. durch sprungförmige Senkung oder Erhöhung des Eingangssignals, geht auch das Ausgangssignal von seinem ursprünglichen Wert auf einen anderen Wert über. Im zeitlichen Verhalten des Ausgangssignals zwischen seinem Startwert und seinem neuen Endwert drückt sich das weiter vorn etwas abstrakt erklärte dynamische Verhalten des Übertragungssystems aus. Als Beispiel betrachten wir das Übertragungssystem nach Bild 1.1.6, eine Wirkungsanordnung zur Wassererhitzung mittels Gasfeuerung. Als Eingangsgröße wird der Ventilöffnungs–Querschnitt des Heizgases, als Ausgangsgröße die Wassertemperatur betrachtet.

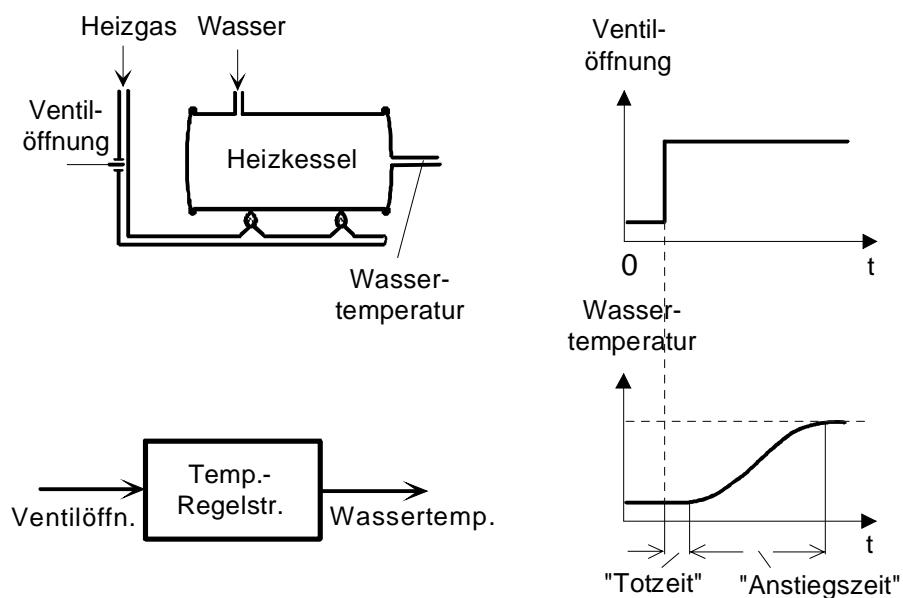


Bild 1.1.6 Dynamisches Verhalten einer Wirkungsanordnung zur Wassererhitzung

Der das dynamische Verhalten widerspiegelnde Verlauf der Ausgangsgröße könnte durch die Abschnitte "Totzeit" (weil in diesen Zeitbereich das System nicht auf das Eingangssignal reagiert, also quasi "tot" ist) und eine "Anstiegszeit", die das Signal braucht, um auf einen neuen Endwert zu gelangen, charakterisiert werden. Weiter hinten werden wir genauere Definitionen für diese Zeitabschnitte einführen.

Variiert man das Eingangssignal sprungförmig über den gesamten Arbeitsbereich des Systems (z.B. aufeinanderfolgende Sprünge der Ventilöffnung von 0 auf 5 cm^2 , von 5 auf 10 cm^2 , von 10 auf 15 cm^2 u.s.w., bis zur völligen Ventilöffnung von 20 cm^2), erhält man als Systemausgangssignal den Verlauf der Wassertemperatur nach Bild 1.1.7. Wenn man bei der Messung darauf achtet, daß die dynamischen Einschwingvorgänge also "Totzeit" und "Anstiegszeit" abgewartet und nach jeder Sprungaufschaltung der dazugehörige stationäre Endwert der Ausgangsgröße (Wasser-Temperatur) erreicht wird, kann man dieser Messung das sogenannte statische oder stationäre Verhalten des Systems entnehmen.

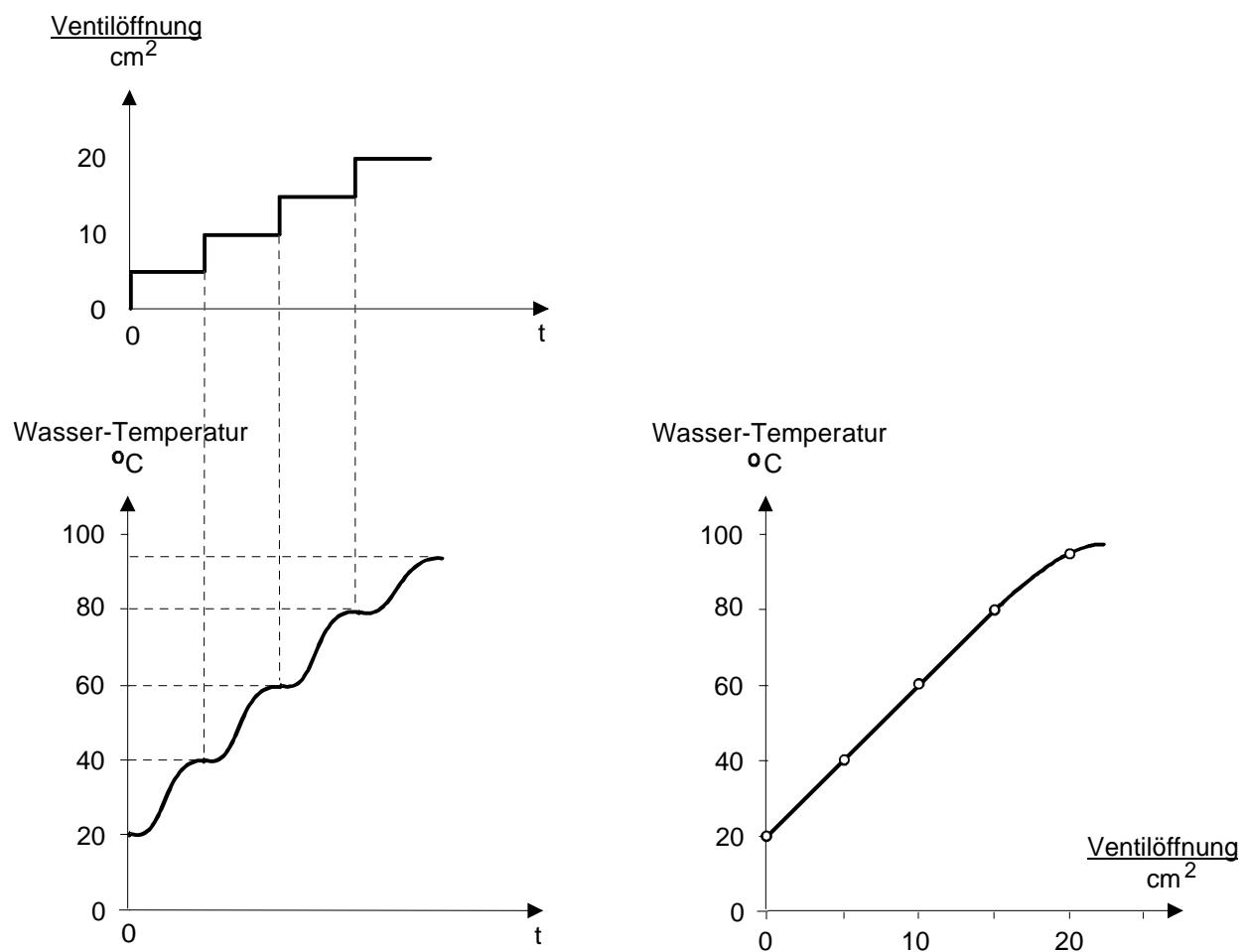


Bild 1.1.7 Messung der statischen Kennlinie einer Wirkungsanordnung zur Wassererhitzung

Trägt man in einem Diagramm (Bild 1.1.7) die stationären Wassertemperaturen über den dazugehörigen Ventilöffnungsquerschnitten auf, erhält man die stationäre (oder statische) Kennlinie der Wirkungsanordnung zur Wassererhitzung.

Wir sehen an dieser Stelle, daß auch ein dynamisches System stationäre Eigenschaften besitzen besitzt, das heißt, daß diese Eigenschaft nicht nur statischen Systemen innewohnt.

An Hand der statischen Kennlinie eines Übertragungssystems kann man auch feststellen, ob das System statisch linear oder nichtlinear ist. Ist die statische Kennlinie eine Gerade, so ist das System linear, ist sie keine Gerade, so ist das System nichtlinear. (Auf sogenannte dynamische Nichtlinearitäten gehen wir in Kapitel 1.2.1 ein).

Liegt eine lineare statische Kennlinie vor, kann man dem Übertragungssystem einen statischen Kennwert – einen Verstärkungsfaktor – zuordnen. Nennt man die auf der Abszisse der statischen Kennlinie aufgetragenen stationären Endwerte der Eingangsgröße u_s (s von stationär) und die auf der Ordinate aufgetragenen stationären Werte der Ausgangsgröße y_s , so ist der Quotient (1.1.4) der Verstärkungsfaktor V des Übertragungssystems.

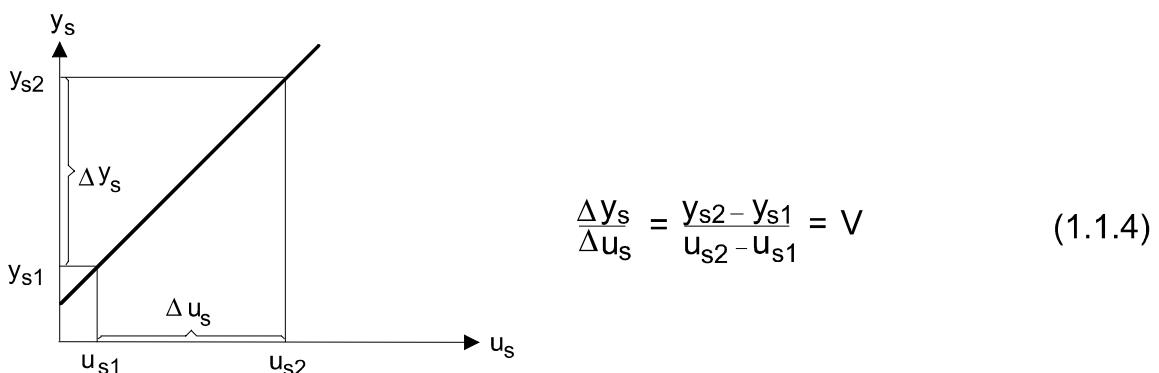


Bild 1.1.8 Zur Berechnung des Verstärkungsfaktors

Beispiel 1.1.3: Im Arbeitsbereich 0 bis 15 cm² Ventilöffnung besitzt die Wirkungsanordnung "Wassererhitzer" nach Bild 1.1.6/7 eine lineare Kennlinie. Bestimme den Verstärkungsfaktor in diesem Bereich:

$$V = \frac{\Delta \text{ Wassertemp.}}{\Delta \text{ Ventilöffnung}} = \frac{80 \text{ } ^\circ\text{C} - 20 \text{ } ^\circ\text{C}}{15 \text{ cm}^2 - 0 \text{ cm}^2} = \frac{60 \text{ } ^\circ\text{C}}{15 \text{ cm}^2} = 4 \frac{\text{ } ^\circ\text{C}}{\text{cm}^2} .$$

Der Verstärkungsfaktor ist i. a. eine anschauliche Größe, die i. a. mit einer Einheit behaftet ist. In unserem Fall sagt er aus, daß bei einer Erhöhung des Ventilquerschnittes um 1 cm² die Wassertemperatur um 4° C ansteigt.

1.1.3.2 Das Globalverhalten von Übertragungssystemen

Die Ausgangssignale aller vorangehend betrachteten Systeme (Bilder 1.1.3a bis 3c und Bild 1.1.6) erreichten nach einer sprungförmigen Eingangserregung und nach Abwarten des Einschwingvorganges einen stationären Endwert. Diese Eigenschaft haben jedoch nicht alle Übertragungssysteme. Gibt man z. B. auf die Funktionsanordnung Leistungs-

verstärker/Motor nach Bild 1.1.9 einen Spannungssprung $u(t)$ und beobachtet als Ausgangssignal den Drehwinkel $\varphi(t)$ der Motorachse, steigt der Winkel $\varphi(t)$ zunächst langsam und dann stetig an. Die Sprungantwort erreicht keinen stationären Endwert.

Ein ähnliches Wirkungsverhalten zeigt die Wirkungsanordnung nach Bild 1.1.10. Der Füllstand $h(t)$ als Systemausgangsgröße eines Behälters ohne Ablauf antwortet auf eine sprungförmige Erhöhung $q(t)$ des Zulaufs mit einer ständigen Erhöhung des Füllstandes $h(t)$.

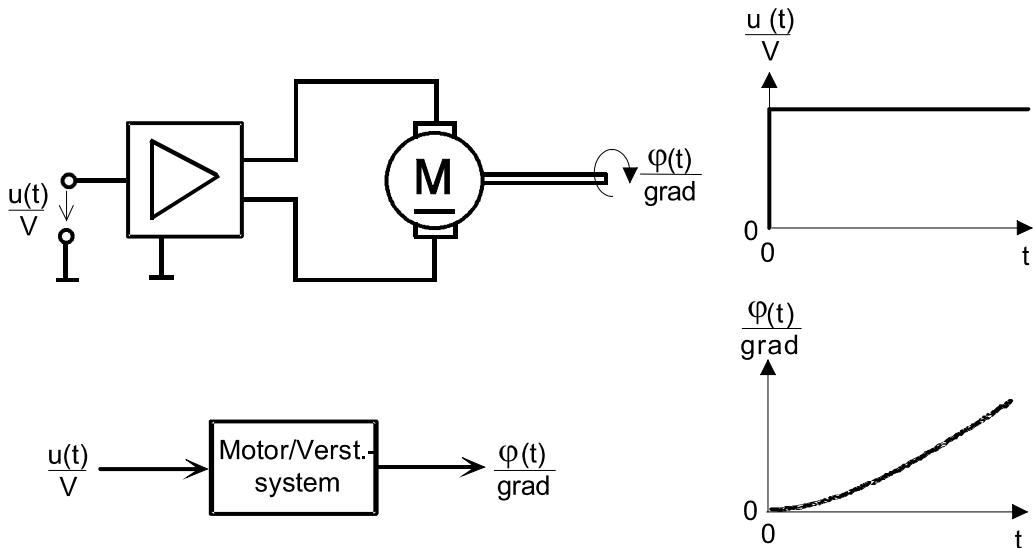


Bild 1.1.9 Sprungantwortverhalten des Drehwinkels einer Motorachse

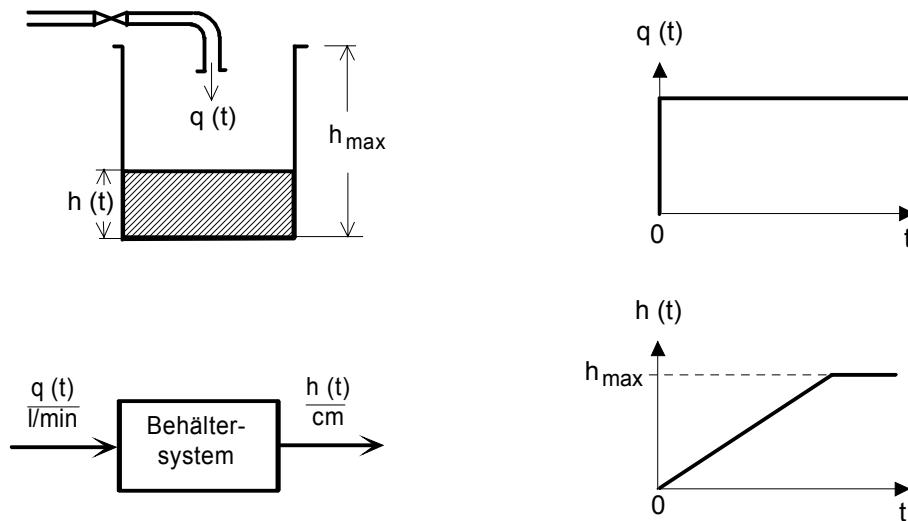


Bild 1.1.10 Sprungantwortverhalten des Füllstandes eines Behälters ohne Ablauf

Das Abknicken der dynamischen Kennlinie bei maximaler Behälterhöhe kann hier nicht als stationärer Endwert gedeutet werden, sondern als Übergang von einem linearen zu einem nichtlinearen Betriebszustand des Systems. Der Wasserüberlauf entspricht z.B.

der Übersteuerung eines elektronischen Verstärkers. Wie wir später noch sehen werden, müssen und können wir solche Übersteuerungseffekte vermeiden.

Würde man noch mehr lineare, zeitinvariante Übertragungssysteme untersuchen, könnte man feststellen, daß sie sich hinsichtlich ihres stationären Verhaltens immer in die beiden vorgestellten Gruppen einordnen lassen:

- Global proportional wirkende Systeme, deren Ausgangssignale nach einer sprungförmigen Eingangserregung immer gegen einen stationären Endwert laufen. In der Literatur werden diese Systeme auch als "Systeme mit Ausgleich" bezeichnet.
- Global integral wirkende Systeme, deren Ausgangssignale nach einer sprungförmigen Eingangserregung gegen keinen stationären Endwert laufen, sondern stetig ansteigen. Diese Systeme werden auch als "Systeme ohne Ausgleich" bezeichnet.

Die Begriffsbildung global lässt erkennen, daß diese Systemeigenschaft nicht das Feinverhalten eines Übertragungssystems beschreibt, sondern nur sein globales Verhalten für größere Zeiten nach einer sprungförmigen Eingangserregung. Während der Begriff "global proportionales Verhalten" anschaulich klar ist, muß der Begriff "global integrales Verhalten" noch geklärt werden. Wenn wir im folgenden das nötige mathematische Rüstzeug erworben haben, können wir auch diese Begriffsbildung leicht verstehen.

1.1.3.3 Stabile und instabile Systeme

Wir wollen ein Übertragungssystem als stabil bezeichnen, wenn bei einer in der Amplitude beschränkten Eingangsgröße $u(t)$ das System auch eine in der Amplitude beschränkte Ausgangsgröße $y(t)$ erzeugt. Erregt man ein System sprungförmig mit einer beliebigen Amplitude $A < \infty$ (darin drückt sich die Amplitudenschranke aus), dann antwortet ein stabiles System mit Ausgangssignalverläufen nach Bild 1.1.11, falls es instabil ist, mit Verläufen nach Bild 1.1.12.

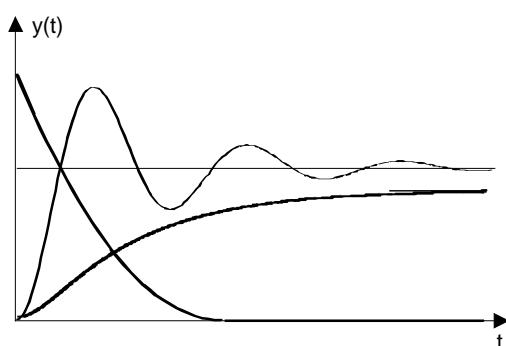


Bild 1.1.11 Sprungantworten stabiler Systeme

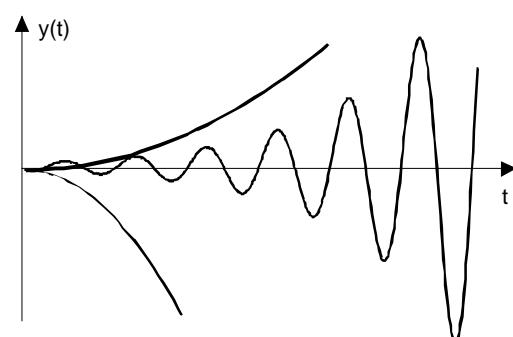


Bild 1.1.12 Sprungantworten instabiler Systeme

1.2 Mathematische Modellierung von Übertragungssystemen

In Kapitel 1.1.1 wurde begründet, warum es für das Verständnis technischer Zusammenhänge sinnvoll ist, sich nicht mit Gerätetechnik sondern mit abstrakteren Systembeschreibungen in Form mathematischer Modelle auseinanderzusetzen: Es können übergreifende Gemeinsamkeiten verschiedenster Systeme erkannt werden, auf die mit weitgehend einheitlichen Methoden und Verfahren Systembeeinflussungsmöglichkeiten angewendet werden können.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, die Gedankengänge zur mathematischen Modellierung kurz zu unterbrechen und den noch abstrakten Begriff "Systembeeinflussung" etwas näher zu erläutern. Wir betrachten dazu ein Beispiel. Der Dieselmotor nach Bild 1.1.3a treibe einen elektrischen Generator an, der eine konstante Ausgangsspannung zur Speisung elektrischer Geräte haben soll (z.B. 220 V). Je nach Belastung des Generators wird der Generator den Dieselmotor mit verschiedenen Drehmomenten beladen. Mit Belastungsschwankungen wird sich die Dieselmotordrehzahl ändern, was sich wiederum auf die Ausgangsspannung des Generators auswirkt. Eine wünschenswerte Beeinflussung des Systems Dieselmotor/Generator wäre es, die Generator-Ausgangsspannung in weiten Grenzen unabhängig von der Belastung zu machen.

Ein weiteres Beispiel, wo Systemeigenschaften beeinflußt werden müssen, ist die Abwasseraufbereitung. Um mit Hilfe biologischer Techniken (Bakterien) das Abwasser zu klären, ist es notwendig die schwankenden pH-Werte des zufließenden Wassers in der Nähe des Neutralpunktes zu halten, da sonst die Bakterien getötet werden.

Die Lösung solcher Probleme ist die Aufgabe der Regelungstechnik, mit der wir uns als "Systembeeinflussungstechnik" in anderen Vorlesungen auseinandersetzen werden.

Kommen wir jedoch zunächst zur mathematischen Modellbildung zurück. Der Begriff des mathematischen Modells eines Übertragungssystems ist sehr weit gefaßt, z.B. kann der Graph des Ausgangssignalverlaufes eines Systems bereits als ein mathematisches Modell aufgefaßt werden. Ein Graph erlaubt ja schon eine gewisse Klassifizierung des Systems, z.B. Aussagen über das Globalverhalten, die Form des Einschwingvorganges und sein statisches Verhalten.

Mathematische Modelle von Übertragungssystemen, die in Form von Graphen oder Wertetabellen vorliegen, nennt man nichtparametrische Modelle von Übertragungssystemen. Eine analytische, d.h. formelmäßige Beschreibung dagegen nennt man ein parametrisches Modell.

Die Findung eines parametrischen Modells dient häufig nicht nur dazu, Grundlagen zur Systembeeinflussung zu schaffen, sondern erlaubt es, bevor ein Gerät gebaut wird, bereits Aussagen über das noch gar nicht vorhandene System zu machen. So kann man

z.B. einen Lautsprecher mathematisch modellieren, das Modell auf einem Digitalrechner berechnen und z.B. die Auswirkung einer Erhöhung der Schwingspuleninduktivität auf die Baß–Übertragungseigenschaften studieren. Noch sinnfälliger wird die Notwendigkeit dieser sogenannten Simulation bei der Überprüfung der Funktionsweise eines Kernreaktors oder einer fliegenden Rakete.

Mathematische Modelle von Übertragungssystemen können in drei Betrachtungsbereichen formuliert werden, die aus verschiedenen Blickwinkeln eine umfassende Analyse eines Übertragungssystems zulassen.

Die in einer technischen Wirkungsanordnung ablaufenden Vorgänge sind Funktionen der Zeit. Es liegt daher nahe, Übertragungssysteme durch Zeitfunktionen zu modellieren, also mathematische Modelle im Zeitbereich zu entwickeln. Leider führt diese Beschreibungsform bei dynamischen Systemen auf Differentialgleichungen, in denen nicht nur die Zeitfunktion sondern auch deren Ableitungen auftreten.

Mittels einer mathematischen Operation - der sogenannten Laplace-Transformation - gelingt es jedoch, diese Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen ohne Differentialquotienten umzuwandeln. (Wir können die Laplace-Transformation mit der bekannten Eigenschaft der Logarithmenrechnung vergleichen, mit der Division und Multiplikation auf Subtraktion und Addition zurückgeführt werden konnten).

Die laplacetransformierten Differentialgleichungen haben jedoch nicht mehr die Zeit t als unabhängige Variable, sondern die zunächst sehr abstrakte Laplace- (oder Bildbereichs-) Variable "s". Nach einer Gewöhnungszeit wird aber gerade dieser Laplace-, Bild-, oder s-Bereich genannte Betrachtungsbereich für uns der wichtigste werden, da man in ihm systemtheoretische Zusammenhänge sehr deutlich formulieren kann. Auch kann jederzeit ein klarer praktischer Bezug zu dem realen System hergestellt werden, das mit dem mathematischen Modell im s-Bereich beschrieben wird.

Durch eine weitere einfache Umformung gelangt man von dem zunächst unanschaulichen s-Bereich in den dritten - der Anschauung wieder zugänglichen - Frequenzbereich. Der Frequenzbereich gibt Auskunft über das Frequenzverhalten von Übertragungssystemen, z.B. über die Übertragungsbandbreite eines HiFi-Verstärkers. Der Frequenzbereich ist uns auch aus der Elektrotechnik zur Beschreibung des Wirkungsverhaltens von Spulen und Kondensatoren bei Wechselspannung bekannt ($j\omega$ -Operator).

Die Notwendigkeit Übertragungssysteme in drei Betrachtungsbereichen mathematisch modellieren zu müssen, ergibt sich aus der Anwendung der Systemtheorie in der Regelungstechnik. Wir werden später unsere Forderungen an das Regelverhalten eines Regelkreises im Zeitbereich formulieren, das Beeinflussungssystem - den Regler - im s- und Frequenzbereich entwerfen und das Entwurfsergebnis im Zeitbereich überprüfen.

Die Notwendigkeit mathematische Modelle in verschiedenen Betrachtungsbereichen modellieren zu müssen, ist auch anschaulich zu begründen. So kann ein elektronisches Filter, das z.B. aus einem Frequenzgemisch genau eine Frequenz herausfiltern soll, sicherlich durch eine Funktion "Filterverstärkung in Abhängigkeit von der Frequenz" mit mehr Informationsgehalt modelliert werden, als durch eine Sprungantwort im Zeitbereich. Dagegen lässt sich das Drehzahländerungsverhalten eines Motors besser durch eine Zeitfunktion, z.B. eine Sprungantwort, als durch einen Frequenzgang beschreiben.

Wir beginnen unsere Betrachtungen zur mathematischen Modellierung von Übertragungssystemen im Zeitbereich. Wenn nichts anderes gesagt wird, nennen wir das Eingangssignal eines Übertragungssystems $u(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$

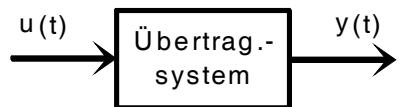


Bild 1.2.1: Standard-Kurzbezeichnungen für das Ein- und Ausgangssignal

1.2.1 Systembeschreibung im Zeitbereich

In der vorangegangenen Einleitung zur mathematischen Modellierung von Übertragungssystemen haben wir den Begriff des nichtparametrischen mathematischen Modells als eine Systembeschreibung in Form eines Graphen oder einer Wertetabelle eingeführt. Im Zeitbereich sind dies Systemantworten auf spezielle Eingangserregungen.

Nichtparametrische Modelle im Zeitbereich sind häufig Ergebnisse von Messungen am realen Objekt und dienen oft als Zwischenschritt zur Bestimmung parametrischer Modelle des Übertragungssystems.

Zur Bestimmung nichtparametrischer Modelle benutzt man bestimmte Testfunktionen, von denen die drei wichtigsten in der Tabelle 1.2.1 beschrieben werden.

Die Systemantworten eines Übertragungssystems auf solche speziellen Eingangserregungen haben zum Teil festgeprägte Namen und Kurzbezeichnungen, die auch mit in der Tabelle aufgeführt sind.

In der Systemtheorie ist es üblich, den Beginn des Beobachtungszeitraumes eines Vorganges formal bei $t = 0$ festzulegen, daher sind die Testsignale für den Zeitraum $t < 0$ alle Null. Dies drückt sich jeweils in der zweiten Zeile der Signalbeschreibung aus.

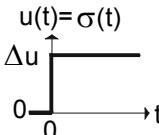
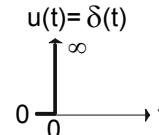
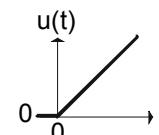
Testsignal				Systemantwort auf das Testsignal	
Name	Kurzbezeichnung	Signalbeschreibung	Graph der Signalbeschreibung	Name	Kurzbezeichnung
Sprungfunktion, Sigma-Funktion	$\sigma(t)$	$\sigma(t) = \begin{cases} \Delta u & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$	$u(t) = \sigma(t)$ 	Sprungantwort, Übergangsfunktion	$y(t) = h(t)$
Einheitsimpuls, Delta-Funktion, Dirac-Stoß	$\delta(t)$	$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$	$u(t) = \delta(t)$ 	Impulsantwort, Gewichtsfunktion	$y(t) = g(t)$
Anstiegsfunktion Rampenfunktion	—	$u(t) = \begin{cases} k t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$	$u(t)$ 	Anstiegsantwort	—

Tabelle 1.2.1 Testsignale und Namen der dazugehörigen Systemantworten

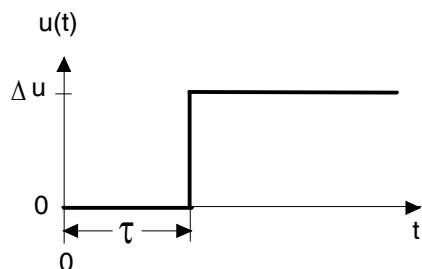
Zu den einzelnen Testfunktionen sollen noch folgende Bemerkungen gemacht werden:

Sprungfunktion: In der Signalbeschreibung drückt der Ausdruck Δu die Höhe (Amplitude) des Sprunges aus. Setzt man $\Delta u = 1$ ergibt sich

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

der sogenannte Einheitssprung, der sehr häufig als Testreiz benutzt wird.

Ein zeitverzögerter Sprung



$$\sigma(t - \tau) = \begin{cases} \Delta u & \text{für } t \geq \tau \\ 0 & \text{für } t < \tau \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Bild 1.2.2 Verzögerte Sprungfunktion

wird durch die Formel (1.2.2) ausgedrückt. Mit (1.2.2) können Pulsfolgen und Treppenfunktionen konstruiert werden.

Beispiel 1.2.1: Wie lautet die analytische Beschreibung für den folgenden Puls?

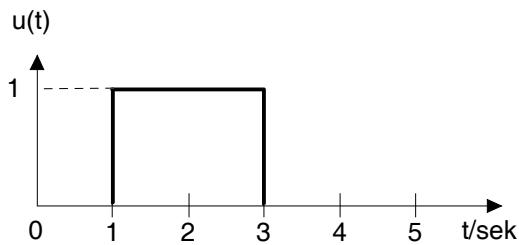


Bild 1.2.3a Ein verzögerter Puls

Der Puls setzt sich aus einem verzögerten Sprung $\sigma(t-1)$ und einem weiteren verzögerten Sprung $\sigma(t-3)$, der vom ersten subtrahiert werden muß, zusammen.

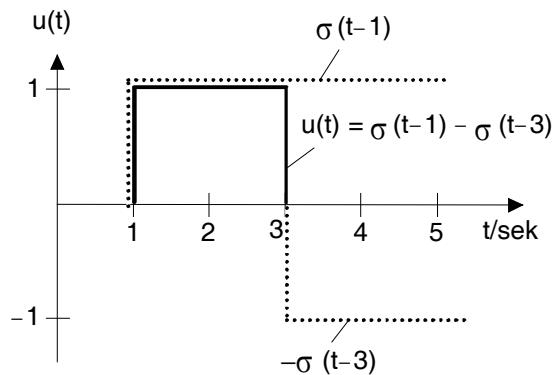


Bild 1.2.3b Entstehung des verzögerten Pulses nach Bild 1.2.3a

Einheitsimpuls: Der Einheitsimpuls kann nicht real erzeugt werden. Er dient als theoretische Rechengröße, die eine gewisse Bedeutung in der Systemtheorie hat.

Anstiegsfunktion: Die Anstiegsfunktion als Testfunktion hat nicht die Bedeutung wie Sprungfunktion und Einheitsimpuls. Der Faktor k in der Signalbeschreibung legt den Anstiegsgrad der Funktion fest.

Parametrische Modelle von Übertragungssystemen beschreiben in Form von Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variablen t (Zeit) das Funktionsverhalten von Übertragungssystemen.

Es gibt zwei Methoden zur Findung mathematischer Modelle: eine theoretische Methode, die physikalisch/mathematische Modellbildung und eine experimentelle Methode, die meßtechnische Modellbildung.

Die erste Methode wollen wir im nächsten Kapitel diskutieren. Auf die zweite Methode gehen wir kurz im Kapitel 1.4 ein.

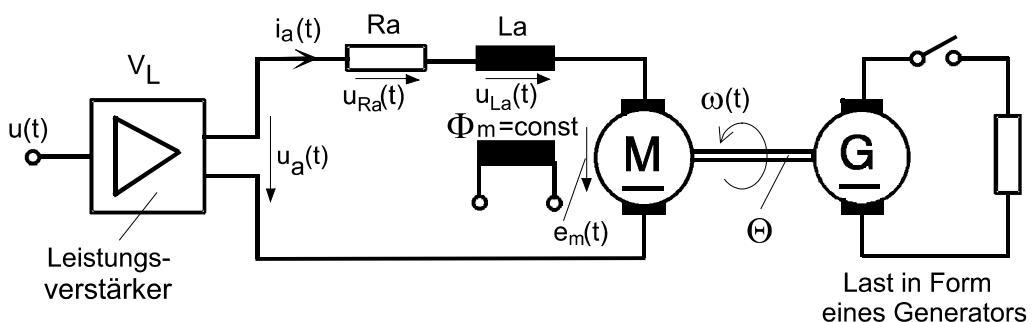
Neben dem übergeordneten Ziel, durch mathematische Modelle übergreifende Gemeinsamkeiten technischer Systeme herauszuarbeiten, bestehen vordergründige Ziele der Modellbildung darin

- Strukturen zu erkennen, wie Funktionselemente oder Systemparameter eines technischen Systems miteinander in Interaktion stehen. Dies gilt sowohl für das statische als auch für das dynamische Verhalten.
- Die Verläufe des Ausgangssignals und die Verläufe innerer zeitabhängiger Größen (sog. Zustandsgrößen) in Abhängigkeit des Eingangssignals oder von Anfangszuständen der Zustandsgrößen berechnen zu können. (Noch nicht eingeführte Begriffe, wie z.B. "Anfangszustände von Zustandsgrößen" werden im Folgenden erläutert).

1.2.1.1 Theoretische Modellbildung

Grundlage jeder physikalisch/mathematischen Modellbildung ist die Aufstellung von Bilanzgleichungen, um die Massen- oder Energieänderungen im zu beschreibenden System zu bilanzieren. Die notwendigen Verknüpfungen zwischen den Systemparametern und den zeitveränderlichen Signalen im System werden darin mit Hilfe von physikalischen Gesetzen vorgenommen.

Beispiel 1.2.2: Es soll das mathematische Modell des folgenden fremderregten Gleichstrommotors aufgestellt werden:



$u(t)$:	Steuerspannung	La :	Ankerinduktivität
$u_a(t)$:	Ankerspannung	Ra :	Ankerwiderstand
$i_a(t)$:	Ankerstrom	Θ :	Massenträgheit der sich drehenden Komponenten
$\omega(t)$:	Drehzahl	V_L :	Verstärkungsfaktor des Leistungsverstärkers
Φ_m :	Erregerfluß		

Bild 1.2.4 Prinzipschaltbild eines fremderregten Gleichstrommotors

Dazu werden zunächst die Bilanzgleichungen aufgestellt:

Spannungsbilanz im Ankerkreis (Kirchhoffsches Gesetz)

$$u_a(t) - u_{La}(t) - u_{Ra}(t) - e_m(t) = 0; \quad (1.2.3a)$$

Momentenbilanz (Kraftbilanz) der Drehmomente

$$m_A(t) - m_m(t) - m_r(t) - m_L(t) = 0. \quad (1.2.3b)$$

Dabei gelten folgende physikalischen Gesetze (1.2.3c)

- $u_A(t) = V_L \cdot u(t)$: Ankerspannung, deren Höhe von der Steuerspannung $u(t)$ bestimmt wird
 - $u_{La}(t) = L_a \cdot di_a(t)/dt$: Spannungsabfall an der Ankerinduktivität
 - $u_{Ra}(t) = R_a \cdot i_a(t)$: Spannungsabfall am Ankerwiderstand
 - $e_m(t) = k_i \cdot \omega(t)$: in den Anker induzierte Spannung, die drehzahl-abhängig ist. (Kopplungsbeziehung zwischen elektrischem und mechanischem Teil der Maschine)
 - $m_A(t) = k_m \cdot i_a(t)$: Motorantriebsmoment; in k_m wirkt der konstante Erregerfluß Φ_m ; (zweite Kopplungsbeziehung zwischen elektrischem und mechanischem Teil der Maschine)
 - $m_m(t) = \Theta \cdot d\omega(t)/dt$: Trägheitsmoment der rotierenden Masse (Motoranker, Kupplungsgestänge, Generatoranker)
 - $m_r(t) = k_r \cdot \omega(t)$: Reibungsmoment (Lagerreibung der rotierenden Maschinenteile)
 - $m_L(t)$: Lastmoment, entsteht bei Stromentnahme aus dem Generator (soll nicht weiter modelliert werden)
- ($V_L, L_a, R_a, k_i, k_m, \Theta, k_r$: konstante Größen des Systems)

Wie man deutlich erkennt, ist die Aufstellung der Bilanzgleichungen und der physikalischen Gesetze -trotz des relativ einfachen Beispiels- keinesfalls trivial.

Diese Tatsache gilt allgemein für die Aufstellung mathematischer Modelle mit physikalisch/mathematischen Methoden. Die Modellbildung wird daher häufig in Teams vorgenommen, die aus Systemingenieuren und Spezialisten aus den entsprechenden Wissenschaftsgebieten (für unser Beispiel Spezialist für elektrische Maschinen) zusammengesetzt sind.

Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß die Beziehungen (1.2.3) nur die wesentlichen Eigenschaften des Motors modellieren. So wurde z.B. vernachlässigt, daß bei Laständerungen Torsionsspannungen im Kopplungsgestänge zwischen Generator und Motor auftreten können oder durch Verlustwärme eine Änderung des Anker-widerstandes auftritt. Auch diese Eigenschaften könnten modelliert und mit in den Gleichungssatz aufgenommen werden. Was und wie tief mathematisch modelliert werden muß, hängt von der praktischen Aufgabenstellung ab. Wir wollen die vorgenommene Modellierung als ausreichend ansehen.

Um eine Auskunft über den Verlauf des Ausgangssignals und innerer Zustandsgrößen in Abhängigkeit des Eingangssignals und anderer Einflußgrößen zu erhalten, müssen wir zunächst festlegen bzw. analysieren, was Eingangsgröße(n) und was Ausgangsgröße(n) des Systems sind. Im vorliegenden Fall wurde durch Bild 1.2.4 bereits die Steuerspannung $u(t)$ als Eingangsgröße und die Drehzahl $\omega(t)$ als Ausgangsgröße suggeriert. Diese Festlegung ist bei anderen Problemstellungen nicht so klar, wie es bei unserem Beispiel auf den ersten Blick erscheint. Dies erkennt man bereits daran, daß unser System eine zweite Eingangsgröße besitzt, die auf den ersten Blick nicht als solche auszumachen ist: Neben der Steuerspannung ist unser Ausgangssignal $\omega(t)$ noch durch eine zweite Größe von außen beeinflußbar, nämlich durch das Lastmoment $m_L(t)$. Wir haben also ein System mit zwei Eingangs- und einer Ausgangsgröße.



Bild 1.2.5 Eingangs-/Ausgangsstruktur des math. Modells eines Gleichstrommotors

Wäre der Erregerfluß Φ_m von außen steuerbar und würde uns sein Einfluß auf $\omega(t)$ interessieren, müßte noch eine Eingangsgröße mehr existieren. Hätten wir uns nicht für die Drehzahl $\omega(t)$ als Ausgangsgröße interessiert, sondern für den Drehwinkel $\varphi(t)$ der Motorachse, müßten wir noch weitere Modellierungsgleichungen aufstellen.

Wir halten fest, daß wir vor Beginn der mathematischen Modellierung eindeutig festlegen müssen, was und wie tief modelliert werden soll und welche Signale Eingangs- und welche Ausgangssignale sind.

Nach Aufstellung der Modellierungsgleichungen werden diese so miteinander verknüpft, daß folgende Struktur entsteht:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + b_1 u(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) + b_2 u(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + b_n u(t) \\
 y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + d u(t)
 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Dabei sind $u(t)$ die Eingangsgröße, $y(t)$ die Ausgangsgröße und die $x_i(t)$ sogenannte Zustandsgrößen (innere zeitveränderliche Signale des Systems). Die a_{ik} , b_i , c_i und d sind die sogenannten Systemparameter, in ihnen finden sich die konstanten Größen des Systems wieder. Die $\dot{x}_i(t)$ sind die Ableitungen $dx_i(t)/dt$ der Zustandsgrößen.

Zur Umstellung des mathematischen Modells des Gleichstrommotors in die Form (1.2.4) setzen wir die physikalischen Gesetze (1.2.3c) in die Bilanzgleichungen (1.2.3a/b) ein

$$\begin{aligned}
 V_L u(t) - L_a \dot{i}_a(t) - R_a i_a(t) - k_i \omega(t) &= 0 \\
 k_m i_a(t) - \Theta \dot{\omega}(t) - k_r \omega(t) - m_L(t) &= 0 ,
 \end{aligned}$$

und formen die Gleichungen so um, daß links die Ableitungen und rechts die Zustandsgrößen und die Eingangssignale stehen; d.h. wir bringen sie in die Form (1.2.4):

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_a(t) &= -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{k_i}{L_a} \omega(t) + \frac{V_L}{L_a} u(t) \\
 \dot{\omega}(t) &= \frac{k_m}{\Theta} i_a(t) - \frac{k_r}{\Theta} \omega(t) - \frac{1}{\Theta} m_L(t) \\
 \omega(t) &=
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Da die Modellstruktur (1.2.4) nur ein System mit einer Eingangsgröße beschreibt, unser Modell aber zwei Eingangsgrößen hat, wurde (1.2.5) um den Term $-1/\Theta m_L(t)$ erweitert. Vernachlässigt man diesen Term, kann man erkennen, daß die Strukturen von (1.2.5) und (1.2.4) identisch sind:

Die Anzahl n der Differentialgleichungen ist in unserem konkreten Fall $n = 2$. Für diesen Fall reduziert sich das allgemeine mathematische Modell (1.2.4) auf

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t) \\
 y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + d u(t)
 \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Zwischen (1.2.5) und (1.2.6) bestehen dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= i_a(t); x_2(t) = \omega(t); u(t) = u(t); y(t) = \omega(t) \\
 a_{11} &= -\frac{R_a}{L_a}; a_{12} = -\frac{k_i}{L_a}; a_{21} = \frac{k_m}{\Theta}; a_{22} = -\frac{k_r}{\Theta} \\
 b_1 &= \frac{V_L}{L_a}; b_2 = 0; c_1 = 0; c_2 = 1; d = 0
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, und wir werden dies an einigen weiteren Beispielen tun, daß sich mathematische Modelle aller linearen Übertragungsglieder in der Form (1.2.4) darstellen lassen. Wir nennen dieses Modell im Zeitbereich "Mathematisches Zustandsmodell".

Daß das Zustandsmodell (1.2.4) linear ist, könnte man durch Anwendung der Linearitätsbeziehungen (1.1.2) und (1.1.3) auf (1.2.4) zeigen. Beide Bedingungen werden erfüllt. Wir verzichten an dieser Stelle auf diesen Beweis.

Es sei jedoch noch hervorgehoben, daß Zustandsgrößen immer in Verbindung mit Energiespeichern auftreten ($i_a(t)$ mit dem Stromspeicher L_a und $\omega(t)$ mit dem Drehmomentspeicher Θ). Die Anzahl der Differentialgleichungen in (1.2.4), die man auch als Grad n des Differentialgleichungssystems bezeichnet, gibt die Anzahl der unabhängigen Energiespeicher wieder, die sich im System befinden. Alle Zustandsgrößen tauchen im Zustandsmodell auch als Ableitungen auf.

Wir sehen, daß in einem mathematischen Zustandsmodell neben der Eingangsgröße und Ausgangsgröße nur noch die Zustandsgrößen, ihre Ableitungen und die festen Systemparameter a_{ik} , b_i , c_i und d auftreten.

In Kapitel 1.2.1.2 haben wir als ein mögliches Ziel der mathematischen Modellbildung die Berechnung des Ausgangssignalverlaufs bzw. den Verlauf der Zustandsgrößen in Abhängigkeit des Eingangssignals und/oder von Anfangszuständen der Zustandsgrößen bezeichnet. Was sich hinter dem Verlauf der Ausgangsgröße in Abhängigkeit des Eingangssignals verbirgt, haben wir anschaulich an einigen Beispielen im Kapitel 1.1.1 Bild 1.1.3 gezeigt. Was heißt nun in Abhängigkeit von Anfangszuständen der Zustandsgrößen?

Bedingt durch die Energiespeicher (z.B. die rotierende träge Masse) kann unser Gleichstrommotor auch eine Drehzahl $\omega(t)$ am Ausgang abgeben, wenn kein Eingangssignal $u(t)$ anliegt. Legt man nämlich den Anfangszustand $t = 0$ einer Ausgangssignal-

beobachtung auf einen Zeitpunkt, zu dem sich der Anker noch in Drehung befindet, haben der Ankerstrom $i_a(t)$ und die Drehzahl $\omega(t)$, also die Zustandsgrößen einen Anfangswert $i_a(0) \neq 0$ und $\omega(0) \neq 0$. Dieses sind die sogenannten Anfangszustände der Zustandsgrößen. Befindet sich unser Motor bei $t = 0$ im Ruhezustand, sind die Anfangszustände gleich Null. Weiterhin sei noch bemerkt, daß im Fall unseres Gleichstrommotors die Ausgangsgröße $\omega(t)$ zufällig identisch mit einer Zustandsgröße ist. Dies kommt zwar häufig vor, gilt aber nicht allgemein. $y(t)$ ist nach (1.2.4) eine Linearkombination aus den Zustandsgrößen und der Eingangsgröße.

Bevor wir beispielhaft noch einige physikalisch/mathematische Modellbildungen vornehmen, muß noch einmal deutlich hervorgehoben werden, daß wir zwar das mathematische Modell unseres Gleichstrommotors aufgestellt haben, aber noch keine Lösungsmöglichkeiten zur Bestimmung von Ausgangs- und Zustandsgrößenverläufen in Abhängigkeit von Eingangsgrößen und Anfangszuständen kennengelernt haben. Mit dieser Problematik beschäftigen wir uns erst in Kapitel 1.2.1.4.

Beispiel 1.2.3: Mathematische Modellierung eines Gasdruckmeßgerätes.

Die im folgenden Bild 1.2.6 dargestellte Wirkungsanordnung hat die Funktion eines Gasdruckmeßgerätes. Der Gasdruck $p(t)$ wirkt auf die Kolbenfläche A , wodurch das Kolben-/Gestängesystem nach unten gedrückt wird ($s(t)$), bis die Federkraft $F_F(t)$ gleich der Gasdruckkraft $F_D(t)$ ist. Der Schleifer des Potentiometers folgt dieser Bewegung ($s(t)$) und die Ausgangsspannung $u(t)$ wächst proportional zum Druck. Das kleine flüssigkeitsgefüllte Zylinder-/Kolbensystem dient zur Dämpfung der Bewegung. Es verhindert länger andauernde Einschwingvorgänge der Meßgröße $u(t)$ bei Druckänderungen $p(t)$.

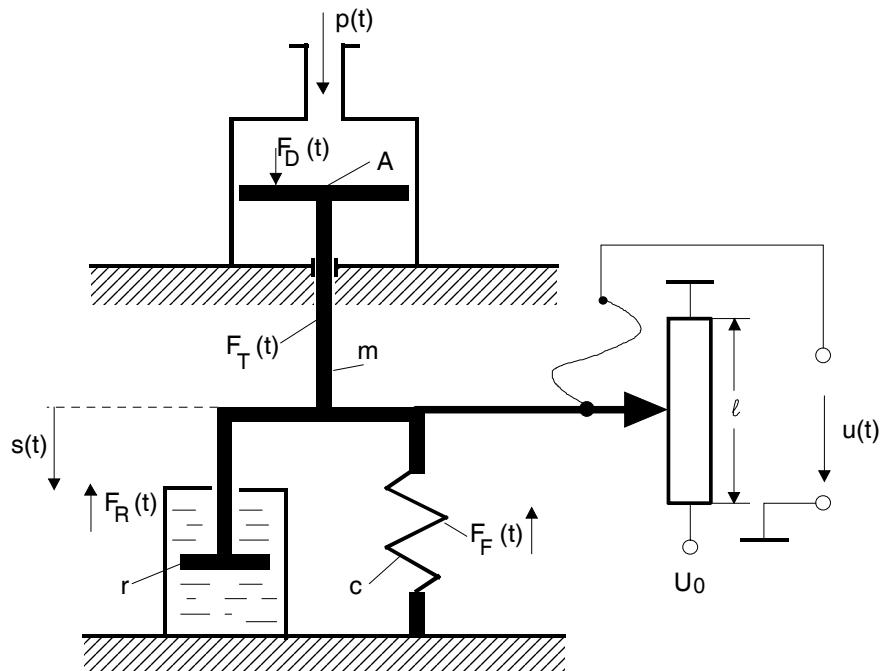


Bild 1.2.6 Wirkungsschema eines Gasdruckmeßgerätes

Ausgangspunkt für die Aufstellung eines mathematischen Modells dieses Übertragungssystems mit der Eingangsgröße $p(t)$ und der Ausgangsgröße $u(t)$ ist eine Kraftbilanz. Weiterhin kommen physikalische Gesetze der Mechanik und Elektrotechnik zur Anwendung.

Das System kommt in einen Ruhezustand, wenn die durch den Druck des Gases $p(t)$ erzeugte Kraft $F_D(t) = p(t) \cdot A$ (A : Kolbenfläche) gleich der Rückstellkraft der Feder $F_F(t) = c \cdot s(t)$ (c : Federkonstante) ist, d.h. wenn

$$\begin{aligned} F_D(t) - F_F(t) &= 0 \quad \text{bzw.} \\ A \cdot p(t) - c \cdot s(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

ist. Zur vollständigen Modellierung der Wirkungsanordnung müssen noch zwei weitere Kräfte, die der Gasdruckkraft entgegenwirken, mit berücksichtigt werden:

- Die Reibungskraft $F_R(t)$ des kleinen Zylinder-/Kolbensystems. Reibungskräfte sind der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional:

$$F_R(t) = r \cdot v(t) = r \cdot \frac{d s(t)}{dt} = r \cdot \dot{s}(t); \quad r: \text{Reibungskonstante.} \quad (1.2.8)$$

- Die Kraft der tragen Masse m des beweglichen Gestängesystems. Trägheitskräfte sind der Beschleunigung des bewegten Körpers proportional:

$$F_T(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{d v(t)}{dt} = m \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = m \cdot \ddot{s}(t). \quad (1.2.9)$$

Damit ergibt sich für das Gesamtsystem folgende Kraftbilanz:

$$F_D(t) - F_F(t) - F_R(t) - F_T(t) = 0. \quad (1.2.10)$$

Setzt man die entsprechenden physikalischen Gesetze in die Gleichung (1.2.10) ein

$$A \cdot p(t) - c \cdot s(t) - r \cdot \dot{s}(t) - m \cdot \ddot{s}(t) = 0,$$

erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (eine Zustandsgröße kommt in der zweiten Ableitung vor):

$$\ddot{s}(t) + \frac{r}{m} \dot{s}(t) + \frac{c}{m} s(t) = \frac{A}{m} p(t). \quad (1.2.11a)$$

Mit einer weiteren algebraischen Gleichung, die das Verhältnis des Weges $s(t)$ zur Spannung $u(t)$ beschreibt

$$\frac{U_0}{\ell} = \frac{u(t)}{s(t)} \Rightarrow u(t) = \frac{U_0}{\ell} s(t), \quad (1.2.11b)$$

ist das mathematische Modell des Gasdruckmeßgerätes vollständig. Allerdings entspricht die Gleichungsstruktur (1.2.11a) nicht der angestrebten Form des Zustandsmodells (1.2.4), da in (1.2.11a) ein Differentialquotient 2. Ordnung auftritt. Es ist aber in jedem Fall möglich, eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung (n ist dabei der Grad der höchsten vorkommenden Ableitung) in n Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuwandeln. Wir wollen diese Umwandlung nur beispielhaft an (1.2.11) vornehmen, die allgemeine Vorgehensweise wird in /4/ beschrieben.

Mit der bekannten Beziehung

$$\frac{d s(t)}{dt} = \dot{s}(t) = v(t) \quad (v(t): \text{Geschwindigkeit}) \quad (1.2.12)$$

geht (1.2.11) in folgende Form über

$$\underbrace{\ddot{s}(t)}_{\bullet} + \frac{r}{m} \underbrace{\dot{s}(t)}_{\bullet} + \frac{c}{m} s(t) = \frac{A}{m} p(t)$$

$$\dot{v}(t) + \frac{r}{m} v(t) + \frac{c}{m} s(t) = \frac{A}{m} p(t) \quad (1.2.13)$$

Durch Umstellung von (1.2.13) und Hinzufügung der Umrechnungsgleichung (1.2.12) sowie der algebraischen Ausgangsgleichung (1.2.11b)

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\frac{r}{m} v(t) - \frac{c}{m} s(t) + \frac{A}{m} p(t) \\ \dot{s}(t) &= v(t) \\ u(t) &= \frac{U_0}{\ell} s(t) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

erhalten wir das mathematische Zustandsmodell des Gasdruckmeßgerätes in der allgemeinen Form (1.2.4) des Zustandsmodells.

Beispiel 1.2.4 : Mathematische Modellierung einer Widerstand–/Kondensator–schaltung:

Eine Widerstand–/Kondensator–Kombination

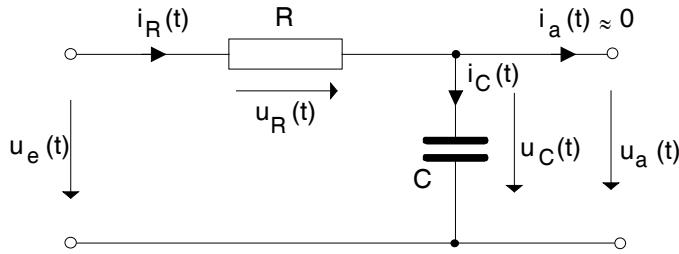


Bild 1.2.7 Eine Widerstand–/Kondensator–Kombination

habe als Eingangsgröße die Spannung $u_e(t)$ und als Ausgangsgröße die Spannung $u_a(t)$. Der Ausgang werde so gering belastet, daß $i_a(t) \approx 0$ ist.

Das mathematische Modell wird wiederum durch Bilanzgleichungen und physikalische Gesetze beschrieben:

Spannungsbilanz:

$$u_e(t) - u_C(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_C(t) - u_a(t) = 0$$

Strombilanz:

$$i_R(t) - i_C(t) = 0$$

(1.2.15)

Ohmsches Gesetz für Widerstand und Kondensator:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad (1.2.16)$$

$$\frac{d u_C(t)}{dt} = \dot{u}_C(t) = \frac{1}{C} i_C(t) . \quad (1.2.17)$$

Diese Beziehungen werden durch Einsetzen und Umstellen in die allgemeine Form des Zustandsmodells (1.2.4) gebracht

$$\dot{u}_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_R(t) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{R} u_R(t) = \frac{1}{RC} (u_e(t) - u_C(t)) .$$

Damit erhält man folgendes Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{u}_C(t) &= -\frac{1}{RC} u_C(t) + \frac{1}{RC} u_e(t) \\ u_a(t) &= u_C(t) . \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Beispielen erhalten wir nur eine Differentialgleichung, da im System nur ein Energiespeicher (der Kondensator als Spannungsspeicher) vorkommt.

Beispiel 1.2.5: Mathematische Modellierung einer Widerstandschaltung:
Eine Widerstandschaltung

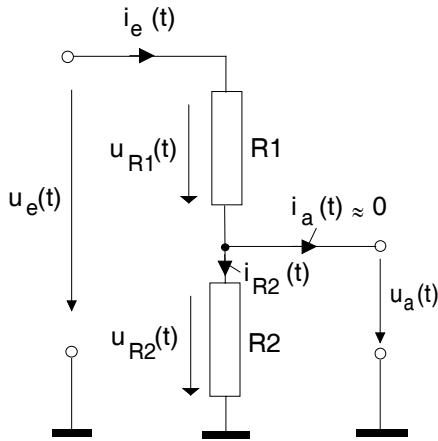


Bild 1.2.8 Eine Widerstandschaltung

habe als Eingangsgröße die Spannung $u_e(t)$ und als Ausgangsgröße die Spannung $u_a(t)$. Der Ausgang werde wiederum so gering belastet, daß $i_a(t) = 0$ ist.

Spannungsbilanz

$$\begin{aligned} u_e(t) - u_{R2}(t) - u_{R1}(t) &= 0 \quad (1.2.19) \\ u_{R2}(t) - u_a(t) &= 0 \end{aligned}$$

Strombilanz

$$i_e(t) - i_{R2}(t) = 0 \quad (1.2.20)$$

Durch Einsetzen und Umstellen werden diese Beziehungen wieder in die Form des Zustandsmodells (1.2.4) gebracht. Weil in der Schaltung kein Energiespeicher vorhanden ist, enthält das mathematische Modell keine Differentialgleichung, sondern nur die Ausgangsgleichung von (1.2.4). Da wegen des Fehlens der Differentialgleichung auch keine Zustandsgrößen $x_i(t)$ auftreten, reduziert sich (1.2.4) auf

$$y(t) = d \cdot u(t). \quad (1.2.21)$$

In diese Form muß der Gleichungssatz (1.2.19/20) gebracht werden:

$$u_a(t) = u_{R2}(t) = R_2 \cdot i_{R2}(t) = R_2 \cdot i_e(t) = R_2 \cdot \frac{1}{R_1} u_{R1}(t)$$

$$u_a(t) = \frac{R_2}{R_1} (u_e(t) - u_{R2}(t)) = \frac{R_2}{R_1} (u_e(t) - u_a(t))$$

$$u_a(t) = \frac{R_2}{R_1} \cdot u_e(t) - \frac{R_2}{R_1} \cdot u_a(t)$$

$$u_a(t) = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} u_e(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_e(t). \quad (1.2.22)$$

Die Beziehung (1.2.22) hat damit die angestrebte Form des reduzierten Zustandsmodells (1.2.21). Wir haben durch diese allgemeingültige Vorgehensweise weiter nichts getan, als die bekannte Spannungsteilerformel abgeleitet.

Beispiel 1.2.6: Mathematische Modellierung eines Behälterfüllstandes

In einen zylindrischen Behälter mit der Grundfläche A fließe, steuerbar durch ein Ventil, ein Flüssigkeitsstrom $q_{zu}(t)$. Durch eine Bodenöffnung des Behälters mit der Querschnittsfläche a fließe die Flüssigkeitsmenge $q_{ab}(t)$ ab.

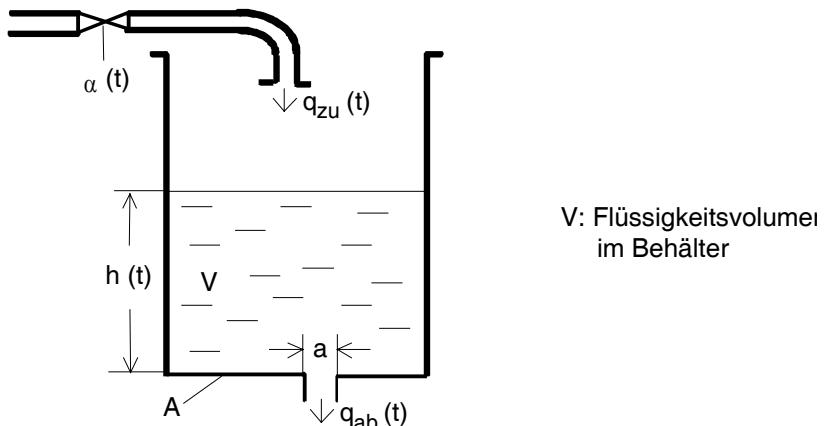


Bild 1.2.9 Flüssigkeitsbehälter mit Zu- und Abfluß

Wir interessieren uns für die Füllstandshöhe $h(t)$ in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel $\alpha(t)$ des Zuflußventils. Systemeingangsgröße ist also $\alpha(t)$ und Systemausgangsgröße ist $h(t)$. Da ein System mit einem Speicher vorliegt (der flüssigkeitsspeichernde Behälter), erwarten wir ein Zustandsmodell mit einer Differentialgleichung.

Mittels einer auf eine Massenbilanz zurückführbaren Volumenbilanz /8/

$$\frac{d V(t)}{dt} = q_{zu}(t) - q_{ab}(t) , \quad (1.2.23)$$

die sagt, daß eine Volumenänderung $dV(t)/dt$ des gespeicherten Flüssigkeitsvolumen durch den Zustrom (Volumenerhöhung durch $+q_{zu}(t)$) und Abstrom (Volumenabnahme durch $-q_{ab}(t)$) erfolgt, ist die Grundstruktur des mathematischen Modells festgelegt.

Mit der Beziehung

$$V(t) = A \cdot h(t)$$

führen wir die uns interessierende Füllstandshöhe $h(t)$ in die Gleichung (1.2.23) ein

$$\frac{d V(t)}{dt} = \frac{d (A \cdot h(t))}{dt} = A \frac{d h(t)}{dt} = A \cdot \dot{h}(t) = q_{zu}(t) - q_{ab}(t). \quad (1.2.24)$$

Der Zufluß $q_{zu}(t)$ hänge proportional vom Öffnungswinkel $\alpha(t)$ des Zuflußventils ab

$$q_{zu}(t) = k_v \alpha(t); \quad k_v: \text{Ventilkonstante}. \quad (1.2.25)$$

Aus der Strömungslehre ist bekannt, daß der Ausfluß aus einem Behälter nichtlinear (Wurzel) von der Höhe des Füllstandes abhängig ist,

$$q_{ab}(t) = a k_a \sqrt{2 g h(t)}. \quad \begin{aligned} a &: \text{Ausflußquerschnitt} \\ k_a &: \text{Ausflußkonstante} \\ g &: \text{Gravitationskonstante} \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Setzen wir (1.2.25) und (1.2.26) in (1.2.24) ein, erhalten wir schließlich die gesuchte Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= -\frac{a k_a \sqrt{2g}}{A} \sqrt{h(t)} + \frac{k_v}{A} \alpha(t) \\ h(t) &= h(t). \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Dieses mathematische Modell unterscheidet sich jedoch an einer Stelle gravierend von allen bislang aufgestellten Modellen, weil es nicht in die Form des allgemeinen Zustandsmodells (1.2.4) gebracht werden kann: Die Zustandsgröße $h(t)$ tritt unter einer Wurzel auf. Mit den Beziehungen (1.1.2) und (1.1.3) könnte man beweisen, daß dieses System nichtlinear ist. In Kapitel 1.2.1.3 werden wir zeigen, wie wir dieses nichtlineare System durch ein lineares annähern, um doch noch unsere linearen Systembeschreibungs-, Analyse- und Beeinflussungs-Methoden auf dieses System anwenden zu können.

(Die etwas eigenartige Ausgangsgröße $h(t) = h(t)$ tritt hier auf, weil die Ausgangsgröße $h(t)$ identisch mit der Zustandsgröße $h(t)$ ist und beide zufällig gleiche Kurzbezeichnungen tragen.)

1.2.1.2 Das mathematische Zustandsmodell

Im vorangehenden Kapitel haben wir gesehen, daß sich alle linearen Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang in Form des mathematischen Zustandsmodells der Form (1.2.4) darstellen lassen.

In diesem Kapitel wollen wir uns kurz mit einer wichtigen, etwas abstrakteren Schreibweise des mathematischen Zustandsmodells in Matrzenschreibweise auseinandersetzen. (Zum Verständnis der folgenden Ausführungen sind Grundkenntnisse der Matrizenrechnung erforderlich, wie sie z.B. im Anhang A2 oder in /9/ nachgelesen werden können).

Trennt man in der Form (1.2.4) des mathematischen Zustandsmodells die konstanten Systemparameter a_{ik} ; b_i ; c_i und d von den zeitabhängigen Größen $x_i(t)$; $u(t)$ und $y(t)$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u(t) ; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} \\
 \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underline{b} \cdot u(t) ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\
 y(t) &= [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + d \cdot u(t) \\
 y(t) &= \underbrace{\underline{c}' \cdot \underline{x}(t)}_{\underline{c}' \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}} + d \cdot u(t)
 \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

erhält man das mathematische Zustandsmodell in Matrzenschreibweise. Dieses Modell wird auch als Vektordifferentialgleichungsform des Zustandsmodells bezeichnet.

Durch Ausmultiplizieren der Matrizen und Vektoren kann man sich überzeugen, daß die Formen (1.2.28) und (1.2.4) identisch sind. Lediglich der Vektor der Anfangszustände wurde der Vollständigkeit halber in (1.2.28) hinzugefügt. Diese Beziehung sagt, daß die Anfangswerte der Zustandsgrößen $\underline{x}(0)$ einen beliebigen Wert \underline{x}_0 (z.B. 3) haben können.

Noch weiter symbolisiert ist die folgende Schreibweise des Zustandsmodells (Vergleiche mit den Ausdrücken unter den geschweiften Klammern in (1.2.28))

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\
 y(t) &= \underline{c}\underline{x}(t) + d u(t) .
 \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Dabei sind bei einem System n-ter Ordnung

- A : die $n \times n$ Systemmatrix
- b : der $n \times 1$ Eingangsvektor
- c : der $1 \times n$ Ausgangsvektor, der auch häufig als c' geschrieben wird, um anzudeuten, daß es sich um einen Zeilenvektor handelt.
- d : der skalare Durchgangsfaktor
- $\underline{x}(t)$: der $n \times 1$ Vektor der Differentialquotienten des Zustandsvektors
 $\underline{x}(t)$: der $n \times 1$ Vektor der Zustandsgrößen
 $u(t)$: die skalare Eingangsgröße
 $y(t)$: die skalare Ausgangsgröße
 $\underline{x}(0)$: Vektor der Anfangszustände der Zustandsgrößen
 \underline{x}_0 : Vektor der Werte der Anfangszustände
n : Ordnung des Systems (Anzahl der Differentialgleichungen 1. Ordnung, Anzahl der unabhängigen Energiespeicher im System)

Die Einführung der Schreibweise (1.2.28) und (1.2.29) bringt zunächst keine neue Erkenntnis, sondern neben einer Schreibvereinfachung nach einer gewissen Gewöhnungszeit auch eine größere Übersichtlichkeit. Viele Zusammenhänge lassen sich später auch mit Hilfe der Matrizenrechnung einfacher allgemeingültig ausdrücken.

Um die Trivialität der Umformung von der Form (1.2.4) in die Form (1.2.28) zu zeigen, soll das Zustandsmodell des Gasdruckmeßgerätes (1.2.14) in die Form (1.2.28) gebracht werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{m} & -\frac{c}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A/m \\ 0 \end{bmatrix} p(t) ; \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ s(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{U_0}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ s(t) \end{bmatrix} + 0 \quad p(t) . \quad (1.2.30)$$

1.2.1.3 Die Linearisierung nichtlinearer Systemmodelle

An den Beispielen der statischen Kennlinie einer Wirkungsanordnung zur Wassererhitzung (Bild 1.1.7) und am mathematischen Modell eines Behälterfüllstandes (Beispiel 1.2.6) haben wir gesehen, daß technische Übertragungssysteme nichtlineare Übertragungseigenschaften haben können. Der Fall der Nichtlinearität kommt sogar häufiger vor als der Fall der Linearität. Wie schon weiter vorn erwähnt wurde, ist es häufig sinnvoll, das nichtlineare System durch ein lineares Modell anzunähern, um die einfacheren

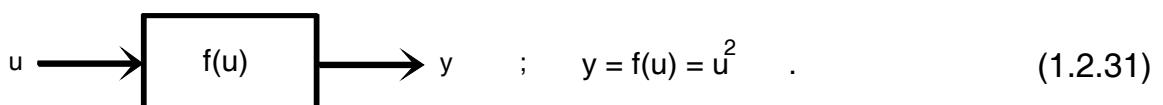
linearen Systembeschreibungs-, Analyse- und Beeinflussungsmethoden auf dieses System anwenden zu können.

Um ein nichtlineares Systemmodell durch ein lineares möglichst gut approximieren zu können, geht man i.a. von folgender Grundidee aus: Technische Systeme arbeiten häufig in einem Arbeitspunkt, von dem sie im Normalbetrieb nur wenig abweichen. (Die später vorzustellende Regelungstechnik hat häufig nur den Zweck, ein System in seinem Arbeitspunkt zu halten). Linearisiert man die Systemmodelle in der Nähe ihres Arbeitspunktes, macht man die geringsten Approximationsfehler.

Wir machen uns den Vorgang zunächst an der Linearisierung einer statischen Kennlinie klar und verallgemeinern ihn dann, um auch nichtlineare dynamische Systemmodelle linearisieren zu können.

- **Linearisierung einer statischen Kennlinie**

Ein Übertragungsglied habe folgendes statische Übertragungsverhalten



Der Arbeitspunkt liege bei $u = u_A = 2$. Zeichnen wir uns diesen Zusammenhang auf, erhalten wir folgende Kennlinie

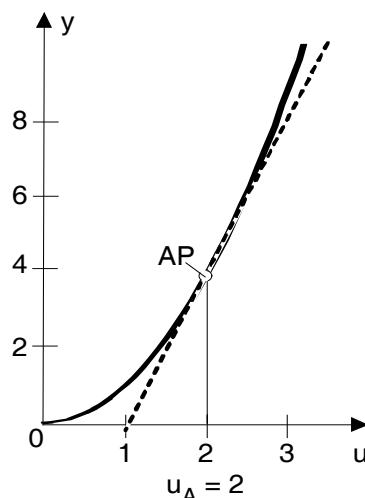


Bild 1.2.10 Linearisierung einer statischen Kennlinie

Linearisierung im Arbeitspunkt bedeutet das Anlegen einer Tangente im Arbeitspunkt, d.h. Approximation der nichtlinearen Kennlinie (hier eine Parabel) durch die lineare Kennlinie (gestrichelte Gerade).

Im Arbeitspunkt gehört zur Eingangsgröße $u = u_A = 2$ sowohl für die nichtlineare als auch für die linearisierte Kennlinie die Ausgangsgröße $y = 4$. Weicht die Eingangsgröße um Δu vom Arbeitspunkt u_A ab: $u = u_A + \Delta u$, ergeben sich folgende Verhältnisse:

Δu	-1	-0,5	0	0,5	1
$u = u_A + \Delta u$	1	1,5	2	2,5	3
$y_{(\text{nichtlinear})}$	1	2,25	4	6,25	9
$y_{(\text{linear})}$	0	2	4	6	8
Fehler $y_{(\text{linear})} - y_{(\text{nichtlinear})}$	-1	-0,25	0	-0,25	-1

Tabelle 1.2.2 Zur Linearisierung einer statischen Kennlinie

Wir sehen, daß der Fehler der linearen Näherung umso kleiner wird, je geringer die Abweichung Δu vom Arbeitspunkt u_A ist.

Liegt die Beschreibung der statischen Kennlinie analytisch in Form einer Gleichung $y=f(u)$ vor, kann man diese nichtlineare Gleichung im Arbeitspunkt in eine Taylorreihe /10/ entwickeln

$$f(u) = f(u_A) + \frac{u - u_A}{1!} \left(\frac{d f(u)}{du} \right)_{u=u_A} + \dots$$

Vernachlässigt man (wie vorangehend schon getan) die Reihenglieder mit höheren Potenzen von $(u - u_A)$ und nennt $f(u) = y$ und $f(u_A) = y_A$, erhält man

$$y = y_A + (u - u_A) \left(\frac{d f(u)}{du} \right)_{u=u_A} .$$

Bezeichnet man die Abweichung vom Arbeitspunkt am Eingang $u - u_A$ mit Δu und am Ausgang $y - y_A$ mit Δy , erhält man schließlich die analytische Beziehung zur Linearisierung einer nichtlinearen statischen Kennlinie

$$\Delta y = \left(\frac{d f(u)}{du} \right)_{u=u_A} \cdot \Delta u . \quad (1.2.32)$$

Für unsere Beispielkennlinie (1.2.31) $y = f(u) = u^2$ berechnen wir damit folgende lineare Approximation im Arbeitspunkt $u_A = 2$

$$\Delta y = \left(\frac{d f(u)}{du} \right)_{u=u_A=2} \cdot \Delta u = \left(\frac{d}{du}(u^2) \right)_{u=2} \cdot \Delta u = (2 u)_{u=2} \cdot \Delta u = 4 \Delta u$$

$$\Delta y = 4 \Delta u . \quad (1.2.33)$$

Schreibt man anschließend wieder $\Delta y = y - y_A$ und $\Delta u = u - u_A$:

$$y - y_A = 4 \cdot (u - u_A) \quad (1.2.34)$$

und setzt die Arbeitspunkte $u_A = 2$ und $y_A = 4$ ein

$$y - 4 = 4 \cdot (u - 2),$$

erhält man die in Bild 1.2.10 eingezeichnete Tangente (linearisierte Kennlinie im Arbeitspunkt) in analytischer Form :

$$y = 4u - 4. \quad (1.2.35)$$

Durch Einsetzen verschiedener Werte von u kann man sich von diesem Sachverhalt leicht überzeugen.

Auch das dynamische Verhalten, also das Zeitverhalten eines Systems beim Übergang von einem Betriebszustand in einen anderen (vergleiche Bild 1.1.6 und die dazugehörigen Erläuterungen), kann nichtlinear sein. Da das dynamische Systemverhalten bei kontinuierlichen Systemen immer durch Differentialgleichungen beschrieben wird, gestaltet sich der Linearisierungsvorgang nicht mehr so einfach, wie bei der Linearisierung einer statischen Kennlinie.

Wir zeigen in Folgenden eine Methode, die nichtlineare Systeme, egal ob sie statisch oder dynamisch nichtlinear sind, in einem Arbeitspunkt linearisieren.

- **Linearisierung eines nichtlinearen dynamischen Systems**

Wieder basierend auf einer Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied können auch nichtlineare mathematische Modelle der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

in einem Arbeitspunkt linearisiert werden. Das linearisierte Zustandsmodell hat danach folgende Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\Delta x_1}(t) \\ \vdots \\ \dot{\Delta x_n}(t) \end{bmatrix} &= \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} + \underline{b} \cdot \Delta u(t) ; \quad \begin{bmatrix} \Delta x_1(0) \\ \vdots \\ \Delta x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} - x_{1A} \\ \vdots \\ x_{n0} - x_{nA} \end{bmatrix} \\ \Delta y(t) &= \underline{c} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} + d \cdot \Delta u(t) , \end{aligned} \quad (1.2.37a)$$

die in Matrixschreibweise auch wie folgt abgekürzt werden kann

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{\Delta x}(t) + \underline{b} \cdot \Delta u(t) ; \quad \underline{\Delta x}(0) = \underline{x}_0 - \underline{x}_A \\ \Delta y(t) &= \underline{c} \cdot \underline{\Delta x}(t) + d \cdot \Delta u(t) . \end{aligned}$$

Bis auf die Deltazeichen (Δ) entspricht (1.2.37a) damit unserem im Kapitel 1.2.1.2 eingeführten linearen mathematischen Zustandsmodell (1.2.29). Die Deltazeichen deuten wieder an, daß es sich bei den einzelnen Größen um Bewegungen um den Arbeitspunkt handelt. Die in (1.2.37a) eingeführten Parametermatrizen \underline{A} , \underline{b} , \underline{c} und d werden in diesem Zusammenhang wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x_A \\ u(t)=u_A}} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x_A \\ u(t)=u_A}} \\ \underline{c} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x_A \\ u(t)=u_A}} ; \quad d = \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]_{\substack{x(t)=x_A \\ u(t)=u_A}} . \end{aligned} \quad (1.2.37b)$$

Der Arbeitspunkt eines nichtlinearen dynamischen Systems ist i.a. eine Ruhelage des Systems. Eine Ruhelage ist dadurch gekennzeichnet, daß bei einer konstanten Eingangsgröße $u = u_A$ das System zur Ruhe kommt, d.h. die Zustandsgrößen $x(t)$ konstant werden: $x(t) = x_A = \text{konst.}$ Zeitlich konstante Zustandsgrößen bedeuten, daß die zeitlichen Veränderungen der Zustandsgrößen zu Null werden:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{0} \quad . \quad (1.2.38)$$

Damit kann man aus (1.2.36) durch Nullsetzen der linken Gleichungsseiten die Ruhelage $\underline{x}(t) = \underline{x}_A$ der Zustandsgrößen berechnen.

Mit der Angabe von

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_A \quad \text{und} \quad u(t) = u_A \quad (1.2.39)$$

ist der Arbeitspunkt des dynamischen Systems eindeutig festgelegt.

Zum besseren Verständnis des Linearisierungsvorganges dynamischer Systeme sollen abschließend zwei Beispiele gerechnet werden. Beispiel (1.2.7) dient dazu, die formalen Rechenschritte eines solchen Vorganges zu illustrieren. Das Beispiel (1.2.8) stellt einen Bezug zu einem realen System her und soll eine gewisse Anschaulichkeit in den Linearisierungsvorgang bringen.

Beispiel 1.2.7: Das folgende nichtlineare Modell eines Übertragungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)x_2(t) + (x_1(t))^2 + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - u(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

soll durch ein lineares Modell in der sich einstellenden Ruhelage bei $u = u_A = 2$ beschrieben werden.

a) Berechnung des Arbeitspunktes in der Ruhelage $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{0}$ bei $u = u_A = 2$

$$0 = -x_{1A} \cdot x_{2A} + (x_{1A})^2 + 2 \quad (1.2.41a)$$

$$0 = x_{1A} - 2 . \quad (1.2.41b)$$

Aus (1.2.41b) folgt $x_{1A} = 2$. Dieses Ergebnis in (1.2.41a) eingesetzt ergibt

$$0 = -2x_{2A} + 4 + 2$$

$$x_{2A} = 6/2 = 3 .$$

Damit ist der Arbeitspunkt bestimmt

$$\underline{x}_A = \begin{bmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u_A = 2$$

- b) Zur Berechnung der Parametermatrizen wird zum besseren Verständnis ein Bezug zwischen der formalen Systembeschreibung (1.2.36) und dem Beispielsystem (1.2.40) hergestellt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = -x_1(t)x_2(t) + (x_1(t))^2 + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_1(t) - u(t) \\ y(t) &= g(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_2(t). \end{aligned}$$

Die Parametermatrizen bestimmen sich dann mittels Differentialrechnung wie folgt

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x_A \\ u(t)=u_A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-x_1(t)x_2(t) + (x_1(t))^2 + u(t))}{\partial(x_1(t))} & \frac{\partial(-x_1(t)x_2(t) + (x_1(t))^2 + u(t))}{\partial(x_2(t))} \\ \frac{\partial(x_1(t) - u(t))}{\partial(x_1(t))} & \frac{\partial(x_1(t) - u(t))}{\partial(x_2(t))} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ u(t)=2}}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -x_2(t) + 2x_1(t) & -x_1(t) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ u(t)=2}} = \begin{bmatrix} -3+2 \cdot 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x_A \\ u(t)=u_A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-x_1(t)x_2(t) + (x_1(t))^2 + u(t))}{\partial u(t)} \\ \frac{\partial(x_1(t) - u(t))}{\partial u(t)} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ u(t)=2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x_A \\ u(t)=u_A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ u(t)=2}} = [0 \quad 1]$$

Nach Einsetzen der berechneten Parametermatrizen in die allgemeine linearisierte Form des Zustandsmodells (1.2.37a) ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta x_1}(t) \\ \dot{\Delta x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} ,$$

das im Arbeitspunkt

$$\underline{x}_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} ; \quad u_A = 2$$

linearisierte mathematische Zustandsmodell des nichtlinearen Systemmodells (1.2.40).

Bevor wir das nächste Beispiel berechnen, sollen noch einige allgemeingültige Bemerkungen gemacht werden:

- Es muß nicht – wie im vorgestellten Beispiel – eine eindeutige Ruhelage des Systems existieren. Häufig treten mehrere oder sogar unendlich viele Ruhelagen auf. In diesem Fall muß (und kann man auch) aus der vorliegenden praktischen Problemstellung eine Ruhelage zur Linearisierung wählen.
- Aus dem berechneten Beispiel ist zu erkennen, daß lineare Systemteile innerhalb eines nichtlinearen Systems (z.B. die zweite Differentialgleichung $\dot{x}_2(t) = x_1(t) - u(t)$) durch den Linearisierungsvorgang nicht verändert werden.
- Ist eine Linearisierung um einen festen Arbeitspunkt $\underline{x} = \underline{x}_A ; u = u_A$ nicht möglich, z.B. wenn sich die Eingangsgröße im Betrieb stark verändert, müssen andere Methoden zur Linearisierung angewendet werden. Das sich dabei ergebende lineare Modell wird dann zeitvariabel. Nähere Einzelheiten zu dieser Problemstellung findet man in /4/.

Beispiel 1.2.8: Im Beispiel 1.2.6 leiteten wir das nichtlineare mathematische Modell eines Behälterfüllstandes mit Abfluß und variablem Zufluß ab. Kürzt man die Systemkonstanten in (1.2.27) wie folgt ab

$$k_1 = \frac{a k_a \sqrt{2g}}{A} ; \quad k_2 = \frac{k_v}{A} ;$$

erhält man folgende Modellbeschreibung

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= -k_1 \sqrt{h(t)} + k_2 \alpha(t) \\ h(t) &= h(t).\end{aligned}\quad (1.2.42)$$

Dieses Modell soll durch ein lineares Zustandsmodell approximiert werden. Der Arbeitspunkt soll eine bestimmte konstante Füllhöhe $h(t) = h_A = \text{konst.}$ sein. Aus der Ruhelage $\dot{h}(t) = 0$ kann man die dazugehörige Eingangsgröße $\alpha(t) = \alpha_A$ im Arbeitspunkt berechnen (d.h. die Ventilöffnung α_A , die zur gewünschten Füllhöhe h_A bei konstantem Ausfluß gehört):

$$\begin{aligned}0 &= -k_1 \sqrt{h_A} + k_2 \alpha_A \\ \alpha_A &= \frac{k_1}{k_2} \sqrt{h_A}.\end{aligned}$$

Damit ist der Arbeitspunkt eindeutig festgelegt

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_A = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{h_A} \\ h &= h_A.\end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung des Linearisierungsvorganges stellen wir wieder die formale und die für das Beispiel spezifische Vorgehensweise nebeneinander.

Das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), u(t)); & \dot{h}(t) &= -k_1 \sqrt{h(t)} + k_2 \alpha(t) \\ y(t) &= g(x_1(t), u(t)); & h(t) &= h(t)\end{aligned}$$

mit dem Arbeitspunkt

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{1A} & ; & & h &= h_A \\ u &= u_A & ; & & \alpha = \alpha_A &= \frac{k_1}{k_2} \sqrt{h_A},\end{aligned}$$

wird mittels der Beziehungen

$$a = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right]_{\substack{x_1(t)=x_{1A} \\ u(t)=u_A}} ; \quad a = \left[\frac{\partial (-k_1 \sqrt{h(t)} + k_2 \alpha(t))}{\partial h(t)} \right]_{\substack{h(t)=h_A \\ \alpha(t)=\alpha_A}}$$

$$b = \left[\frac{\partial f_1}{\partial u} \right]_{\substack{x_1(t)=x_{1A} \\ u(t)=u_A}} ; \quad b = \left[\frac{\partial(-k_1 \sqrt{h(t)} + k_2 \alpha(t))}{\partial \alpha(t)} \right]_{\substack{h(t)=h_A \\ \alpha(t)=\alpha_A}}$$

$$c = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \right]_{\substack{x_1(t)=x_{1A} \\ u(t)=u_A}} ; \quad c = \left[\frac{\partial h(t)}{\partial h(t)} \right]_{\substack{h(t)=h_A \\ \alpha(t)=\alpha_A}}$$

durch folgendes lineare System approximiert

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x_1(t)} &= a \Delta x_1(t) + b \Delta u(t) & ; \quad \dot{\Delta h(t)} &= a \Delta h(t) + b \Delta \alpha(t) \\ \Delta y(t) &= c \Delta x_1(t) & ; \quad \Delta h(t) &= \Delta h(t) . \end{aligned}$$

Für unser spezifisches Beispiel können a, b und c mit Hilfe der Differentialrechnung explizit berechnet werden

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{\partial(-k_1 \sqrt{h(t)} + k_2 \alpha(t))}{\partial h(t)} \right]_{\substack{h(t)=h_A \\ \alpha(t)=\alpha_A}} = \left[-\frac{k_1}{2\sqrt{h(t)}} \right]_{\substack{h(t)=h_A \\ \alpha(t)=\alpha_A}} = -\frac{k_1}{2\sqrt{h_A}} \\ b &= \left[\frac{\partial(-k_1 \sqrt{h(t)} + k_2 \alpha(t))}{\partial \alpha(t)} \right]_{\substack{h(t)=h_A \\ \alpha(t)=\alpha_A}} = k_2 \quad ; \quad c = \left[\frac{\partial h(t)}{\partial h(t)} \right]_{\substack{h(t)=h_A \\ \alpha(t)=\alpha_A}} = 1 . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgendes linearisierte mathematische Zustandsmodell unseres Behälterfüllstandes

$$\begin{aligned} \dot{\Delta h(t)} &= -\frac{k_1}{2\sqrt{h_A}} \Delta h(t) + k_2 \Delta \alpha(t) \\ \Delta h(t) &= \Delta h(t) \end{aligned} \tag{1.2.43}$$

im Arbeitspunkt $h = h_A$ und $\alpha = \alpha_A = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{h_A}$.

1.2.1.4 Berechnung von Systemantworten mathematischer Zustandsmodelle

In Kapitel 1.2.1.2 hatten wir als ein Ziel der mathematischen Modellbildung die Berechnung von Systemantworten hervorgehoben, um das Wirkungsverhalten des Systems studieren zu können. Dies ist insbesondere in zwei Situationen interessant

- Die Wirkungsanordnung liegt als reales System noch gar nicht vor.

- Die Wirkungsanordnung liegt real vor, es ist aber zu zeit- und kostenaufwendig oder zu gefährlich das Wirkungsverhalten am realen System zu erproben.

Der erste Fall wird häufig bei Systemneuentwicklungen vorliegen, z.B. beim Studium des Windwiderstandsverhaltens einer neuen Karosserieform im Automobilbau. Der zweite Fall könnte dann vorliegen, wenn z.B. ein chemisches Reaktionsgefäß in Betrieb genommen werden soll, bei dem das Druck- und Temperaturverhalten der ablaufenden Reaktion unbekannt ist. Mit einer Rechnersimulation könnten ungefährliche Anfahrstrategien entwickelt werden. Auch bei der Einweisung von Bedienpersonal haben sich Simulationen als zweckmäßig erwiesen, z.B. in Form eines Flugsimulators.

Für uns wird die Berechnung von Systemantworten insbesondere beim Entwurf von Systembeeinflussungsmechanismen von Bedeutung sein, um überprüfen zu können, ob ein Entwurf auch zu den gewünschten Ergebnissen führt.

Zur Berechnung von Systemantworten mathematischer Zustandsmodelle gibt es prinzipiell drei Methoden:

- Analytische Lösungsmöglichkeiten, z.B. die klassischen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen (Trennung der Variablen, Variation der Konstanten u.s.w.) und das Lösungsverfahren mittels der sogenannten Laplace–Transformation.
- Algorithmische Lösungsmethoden zur schrittweisen numerischen Berechnung von Systemantworten mittels eines Digitalrechners.
- Apparative Lösungsmethoden, z.B. durch elektronische Nachbildung von Rechenoperationen auf einem sogenannten Analogrechner.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einer algorithmischen Lösungsmethode auseinandersetzen, die es uns erlauben wird, die Systemantworten auch umfangreicher Übertragungssysteme zu berechnen. Das Ergebnis dieser Berechnungen sind Wertetabellen und Graphen der Systemantworten über der Zeit.

Da wir in einigen Fällen bei der Behandlung weiterer Stoffgebiete auch analytische Lösungsmethoden zur Ableitung von Zusammenhängen benötigen, werden wir im Kapitel (1.2.3) eine analytische Lösungsmethode für Zustandsmodelle mit Hilfe der Laplace–Transformation kennenlernen.

Auf die Besprechung der Analogrechentechnik müssen wir aus Zeitgründen verzichten. Eine Einführung in diese Technik wird in /11/ geboten.

Die algorithmische Lösung von Zustandsmodellen beruht auf folgenden Gedanken:

Ein mathematisches Zustandsmodell der Form (1.2.4), mit dessen Hilfe sich alle linearen Übertragungsglieder beschreiben lassen, ist ein kontinuierliches Modell, das für alle Zeitpunkte t das Systemverhalten beschreibt. Bedingt durch die endliche Rechenzeit eines Digitalrechners kann dieser keine kontinuierliche Signalverarbeitung vornehmen. Er benötigt eine Eingangsinformation in Form eines Zahlenwertes, den er in einer bestimmten Zeit mittels eines Algorithmus in eine Ausgangsinformation umrechnet. Er arbeitet also schrittweise, nicht kontinuierlich. Will man mathematische Modelle auf einem Digitalrechner berechnen, muß man das Modell so umformen, daß es einer schrittweisen Berechnung zugänglich wird. Dazu kann man die linken Seiten der Differentialgleichungen im Zustandsmodell (1.2.4), die Differentialquotienten $\dot{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), wie folgt durch Differenzenquotienten annähern

$$\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x_i(t)}{\Delta t} . \quad (1.2.44)$$

Man weitet dadurch den infinitesimal kleinen Zeitraum dt zu einem endlichen Zeitraum Δt auf. Damit kann man die Zeitachse in abzählbare Zeitpunkte einteilen, denen man jeweils einen Funktionswert $x(t)$ zuordnen kann.

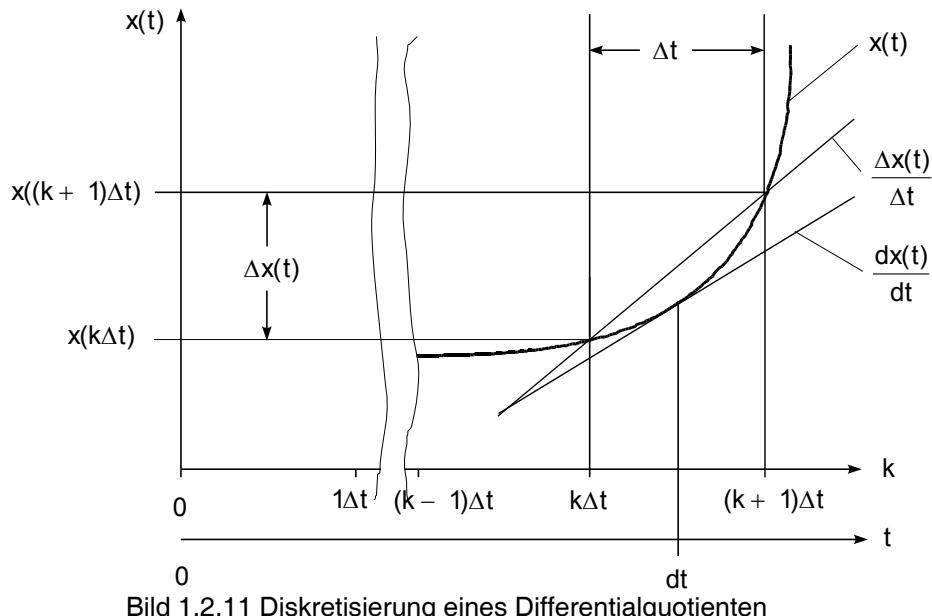


Bild 1.2.11 Diskretisierung eines Differentialquotienten

Nennt man einen beliebigen Zeitpunkt $k \cdot \Delta t$, dann ist der darauffolgende $(k+1) \cdot \Delta t$ und die Differenz daraus

$$(k+1) \cdot \Delta t - k \cdot \Delta t = \Delta t . \quad (1.2.45)$$

Die zu diesen Zeitpunkten gehörenden Funktionswerte bilden die Differenz

$$x((k+1) \cdot \Delta t) - x(k \cdot \Delta t) = \Delta x(t) . \quad (1.2.46)$$

Setzt man (1.2.46) in (1.2.44) ein

$$\dot{x}(t) = \frac{d x(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x((k+1)\Delta t) - x(k\Delta t)}{\Delta t}, \quad (1.2.47)$$

ergibt sich eine näherungsweise Berechnungsmöglichkeit des Differentialquotienten aus einzelnen (diskreten) Funktionswerten.

Setzt man nun (1.2.47) anstelle der Differentialquotienten in das Zustandsmodell ein

$$\begin{aligned} \frac{x_1((k+1)\Delta t) - x_1(k\Delta t)}{\Delta t} &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + b_1 u(t) \\ \frac{x_2((k+1)\Delta t) - x_2(k\Delta t)}{\Delta t} &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) + b_2 u(t) \\ &\vdots \\ \frac{x_n((k+1)\Delta t) - x_n(k\Delta t)}{\Delta t} &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + b_n u(t) \\ y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + d u(t), \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

sind die linken Gleichungsseiten bereits einer schrittweisen Berechnung zugänglich, die rechten Seiten – da sie noch kontinuierliche Funktionen von t enthalten – aber noch nicht.

Wir erinnern uns daran, daß der Zeitpunkt t der rechten Gleichungsseiten zu einem infinitesimal kleinen Zeitpunkt dt der linken Gleichungsseiten gehört. Nun haben wir aber dt näherungsweise durch einen endlichen Zeitraum Δt ersetzt; das heißt, die Funktionswerte $x_i(t)$ der rechten Seite können sowohl dem Zeitpunkt $k \cdot \Delta t$ als auch dem Zeitpunkt $(k+1) \cdot \Delta t$ oder jedem Zeitpunkt zwischen ihnen zugeordnet werden. In jedem Falle macht man einen Fehler, der – wie man jedoch jetzt deutlich erkennt – immer kleiner wird, je kleiner man Δt wählt.

Um den abzuleitenden Algorithmus einfach zu halten, wählen wir

$$t \approx k \cdot \Delta t \quad (1.2.49a)$$

und damit

$$x_i(t) \approx x_i(k \cdot \Delta t), \quad u(t) \approx u(k \cdot \Delta t) \quad \text{und} \quad y(t) \approx y(k \cdot \Delta t). \quad (1.2.49b)$$

Setzen wir diese Beziehung in (1.2.48) ein und stellen das Gleichungssystem nach $x_i((k+1)\Delta t)$ um, erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_1((k+1)\Delta t) &= x_1(k\Delta t) + \Delta t \{ a_{11} x_1(k\Delta t) + a_{12} x_2(k\Delta t) + \dots + a_{1n} x_n(k\Delta t) + b_1 u(k\Delta t) \} \\
x_2((k+1)\Delta t) &= x_2(k\Delta t) + \Delta t \{ a_{21} x_1(k\Delta t) + a_{22} x_2(k\Delta t) + \dots + a_{2n} x_n(k\Delta t) + b_2 u(k\Delta t) \} \\
&\vdots \\
x_n((k+1)\Delta t) &= x_n(k\Delta t) + \Delta t \{ a_{n1} x_1(k\Delta t) + a_{n2} x_2(k\Delta t) + \dots + a_{nn} x_n(k\Delta t) + b_n u(k\Delta t) \} \\
y(k\Delta t) &= c_1 x_1(k\Delta t) + c_2 x_2(k\Delta t) + \dots + c_n x_n(k\Delta t) + d u(k\Delta t)
\end{aligned} \tag{1.2.50}$$

Dieses Gleichungssystem enthält keine Differentialquotienten mehr, man kann es schrittweise durch fortgesetzte Multiplikation und Addition lösen. Dabei ist Δt eine zu wählende Rechenschrittweite, die angibt in welchem "Raster" die Lösungswerte y berechnet werden sollen. "k" ist eine Zählvariable für diese "Rasterpunkte", die bei Null beginnt und ganzahlig bis zu einem Endwert läuft. Die Größe dieses Endwertes ergibt sich automatisch aus einer gewählten Beobachtungsintervalldauer t_{end} , über der der Zeitverlauf des zu berechnenden Ausgangsgrößenverlaufs y dargestellt werden soll. z.B.:

$$\Delta t = 0.01 ; t_{\text{end}} = 1 ; \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 98, 99, 100.$$

Neben Δt und t_{end} müssen natürlich die numerischen Werte der Parameter a_{ik} , b_i , c_i und d sowie der Verlauf der Eingangsgröße u zu den Berechnungszeitpunkten $k \cdot \Delta t$ bekannt sein. Dies ist jedoch selbstverständlich, da wir ja für ein gegebenes System (damit liegen die Systemparameter fest) und für einen bestimmten Eingangssignalverlauf u den Verlauf der Ausgangsgröße y berechnen wollen.

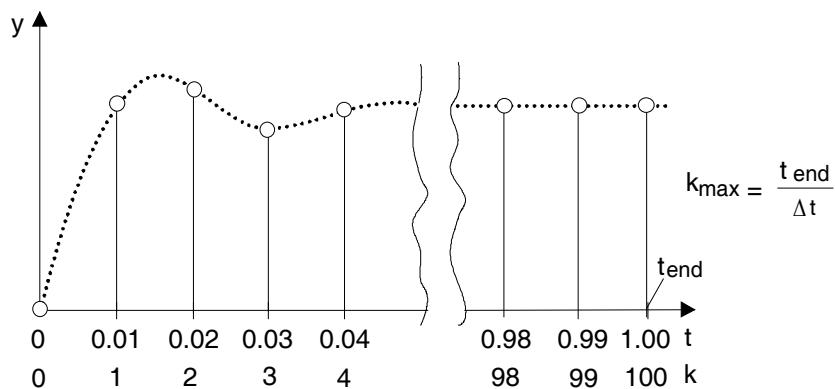


Bild 1.2.12 Eine berechnete diskrete Systemantwort

Um mit der Berechnung beginnen zu können, müssen zum Zeitpunkt $t = k = 0$ darüberhinaus auch die Anfangswerte $x_i(0)$ bekannt sein. Ihre Werte sind wiederum vom zu untersuchenden Problem abhängig, sehr häufig setzt man die Anfangswerte der Zustandsgröße gleich Null.

An einem einfachen Beispiel soll die Wirkungsweise des Algorithmus 1.2.50 demonstriert werden:

Beispiel 1.2.9: Im Beispiel 1.2.4 leiteten wir das mathematische Zustandsmodell einer Widerstands–Kondensator–Kombination (1.2.18) ab

$$\begin{aligned}\dot{u}_C(t) &= -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_e(t) \\ u_a(t) &= u_C(t).\end{aligned}$$

Wir wollen mit Hilfe des Algorithmus (1.2.50) eine Systemantwort $y(t) = u_a(t)$ unter folgenden Bedingungen berechnen: $R = 1k\Omega$; $C = 1000\mu F$. Die Systemeingangsgröße sei ein Einheitssprung.

(1.2.18) geht unter diesen Bedingungen über in

$$\begin{aligned}\dot{u}_C(t) &= -u_C(t) + u_e(t) \\ u_a(t) &= u_C(t).\end{aligned}\tag{1.2.51}$$

Im Vergleich mit der allgemeinen Form des Zustandsmodells (1.2.4) erkennen wir folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}n &= 1 \text{ (Es liegt eine Differentialgleichung vor);} \\ \dot{x}_1(t) &= \dot{u}_C(t); \quad x_1(t) = u_C(t); \\ u(t) &= u_e(t); \quad y(t) = u_a(t); \\ a_{11} &= -1; \quad b_1 = 1; \quad c_1 = 1; \quad d = 0.\end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen läßt sich (1.2.51) wie folgt schreiben

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}\tag{1.2.52}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und einem Vergleich zwischen (1.2.4) und (1.2.50) läßt sich der Algorithmus zur schrittweisen Lösung sofort aufschreiben:

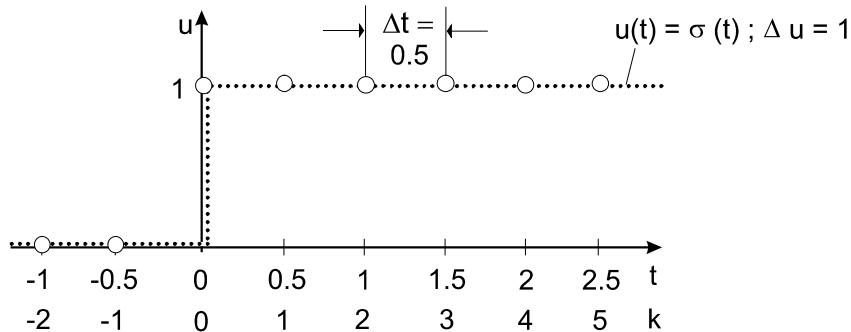
$$\begin{aligned}x_1((k+1)\Delta t) &= x_1(k\Delta t) + \Delta t \{-x_1(k\Delta t) + u(k\Delta t)\} \\ y(k\Delta t) &= x_1(k\Delta t).\end{aligned}\tag{1.2.53}$$

Um sie lösen zu können, muß zunächst eine Rechenschrittweite Δt gewählt werden. Aus der vorangegangenen Ableitung ist ersichtlich, daß die Berechnung umso exakter wird, je

k	t	$x_1((k+1)\Delta t)$	$=$	$x_1(k \cdot \Delta t)$	$- \Delta t \cdot x_1(k \cdot \Delta t)$	$+ \Delta t \cdot u(k \cdot \Delta t)$	$y(k \cdot \Delta t)$	$=$	$x_1(k \cdot \Delta t)$
0	0	$x_1(0+1)0,5$	$=$	$x_1(0 \cdot 0,5)$	$- 0,5 \cdot x_1(0 \cdot 0,5)$	$+ 0,5 \cdot u(0 \cdot 0,5)$	$y(0 \cdot 0,5)$	$=$	$x_1(0 \cdot 0,5)$
		$x_1(0,5)$	$=$	$\underbrace{x_1(0)}_0$	$- \underbrace{0,5 \cdot x_1(0)}_0$	$+ \underbrace{0,5 \cdot u(0)}_0$	$y(0)$	$=$	$\underbrace{x_1(0)}_0 = 0$
1	0,5	$x_1((1+1)0,5)$	$=$	$x_1(1 \cdot 0,5)$	$- 0,5 \cdot x_1(1 \cdot 0,5)$	$+ 0,5 \cdot u(1 \cdot 0,5)$	$y(1 \cdot 0,5)$	$=$	$x_1(1 \cdot 0,5)$
		$x_1(1)$	$=$	$\underbrace{x_1(0,5)}_{0,5}$	$- \underbrace{0,5 \cdot x_1(0,5)}_{-0,25}$	$+ \underbrace{0,5 \cdot u(0,5)}_{+0,5}$	$y(0,5)$	$=$	$x_1(0,5) = 0,5$
2	1	$x_1((2+1)0,5)$	$=$	$x_1(2 \cdot 0,5)$	$- 0,5 \cdot x_1(2 \cdot 0,5)$	$+ 0,5 \cdot u(2 \cdot 0,5)$	$y(2 \cdot 0,5)$	$=$	$x_1(2 \cdot 0,5)$
		$x_1(1,5)$	$=$	$\underbrace{x_1(1)}_{0,75}$	$- \underbrace{0,5 \cdot x_1(1)}_{-0,375}$	$+ \underbrace{0,5 \cdot u(1)}_{+0,5}$	$y(1)$	$=$	$x_1(1) = 0,75$
3	1,5	$x_1((3+1)0,5)$	$=$	$x_1(3 \cdot 0,5)$	$- 0,5 \cdot x_1(3 \cdot 0,5)$	$+ 0,5 \cdot u(3 \cdot 0,5)$	$y(3 \cdot 0,5)$	$=$	$x_1(3 \cdot 0,5)$
		$x_1(2)$	$=$	$\underbrace{x_1(1,5)}_{0,875}$	$- \underbrace{0,5 \cdot x_1(1,5)}_{-0,4375}$	$+ \underbrace{0,5 \cdot u(1,5)}_{+0,5}$	$y(1,5)$	$=$	$x_1(1,5) = 0,875$
4	2	$x_1((4+1)0,5)$	$=$	$x_1(4 \cdot 0,5)$	$- 0,5 \cdot x_1(4 \cdot 0,5)$	$+ 0,5 \cdot u(4 \cdot 0,5)$	$y(4 \cdot 0,5)$	$=$	$x_1(4 \cdot 0,5)$
		$x_1(2,5)$	$=$	$\underbrace{x_1(2)}_{0,9375}$	$- \underbrace{0,5 \cdot x_1(2)}_{-0,46875}$	$+ \underbrace{0,5 \cdot u(2)}_{+0,5}$	$y(2)$	$=$	$x_1(2) = 0,9375$
5	2,5	$x_1((5+1)0,5)$	$=$	$x_1(5 \cdot 0,5)$	$- 0,5 \cdot x_1(5 \cdot 0,5)$	$+ 0,5 \cdot u(5 \cdot 0,5)$	$y(5 \cdot 0,5)$	$=$	$x_1(5 \cdot 0,5)$
		$x_1(3)$	$=$	$\underbrace{x_1(2,5)}_{0,96875}$	$- \underbrace{0,5 \cdot x_1(2,5)}_{-0,4844}$	$+ \underbrace{0,5 \cdot u(2,5)}_{+0,5}$	$y(2,5)$	$=$	$x_1(2,5) = 0,96875$
6	3	$x_1((6+1)0,5)$	$=$	$x_1(6 \cdot 0,5)$	$- 0,5 \cdot x_1(6 \cdot 0,5)$	$+ 0,5 \cdot u(6 \cdot 0,5)$	$y(6 \cdot 0,5)$	$=$	$x_1(6 \cdot 0,5)$
		$x_1(3,5)$	$=$	$\underbrace{x_1(3)}_{0,9844}$	$- \underbrace{0,5 \cdot x_1(3)}_{-0,4922}$	$+ \underbrace{0,5 \cdot u(3)}_{+0,5}$	$y(3)$	$=$	$x_1(3) = 0,9844$

Tabelle 1.2.4: Schrittweise Berechnung der Systemantwort des Zustandsmodells 1.2.52

kleiner Δt gewählt wird. Wir wählen für das vorliegende Beispiel $\Delta t = 0,5$. Auf eine begründete Wahl von Δt gehen wir später ein. Aus der Forderung, daß die Systemeingangsgröße ein Einheitssprung sein soll,



läßt sich leicht ableiten:

$$u(k \cdot \Delta t < 0) = 0; \quad u(0) = 1; \quad u(0,5) = 1; \quad u(1) = 1; \quad \dots$$

Als Beobachtungsintervall t_{end} wählen wir (um die Berechnung nicht zu aufwendig werden zu lassen) $t_{\text{end}} = 3$. Der zu wählende Anfangswert $x_1(0) = u_C(0)$ ist eine zum Beobachtungszeitpunkt $t = 0$ vorhandene Kondensatorspannung. Wir wollen annehmen, daß $u_C(0) = x_1(0) = 0$ sei, d.h. bei der Sprungaufschaltung ist der Kondensator entladen.

Mit diesen Voraussetzungen ergibt sich ein Rechnungsvorgang wie er in der vorangehenden Tabelle 1.2.4 dargestellt ist.

Das Ergebnis der Rechnung ist in Bild 1.2.13 graphisch dargestellt. Der Verlauf der Sprungantwort stimmt mit erwartetem Verlauf, den wir aus der Elektrotechnik kennen, überein. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß das Berechnungsergebnis nicht sehr genau ist. Schuld daran ist die zu große Wahl der Rechenschritte Δt .

Wenn man diese verkleinert, würde das Berechnungsergebnis genauer, aber es wären mehr Rechenschritte k bis zum Beobachtungsintervallende notwendig (z.B. $t_{\text{end}} = 3$; $\Delta t = 0,01$; $\Rightarrow k = t_{\text{end}}/\Delta t = 300$).

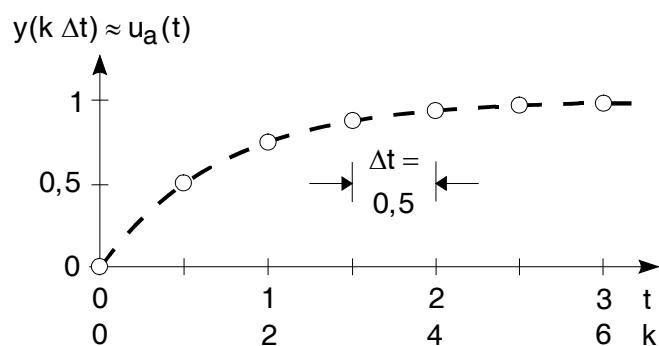


Bild 1.2.13 Graph der diskret berechneten Systemantwort nach Tabelle 1.2.4

Eine solche Menge von Rechenoperationen ist für eine Handrechnung zu aufwendig. Mit Hilfe eines Digitalrechners und einer beliebigen Programmier-Hochsprache (z.B. "C") ist der Algorithmus (1.2.50) aber leicht programmierbar und das Problem rechnergestützt lösbar. Wir greifen bei numerischen Berechnungen zukünftig auf die weltweit verbreitete Programmiersprache MATLAB zurück. Matlab ist speziell auf die numerische Lösung von Problemstellungen aus der Systemtheorie, Signalverarbeitung, Regelungstechnik und ähnlicher Wissensgebiete zugeschnitten. Die Leistungsfähigkeit von Matlab drückt sich zum Beispiel darin aus, daß der Algorithmus (1.2.50) zur numerischen Berechnung der Systemantwort eines Zustandsmodells mit nur einem Befehl

lsim (Parametrierung siehe /16/);

realisiert wird. In /16/ findet der Leser auch nähere Einzelheiten zu Matlab.

1.2.2 Systembeschreibung im Laplace–Bereich

In der Einleitung vom Kapitel 1.2 haben wir begründet, warum es notwendig ist, Übertragungssysteme in verschiedenen Betrachtungsbereichen mathematisch zu modellieren.

Nach unseren Betrachtungen im Zeitbereich widmen wir uns darum in diesem Kapitel der Systemmodellierung im sogenannten Laplace–Bereich. Obwohl es uns mittels der Laplace–Transformation gelingen wird, die unhandlichen Differentialgleichungen der mathematischen Zustandsmodelle in algebraische Gleichungen ohne Differentialquotienten umzuformen, werden uns die Modelle im Laplace–Bereich zunächst noch unhandlicher – weil noch abstrakter – erscheinen. Aber gerade diese Abstraktion wird es möglich machen, weitere Gemeinsamkeiten verschiedenster technischer Übertragungssysteme zu erkennen und für Systembeeinflussungsmaßnahmen nutzbar zu machen. Darüberhinaus werden wir an den Stellen, wo es möglich ist, sofort anschauliche Bezüge zu dem zu modellierenden Übertragungssystem herstellen.

Um uns nicht zu sehr mit Mathematik zu belasten, führen wir die Laplace–Transformation als ein für unsere Zwecke gebrauchsfähiges Phänomen ein und gehen nicht auf die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Transformationslösungen ein.

1.2.2.1 Die Laplace–Transformation

Die Laplace–Transformation ist eine Integraltransformation, die einer Zeitfunktion $f(t)$ mittels des sogenannten Laplace–Integrals

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt; \quad s = \delta + j\omega \quad (1.2.54)$$

eine korrespondierende Funktion $F(s)$ im Laplace–Bereich zuordnet. Die unabhängige Variable des Laplace– oder Bildbereiches ist die komplexe Variable "s". Der Zuordnungs–vorgang, den wir symbolisch mit

$$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} \quad (1.2.55)$$

abkürzen wollen, erfolgt durch Berechnung des Laplace–Integrals (1.2.54). Dazu wird an die Stelle $f(t)$ die zu transformierende Zeitfunktion eingesetzt und das Integral gelöst. Die Lösung ist dann die zu dieser Zeitfunktion korrespondierende Bildfunktion bzw. Laplacetransformierte.

Nach einigen im Folgenden aufgeführten Beispielrechnungen, die das Verständnis für die Transformationsvorschrift (1.2.54) unterstützen sollen, werden wir jedoch das Transformationsgesetz nicht weiter anwenden, sondern auf schon berechnete Transformationen in einer Korrespondenztabelle (Tabelle 1.2.5) zurückgreifen. (Die a , a_i , b , n und τ in dieser Tabelle sind Konstanten.)

Beispiel 1.2.10: Zur Berechnung von Korrespondenzen der Laplace–Transformation

a) Wie lautet die Laplacetransformierte eines Einheitssprunges $\sigma(t)$

$$\mathcal{L} \{\sigma(t)\} = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s};$$

da die Integration bei 0 beginnt und $\sigma(t)$ für $t \geq 0$ gleich 1 ist

d.h. die zur Zeitfunktion $\sigma(t)$ korrespondierende Bildfunktion heißt: $\mathcal{L} \{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$.

b) Wie lautet die Laplacetransformierte des Differentialquotienten einer Zeitfunktion $\dot{f}(t)$

$$\mathcal{L} \left\{ \dot{f}(t) \right\} = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt \quad ?$$

Mit Hilfe des Satzes von der partiellen Integration

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

folgt für das obige Integral

Nr.	Zeitfunktion	Bildfunktion	Name
1	$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$	1	Einheitsimpuls Dirac – Stoß
2	$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$	Einheitssprung
3	t	$\frac{1}{s^2}$	Anstiegsfunktion
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}; n > 0$	abklingende e-Funktionen
5	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$a > 0$ Sinusfunktion
6	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$a > 0$ Kosinusfunktion
7	$e^{-bt} \sin(at)$	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$a > 0$; abklingende Sinusfunktion
8	$e^{-bt} \cos(at)$	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	$a > 0$; abklingende Kosinusfunktion
9	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_{n-1} f_{n-1}(t) + a_n f_n(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) + \dots + a_{n-1} F_{n-1}(s) + a_n F_n(s)$	Linearitätssatz
10	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$	Ableitungssatz
11	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$	Integrationssatz
12	$\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$	Faltungssatz
13	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	Dämpfungssatz
14	$f(t-\tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$	Verschiebungssatz
15	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$ Ähnlichkeitssatz

$$16 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad \text{Endwertsatz}$$

$$17 \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad \text{Anfangswertsatz}$$

Tabelle 1.2.5 Korrespondenzen und Sätze der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt &= f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-s) e^{-st} dt \\
&= 0 - f(0) - (-s) \underbrace{\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt}_{\text{laut (1.2.54)} = F(s)} \\
&= s F(s) - f(0)
\end{aligned}$$

(Dabei ist $f(0)$ der Anfangswert von $f(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$).

- c) Wie lautet die Laplacetransformierte einer Linearkombination von Zeitfunktionen?

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)\} &= ; \quad a_i = \text{konst.} \\
&= \int_0^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)\} e^{-st} dt \\
&= a_1 \underbrace{\int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt}_{F_1(s)} + a_2 \underbrace{\int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt}_{F_2(s)} + \dots + a_n \underbrace{\int_0^{\infty} f_n(t) e^{-st} dt}_{F_n(s)} \\
&= \underline{a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) + \dots + a_n F_n(s)} .
\end{aligned}$$

Bei der Anwendung der Laplace–Transformation wird es im Folgenden auch notwendig sein, mit Hilfe der Korrespondenztabelle Rücktransformationen aus dem Laplace– in den Zeitbereich vorzunehmen. Wir kürzen die Beschreibung dieser Operation symbolisch wie folgt ab

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) . \quad (1.2.56)$$

In den vorangegangenen Beschreibungen wurde auch eine empfehlenswerte Notation eingeführt. Allgemeine Zeitfunktionen wurden mit einem Kleinbuchstaben geschrieben ($f(t)$; $u(t)$; ...) und die damit korrespondierenden Laplacetransformierten mit einem Großbuchstaben ($F(s)$; $U(s)$; ...). Wir werden uns im Folgenden immer an diese Vereinbarung halten.

Bevor wir die Laplace–Transformation in unseren systemtheoretischen Untersuchungen anwenden, wollen wir uns noch kurz mit der Tabelle 1.2.5 "Korrespondenzen und Sätze der Laplace–Transformation" auseinandersetzen.

- Die Korrespondenzen 1 bis 8 geben für die wichtigsten Zeitfunktionen die dazugehörigen Laplace-Transformierten an.

- Die Korrespondenz Nr. 9 ist von zentraler Bedeutung, sie sagt aus, daß additiv miteinander verknüpfte Zeitfunktionen gliedweise in den Laplace-Bereich (und umgekehrt) transformiert werden können.
- Die Korrespondenzen Nr. 10 und 11 zeigen den Vereinfachungscharakter der Laplace-Transformation: aus einer Differentiation im Zeitbereich wird eine Multiplikation mit s im Laplace-Bereich, aus einer Integration im Zeitbereich wird eine Division durch s im s -Bereich.
- Auf die Korrespondenzen Nr. 13 und 15 werden wir im Rahmen dieser Einführung nicht weiter eingehen. Sie erlauben es, basierend auf bekannten Korrespondenzen in einfacher Weise neue zu berechnen. Einen Einblick in die Vorgehensweise gibt die Literaturstelle /12/.
- Aus der Korrespondenz Nr. 12 kann ein weiteres mathematisches Modell im Zeitbereich abgeleitet werden (auf das wir aber nicht eingehen).
- Die Beziehung (Gleichheitszeichen !) Nr. 16 wird u.a. in der Regelungstechnik zur Berechnung der sogenannten bleibenden Regelabweichung benutzt.

1.2.2.2 Die Übertragungsfunktion

Eine wichtige Form der mathematischen Modellierung von Übertragungssystemen in der Systemtheorie ist die sogenannte Übertragungsfunktion. Sie ist wie folgt definiert:

Ist $u(t)$ die Eingangsgröße und $y(t)$ die Ausgangsgröße eines Übertragungssystems und setzt man die Anfangswerte der Zustandsgrößen $x(0) = 0$, nennt man den Quotienten

$$\frac{\text{Ausgangsgröße im } s\text{-Bereich}}{\text{Eingangsgröße im } s\text{-Bereich}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (1.2.57)$$

die Übertragungsfunktion des Systems

Mit Hilfe dieser Definition und unseren Kenntnissen über Laplace-Transformation können wir z.B. die Übertragungsfunktion der im Beispiel 1.2.4 eingeführten Widerstands-/Kondensator-Kombination berechnen. Wir gehen vom Zustandsmodell dieses Übertragungssystems aus

$$\begin{aligned}\dot{u}_C(t) &= -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_e(t) \\ u_a(t) &= u_C(t)\end{aligned}\quad (1.2.58)$$

und transformieren es in den Laplace–Bereich. Durch Anwendung des Ableitungssatzes auf die linke Seite der Differentialgleichung erhalten wir

$$\mathcal{L}\left\{\dot{u}_C(t)\right\} = sU_C(s) - u_C(0) .$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist eine Summe von Zeitfunktionen, die nach dem Linearitätssatz gliedweise transformiert werden können

$$\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_e(t)\right\} = -\frac{1}{RC}U_C(s) + \frac{1}{RC}U_e(s)$$

Der linken und der rechten Seite der algebraischen Gleichung können aufgrund der Beziehung (1.2.54/55) direkt ihre Laplace–Transformierten zugeordnet werden

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = U_a(s) ; \quad \mathcal{L}\{u_C(t)\} = U_C(s)$$

(Auch der Linearitätssatz würde hier zum gleichen Ergebnis führen. Dies ist etwas schwerer erkennbar, da jeweils nur eine Zeitfunktion vorliegt, deren Koeffizient darüberhinaus auch noch 1 ist.)

Ordnen wir die Laplacetransformierten wieder in der durch (1.2.58) vorgegebenen Gleichungsform an, erhalten wir

$$sU_C(s) - u_C(0) = -\frac{1}{RC}U_C(s) + \frac{1}{RC}U_e(s) \quad (1.2.59a)$$

$$U_a(s) = U_C(s) . \quad (1.2.59b)$$

Zur Bildung der Übertragungsfunktion muß nun der Quotient zwischen dem Ausgangssignal und dem Eingangssignal im s–Bereich gebildet werden. Da im vorliegenden Fall $u_e(t)$ die Eingangs– und $u_a(t)$ die Ausgangsgröße ist, berechnet sich die Übertragungsfunktion $G(s)$ aus

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} .$$

Die Forderung nach $x_i(0) = 0$ wird dadurch erfüllt, daß der Anfangswert der Zustandsgröße $U_C(0)$ in (1.2.59a) Null gesetzt wird (und damit wegfällt). Zur Quotientenbildung $U_a(s)/U_e(s)$ muß zunächst die Zustandsgröße $U_C(s)$ eliminiert werden. Durch Einsetzen von (1.2.59b) in (1.2.59a) kann dies realisiert werden

$$s U_a(s) = -\frac{1}{RC} U_a(s) + \frac{1}{RC} U_e(s).$$

Durch Zusammenfassen der Terme mit $U_a(s)$ erhält man die folgende Form

$$U_a(s) (s + \frac{1}{RC}) = \frac{1}{RC} U_e(s),$$

die die notwendige Quotientenbildung ermöglicht

$$\frac{U_a(s)}{U_e(s)} = G(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}. \quad (1.2.60)$$

Formt man mathematische Modelle höherer Ordnung ($n > 1$) in Übertragungsfunktionen um, wird der Rechnungsvorgang wesentlich umfangreicher. (Im Anhang A1.2 werden ausführlich Berechnungsmethoden gezeigt, mit denen man solche Umformungen vornehmen kann). Im allgemeinen Fall führt die Bestimmung der Übertragungsfunktion immer auf eine gebrochen rationale Funktion der Form

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (1.2.61)$$

d.h. auf einen Quotienten zweier Polynome. Die höchste Potenz n im Nenner entspricht dabei der Ordnung n des mathematischen Zustandsmodells. Es sei deutlich darauf hingewiesen, daß die b_i des Eingangsvektors in (1.2.28) und die b_i im Zähler der Übertragungsfunktion (1.2.61) nicht identisch sind.

Wie wir später noch zeigen können, ist der Grad m des Zählerpolynoms bei technischen Übertragungssystemen immer kleiner oder gleich dem Grad n des Nennerpolynoms. Man nennt daher die Beziehung $m \leq n$ Realisierungsbedingung eines Systems, da Übertragungssysteme mit $m > n$ gerätetechnisch nicht realisiert werden können.

Im Beispiel (1.2.60) ist der Zählergrad $m = 0$, da s in der Potenz $s^0 = 1$ auftritt, der Nennergrad ist $n = 1$, da s in der ersten Potenz erscheint.

Im Folgenden wollen wir versuchen zwischen unserem neu eingeführten mathematischen Systemmodell, der Übertragungsfunktion, und der ihr zugrunde liegenden realen Wirkungsanordnung einen engen anschaulichen Bezug herzustellen. Zu diesem Zweck machen wir uns zunächst mit den verschiedenen Schreibweisen von Übertragungsfunktionen vertraut.

Übertragungsfunktionen können in drei grundsätzlich verschiedenen Schreibweisen dargestellt werden

- in der (schon bekannten) Polynomform

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (1.2.62)$$

$m \leq n ; a_i, b_i : \text{reel}$

- in der Produktform

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{Zi})}{\prod_{i=1}^n (s - s_{Ni})} = K \cdot \frac{(s - s_{Z1}) \cdot (s - s_{Z2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{Zm})}{(s - s_{N1}) \cdot (s - s_{N2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{Nn})} \quad (1.2.63)$$

$m \leq n ; K : \text{reel} ; s_{Zi}, s_{Ni} : \text{komplex oder reell}$

s_{Zi} : Nullstellen des Zählerpolynoms von (1.2.62)

s_{Ni} : Nullstellen des Nennerpolynoms von (1.2.62)

- in der Partialbruchform

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_0 + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{(s - s_{Ni})} = K_0 + \frac{K_1}{s - s_{N1}} + \frac{K_2}{s - s_{N2}} + \dots + \frac{K_n}{s - s_{Nn}}$$

$K_0, K_i, s_{Ni} : \text{reel} ; K_0 = 0 \text{ für } m < n ; K_0 \neq 0 \text{ für } m = n;$ (1.2.64)

(1.2.64) beschreibt die Partialbruchform nicht vollständig, sondern nur den Fall, daß die s_{Ni} reelle, verschiedene Nullstellen des Nennerpolynoms sind. Der vollständige Ausdruck wird in /10/ beschrieben. Wir gehen auf diese Zusammenhänge im Folgenden noch ein.

Wir wollen die Umrechnungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen an folgendem Beispiel illustrieren.

Beispiel 1.2.11: Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion in Polynomform

$$G(s) = \frac{4s^2 + 20s + 24}{2s^3 + 8s^2 + 16s} . \quad (1.2.65)$$

Sie soll in die Produktform umgerechnet werden.

Zunächst können wir feststellen, daß die Übertragungsfunktion (1.2.65) nicht die Form von (1.2.62) besitzt, da der Koeffizient vor der höchsten s-Potenz im Nenner ungleich 1 ist. Mittels einer Division von Zähler und Nenner durch diesen Koeffizienten kann aber jede Übertragungsfunktion auf diese Form gebracht werden

$$G(s) = \frac{\frac{4}{2}s^2 + \frac{20}{2}s + \frac{24}{2}}{\frac{2}{2}s^3 + \frac{8}{2}s^2 + \frac{16}{2}s} = \frac{2s^2 + 10s + 12}{s^3 + 4s^2 + 8s} .$$

Zur Berechnung der Produktform der Übertragungsfunktion müssen die Nullstellen des Zähler- und des Nennerpolynoms bestimmt werden.

Zählerpolynom : $2(s^2 + 5s + 6) = 0 ; 2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} s^2 + 5s + 6 &= 0 \\ s_{Z1,2} &= -2.5 \pm \sqrt{6.25 - 6} = -2.5 \pm 0.5 \\ s_{Z1} &= -2 ; s_{Z2} = -3 \end{aligned}$$

Nennerpolynom : $s^3 + 4s^2 + 8s = 0$

$$\begin{aligned} s(s^2 + 4s + 8) &= 0 \\ s_{N1} &= 0 \\ s_{N2,3} &= -2 \pm \sqrt{4 - 8} = -2 \pm j2 \\ s_{N2} &= -2 + j2 ; s_{N3} = -2 - j2 \end{aligned}$$

Mit (1.2.63) ergibt sich dann die Produktform der Übertragungsfunktion

$$G(s) = K \frac{(s - s_{Z1})(s - s_{Z2})}{(s - s_{N1})(s - s_{N2})(s - s_{N3})} = 2 \frac{(s+2)(s+3)}{\underline{s(s+2-j2)(s+2+j2)}} . \quad (1.2.66)$$

Wir erinnern uns an dieser Stelle an folgende Sätze aus der Mathematik:

- Ein Polynom hat soviel Lösungen, wie Grad n (bzw. m) hoch ist.
- Die Lösungen können reell oder paarweise (konjugiert) komplex sein. (Eine konjugiert

komplexe Lösung hat immer die Form $s_1 = a+jb$; $s_2 = a-jb$. Das heißt, die Realteile sind gleich, nur die Imaginärteile haben verschiedene Vorzeichen).

- Alle Lösungen können einfach oder mehrfach auftreten. (Wenn z.B. $s_1 = -2$ und $s_2 = -2$ sind, dann ist -2 eine doppelte Nullstelle)

Aus später noch einzusehenden Gründen ist man bestrebt, in der Produktform der Übertragungsfunktion imaginäre Zahlen zu vermeiden. Konjugiert komplexe Linearfaktoren werden deshalb zu quadratischen Termen zusammengefaßt, in denen nur reelle Koeffizienten auftreten

$$(s+2-j2) \cdot (s+2+j2) = s^2 + 4s + 8.$$

Die Produktschreibweise der Übertragungsfunktion (1.2.66) erhält damit folgende endgültige Form

$$G(s) = 2 \frac{(s+2) \cdot (s+3)}{s \cdot (s^2 + 4s + 8)}. \quad (1.2.67)$$

In der Produktform der Übertragungsfunktion können somit folgende Terme auftreten:

- Produktterme 1. Ordnung (Linearfaktoren): $s+a$,
- Linearfaktoren ohne Absolutglied: $s+0 = s$,
- Produkterme 2. Ordnung (quadratische Faktoren): $s^2 + ps + q$,
(nur, wenn die Lösung $s^2+ps+q = 0$ auf eine konjugiert komplexe Lösung führt)
- ein Absolutwert K.

Linearfaktoren mit und ohne Absolutglied, sowie quadratische Faktoren können mehrfach auftreten.

Mit Hilfe der Produktform der Übertragungsfunktion kann eine Übertragungsfunktion grafisch in Form eines sog. Pol-/Nullstellen–Planes veranschaulicht werden.

Nennt man die Nullstellen des Zählerpolynoms Nullstellen von $G(s)$ und kennzeichnet sie mit einem Kreis (\circ), und nennt man die Nullstellen des Nennerpolynoms Polstellen von $G(s)$ und kennzeichnet sie mit einem Kreuz (\times), kann man die Pol-/Nullstellen–Lage in der komplexen s –Ebene auftragen (nach (1.2.54) war $s = \delta + j\omega$).

Für unsere Beispielder Übertragungsfunktion (1.2.67) ergibt sich folgender Pol-/Nullstellenplan:

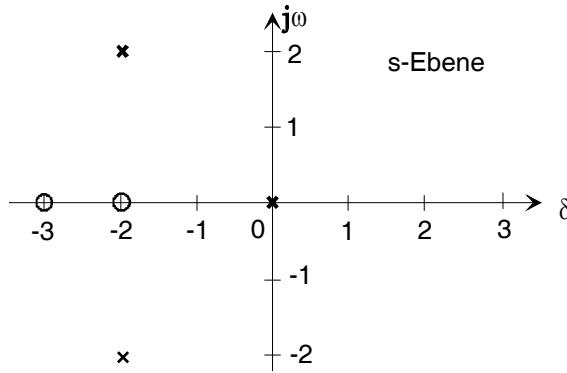


Bild 1.2.14 Pol-/Nullstellenplan der Übertragungsfunktion (1.2.67)

Eine Spezialform der Produktform, die für die Beschreibung von Übertragungssystemen eine herausragende Bedeutung hat, ist die

Faktorisierte V–Normalform der Übertragungsfunktion

$$G(s) = V \cdot \frac{1}{s^k} \cdot \frac{Z(s)}{N(s)}$$

V : reell
k : ganzzahlig; (positiv, negativ oder Null)
Z(0) = N(0) = 1 .

(1.2.68)

Zur Berechnung dieser V–Normalform muß die Übertragungsfunktion in Produktform (1.2.63) vorliegen.

Wir beschreiben den Rechnungsgang an unserem vorangehend berechneten Beispiel und gehen vom Ausdruck (1.2.67) aus

$$G(s) = 2 \frac{(s+2)(s+3)}{s(s^2 + 4s + 8)} .$$

Die vorliegende Produktform wird zunächst in die durch (1.2.68) vorgeschriebene Form umgeschrieben

$$G(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(s+2)(s+3)}{s^2 + 4s + 8} .$$

Der erste Term V enthält dabei zunächst den Absolutwert der Produktform. Im Term $1/s^k$ finden sich die Linearfaktoren ohne Absolutglied wieder. In unserem Fall ist $k = 1$. Tritt kein Linearfaktor ohne Absolutglied auf, ist $k = 0$ und dieser Term entfällt. Negative k bedeuten Linearfaktoren ohne Absolutwert im Zähler der Übertragungsfunktion. Im dritten Term von

(1.2.68), in $Z(s)/N(s)$ treten die verbleibenden quadratischen und linearen Faktoren der Produktform auf.

Beim Einsetzen von $s = 0$ in $Z(s)$ und $N(s)$, d.h. bei der Bildung von $Z(0)$ und $N(0)$

$$\begin{aligned} Z(0) &= (0 + 2) \cdot (0 + 3) = 6 \\ N(0) &= (0 + 0 + 8) = 8 \end{aligned}$$

erkennt man jedoch, daß die Forderungen $Z(0) = N(0) = 1$ zur Bildung der V–Normalform (1.2.68) nicht erfüllt sind. Durch Ausklammern der Absolutwerte in $Z(s)$ und $N(s)$

$$G(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{2\left(\frac{1}{2}s+1\right) 3\left(\frac{1}{3}s+1\right)}{8\left(\frac{1}{8}s^2 + \frac{4}{8}s + 1\right)}$$

und anschließender Zusammenfassung der ausgeklammerten Werte im ersten Term V

$$G(s) = 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{8} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{2}s\right) \left(1 + \frac{1}{3}s\right)}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{8}s^2},$$

läßt sich jedoch auch diese Bedingung erfüllen und wir erhalten folgende faktorisierte V–Normalform unserer Beispielübertragungsfunktion

$$G(s) = 1,5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 + 0,5s)(1 + 0,33s)}{1 + 0,5s + 0,125s^2}. \quad (1.2.69)$$

Quadratische Faktoren werden in der faktorisierten V–Normalform i.a. auf folgende Form gebracht

$$1 + 2dT s + (Ts)^2. \quad (1.2.70)$$

Dabei sind d und T positive Konstanten, d gibt Auskunft über den Nullstellencharakter von (1.2.70):

- $d < 1$: es liegt eine konjugiert komplexe Nullstelle vor,
- $d = 1$: es liegen zwei gleiche reelle Nullstellen vor,
- $d > 1$: es liegen zwei verschiedene reelle Nullstellen vor.

(Die Fälle $d = 1$ und $d > 1$ werden bei uns nicht auftreten, da wir nur konjugiert komplexe Linearfaktoren zu quadratischen Faktoren zusammenfassen).

Der quadratische Faktor unseres Beispiels (1.2.69) muß durch Koeffizientenvergleich mit (1.2.70) wie folgt umgeformt werden

$$\begin{aligned} N(s) &= 1 + 0,5s + 0,125s^2 = 1 + 2dT s + T^2 s^2 \\ T^2 &= 0,125 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{0,125} = 0,354 \\ 2dT &= 0,5 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{0,5}{2T} = \frac{0,5}{2 \cdot 0,354} = 0,71 \\ N(s) &= 1 + 2 \cdot 0,71 \cdot 0,354s + (0,354 \cdot s)^2, \end{aligned}$$

so daß sich folgende endgültige faktorisierte V–Normalform ergibt

$$G(s) = 1,5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 + 0,5s)(1 + 0,33s)}{1 + 2 \cdot 0,71 \cdot 0,354s + (0,354 \cdot s)^2}. \quad (1.2.71)$$

Es sei noch bemerkt, daß sich die faktorisierte V–Normalform in zwei Schreibweisen darstellen läßt:

- Stehen in den Termen $Z(s)$ und $N(s)$ die Absolutwerte der Linearfaktoren und der quadratischen Faktoren als Multiplikator (T) bei s

$$G(s) = V \cdot \frac{1}{s^k} \cdot \frac{(1 + sT_{Z1}) \cdot (1 + sT_{Z2}) \cdot \dots}{(1 + sT_{N1}) \cdot (1 + sT_{N1}) \cdot \dots \cdot (1 + 2dT_{N3}s + (T_{N3}s)^2) \cdot \dots} \quad (1.2.72)$$

nennt man diese Schreibweise die Zeitkonstantenform der V–Normalform.

- Stehen in den Termen $Z(s)$ und $N(s)$ dagegen die Absolutwerte als Divisor (ω_k) bei s

$$G(s) = V \cdot \frac{1}{s^k} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{KZ1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{KZ2}}\right) \cdot \dots}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{KN1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{KN2}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + 2d \frac{s}{\omega_{KN3}} + \left(\frac{s}{\omega_{KN3}}\right)^2\right) \cdot \dots} \quad (1.2.73)$$

nennt man diese Schreibweise die Kennfrequenzform der V–Normalform.

Wie man deutlich erkennt, stehen die korrespondierenden T und ω_k in reziprokem Verhältnis zueinander

$$\omega_k = \frac{1}{T}. \quad (1.2.74)$$

Wir verlassen an dieser Stelle die Betrachtungen über die Produktform von Übertragungsfunktionen und wenden uns der dritten Form der Beschreibung von Übertragungsfunktionen zu, der Partialbruchform.

Wie schon in der Einleitung bei der Erläuterung der Beziehung (1.2.64) angedeutet wurde, ist die Partialbruchzerlegung einer Übertragungsfunktion von der Polstellenkonfiguration der Übertragungsfunktion (entspricht der Nullstellenkonfiguration des Nennerpolynoms) abhängig.

Weiterhin mußten Unterscheidungen getroffen werden, ob der Zählergrad m gleich dem Nennergrad n ist oder nicht. Wir wollen diese Zusammenhänge im Folgenden ausführlich diskutieren und mit Beispielrechnungen verdeutlichen.

Die Partialbruchzerlegung spaltet echt gebrochene rationale Funktionen (Zählergrad $m < \text{Nennergrad } n$) der Form (1.2.62) in Teilbrüche (Partialbrüche) auf, die häufig die Form (1.2.64) haben.

Liegt keine echt gebrochen rationale Form vor, d.h. ist der Zählergrad m gleich dem Nennergrad n , muß zunächst eine Polynomdivision vorgenommen werden. Ergebnis dieser Division ist ein konstanter Faktor K_0 aus der Beziehung (1.2.64) der additiv mit dem Divisionsrest, einer jetzt echt gebrochen rationalen Funktion verknüpft ist.

(Der Fall $m > n$ muß nicht betrachtet werden, da es keine Übertragungsfunktionen realer technischer Wirkungsanordnungen gibt, deren Zählergrade m größer sind als die Nennergrade n .)

Beispiel 1.2.12: Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{3s^2 + 5s + 4}{s^2 + s + 1} ,$$

die sich mittels der Division

$$\begin{array}{r} 3s^2 + 5s + 4 \\ -(3s^2 + 3s + 3) \\ \hline 2s + 1 \end{array} : s^2 + s + 1 = 3 + \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1} \quad (1.2.75)$$

in einen konstanten Faktor (3) und eine echt gebrochen rationale Funktion aufspalten läßt

$$G(s) = \underbrace{\frac{3s^2 + 5s + 4}{s^2 + s + 1}}_{m=2 ; n=2} = 3 + \underbrace{\frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}}_{m=1 ; n=2} . \quad (1.2.76)$$

Die praktische Vorgehensweise zur Partialbruchzerlegung ist nun, wie schon weiter vorn erwähnt, von der Nullstellenkonfiguration des Nennerpolynoms abhängig. Wir betrachten folgende echt gebrochen rationale Funktion

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} ; \quad \begin{array}{l} P(s) : \text{Zählerpolynom vom Grad } m; \\ Q(s) : \text{Nennerpolynom vom Grad } n; \end{array} \quad m < n;$$

von der wir das Nennerpolynom $Q(s)$ faktorisieren, d.h. seine Nullstellen s_{N_i} berechnen und die Produktform aufschreiben, z.B.

$$Q(s) = s \cdot (s - s_{N_1}) \cdot (s - s_{N_2})^2 \cdot (s^2 + ps + q) \cdot \dots . \quad (1.2.77)$$

Wie schon bekannt und auch aus dem gewählten Beispiel ersichtlich, können Linearfaktoren und quadratische Faktoren einfach und mehrfach auftreten. Je nach Nullstellenkonfiguration von $Q(s)$ werden folgende Partialbruchansätze unterschieden:

Fall 1 : $Q(s)$ hat nur einfache reelle Nullstellen α_i , dann gilt folgender Ansatz

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_n)} = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - \alpha_n} . \quad (1.2.78)$$

Beispiel:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3} .$$

Fall 2 : $Q(s)$ hat mehrfache (k -fache, ℓ -fache) reelle Nullstellen α_i , dann gilt folgender Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - \alpha_1)^k \cdot (s - \alpha_2)^\ell} &= \frac{A_1}{(s - \alpha_1)^k} + \frac{A_2}{(s - \alpha_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(s - \alpha_1)^2} + \frac{A_k}{(s - \alpha_1)} + \cdots \\ &\cdots + \frac{B_1}{(s - \alpha_2)^\ell} + \frac{B_2}{(s - \alpha_2)^{\ell-1}} + \cdots + \frac{B_{\ell-1}}{(s - \alpha_2)^2} + \frac{B_\ell}{(s - \alpha_2)} . \end{aligned} \quad (1.2.79)$$

Beispiel:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+1)^3 \cdot (s+2)^2} = \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)} + \frac{B_1}{(s+2)^2} + \frac{B_2}{(s+2)} .$$

Fall 3 : $Q(s)$ hat einfache komplexe Nullstellen (d.h. es kommen auch quadratische Terme in $Q(s)$ vor), dann gilt folgender Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{P(s)}{(s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_2)^k (s^2 + ps + q)} = \frac{A_1}{(s - \alpha_1)} + \frac{B_1}{(s - \alpha_2)^k} + \frac{B_2}{(s - \alpha_2)^{k-1}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{B_{k-1}}{(s - \alpha_2)^2} + \frac{B_k}{(s - \alpha_2)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + ps + q)} . \end{aligned} \quad (1.2.80)$$

Beispiel:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+4)^2 \cdot (s^2 + 2s + 10)} = \frac{A_1}{(s+4)^2} + \frac{A_2}{(s+4)} + \frac{Bs + C}{(s^2 + 2s + 10)} .$$

Der selten vorkommende Ansatz bei mehrfachen komplexen Nullstellen soll hier nicht diskutiert werden, er kann in der Literatur /10/ nachgelesen werden.

Nachdem der Ansatz für die Partialbruchzerlegung gemacht ist, müssen die unbekannten konstanten Zählerkoeffizienten A_i , B_i , C und D der Teilbrüche bestimmt werden. Wir benutzen dazu in den folgenden Beispielen die Methode des Koeffizientenvergleichs mit dem Zählerpolynom $P(s)$. In der Literatur /10/ werden noch andere Verfahren beschrieben. Im allgemeinen führt die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Bei Systemordnungen ≤ 3 können diese Gleichungssysteme noch mit einfachen Ein- und Gleichsetzungsmethoden gelöst werden. Anhand einiger Beispiele soll das Verfahren der Partialbruchzerlegung verdeutlicht werden.

Beispiel 1.2.13: Zerlege die folgende gebrochen rationale Funktion in Partialbrüche

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s} .$$

Da der Zählergrad $m = 1$ kleiner ist als der Nennergrad $n = 3$, ist die Funktion $G(s)$ echt gebrochen, so daß keine Polynomdivision vorgenommen werden muß.

Zunächst wird das Nennerpolynom faktorisiert

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 3s = 0$$

$$s_1 = 0 ; s^2 + 4s + 3 = 0$$

$$s_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4 - 3} = -2 \pm 1$$

$$s_2 = -1; \quad s_3 = -3$$

$$Q(s) = s(s+1)(s+3).$$

Da drei verschiedene reelle Nullstellen existieren, liegt der Fall 1 der Partialbruchzerlegung vor

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1} + \frac{A_3}{s + 3}.$$

Um einen Koeffizientenvergleich der Zähler der linken und rechten Gleichungsseite vornehmen zu können, müssen die Nenner der beiden Gleichungsseiten identisch sein (Hauptnenner der rechten Seite bilden):

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 3)} = \frac{A_1(s + 1)(s + 3) + A_2s(s + 3) + A_3s(s + 1)}{s(s + 1)(s + 3)}.$$

Nach Ausmultiplikation und Zusammenfassung der Terme von gleichen s-Potenzen

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 3)} = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)s^2 + (4A_1 + 3A_2 + A_3)s + 3A_1}{s(s + 1)(s + 3)}$$

kann der Koeffizientenvergleich zwischen den Zählern der linken und rechten Gleichungsseite vorgenommen werden: beide Zähler sind gleich, wenn die Koeffizienten vor gleichen s-Potenzen identisch sind, d.h.

- (1) $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ (weil links keine Potenz s^2 auftritt, d.h. der Koeffizient vor s^2 Null ist)
- (2) $4A_1 + 3A_2 + A_3 = 1$ (weil auf der linken Gleichungsseite der Koeffizient vor s gleich 1 ist)
- (3) $3A_1 = 2$ (weil das s -freie Glied der linken Seite gleich 2 ist).

Das so entstandene lineare Gleichungssystem muß gelöst werden. Man erkennt sofort

$$A_1 = \frac{2}{3}.$$

Setzt man A_1 in die erste und zweite Gleichung ein, und subtrahiert dann die zweite von der ersten Gleichung, erhält man

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{3} + A_2 + A_3 = 0 \\
 & \underline{-\left(4 \frac{2}{3} + 3A_2 + A_3 = 1\right)} \\
 & -2 - 2A_2 = -1 \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2} .
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von A_1 und A_2 z.B. in die erste Gleichung folgt

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = -\frac{1}{6}$$

und damit das Ergebnis der Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+2}{s^3 + 4s^2 + 3s} = \frac{0,667}{s} - \frac{0,5}{s+1} - \frac{0,1667}{s+3} .$$

Beispiel 1.2.14: Zerlege die folgende gebrochen rationale Funktion in Partialbrüche

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Der Nenner ist bereits faktorisiert, es existiert eine doppelte Nullstelle bei $s = 0$ und eine einfache Nullstelle bei $s = -1$, d.h. es liegen Fall 1 und Fall 2 der Partialbruchzerlegung vor

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s+1} .$$

Nach Hauptnennerbildung, Sortierung der Zählerkoeffizienten nach den vorkommenden s -Potenzen und Koeffizientenvergleich ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 A_2 + A_3 &= 0 \\
 A_1 + A_2 &= 0 \\
 A_1 &= 1 ,
 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$A_1 = 1, A_2 = -1; A_3 = 1;$$

und damit folgendem Ergebnis der Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} .$$

Beispiel 1.2.15: In dieser Aufgabe greifen wir auf das Beispiel 1.2.11 zurück. Wir hatten zu einer gegebenen Übertragungsfunktion (1.2.65)

$$G(s) = \frac{4s^2 + 20s + 24}{2s^3 + 8s^2 + 16s}$$

die Produktform (1.2.67)

$$G(s) = 2 \frac{(s + 2)(s + 3)}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

und die faktorisierte V-Normalform (1.2.71)

$$G(s) = 1,5 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 + 0,5s)(1 + 0,33s)}{1 + 2 \cdot 0,71 \cdot 0,354s + (0,354 \cdot s)^2}$$

als Sonderform der Produktform berechnet. Abschließend wollen wir jetzt die Partialbruchform berechnen. Aus der Produktform ist zu erkennen, daß das Nennerpolynom eine reelle Nullstelle $s_1 = 0$ (Fall 1) und eine konjugiert komplexe Nullstelle $s_2 = -2+j2 ; s_3 = -2-j2$ (Fall 3) besitzt, woraus folgender Ansatz resultiert

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2s^2 + 10s + 12}{s(s^2 + 4s + 8)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 8} \\ &= \frac{As^2 + 4As + 8A + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 4s + 8)} = \frac{(A + B)s^2 + (4A + C)s + 8A}{s(s^2 + 4s + 8)} . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich der Zähler führt auf

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 4A + C &= 10 \\ 8A &= 12 . \end{aligned}$$

Durch Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir die unbekannten Koeffizienten

$$A = 1,5 ; B = 0,5 \text{ und } C = 4$$

und damit die Partialbruchform der Übertragungsfunktion

$$\underline{\underline{G(s) = \frac{1,5}{s} + \frac{0,5s + 4}{s^2 + 4s + 8}}} . \quad (1.2.81)$$

In diesem Kapitel haben wir uns auf einer weitgehend formalen Ebene mit der Berechnung der Übertragungsfunktion aus einem mathematischen Zustandsmodell und den verschiedenen Schreibweisen von Übertragungsfunktionen auseinander gesetzt. Der Bezug zwischen der Übertragungsfunktion und dem realen System, das durch sie beschrieben wird, wurde dabei noch nicht untersucht.

Obwohl gerade die Herstellung dieses Bezuges zwischen realem System und seiner Übertragungsfunktion zentrales Anliegen dieses Skriptes ist, müssen wir uns an dieser Stelle noch ein wenig gedulden. Bevor wir diesen Bezug anschaulich begreifbar in Kapitel 1.2.4 herstellen können, müssen wir uns im nächsten Kapitel zunächst noch ein wenig mathematisches Handwerkszeug zurechtlegen.

1.2.3 Nachtrag zur Systembeschreibung im Zeitbereich

Im Kapitel 1.2.1.4 haben wir eine numerische Lösungsmethode zur Berechnung von Systemantworten von Übertragungssystemen kennengelernt und dazu auf das Programm- system Matlab verwiesen. Um uns theoretische Zusammenhänge besser erklären zu können, benötigen wir auch Kenntnisse zur analytischen Lösung von Zustandsmodellen, d.h. zur Berechnung ihrer Systemantworten. Dieser Problematik widmen wir uns im nächsten Kapitel.

1.2.3.1 Analytische Berechnung von Systemantworten

Im Kapitel 1.2.2 führten wir die Laplace–Transformation als eine Methode zur Umformung eines mathematischen Zustandsmodells in eine Übertragungsfunktion ein, also den Übergang von einem Systemmodell im Zeitbereich in ein Systemmodell im Laplace–Bereich. Das Ergebnis dieser Operation bestand darin, daß aus einem Differentialgleichungssystem eine rein algebraische Gleichung in Form einer gebrochen rationalen Funktion entstand.

Mit dieser Umformung sind jedoch nicht alle Möglichkeiten der Laplace–Transformation erschöpft. Hat man nämlich die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ bestimmt, kennt man auch die Systemlösung im Laplace–Bereich

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) , \quad (1.2.82)$$

wenn man für die Eingangsgröße $U(s)$ die Laplace–Transformierte der gewünschten Eingangserregung einsetzt (z.B. $U(s) = 1/s$ bei einer gewünschten sprungförmigen Erregung oder $U(s) = 1/s^2$ bei einer rampenförmigen Erregung).

Gegebene Zustandsdifferentialgleichung eines Übertragungssystems; Wahl einer Eingangserregung $u(t)$

$$\dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + \dots + b_{11} u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21} x_1(t) + \dots + b_{21} u(t)$$

\vdots

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1} x_1(t) + \dots + b_{n1} u(t)$$

$$y(t) = c_1 x_1(t) + \dots + d u(t)$$

Transformation der Zustandsgleichung in den s-Bereich mittels

- Ableitungs- und
- Linearitätssatz



Umformung der Systembeschreibung im Laplace-Bereich auf die Form

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

($G(s)$: Übertragungsfunktion des Systems)

Einsetzen der Laplace-Transformierten des gewählten Eingangssignals $u(t)$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

nach Korrespondenztabelle

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

in Summenterme, die sich in der Korrespondenztabelle wiederfinden

Vorliegen der analytischen Lösung der Systemantwort $y(t)$ auf die gewählte Eingangserregung $u(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

Rücktransformation der Partialbrüche in den Zeitbereich mittels Korrespondenztabelle

Bild 1.2.15 Lösungsschema für Zustandsmodelle mittels Laplace-Transformation

Mit Hilfe der Korrespondenztabelle der Laplace–Transformation (Tabelle 1.2.5) und Anwendung der Rücktransformationsbeziehung (1.2.56) auf unsere jetzige Problemstellung

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot U(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = y(t), \quad (1.2.83)$$

kann man die Systemantwort $y(t)$ im Zeitbereich analytisch berechnen.

Allerdings wird man in den seltensten Fällen den Ausdruck $G(s) \cdot U(s)$ direkt in der Korrespondenztabelle wiederfinden. Wegen der Gültigkeit des Linearitätssatzes (Korrespondenz Nr. 9 aus Tabelle 1.2.5) kann man aber den Ausdruck $G(s) \cdot U(s)$ in Partialbrüche zerlegen und die entstandenen Teilbrüche gliedweise in den Zeitbereich zurücktransformieren.

Der vorangehend beschriebene Lösungsvorgang folgt i.a. einem Schema, das in Bild 1.2.15 dargestellt ist. Dabei ist es unerheblich, ob das mathematische Modell in Form eines Zustandsmodells oder als Übertragungsfunktion vorliegt. Mittels des Schemas können für beide Beschreibungsformen Systemantworten auf beliebige Eingangsgrößen berechnet werden. Liegt die Übertragungsfunktion vor, erspart man sich die Transformation in den Laplace–Bereich. Liegt die Zustands–Differentialgleichung vor, muß diese zunächst in den Laplace–Bereich transformiert und die Übertragungsfunktion gebildet werden.

An den folgenden Beispielen soll die analytische Berechnung von Systemantworten von Übertragungssystem–Modellen etwas illustriert werden.

Beispiel 1.2.16: Berechne die Systemantwort der Widerstands–/Kondensator–Kombination aus Beispiel 1.2.4 auf einen Eingangssprung $u_e(t) = \sigma(t) ; \Delta u_e = 1V$.

Das in diesem Beispiel berechnete Zustandsmodell (1.2.18) wird zunächst in den Laplace–Bereich transformiert und dort die Übertragungsfunktion gebildet. Dieser Vorgang wurde im Kapitel 1.2.2.1 beschrieben und wir erhielten folgendes Ergebnis

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} .$$

Stellt man diese Gleichung nach der Vorschrift (1.2.82) um

$$U_a(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot U_e(s),$$

und setzt an die Stelle von $U_e(s)$ die Laplace–Transformierte der gewählten Eingangserregung

$$\mathcal{L} \left\{ \sigma(t) \right\} \Big|_{\Delta u_e=1} = \frac{1}{s},$$

erhält man die Systemlösung im Laplace–Bereich

$$U_a(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s}. \quad (1.2.84)$$

Nach den Vorschriften des Lösungsschemas (Bild 1.2.15) muß nun eine Partialbruchzerlegung vorgenommen werden, da sich Ausdruck (1.2.84) nicht in der Korrespondenztabelle wiederfindet.

$$U_a(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{(A+B)s + A \frac{1}{RC}}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

$$A + B = 0$$

$$A \frac{1}{RC} = \frac{1}{RC} \Rightarrow A = 1; B = -1$$

$$U_a(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Laut (1.2.56) ist

$$\mathcal{L}^{-1} \{ U_a(s) \} = u_a(t)$$

und nach Korrespondenz Nr.2 der Tabelle 1.2.5

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \sigma(t) .$$

Da $\sigma(t) = 1$ für $t \geq 0$ ist und wir nur Vorgänge für $t \geq 0$ betrachten, gilt auch

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 .$$

Die Rücktransformation des letzten Gliedes ergibt nach Korrespondenz Nr. 4

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = -e^{-\frac{1}{RC}t} .$$

Damit erhalten wir als Sprungantwort der Widerstands-/Kondensator-Kombination folgende Lösung

$$u_a(t) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} . \quad (1.2.85)$$

Für gegebene Werte von z.B. $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 1000 \mu\text{F}$ kann der Graph der Sprungantwort gezeichnet werden

$$u_a(t) = 1 - e^{-t} .$$

t	0	0.2	0.5	1	2	3	4	5
U _a (t)	0	0.18	0.39	0.63	0.86	0.95	0.98	0.99

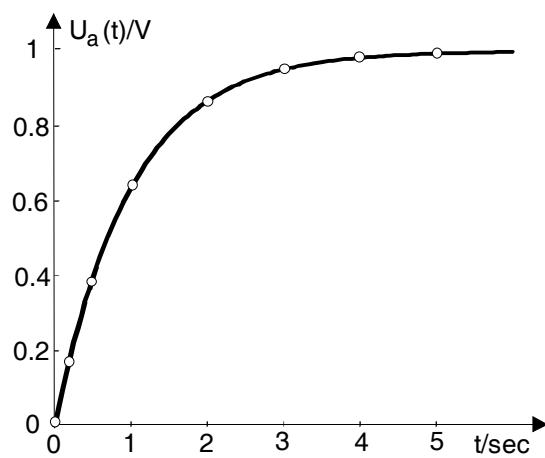


Bild 1.2.16 Sprungantwort einer RC-Kombination

Beispiel 1.2.17: Das im Beispiel 1.2.3 aufgestellte Zustandsmodell eines Gasdruckmeßgerätes (1.2.14)

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= -\frac{r}{m} v(t) - \frac{c}{m} s(t) + \frac{A}{m} p(t) \\ \dot{s}(t) &= v(t) \\ u(t) &= \frac{U_0}{\ell} s(t),\end{aligned}\tag{1.2.86}$$

habe folgende Systemparameterwerte

$$\begin{aligned}r &= 104 \frac{\text{N}}{\text{m sek}} ; \quad m = 3 \text{ kg} ; \quad c = 900 \frac{\text{N}}{\text{m}} ; \\ A &= 90 \times 10^{-6} \text{ m}^2 ; \quad U_0 = 10 \text{ V} ; \quad \ell = 0,1 \text{ m} .\end{aligned}\tag{1.2.87}$$

Berechne den Ausgangsspannungsverlauf bei einer sprungförmigen Gasdruckaufschaltung von 5 bar.

Verwendet man nur die SI–Basisgrößen (m, kg, sek, V) /13/, z.B.:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{sek}^2} ; \quad 1 \text{ bar} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m sek}^2},$$

geht (1.2.86) durch Einsetzen von (1.2.87) in folgendes Zustandsmodell über

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= -34.67 v(t) - 300 s(t) + 30 \cdot 10^{-6} p(t) ; \quad v(0) = 0 \\ \dot{s}(t) &= v(t); \quad s(0) = 0 \\ u(t) &= 100 s(t).\end{aligned}\tag{1.2.88}$$

Zur Berechnung der Sprungantwort transformieren wir (1.2.88) in den s–Bereich und bilden die Übertragungsfunktion. Wir wollen annehmen, daß sich das Gerät zum Zeitpunkt der Druckaufschaltung $t = 0$ bei $s(t) = 0$ und in Ruhe befindet ($v(t) = 0$); d.h. die Anfangswerte der Zustandsgrößen sind gleich Null.

$$\begin{aligned}s V(s) &= -34,67 V(s) - 300 S(s) + 30 \cdot 10^{-6} P(s) \\ s S(s) &= V(s) \\ U(s) &= 100 S(s) .\end{aligned}$$

Durch Elimination der Zustandsgrößen $S(s)$ und $V(s)$ und Bildung des Quotienten $G(s) = U(s)/P(s)$ erhalten wir die Übertragungsfunktion des Gasdruckmeßgerätes

$$G(s) = \frac{U(s)}{P(s)} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{s^2 + 34,67 s + 300} . \quad (1.2.89)$$

Unter Berücksichtigung der SI-Basiseinheiten führt ein Drucksprung von 5 bar auf

$$p(t) = \Delta p \sigma(t) ; \Delta p = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m sek}^2} \Rightarrow P(s) = 5 \cdot 10^5 \frac{1}{s}$$

und damit zu folgender Systemlösung im s-Bereich

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^5}{s^2 + 34,67 s + 300} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{15 \cdot 10^2}{s(s^2 + 34,67 s + 300)} . \end{aligned} \quad (1.2.90)$$

Zur Prüfung, welcher Fall der Partialbruchzerlegung vorliegt, müssen die Nullstellen des quadratischen Terms im Nenner bestimmt werden

$$\begin{aligned} s^2 + 34,67 s + 300 \\ s_{1,2} = -17,335 \pm \sqrt{300 - 300} \\ s_{1,2} = -17,335 . \end{aligned}$$

Da eine doppelte reelle Nullstelle vorliegt, kann (1.2.90) wie folgt ausgedrückt werden

$$U(s) = \frac{15 \cdot 10^2}{s (s + 17,335)^2} ,$$

d.h. es liegen Fall 1 und Fall 2 der Partialbruchzerlegung vor:

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{15 \cdot 10^2}{s (s + 17,335)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 17,335)^2} + \frac{C}{(s + 17,335)} \\ &= \frac{A(s + 17,335)^2 + B s + C s(s + 17,335)}{s (s + 17,335)^2} \\ &= \frac{As^2 + 34,67 As + 300 A + Bs + Cs^2 + 17,335 Cs}{s (s + 17,335)^2} \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
34,67 A + B + 17,335 C &= 0 \\
300 A &= 15 \cdot 10^2 \\
A = 5 ; B = -86,68 ; C &= -5 \\
U(s) &= \frac{5}{s} - \frac{86,68}{(s + 17,335)^2} - \frac{5}{s + 17,335} \\
&= 5 \left(\frac{1}{s} - \frac{17,335}{(s + 17,335)^2} - \frac{1}{s + 17,335} \right).
\end{aligned}$$

Nach der Rücktransformation erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
u(t) &= 5 \left(1 - 17,336 t e^{-17,336 t} - e^{-17,336 t} \right) \\
\underline{u(t) = 5(1 - (17,336 t + 1) e^{-17,336 t})} \quad [V] &\quad (1.2.91)
\end{aligned}$$

die analytische Beschreibung der Sprungantwort des Gasdruckmeßgerätes auf einen Drucksprung von 5 bar.

Die grafische Auswertung führt auf das Bild 1.2.17 .

t	0	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
u(t)	0	0.35	1.08	2.59	4.3	4.83	4.96	5

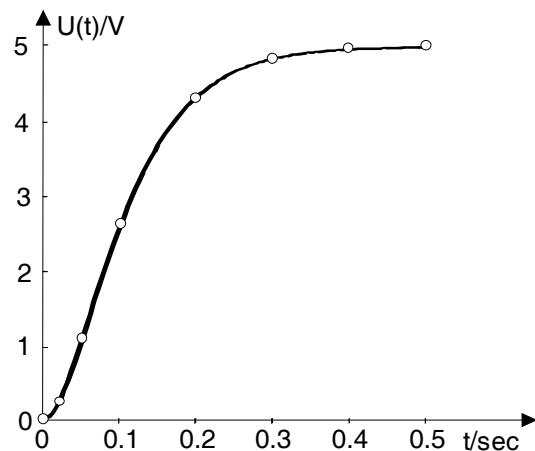


Bild 1.2.17 Sprungantwort eines Gasdruckmeßgerätes

Zusatzbemerkung: Eine systematische Behandlung der physikalischen Einheiten bei der Berechnung von Zustandsmodellen wird im Anhang A1.4 vorgenommen.

1.2.4 Praktische Bezüge zwischen Übertragungsfunktion und Übertragungssystem

Mit der sog. Zeitkonstantenform der Übertragungsfunktion (1.2.72)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = V \cdot \frac{1}{s^k} \cdot \frac{(1 + sT_{Z1}) \cdot (1 + sT_{Z2}) \cdot \dots}{(1 + sT_{N1}) \cdot (1 + sT_{N2}) \cdot \dots \cdot (1 + 2dT_{N3}s + (T_{N3}s)^2) \cdot \dots}$$

kann man einen anschaulichen Bezug zu dem Übertragungssystem herstellen, das durch die Übertragungsfunktion beschrieben wird. Wir geben diese Zusammenhänge im Folgenden an und zeigen dann an einigen Beispielen, daß diese Aussagen wohl begründet sind.

a) Der Term $1/s^k$ beschreibt das Globalverhalten des Übertragungssystems. Ist $k = 0$, d.h. fehlt der Term $1/s^k$ in der Übertragungsfunktion, wirkt das System global proportional. Global proportionale Systeme hatten wir weiter vorn dadurch gekennzeichnet, daß ihre Sprungantworten für $t \rightarrow \infty$, nach Abklingen eines systemspezifischen Einschwingvorganges einen stationären Endwert einnahmen.

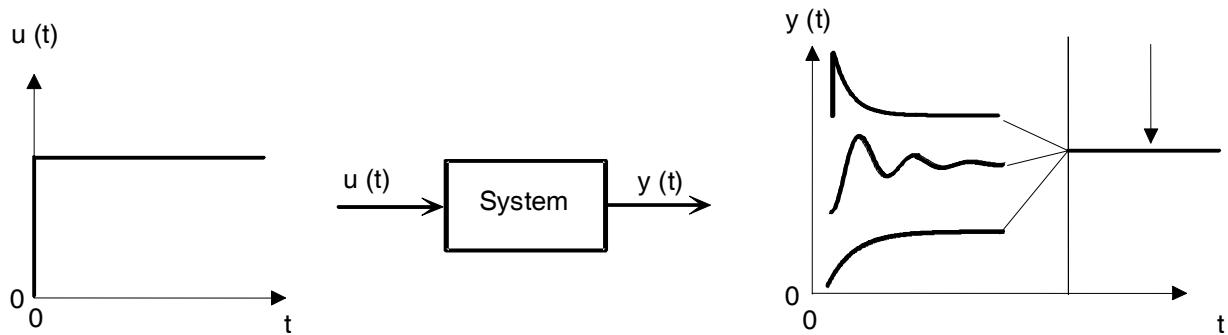


Bild 1.2.18 Sprungverhalten global proportional wirkender Systeme

Für $k > 0$ (wir können uns bei realen Systemen i.a. auf $k = 1$ oder maximal $k = 2$ beschränken) verbleibt der Term $1/s^k$ in der Übertragungsfunktion. Ein solches System wird als global integral wirkend bezeichnet. Die Sprungantwort eines global integral wirkenden Systems nimmt nach Abklingen des systemspezifischen Einschwingvorganges keinen stationären Endwert an, sondern strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen unendlich (Vergleiche Bild 1.2.19). Für den häufig auftretenden Fall $k = 1$ ist dieser asymptotische Anstieg linear, für $k = 2$ ist er parabelförmig.

Im Fall $k < 0$ könnte man das Systemverhalten als global differenzierend bezeichnen. Da reale Wirkungsanordnungen selten ein solches Wirkungsverhalten zeigen, wollen wir diese Begriffsbildung nicht weiter vertiefen.

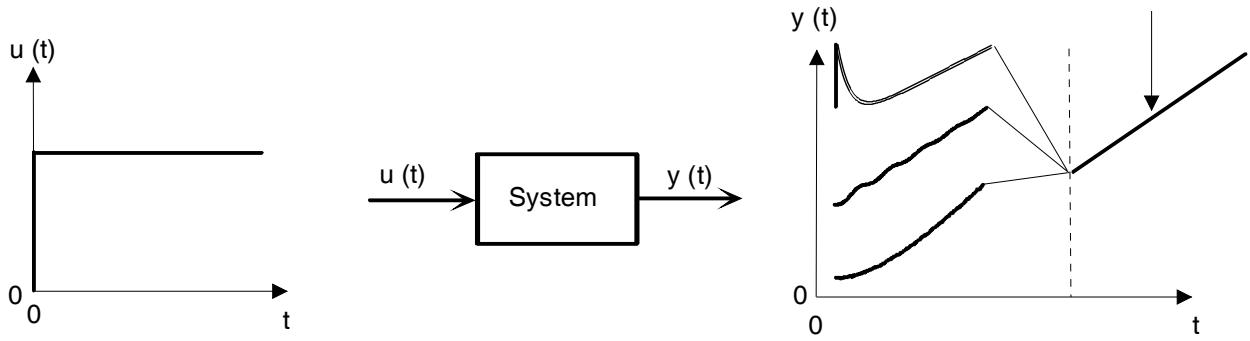


Bild 1.2.19 Sprungverhalten global integral wirkender Systeme

b) Der Faktor V stellt den realen statischen Verstärkungsfaktor des Übertragungssystems dar. Dieser Verstärkungsfaktor hat jedoch bei global proportionalen Systemen eine andere Bedeutung als bei global integralen Systemen.

Wie gerade dargestellt, nimmt bei global proportionalen Systemen das Ausgangssignal nach einer sprungförmigen Eingangserregung für $t \rightarrow \infty$ wieder einen stationären Endwert an:

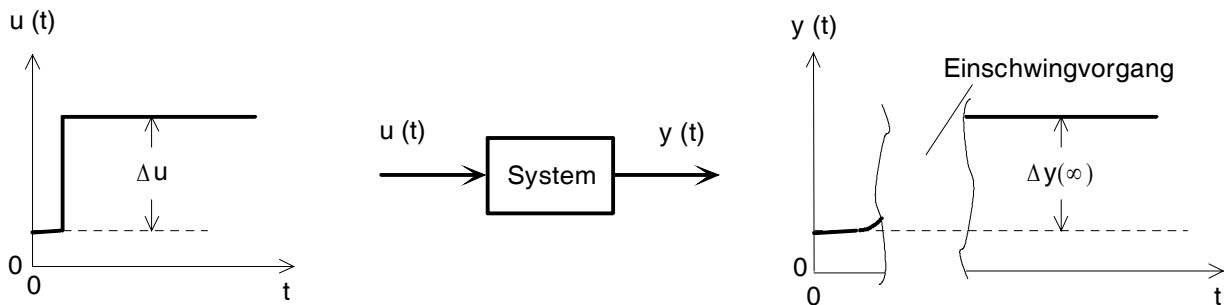


Bild 1.2.20 Zur Definition des Verstärkungsfaktors eines global proportional wirkenden Systems

Der Verstärkungsfaktor ist sinnvollerweise als Quotient aus der stationären Ausgangssignaländerung $\Delta y(\infty)$ und der Eingangssignaländerung Δu definiert

$$V = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta u} . \quad (1.2.92)$$

Haben $u(t)$ und $y(t)$ die gleiche Einheit (z.B. Newton) ist V einheitenlos. Ist die Einheit von $u(t)$ ungleich der Einheit von $y(t)$, so gilt (mit der Abkürzung "Einheit von" durch "Eh{ }") folgende Beziehung

$$\text{Eh}\{V\} = \frac{\text{Eh}\{y(t)\}}{\text{Eh}\{u(t)\}} . \quad (1.2.93)$$

Bei global integral wirkenden Systemen nimmt die Sprungantwort keinen stationären Endwert an und die obige Verstärkungsdefinition wäre sinnlos. Global integral wirkende Systeme (mit einem Integrator $1/s$) antworten jedoch nach sprungförmiger Erregung für

$t \rightarrow \infty$ mit einer konstanten Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangsgröße:

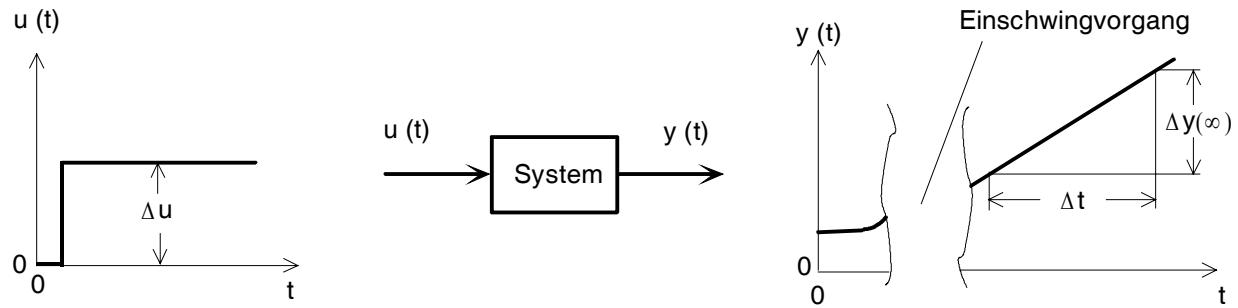


Bild 1.2.21 Zur Definition des Verstärkungsfaktors eines global integral wirkenden Systems

Plausiblerweise stellt also der Verstärkungsfaktor V eines global integral wirkenden Systems die konstante Anstiegsgeschwindigkeit $\Delta y(\infty)/\Delta t$ bezogen auf die Eingangs-signaländerung Δu dar:

$$V = \frac{\Delta y(\infty) / \Delta t}{\Delta u} \quad . \quad (1.2.94)$$

Für die Einheit dieses Verstärkungsfaktors gilt

$$Eh\{V\} = \frac{Eh\{y(t)\} / Eh\{t\}}{Eh\{u(t)\}} \quad . \quad (1.2.95a)$$

Für den Fall $Eh\{y(t)\} = Eh\{u(t)\}$ verbleibt daher bei global integral wirkenden Systemen immer

$$Eh\{V\} = \frac{1}{Eh\{t\}} \quad . \quad (1.2.95b)$$

c) Bevor ein Übertragungssystem nach einer sprungförmigen Eingangserregung sein charakteristisches Globalverhalten zeigt, durchläuft die Sprungantwort einen Einschwingvorgang, der je nach Systemtyp eine spezifische Form hat.

Die Form des Einschwingvorganges wird in der V -Normalform durch $Z(s)/N(s)$ beschrieben

$$G(s) = V \cdot \frac{1}{s^k} \cdot \frac{Z(s)}{\underbrace{(1 + sT_{Z1}) \cdot (1 + sT_{Z2}) \cdot \dots}_{N(s)}} \cdot \underbrace{\frac{(1 + sT_{N1}) \cdot (1 + sT_{N2}) \cdot \dots \cdot (1 + 2dT_{N3}s + (T_{N3}s)^2)}{(1 + sT_{N1}) \cdot (1 + sT_{N2}) \cdot \dots \cdot (1 + 2dT_{N3}s + (T_{N3}s)^2)}}_{N(s)} \quad . \quad (1.2.96)$$

Wir nennen die im Nenner auftretenden Terme Verzögerungsglieder, weil durch sie eine Verzögerung des Signaldurchganges durch das System beschrieben wird. Die ent-

sprechenden Zeitkonstanten T_{Ni} werden darum auch Verzögerungszeitkonstanten genannt.

Die im Zähler auftretenden Terme nennen wir Vorhaltglieder, sie beschreiben einen nichtverzögernden, prompten Signaldurchgang durch das System. Die Zeitkonstanten T_{Zi} heißen deshalb Vorhaltzeitkonstanten. Alle Zeitkonstanten – sowohl die im Zähler als auch die im Nenner – haben die Einheit Zeit (sek, min, h):

$$Eh\{T\} = Eh\{t\}. \quad (1.2.97)$$

Da bei Übertragungsfunktionen realer Übertragungssysteme sowohl Verzögerungsglieder als auch Vorhaltglieder vorkommen können, überlagern sich die beiden Einschwingcharakteristika. Daher ist es bei komplexen Systemen häufig nicht möglich, anhand einer Sprungantwort Schlüsse hinsichtlich der Vorhalt-/Verzögerungsglied-Konfiguration der Übertragungsfunktion zu ziehen.

Bei einfachen Übertragungsgliedern mit nur wenigen Vorhalt- und/oder Verzögerungsgliedern ist dies jedoch möglich. Wir werden in Kapitel 1.4 diese Zusammenhänge ausführlich beschreiben.

Bevor wir anhand einiger Beispielrechnungen die Gültigkeit der vorangehend beschriebenen praktischen Bezüge zwischen Übertragungsfunktion und Übertragungssystem zeigen, müssen wir uns noch einem wichtigen Übertragungssystem widmen, dessen Übertragungsfunktion nicht mit gebrochen rationalen Funktionen beschrieben wird, dem sogenannten Totzeitglied. Ein Totzeitglied bewirkt eine zeitlich begrenzte Totalverzögerung eines Eingangssignals auf den Ausgang.

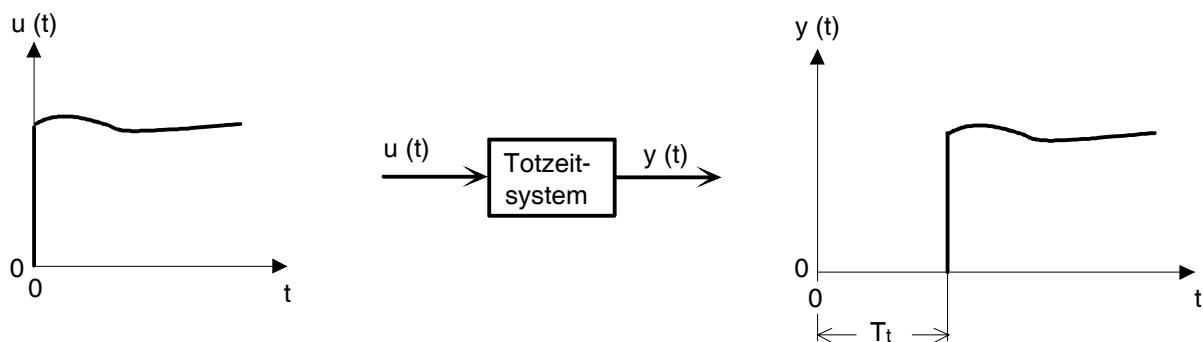


Bild 1.2.22 Zeitverhalten eines Totzeitgliedes

Eine solche "Totalverzögerung" nennt man Totzeit und kürzt sie mit T_t ab. Ein reines Totzeitsystem ist z.B. ein Förderband, dessen Eingangsgröße, das Aufschüttgut, erst nach der Bandlaufzeit als Ausgangsgröße vom Band fällt. Auch Getriebelose kann als Totzeit interpretiert werden. Da ein reines Totzeitglied weder Amplitude noch Kurvenform des Eingangssignals ändert, kann mit (1.2.2) sein Zeitverhalten wie folgt beschrieben werden

$$y(t) = u(t - T_t). \quad (1.2.98)$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes der Laplace–Transformation (Korrespondenz Nr. 14) lässt sich (1.2.98) in den Laplace–Bereich transformieren

$$Y(s) = U(s) e^{-sT_t}, \quad (1.2.99)$$

woraus sich die Übertragungsfunktion eines reinen Totzeitgliedes

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-sT_t} \quad (1.2.100)$$

ergibt. Totzeitverhalten tritt häufig mit anderem Systemverhalten gekoppelt auf. In der Übertragungsfunktion wird dies durch den multiplikativ hinzugefügten Totzeiterm beschrieben

$$G(s) = V \cdot \frac{1}{s^k} \cdot \frac{Z(s)}{N(s)} \cdot e^{-sT_t}. \quad (1.2.101)$$

Wir kehren nun zu den Betrachtungen über anschauliche Bezüge zwischen Übertragungsfunktion und Übertragungssystem zurück.

Wir untersuchen das mathematische Zustandsmodell unseres Gasdruckmeßgerätes (1.2.86) und bilden, ohne die numerischen Systemparameterwerte einzusetzen, seine Übertragungsfunktion in V–Normalform

$$G(s) = \frac{U(s)}{P(s)} = \underbrace{\frac{A \cdot U_0}{c \cdot \ell}}_{V} \cdot \underbrace{1}_{\frac{1}{s^k}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 2 \frac{r}{2\sqrt{m \cdot c}} \sqrt{\frac{m}{c}} s + \left(\sqrt{\frac{m}{c}} s\right)^2}}_{\frac{Z(s)}{N(s)}}. \quad (1.2.102)$$

Betrachten wir zunächst den Verstärkungsfaktor V . In Kapitel 1.2.1.3 hatten wir mit Gleichung (1.2.38) die Ruhelage eines Systems durch die Beziehung $\dot{x}(t) = 0$ gekennzeichnet. In einer solchen Ruhelage wird das Systemverhalten ausschließlich durch den Verstärkungsfaktor beschrieben.

Wenn wir nun nach (1.2.38) die linken Gleichungsseiten unseres Gasdruckzustandsmodells (1.2.86) Null setzen:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{r}{m} v - \frac{c}{m} s + \frac{A}{m} p \\
 0 &= \quad v \\
 u &= \quad \frac{U_0}{\ell} s
 \end{aligned} \tag{1.2.103}$$

und den Quotienten u/p bilden, müssen wir den gleichen Verstärkungsfaktor wie bei (1.2.102) erhalten

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= -\frac{c}{m} s + \frac{A}{m} p \\
 u &= \frac{U_0}{\ell} s
 \end{aligned} \right\} V = \frac{u}{p} = \frac{A \cdot U_0}{c \cdot \ell}. \tag{1.2.104}$$

Dies ist auch der Fall.

Bei der Berechnung der Sprungantwort des Gasdruckmeßgerätes nach Bild 1.2.17 war die Ausgangsspannung $u(t)$ bei einer Druckerregung von 5 bar auf einen stationären Endwert von $u = 5V$ angestiegen. Auch diese Beziehung muß den Verstärkungsfaktor wiederspiegeln

$$\begin{aligned}
 u &= V \cdot p = \frac{AU_0}{\ell \cdot c} \cdot p = \frac{90 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot 10V}{0,1m \cdot 900 N/m} \cdot 5 \text{bar} \\
 u &= 10 \cdot 10^{-6} \frac{V}{N/m^2} \cdot 5 \text{bar} = 10 \cdot 10^{-6} \frac{V}{N/m^2} \cdot 5 \cdot 10^5 N/m^2 \\
 u &= 5V.
 \end{aligned}$$

Untersuchen wir die Gleichung (1.2.102) weiter auf ihre Aussage über das Globalverhalten des Systems, stellen wir fest, daß der $1/s^k = 1$ ist, d.h. unser System hat global proportionales Verhalten. Dies bestätigt die berechnete Sprungantwort in Bild 1.2.17. Hinsichtlich des Einschwingverhaltens erlaubt (1.2.102) zunächst nur die Interpretation, daß sich ein quadratischer Term im Nenner befindet und somit das Einschwingverhalten verzögert sein muß. Was auch die Sprungantwort bestätigt. Im Kapitel 1.4 werden wir das Verhalten von Verzögerungsgliedern 2. Ordnung etwas allgemeingültiger präzisieren. Wir kommen dann auf unser Gasdruckmeßgerät-Beispiel zurück.

Beispiel 1.2.18:

Wenden wir uns einer weiteren Beziehung zu. Für die in Beispiel 1.2.4 eingeführte Widerstands-/Kondensatorkombination hatten wir das Zustandsmodell (1.2.18), die Übertragungsfunktion (1.2.60) und die Sprungantwort (1.2.85) sowie deren

Graphen (Bild 1.2.16) berechnet.

Formen wir die Übertragungsfunktion (1.2.60) in V–Normalform um

$$G(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{1 + sRC} = 1 \cdot \frac{1}{1 + sRC}, \quad (1.2.105)$$

erkennen wir, daß die Widerstands-/Kondensatorkombination einen Verstärkungsfaktor $V = 1$ hat. Dies bestätigt unsere Anschauung und auch der Graph der Sprungantwort. Das Fehlen des Terms $1/s^k$ zeigt, daß das System global proportional wirkt. Auch das Verzögerungsglied $1/(1 + sRC)$ im dritten Term der V–Normalform bestätigt die Interpretationsfähigkeit dieser Form der Übertragungsfunktion, die Sprungantwort zeigt verzögerndes Einschwingverhalten.

Beispiel 1.2.19: Um zu zeigen, daß sich auch global integrales Verhalten durch das Vorhandensein des Terms $1/s^k$ in der V–Normalform ausdrückt, betrachten wir noch ein weiteres Beispiel.

Das Systemantwortverhalten des Füllstandes $h(t)$ eines zylindrischen Behälters ohne Ablauf bei einer sprungförmigen Erhöhung des Zuflusses $q_{zu}(t)$ nach Bild 1.1.10 zeigte global integrales Verhalten. Die folgende Rechnung soll zeigen, daß diese Eigenschaft in der V–Normalform der Übertragungsfunktion auch deutlich erkennbar wird.

Mittels einer Volumenbilanz (vergleiche Beispiel 1.2.6)

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= q_{zu}(t) \\ A \cdot \frac{dh(t)}{dt} &= q_{zu}(t) \quad \begin{array}{l} V: \text{Behältervolumen} \\ A: \text{Zylindergrundfläche} \end{array} \\ \dot{h}(t) &= \frac{1}{A} \cdot q_{zu}(t) \quad (1.2.106) \end{aligned}$$

wird das dynamische Verhalten des Systems modelliert. Wenn wir wieder annehmen, daß der Zufluß proportional vom Öffnungswinkel $\alpha(t)$ eines Zuflußventils abhängt

$$q_{zu}(t) = k_V \cdot \alpha(t); k_V: \text{Ventilkonstante}, \quad (1.2.107)$$

erhalten wir das mathematische Zustandsmodell mit $\alpha(t)$ als Eingangs– und $h(t)$ als Ausgangsgröße

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= \frac{k_V}{A} \alpha(t) \\ h(t) &= h(t).\end{aligned}\quad (1.2.108)$$

Dieses Modell transformieren wir in den Laplace-Bereich und bilden die V-Normalform der Übertragungsfunktion

$$s H(s) = \frac{k_V}{A} \alpha(s) \Rightarrow G(s) = \frac{H(s)}{\alpha(s)} = \frac{\frac{k_V}{A}}{\frac{1}{s}} = \frac{k_V}{A} \cdot \frac{1}{s}. \quad (1.2.109)$$

Wir erkennen den Verstärkungsfaktor des Systems $V = k_V/A$ und den Term $1/s$, der auf global integrales Verhalten hinweist. Das völlige Fehlen des dritten Terms $Z(s)/N(s)$ deutet darauf hin, daß kein Einschwingvorgang stattfindet. Dies wird durch den Grafen in Bild 1.1.10 und die analytische Berechnung der Sprungantwort bestätigt:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s) = \frac{k_V}{A} \cdot \frac{1}{s}\right\} = h(t) = \frac{k_V}{A} \cdot t \cdot \Delta\alpha. \quad (1.2.110)$$

Wir verlassen jetzt unsere Betrachtungen zu den praktischen Bezügen zwischen Übertragungsfunktion und Übertragungssystem, um uns dem dritten Modellierungsbereich von Übertragungssystemen zuzuwenden, dem Frequenzbereich.

1.2.5 Systembeschreibung im Frequenzbereich

Erregt man ein lineares kontinuierliches Übertragungssystem mit einer harmonischen Eingangssgröße $u(t)$ der Amplitude \hat{u} und der Frequenz ω ($\omega = 2\pi f$)

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t), \quad (1.2.111)$$

dann antwortet das System nach einem Einschwingvorgang wiederum mit einer harmonischen Ausgangsgröße $y(t)$ der gleichen Frequenz

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.2.112)$$

jedoch mit einer anderen Amplitude \hat{y} und einer gewissen Zeitverschiebung t_φ gegen das Eingangssignal.

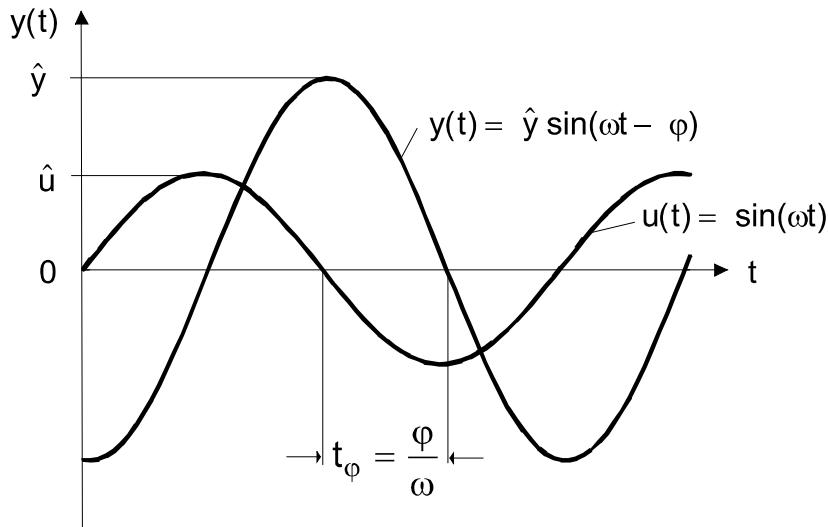


Bild 1.2.23 : Sinusförmiges Eingangs- und Ausgangssignal eines linearen kontinuierlichen Übertragungssystems

Die zeitliche Verschiebung wird i.a. mit Phasenverschiebung $\varphi = \omega \cdot t_\varphi$ bezeichnet und in Grad [°] angegeben, wobei eine vollständige Schwingung 360° hat.

Eilt das Ausgangssignal dem Eingangssignal vor, wird die Phasenverschiebung mit einem positiven Vorzeichen versehen, liegt eine Phasennacheilung vor, mit einem negativen. Bild 1.2.23 zeigt den Fall einer Phasennacheilung.

Legt man nun an ein Übertragungssystem nacheinander sinusförmige Eingangssignale verschiedener Frequenz (z.B. $\omega_1 = 0,1$ 1/sek; $\omega_2 = 0,5$ 1/sek; $\omega_3 = 1,5$ 1/sek; ...) mit den Eingangsamplituden $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \dots$ und mißt (jeweils nach Abwarten des Einschwingvorganges) die Ausgangssignalamplituden $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \dots$, und die Phasenverschiebungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, kann man für die verschiedenen Frequenzen ω das Verstärkungs- (Dämpfungs-) -Verhalten \hat{y}/\hat{u} und das Phasenverschiebungsverhalten φ des Übertragungssystems bestimmen.

Trägt man diese Größen über einer ω -Abzisse auf, erhält man einen Graphen, der Auskunft über das Frequenzverhalten des Übertragungssystems gibt.

Beispiel 1.2.20: Führt man die oben beschriebene meßtechnische Untersuchung an unserer RC-Kombination nach Bild 1.2.7 wiederum mit den Werten $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 1000 \mu\text{F}$ und einer konstanten Eingangssignalamplitude $\hat{u}_E = 1 \text{ V}$ bei den angegebenen ω -Werten durch, erhält man folgende Tabelle des Verstärkungs- und Phasen-verhaltens des RC-Gliedes.

Messung Nr.	ω 1/ sek	$\frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e}$	φ $^{\circ}$
0	0	1,00	0
1	0,5	0,89	-26,6
2	1	0,71	-45,0
3	2	0,45	-63,4
4	4	0,24	-76,0
5	6	0,16	-80,5
6	8	0,12	-82,9
7	10	0,10	-84,3

Tabelle 1.2.6 Meßtabelle des Frequenzganges eines RC-Gliedes

Trägt man diese Meßwerte über der Frequenz auf, erlangt man eine grafische Veranschaulichung des Frequenzverhaltens, die Frequenzkennlinien unseres RC-Gliedes (Bild 1.2.24).

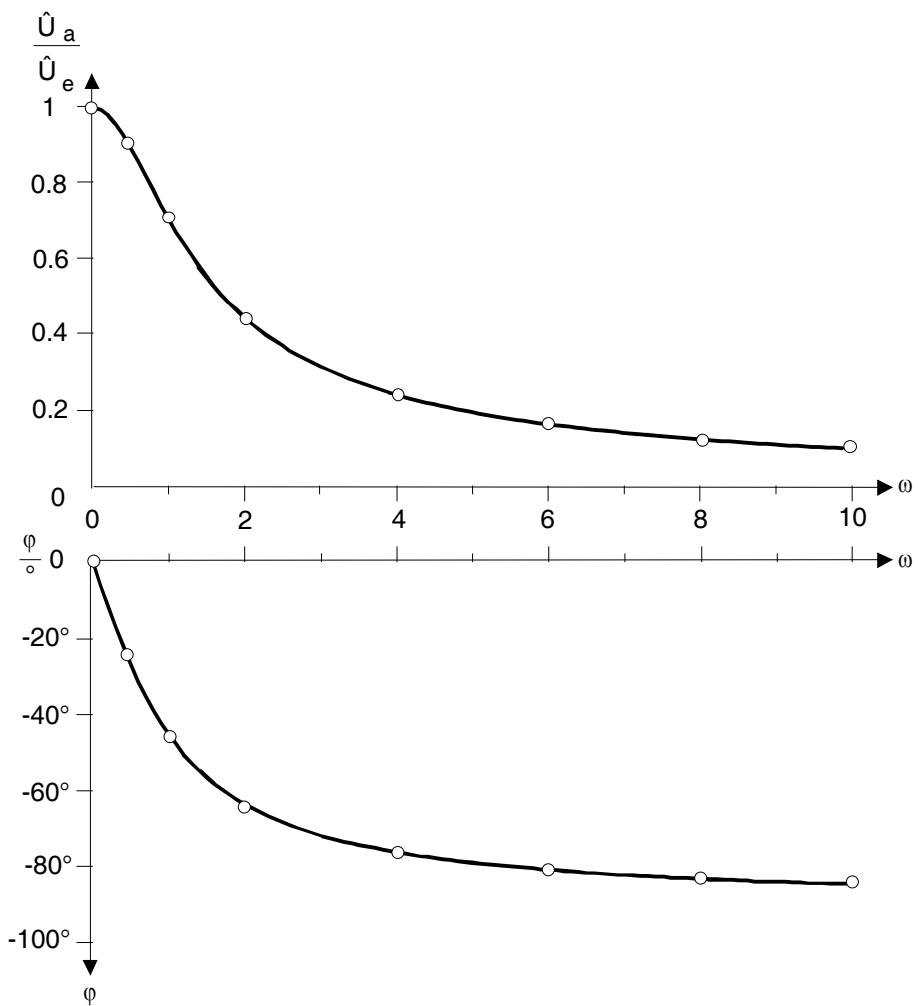


Bild 1.2.24 Frequenzkennlinien eines RC-Gliedes

Bei Gleichspannung ($\omega = 0$) wird das Eingangssignal ungedämpft zum Ausgang übertragen. Bei Erhöhung der Frequenz wird die Dämpfung stärker. Die Phasenverschiebung beginnt bei Gleichspannung bei Null und geht für hohe Frequenzen gegen -90° . Die obere Kennlinie wird als Amplitudengang oder Betragskennlinie, die untere als Phasengang oder Phasenkennlinie bezeichnet. Aus später noch einzusehenden Gründen wird in der Technik eine zu Bild 1.2.24 modifizierte Darstellung bevorzugt. Zunächst wählt man keinen linearen ω -Maßstab, sondern einen logarithmisch gestuften. Der Amplitudengang wird darüberhinaus nicht direkt als \hat{y}/\hat{u} (bzw. in unserem Beispiel \hat{u}_a/\hat{u}_e) aufgetragen, sondern in Dezibel (dB) angegeben (1 Dezibel = 1/10 Bel). Dieses Maß ist wie folgt definiert:

$$V_{\text{dB}} = \left| \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} \right|_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} \right). \quad (1.2.113)$$

Das Dezibel kommt aus der Nachrichtentechnik, wo es ein Maß für die Leistungsverstärkung ist:

$$a[\text{dB}] = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

Das Leistungsverhältnis P_2/P_1 kann Zehnerpotenzen überstreichen. Durch die Logarithmierung wird der Zahlenbereich überschaubar eingegrenzt. Der Faktor 10 wurde willkürlich gewählt. Werden beide Leistungen P_2 und P_1 an gleich großen Widerständen verbraucht

$$a[\text{dB}] = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{U_2^2/R}{U_1^2/R} \right) = 20 \cdot \log \left(\frac{U_2}{U_1} \right) = V_{\text{dB}},$$

erhält man ein Spannungs-Verhältnismaß, wie wir es in (1.2.113) als Verstärkungsmaß der Betragskennlinie eingeführt haben. Obwohl die Tatsache gleich großer Eingangs- und Ausgangswiderstände i.a. bei Übertragungssystemen nicht gilt, verwendet man dennoch das Verstärkungsmaß V_{dB} .

Modifizieren wir unser Bild 1.2.24 entsprechend, erhalten wir den im Bild 1.2.25 dargestellten Graphen.

In solcher Form aufgetragene Frequenzkennlinien werden Bodediagramm genannt. Man erkennt jetzt deutlich die asymptotischen Verläufe der Betrags- und Phasenkennlinie für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$. Dies ist in der Darstellung der Frequenzkennlinien mit linearen Maßstäben nicht so eindeutig möglich.

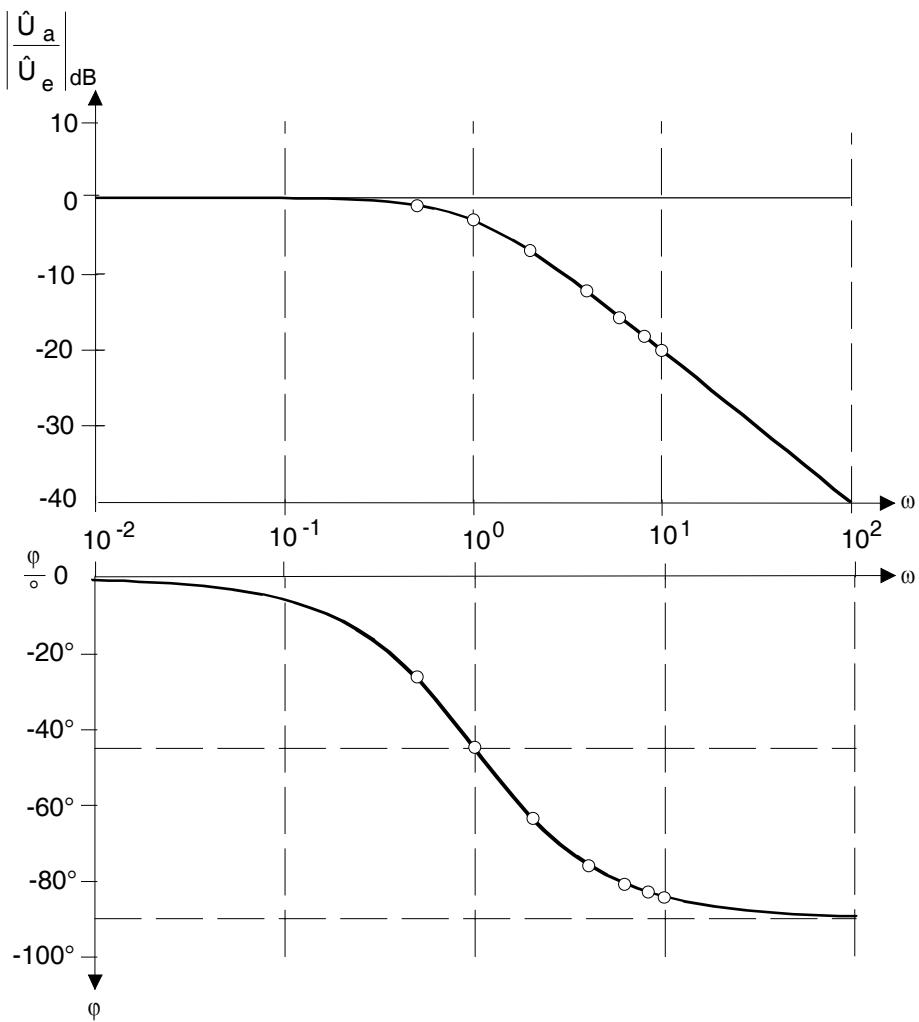


Bild 1.2.25 Bodediagramm eines RC-Gliedes

Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß es auch möglich ist, Frequenzkennlinien/Bodediagramme von nicht elektrischen Systemen, z. B. von unserem Gasdruckmeßgerät meßtechnisch aufzunehmen. Man muß nur dafür sorgen, daß der Systemeingang mit einem entsprechenden sinusförmigen Signal erregt und das Ausgangssignal mit einem geeigneten Meßgerät ausgewertet werden kann. Im Falle unseres Gasdruckmeßgerätes müßte zur Erzeugung des Eingangssignals z. B. ein Luftkompressor zur Verfügung stehen, der sinusförmige Luftdrücke verschiedener Frequenz und definierter Amplitude erzeugen kann. Die Messung der sinusförmigen Ausgangsgröße ist problemlos. Da sie eine elektrische Spannung ist, kann sie mittels eines Schreibers bzw. eines Oszilloskops ausgewertet werden.

1.2.5.1 Der Frequenzgang

Während die Übertragungsfunktion $G(s)$ eine weitgehend abstrakte Beschreibungsform linearer Übertragungssysteme war, die nicht meßtechnisch bestimmt werden konnte, waren wir im Zeitbereich in der Lage, Systemantworten an der realen Wirkungsanordnung

zu messen und beim Vorliegen eines mathematischen Modells der Wirkungsanordnung diese auch analytisch oder numerisch zu berechnen. Diese Eigenschaft besitzt auch der Frequenzbereich. In der vorangegangenen Einleitung des Kapitels 1.2.5 haben wir gezeigt, wie das Frequenzverhalten eines Übertragungssystems meßtechnisch bestimmt werden kann. Im Folgenden wollen wir zeigen, wie das Frequenzverhalten berechnet werden kann, wenn ein mathematisches Modell der Wirkungsanordnung existiert.

Wir nehmen dazu an, daß das mathematische Modell einer Wirkungsanordnung in der Form seiner Übertragungsfunktion vorliegt. Der Übergang vom Laplace-Bereich in den Frequenzbereich erfolgt durch Nullsetzen des Realteils δ der Laplace-Variablen $s = \delta + j\omega$, so daß die Variable s in die Variable $j\omega$ übergeht. Wendet man diese Operation auf eine Übertragungsfunktion $G(s)$ an

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} , \quad (1.2.114)$$

erhält man den sogenannten Frequenzgang $G(j\omega)$. (Diese Operation kann als Äquivalent zur ausschließlichen Nutzung von harmonischen Signalen zur meßtechnischen Bestimmung des Frequenzverhaltens von Übertragungssystemen gedeutet werden). Praktisch ausgeführt bedeutet die Operation (1.2.114) nichts anderes, als das formale Ersetzen der unabhängigen Variablen s durch die unabhängige Variable $j\omega$ in der Übertragungsfunktion.

Beispiel 1.2.21: Berechne den Frequenzgang der folgenden Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{10}{1 + 4s + 10s^2} .$$

Lösung:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{10}{1 + 4j\omega + 10(j\omega)^2} .$$

Offensichtlich bringt diese Operation keine neuen praktischen Erkenntnisse. Man erkennt nur, daß der Frequenzgang eine komplexe Funktion ist

$$G(j\omega) = \operatorname{Re} \{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im} \{G(j\omega)\} . \quad (1.2.115)$$

Wir wollen nun zeigen, daß erst mit einer grafischen Darstellung des Frequenzganges $G(j\omega)$ wieder ein anschaulicher Bezug zu den Systemeigenschaften des durch $G(j\omega)$ beschriebenen Systems hergestellt werden kann.

Beispiel 1.2.22: Wir greifen wieder das Beispiel unserer RC-Kombination auf, zu der wir mit $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 1000 \mu\text{F}$ folgende Übertragungsfunktion berechnet hatten (1.2.105):

$$G(s) = \frac{V}{1 + sT}; \quad V = 1; \quad T = 1 \text{ sek.} \quad . \quad (1.2.116)$$

Mit (1.2.114) bestimmen wir zunächst den Frequenzgang

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega} \quad (1.2.117)$$

und formen ihn durch konjugiert komplexes Erweitern in die Form (1.2.115) um
 $(j = \sqrt{-1}; j^2 = -1)$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega} \cdot \frac{1 - j\omega}{1 - j\omega} = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2} \\ G(j\omega) &= \underbrace{\frac{1}{1 + \omega^2}}_{\text{Re } \{G(j\omega)\}} + j \underbrace{\frac{-\omega}{1 + \omega^2}}_{\text{Im } \{G(j\omega)\}} . \end{aligned} \quad (1.2.118)$$

Es liegt nun nahe, diese Funktion in einer komplexen Ebene grafisch darzustellen. Dazu berechnen wir für einige diskrete ω -Werte jeweils den Real- und Imaginärteil von $G(j\omega)$, tragen diese Wertepaare in der komplexen Ebene auf und kennzeichnen sie mit dem entsprechenden ω -Wert.

Zwischen den berechneten Kurvenpunkten kann man sich die Lage weiterer Punkte für eine engere ω -Skala vorstellen, so daß eine Verbindung der Kurvenpunkte gerechtfertigt ist. Der sich ergebende Graph wird als Ortskurve des Frequenzganges bezeichnet. Je nach Struktur und Parametern der Übertragungsfunktion kann diese Ortskurve die verschiedensten Verläufe auch durch mehrere Quadranten der komplexen Ebene haben.

ω	$\text{Re } \{G(j\omega)\}$	$\text{Im } \{G(j\omega)\}$
0	1	0
0,5	0,8	-0,4
1	0,5	-0,5
2	0,2	-0,4
∞	0	0

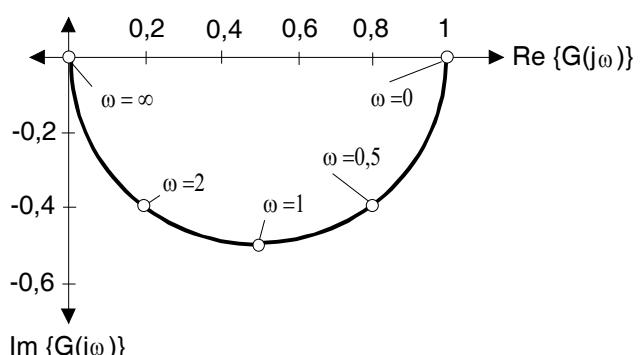


Bild 1.2.26 Ortskurve des Frequenzganges eines RC-Gliedes

Eine anschauliche Interpretation der Ortskurve des Frequenzganges ist möglich, wenn man eine andere Schreibweise für komplexe Funktionen betrachtet.

Die sogenannte Komponenten–Darstellung des komplexen Frequenzganges

$$G(j\omega_p) = \operatorname{Re} \{G(j\omega_p)\} + j \operatorname{Im} \{G(j\omega_p)\} \quad (1.2.115)$$

kennzeichnet genau einen zu ω_p gehörenden Punkt der komplexen Ebene. Dieser Punkt kann aber auch durch eine Zeigerlänge $|G(j\omega_p)|$ vom Ursprung der Ebene bis zu diesem Punkt und dessen Winkel $\varphi\{G(j\omega_p)\}$ zur positiv reellen Achse eindeutig beschrieben werden.

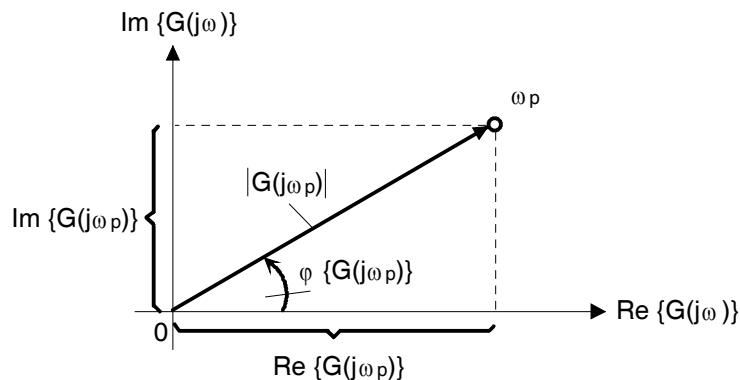


Bild 1.2.27 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Für diese sogenannte Betrags– und Phasen–Darstellung gilt folgende symbolische Schreibweise

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi\{G(j\omega)\}} . \quad (1.2.119)$$

Die Umrechnung zwischen den Schreibweisen (1.2.115) und (1.2.119) (vergleiche Bild 1.2.27) erfolgt mittels der folgenden Beziehungen

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left[\operatorname{Re} \{G(j\omega)\}\right]^2 + \left[\operatorname{Im} \{G(j\omega)\}\right]^2} \quad (1.2.120)$$

und

$$\varphi\{G(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} \{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re} \{G(j\omega)\}}\right) . \quad (1.2.121)$$

Mit Kenntnis dieser Zusammenhänge ist eine anschauliche Interpretation der Ortskurve des Frequenzganges möglich. Die Zeigerlänge $|G(j\omega_p)|$ stellt das Verhältnis von Ausgangssignalamplitude zur Eingangssignalamplitude \hat{y} / \hat{u} (in unserem Beispiel \hat{u}_a / \hat{u}_e) des betrachteten Übertragungssystems, d. h. sein Verstärkungs– bzw. Dämpfungsverhalten

bei der Frequenz ω_p dar. $\varphi\{G(j\omega_p)\}$ ist die durch das Übertragungssystem hervorgerufene Phasenverschiebung zwischen Ausgang und Eingang.

Der Leser kann sich selbst davon überzeugen, daß die Beträge und Phasen (z. B. bei $\omega = 0; 0,5; 1$ usw.) in der meßtechnisch ermittelten Tabelle 1.2.6 mit denen, die aus der Ortskurve des Frequenzganges nach Bild 1.2.26 abgelesen werden können, identisch sind. Man kann an dieser Stelle schon erkennen, daß die Ortskurve des Frequenzganges und das Bodediagramm die gleiche Information über das Frequenzverhalten eines Übertragungssystems liefern. Da sich Bodediagramme wesentlich einfacher zeichnen lassen als Ortskurven, lernen wir im nächsten Kapitel Konstruktionsvorschriften für Bodediagramme kennen. Anschließend werden wir für Frequenzgangbetrachtungen von Übertragungssystemen ausschließlich das Bodediagramm verwenden.

1.2.5.2 Das Bodediagramm des Frequenzganges

Zur Konstruktion des Bodediagramms muß der Frequenzgang des zu untersuchenden Übertragungssystems in faktorisierter V-Normalform mit Kennfrequenzen (1.2.73) vorliegen:

$$G(j\omega) = V \cdot \frac{1}{(j\omega)^k} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kZ1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kZ2}}\right) \cdot \dots}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kN1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kN2}}\right) \cdot \left(1 + 2d \frac{j\omega}{\omega_{kN3}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{kN3}}\right)^2\right) \cdot \dots} \cdot e^{-j\omega T_t} \quad (1.2.122)$$

Aus unseren Betrachtungen über die Produktform und die V-Normalform der Übertragungsfunktion kann man ableiten, daß sich ein beliebiger Frequenzgang aus einer begrenzten Anzahl verschiedener Elementarfrequenzgänge, die in der V-Normalform multiplikativ miteinander verknüpft sind, zusammensetzt.

Für lineare Übertragungssysteme gibt es genau acht strukturell verschiedene Elementarfrequenzgänge, die in der folgenden Tabelle 1.2.7 zusammengestellt sind.

Für jeden dieser Elementarfrequenzgänge kann man nun eine einfache Konstruktionsvorschrift für seine Betrags- und Phasenkennlinie angeben. Wir wollen die Herleitung einer solchen Zeichenvorschrift am Beispiel des Vorhaltgliedes 1. Ordnung

$$G(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_k} \quad (1.2.123)$$

zeigen. Zur Bestimmung der Betragskennlinie wird der Betrag des Frequenzganges nach (1.2.120) berechnet

$$|G(j\omega)| = \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_k} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2}$$

Da die Ordinate der Betragskennlinie eine Dezibel (dB)-Skalierung haben soll, muß die Gleichung noch logarithmiert und mit 20 multipliziert werden (vergleiche (1.2.113)):

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2}$$

$G_E(j\omega)$	Name
V	Verstärkungsfaktor ; $V = \text{konstant}$
$\frac{1}{j\omega}$	Integrator
$j\omega$	Differenzierer
$1 + \frac{j\omega}{\omega_k}$	Vorhaltglied 1. Ordnung; $\omega_k = \text{konstant}$;
$1 + 2d \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2$	Vorhaltglied 2. Ordnung; $\omega_k = \text{konstant}; d < 1$
$\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_k}}$	Verzögerungsglied 1. Ordnung; $\omega_k = \text{konstant}$;
$\frac{1}{1 + 2d \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2}$	Verzögerungsglied 2. Ordnung; $\omega_k = \text{konstant}; d < 1$
$e^{-j\omega T_t}$	Totzeitglied; $T_t = \text{konstant}$

Tabelle 1.2.7 Elementarfrequenzgänge $G_E(j\omega)$ linearer kontinuierlicher Systeme

Setzt man in diese Gleichung ein gegebenes ω_k ein und variiert ω über einen interessierenden Frequenzbereich, erhält man den exakten Verlauf der Betragskennlinie des Vorhaltgliedes. Das Bild 1.2.28 zeigt diesen Verlauf mit $\omega_k = 1$ im Bereich $\omega = 0,01$ bis $\omega = 100$.

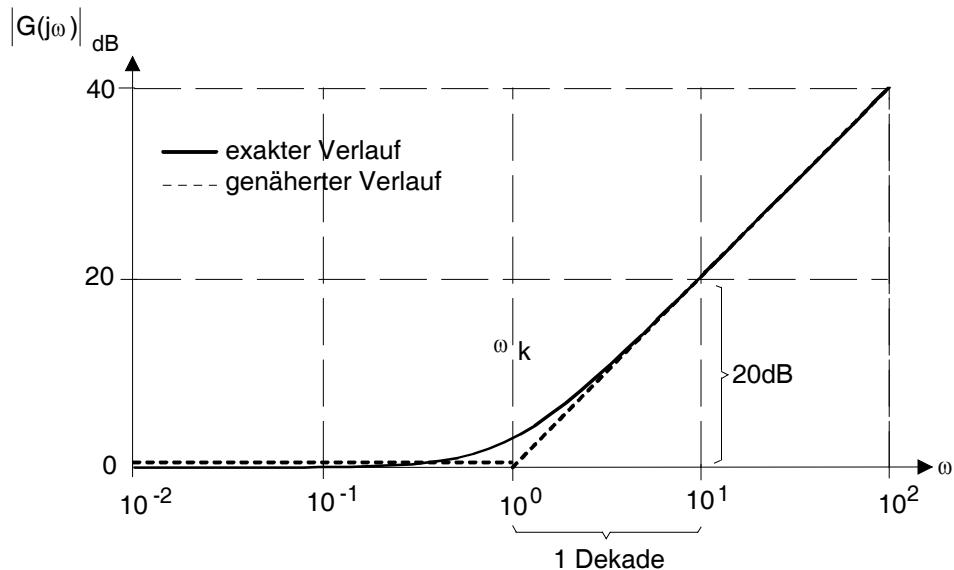


Bild 1.2.28 Betragskennlinie eines Vorhaltgliedes

Wie man erkennt, kann man – ohne einen großen Fehler zu machen – den Betragsverlauf durch zwei Geradenstücke annähern. Die linke Gerade verläuft auf der 0 dB–Achse bis $\omega = 1$, wo sie die rechte Gerade, die mit 20 dB pro Dekade ansteigt, schneidet. Aus der folgenden Rechnung wird deutlich, daß der Schnittpunkt dieser beiden Näherungen genau bei ω_k des Vorhaltgliedes (1.2.123) liegt. Die linke Näherungsgerade berechnet sich aus

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)|_{\text{dB}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB},$$

und die rechte aus

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)|_{\text{dB}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_k}.$$

Der Schnittpunkt liegt genau dort, wo sich beide Geraden schneiden, also gleich sind:

$$\underbrace{\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)|_{\text{dB}}}_{20 \log \frac{\omega}{\omega_k}} = \underbrace{\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)|_{\text{dB}}}_{0} = 0.$$

Da $20 \neq 0$ ist, wird diese Gleichung dann erfüllt, wenn das Argument des Logarithmus einen Wert annimmt, bei dem der Logarithmus zu Null wird. Dies ist bei $\omega/\omega_k = 1$ der Fall, woraus sich berechnen lässt, daß $\omega = \omega_k$ der Schnittpunkt der beiden Näherungsgeraden ist. Dies bestätigt auch Bild 1.2.28, zu dessen Berechnung wir $\omega_k = 1$ gewählt hatten.

Damit ist man in der Lage, ausschließlich mit Kenntnis der Größe von ω_k die Betragskennlinie des Vorholtgliedes näherungsweise zu zeichnen. Der größte Fehler entsteht bei ω_k , er beträgt 3 dB.

Für die näherungsweise Zeichnung der Phasenkennlinie des Vorholtgliedes kann ebenfalls sehr einfach eine genäherte Kennlinie gezeichnet werden. Der exakte Verlauf der Phasenkennlinie berechnet sich wie folgt (1.2.121):

$$\varphi\{G(j\omega)\} = \arctan \left(\frac{\text{Im } \{G(j\omega)\}}{\text{Re } \{G(j\omega)\}} \right) = \arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_k}}{1} = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right).$$

Bild 1.2.29 zeigt diesen Verlauf mit $\omega_k = 1$ über einen Frequenzbereich von $\omega = 0,01$ bis $\omega = 100$.

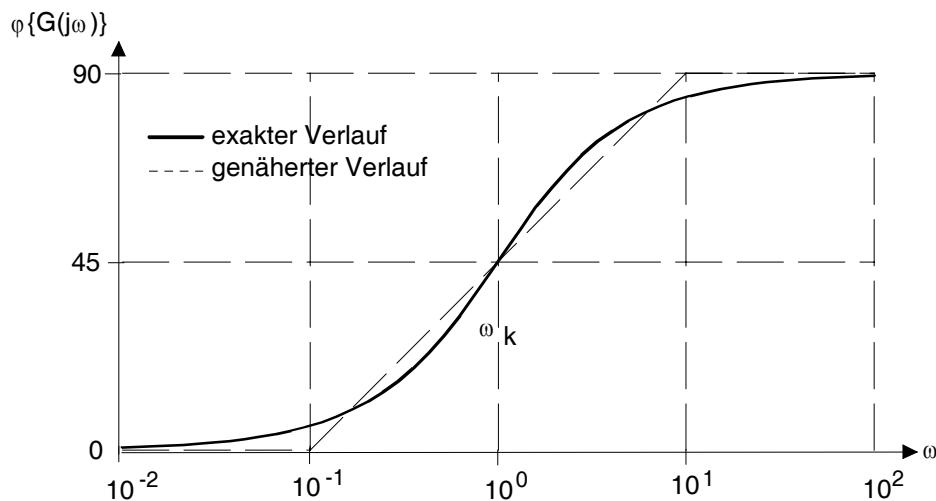


Bild 1.2.29 Phasenkennlinie eines Vorholtgliedes

Ohne einen großen Fehler zu machen, kann man auch hier die exakte Kennlinie diesmal durch drei Geraden approximieren. Zunächst erkennt man, daß die Phasenverschiebung bei $\omega = \omega_k = 45^\circ$ beträgt:

$$\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right) = \arctan 1 = 45^\circ.$$

Bis eine Dekade unterhalb von ω_k verläuft $\varphi\{G(j\omega)\}$ ungefähr bei Null Grad, eine Dekade oberhalb von ω_k ungefähr bei $+90^\circ$. Zwischen diesen Frequenzen verläuft die Phase auf der Verbindungsgeraden zwischen diesen Geraden.

Führt man diese Untersuchungen für alle Elementarfrequenzgänge nach Tabelle 1.2.7 durch, erhält man einen Katalog zur näherungsweisen Zeichnung der Elementarfrequenzkennlinien. Wir geben diesen Katalog ohne weitere Ableitungen nach den folgenden Erläuterungen an.

Nachdem wir wissen, wie die Frequenzkennlinien der Elementarfrequenzgänge konstruiert werden, müssen wir klären, wie das Gesamtbodediagramm eines gegebenen beliebigen Frequenzgangs mittels dieser Kennlinien gezeichnet werden kann. Wie man aus dem Frequenzgang (1.2.122) erkennt, setzt sich dieser aus dem Produkt von Elementarfrequenzgängen zusammen

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot \dots \cdot G_n(j\omega), \quad (1.2.124)$$

z. B.

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{10}}.$$

Teilfrequenzgänge in Betrags- und Phasendarstellung (1.2.119) werden dann zu einem Gesamtfrequenzgang zusammengefaßt, indem man die Teilbeträge multipliziert

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot \dots \cdot |G_n(j\omega)| \quad (1.2.125)$$

und die Phasen addiert

$$\varphi\{G(j\omega)\} = \varphi\{G_1(j\omega)\} + \varphi\{G_2(j\omega)\} + \dots + \varphi\{G_n(j\omega)\}. \quad (1.2.126)$$

Da wir aber die Betragskennlinien der Elementarkennlinien bereits mit einer dB-Ordinate dargestellt haben, können wir wegen

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log \{|G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot \dots \cdot |G_n(j\omega)|\} \\ |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |G_1(j\omega)| + 20 \log |G_2(j\omega)| + \dots + 20 \log |G_n(j\omega)| \\ &= |G_1(j\omega)|_{\text{dB}} + |G_2(j\omega)|_{\text{dB}} + \dots + |G_n(j\omega)|_{\text{dB}} \end{aligned} \quad (1.2.127)$$

die Betragskennlinien auch additiv zusammenfassen. Wir zeigen die Vorgehensweise an folgendem

Beispiel 1.2.23: Konstruiere das Bodediagramm des Übertragungssystems, das durch folgende Übertragungsfunktion modelliert wird

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10 (1 + s)}{s (1 + 10s)} . \quad (1.2.128)$$

Wir transformieren (1.2.128) formal in den Frequenzbereich ($s = j\omega$) und spalten den Frequenzgang so auf, daß die Elementarfrequenzgänge deutlich zu erkennen sind

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot (1 + j\omega) \cdot \frac{1}{1 + 10j\omega} . \quad (1.2.129)$$

Wie man erkennt hat (1.2.129) noch nicht die benötigte Kennfrequenzform (vergleiche (1.2.122) und die Beziehungen zwischen der Zeitkonstanten- und Kennfrequenzform (1.2.72/1.2.73) der Übertragungsfunktion). Nach der Umformung in die Kennfrequenzform erkennen wir folgende Elementarfrequenzgänge mit folgenden Eigenschaften

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{0,1}} ; \quad (1.2.130)$$

10 : Verstärkungsfaktor $V = 10 \Rightarrow V_{dB} = 20 \log 10 = 20 \text{ dB}$

$\frac{1}{j\omega}$: Integrierer

$1 + \frac{j\omega}{1}$: Vorhaltglied 1. Ordnung mit $\omega_k = 1$

$\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{0,1}}$: Verzögerungsglied 1. Ordnung mit $\omega_k = 0,1$

Wir entnehmen nun dem Katalog der Elementarfrequenzkennlinien die Zeichenvorschriften für die einzelnen Kennlinien und tragen diese in Koordinatensysteme für die Betragskennlinie und die Phasenkennlinie ein (Bild 1.2.30). Anschließend addieren wir jeweils die Elementarkennlinien für Betrag und Phase auf (z. B. an bestimmten markanten ω -Punkten) und erhalten durch Verbindung dieser Punkte das Bodediagramm des gegebenen Übertragungssystems (1.2.128). Bei der ω -Skalierung von $\omega = 0,001$ bis $\omega = 100$ wurde darauf geachtet, daß der ω -Bereich abgebildet wird, in dem die Kennfrequenzen $\omega_k = 0,1$ und $\omega = 1$ des Verzögerungs- und Vorhaltgliedes liegen. Damit wird sicher gestellt, daß im Bodediagramm die aussagekräftigsten Bereiche des Frequenzganges abgebildet werden. Gewöhnlich werden ca. vier ω -Dekaden dargestellt. Wir wollen an dieser Stelle aus Platzgründen die Aussagefähigkeit des ermittelten Betrags- und Phasenverlaufes nicht weiter diskutieren, da wir in den folgenden Kapiteln noch sehr häufig mit Bodediagrammen arbeiten werden.

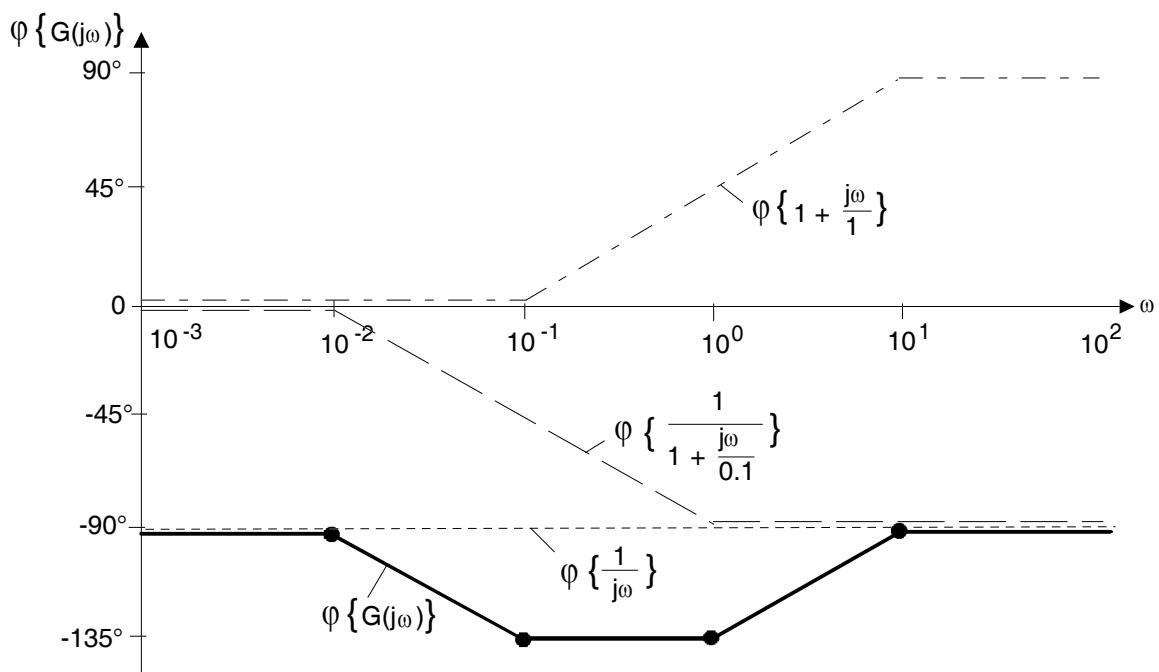
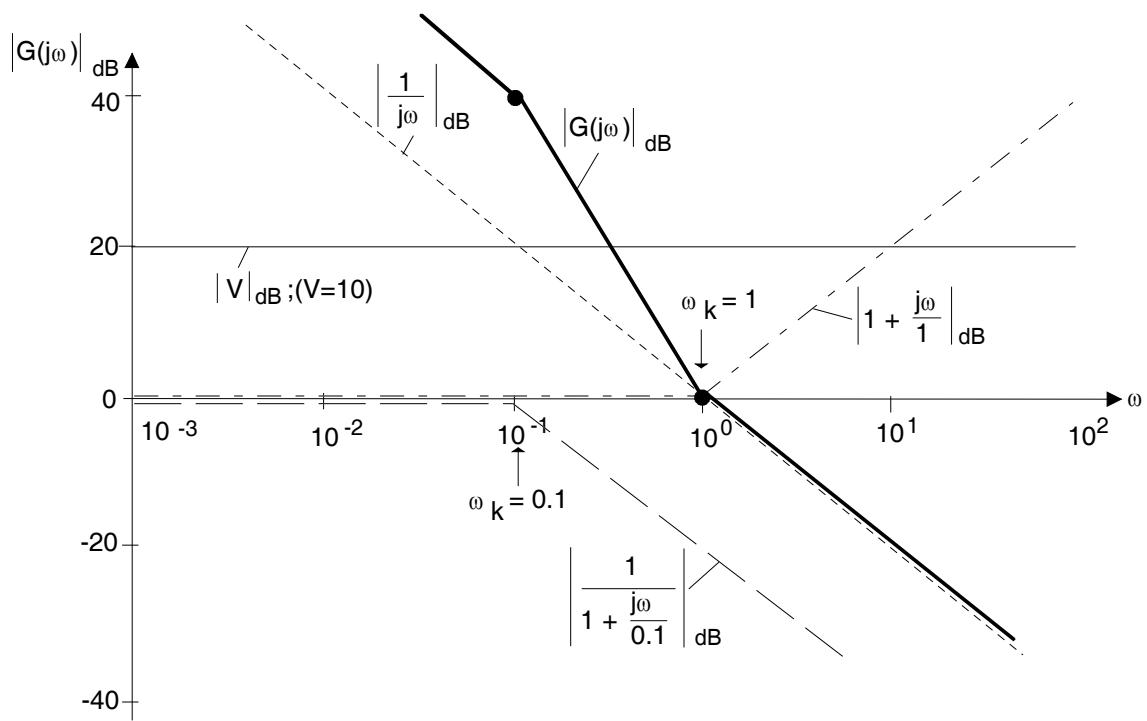
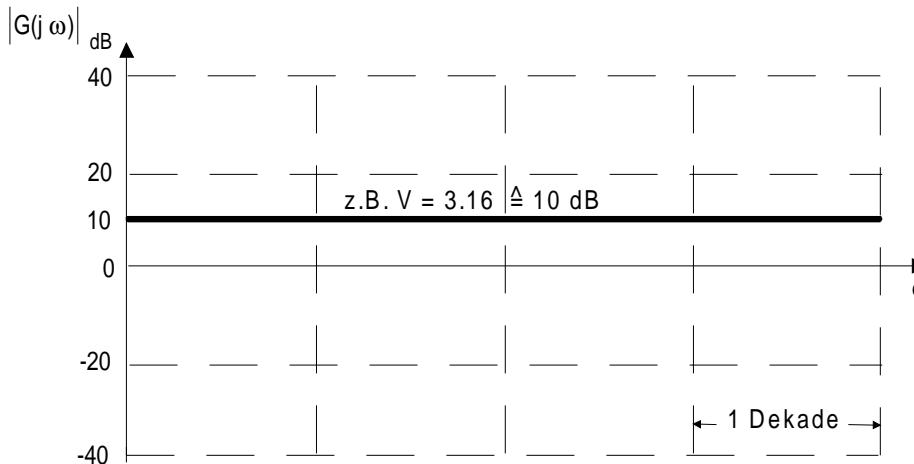
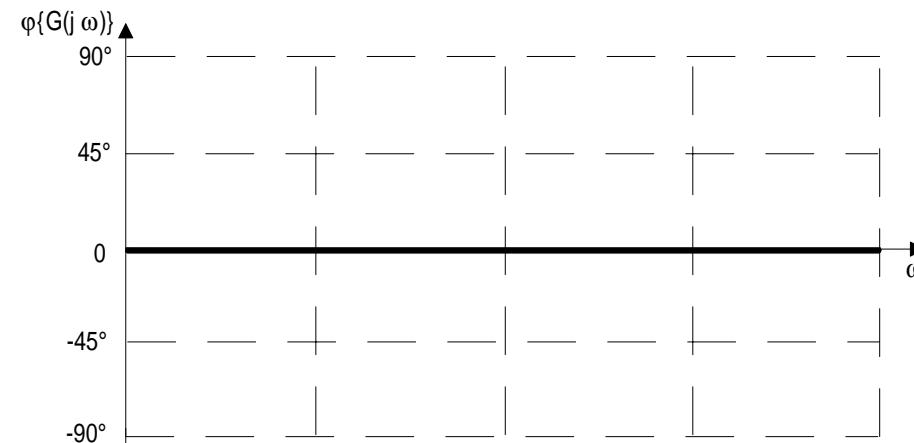


Bild 1.2.30 Näherungskonstruktion des Bodediagramms von (1.2.128)

Ein Katalog der Elementarfrequenzkennlinien von Bodediagrammen

Nr.	1	Name
		Verstärkungsfaktor, Proportionalglied
Frequenzgang		$G(j\omega) = V ; V > 0$
Betragskennlinie		
Phasenkennlinie		
Erläuterungen		<p>Die Betragskennlinie verläuft unabhängig von der Frequenz ω in einer vom Verstärkungsfaktor V festgelegten Entfernung parallel zur ω-Achse. Dabei gelten folgende Umrechnungsbeziehungen:</p> $V_{dB} = 20 \cdot \log V \quad (1.2.131)$ $V = 10^{\frac{V_{dB}}{20dB}} \quad (1.2.132)$ <p>Die Phasenverschiebung beträgt auch unabhängig von der Frequenz 0°.</p>

Nr.	2	Name	Integrator
Frequenzgang			$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$
Betragskennlinie			
Phasenkennlinie			
Erläuterungen			<p>Die Betragskennlinie des Integrators fällt mit -20dB pro Dekade. Sie schneidet die 0-dB-Linie immer bei $\omega = 1/\text{sek}$. Die Phasenverschiebung beträgt unabhängig von der Frequenz -90°.</p>

Nr.	3	Name	Differenzierer
Frequenzgang	$G(j\omega) = j\omega$		
Betragskennlinie			
Phasenkennlinie			
Erläuterungen	<p>Die Betragskennlinie des Differenzierers steigt mit +20 dB pro Dekade an. Sie schneidet die 0-dB-Linie immer bei $\omega = 1/\text{sek}$. Die Phasenverschiebung beträgt unabhängig von der Frequenz immer $+90^\circ$.</p>		

Nr. 4	Name
Vorhaltglied 1. Ordnung	
Frequenzgang	$G(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_k}; \omega_k = \text{konstant} > 0$
Betragskennlinie	<p>A Bode magnitude plot showing the magnitude $G(j\omega)$ in dB versus frequency ω. The plot shows a curve starting at 0 dB at $\omega=0$, remaining flat until $\omega=\omega_k$, and then rising linearly with a slope of $+20 \text{ dB / Dekade}$. The x-axis is logarithmic, indicated by '1 Dekade' between two points. The y-axis ranges from -40 to 40 dB.</p>
Phasenkennlinie	<p>A Bode phase plot showing the phase $\phi\{G(j\omega)\}$ in degrees versus frequency ω. The plot shows a curve starting at 0° at $\omega=0$, remaining flat until $\omega=\omega_k$, and then increasing linearly through $+45^\circ$ and $+90^\circ$. The x-axis is logarithmic, indicated by '1 Dekade' between two points. The y-axis ranges from -90 to 90 degrees.</p>
Erläuterungen	<p>Die Betragskennlinie des Vorhaltgliedes 1. Ordnung verläuft bis ω_k auf der 0-dB-Linie und steigt von dort aus mit $+20 \text{ dB pro Dekade}$ an.</p> <p>Die Phasenkennlinie verläuft bei ω_k durch $+45^\circ$. Bis eine Dekade unter ω_k verläuft sie bei 0°, ab einer Dekade über ω_k bei $+90^\circ$, dazwischen auf der Verbindungsline dieser beiden Punkte.</p>

Nr. 5

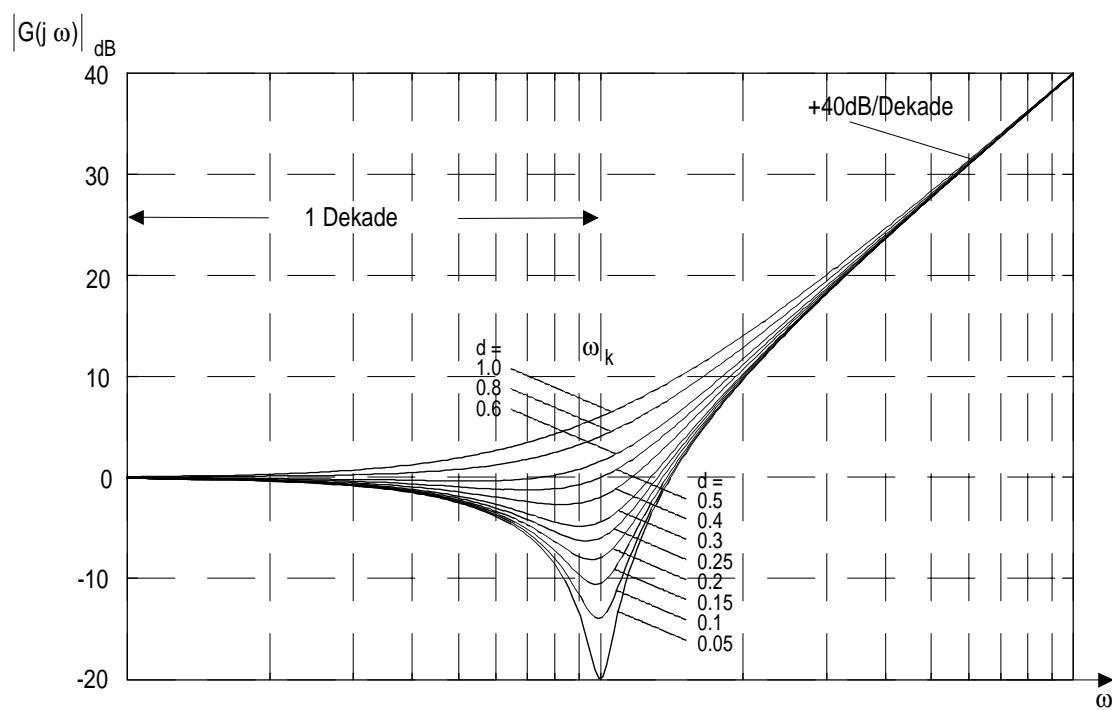
Name

Vorhaltglied 2. Ordnung

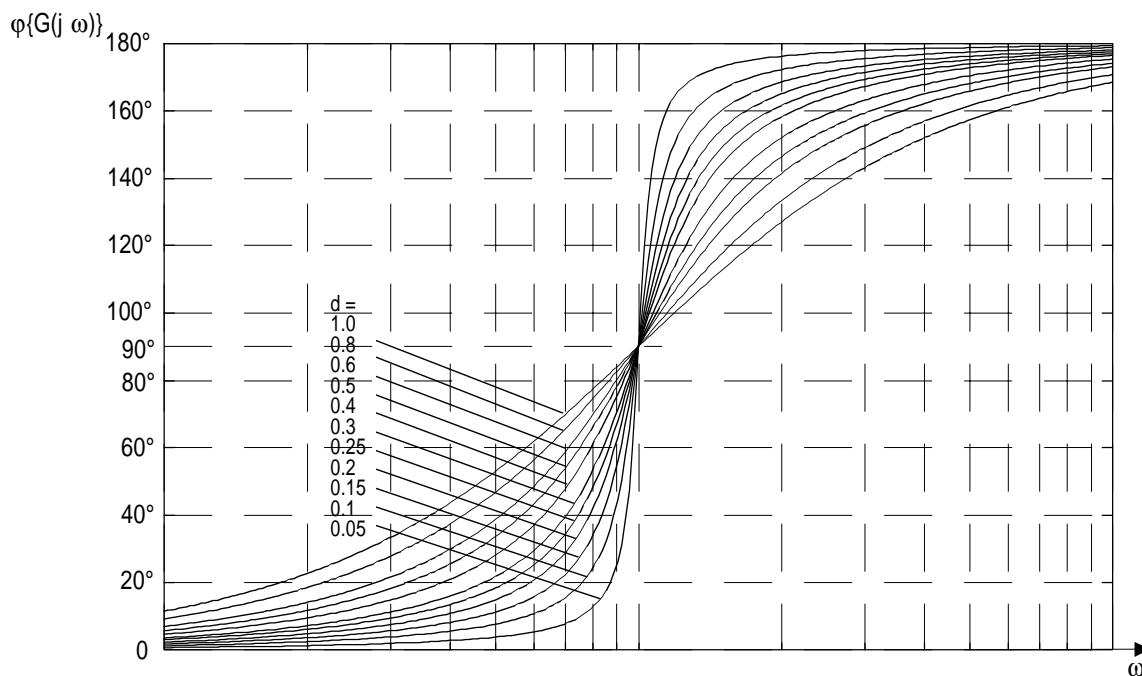
Frequenzgang

$$G(j\omega) = 1 + 2d \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2; \omega_k = \text{konst.} > 0; d = \text{konst.} < 1$$

Betragskennlinie



Phasenkennlinie



Die Betragskennlinie des Vorhaltgliedes 2. Ordnung verläuft unterhalb von ω_k auf der 0-dB-Linie und steigt oberhalb von ω_k mit + 40 dB pro Dekade an. Im Bereich um ω_k herum ist der Betragsverlauf darüberhinaus vom Dämpfungsfaktor d abhängig. Je kleiner d gegen 1 wird, umso stärker wird der "Unterschwinger", die Betragsdämpfung in der Nähe von ω_k . Wir erinnern uns daran (Kapitel 1.2.2.1 Formel (1.2.70)), daß der Fall $d < 1$ nur dann auftrat, wenn ein quadratischer Produktterm (und das ist unser Vorhaltglied 2. Ordnung) konjugiert komplexe Nullstellen hat. Im Fall $d > 1$ liegen zwei reelle Nullstellen vor und man kann den quadratischen Term in zwei Linearfaktoren aufspalten. Diese Linearfaktoren führen auf zwei Vorhaltglieder 1. Ordnung, die mittels der Zeichenvorschriften für Vorhaltglieder 1. Ordnung konstruiert werden können. Die Phasenkennlinie eines Vorhaltgliedes 2. Ordnung läuft bei kleinen Frequenzen bei 0° und bei großen Frequenzen bei $+180^\circ$, der Übergang von 0° nach $+180^\circ$ im Bereich von ω_k ist wiederum vom Dämpfungsfaktor d abhängig. Je kleiner d ist, umso länger verbleibt die Phase bei 0° und $+180^\circ$ und der Phasenübergang ist sehr steil. In allen Fällen beträgt die Phasenverschiebung bei $\omega_k = +90^\circ$.

Wegen des Einflusses des Dämpfungsfaktors d können die Frequenzkennlinien des Vorhaltgliedes 2. Ordnung nicht mehr asymptotisch genähert werden. Tritt in einer Übertragungsfunktion, deren Bodediagramm gezeichnet werden soll, ein Vorhaltglied zweiter Ordnung auf, müssen die Kennlinien entsprechend dem berechneten d -Wert den obigen Kennlinien entnommen und in das zu zeichnende Bodediagramm an die durch ω_k vorgegebene Frequenzposition übertragen werden.

Nr. 6

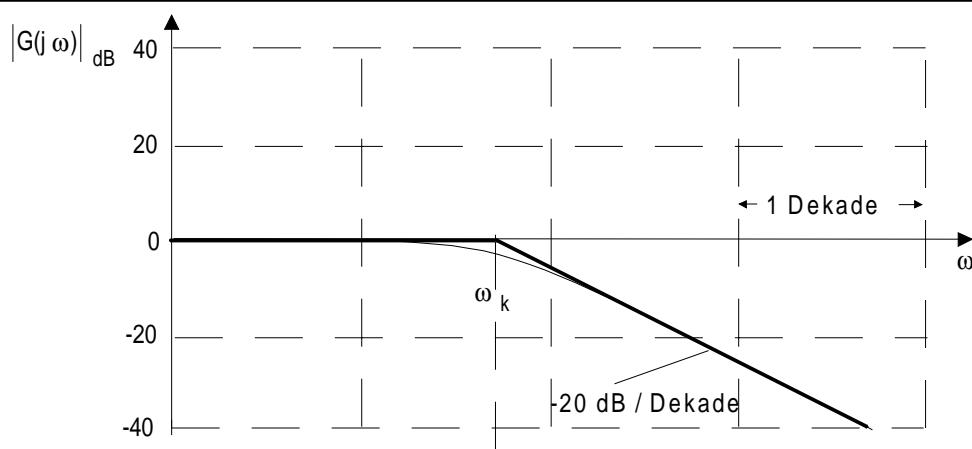
Name

Verzögerungsglied 1. Ordnung

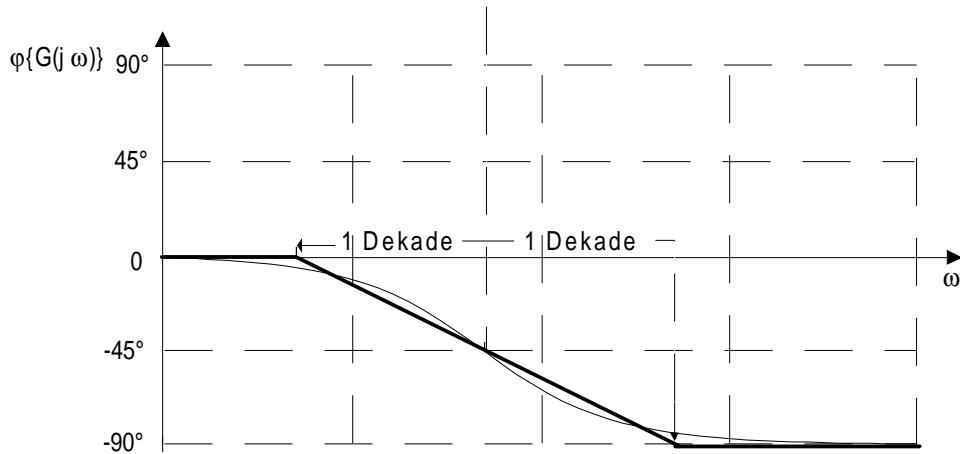
Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_k}}; \quad \omega_k = \text{konst.} > 0;$$

Betragskennlinie



Phasenkennlinie



Erläuterungen

Die Betragskennlinie des Verzögerungsgliedes 1. Ordnung verläuft bis ω_k auf der 0–dB–Linie und fällt von dort aus mit –20 dB pro Dekade ab.

Die Phasenkennlinie verläuft bei ω_k durch -45° . Bis eine Dekade unter ω_k verläuft sie bei 0° , ab einer Dekade über ω_k bei -90° , dazwischen auf der Verbindungsline dieser Punkte.

Nr. 7

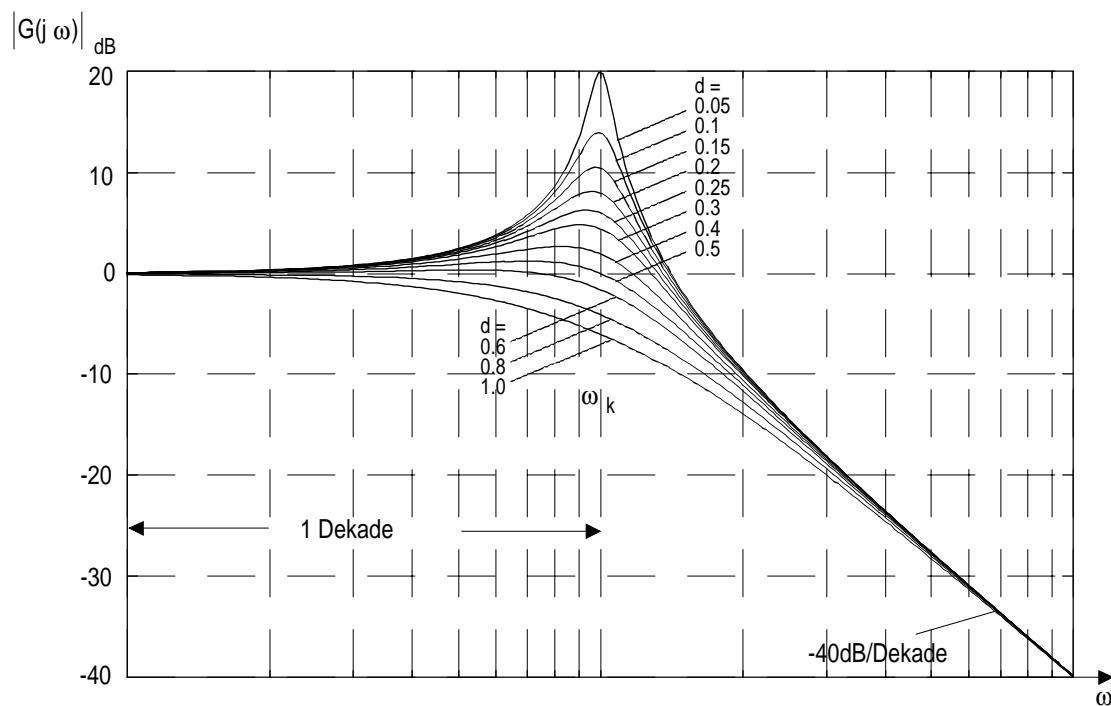
Name

Verzögerungsglied 2. Ordnung

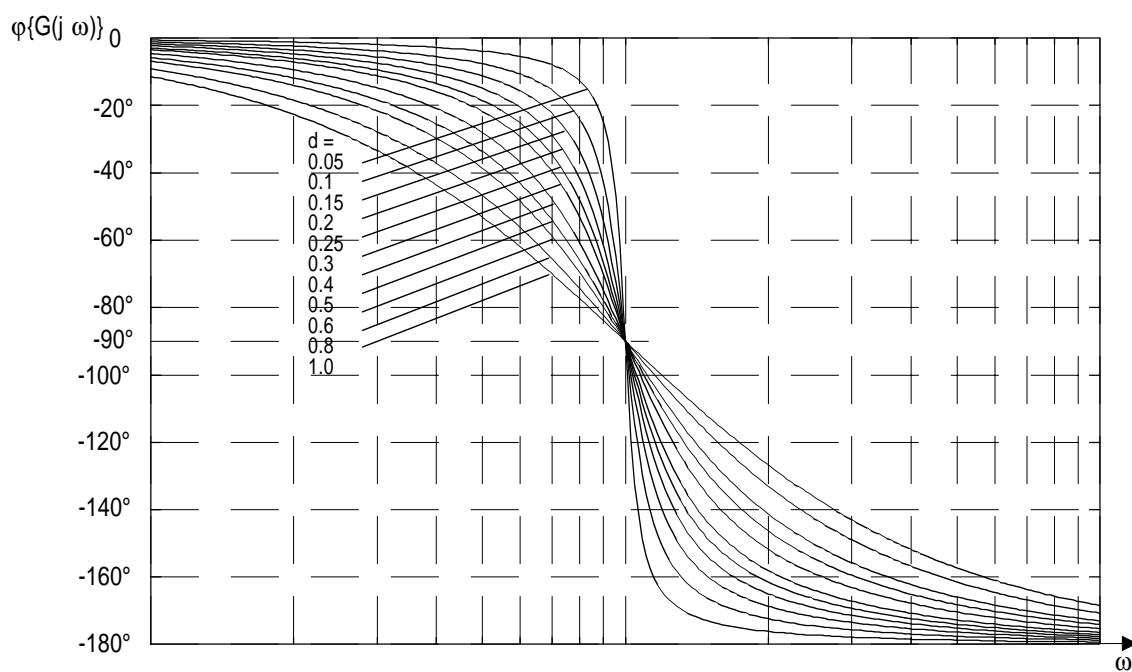
Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2d\frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2}; \quad \omega_k = \text{konst.} > 0; \quad d = \text{konst.} < 1$$

Betragskennlinie



Phasenkennlinie



Die Betragskennlinie des Verzögerungsgliedes 2. Ordnung verläuft unterhalb von ω_K auf der 0-dB-Linie und fällt oberhalb von ω_K mit $-40 \text{ dB pro Dekade}$ ab. Im Bereich um ω_K herum ist der Betragsverlauf darüberhinaus vom Dämpfungsfaktor d abhängig. Je kleiner d gegen 1 wird, umso stärker wird der "Überschwinger", die Betragsüberhöhung in der Nähe von ω_K . Wie schon im Falle des Vorhaltgliedes 2. Ordnung erläutert, tritt der Fall $d < 1$ nur dann auf, wenn ein quadratischer Produktterm (das ist der Nenner eines Verzögerungsgliedes 2. Ordnung) konjugiert komplexe Nullstellen hatte. Im Falle $d > 1$ liegen zwei reelle Nullstellen des Nennerpolynoms vor und man kann das Verzögerungsglied 2. Ordnung in zwei Verzögerungsglieder 1. Ordnung aufspalten, deren Frequenzkennlinien mittels der Zeichenvorschriften für Verzögerungsglieder 1. Ordnung konstruiert werden können.

Die Phasenkennlinie eines Verzögerungsgliedes 2. Ordnung läuft bei kleinen Frequenzen bei 0° und bei großen Frequenzen bei -180° , der Übergang von 0° nach -180° im Bereich von ω_K ist wiederum vom Dämpfungsfaktor d abhängig. Je kleiner d ist, umso länger verbleibt die Phase bei 0° , bzw. bei -180° und der Phasenübergang ist sehr steil. In allen Fällen beträgt die Phasenverschiebung bei $\omega_K = 90^\circ$.

Wegen des Einflusses des Dämpfungsfaktors d können die Frequenzkennlinien des Verzögerungsgliedes 2. Ordnung nicht mehr asymptotisch genähert werden. Tritt in einer Übertragungsfunktion, deren Bodediagramm gezeichnet werden soll, ein Verzögerungsglied 2. Ordnung auf, müssen die Kennlinien entsprechend dem berechneten d -Wert den obigen Kennlinien entnommen und in das zu zeichnende Bodediagramm an die durch ω_K vorgesehene Frequenzposition übertragen werden.

Nr.	8	Name	Totzeitglied
Frequenzgang			$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}; \quad T_t = \text{konst.} > 0$
Betragskennlinie			
Phasenkennlinie			
Erläuterungen			<p>Das reine Totzeitglied hat einen konstanten Verstärkungsfaktor von 1, d.h. die Betragskennlinie verläuft unabhängig von der Frequenz bei 0 dB. Die Phasenverschiebung ist linear von der Frequenz ω abhängig, daher kann sie in einem logarithmischen ω-Maßstab schlecht linear approximiert werden. Es empfiehlt sich die Phasenverschiebung nach folgender Formel</p> $\varphi\left\{e^{-j\omega T_t}\right\} = -\frac{180^\circ}{\pi} \cdot T_t \cdot \omega \quad (1.2.133)$ <p>punktweise zu berechnen und in das zu konstruierende Bodediagramm einzuziehen.</p>

Wie wir später noch sehen werden, können Vorhalt- und Verzögerungsglieder mit negativen ω_k auftreten, diese Glieder haben dann folgende Gestalt:

$$G(s) = 1 - \frac{j\omega}{\omega_k}; \quad G(s) = 1 - 2d \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2; \quad d > 0 \quad (1.2.134a)$$

$$G(s) = \frac{1}{1 - \frac{j\omega}{\omega_k}}; \quad G(s) = \frac{1}{1 - 2d \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2}; \quad d > 0. \quad (1.2.134b)$$

Die Frequenzkennlinien solcher Übertragungssysteme lassen sich mit Hilfe der Elementarkennlinien der entsprechenden Frequenzgänge mit positiven ω_k sehr leicht zeichnen: Bei negativen ω_k bleibt die Betragskennlinie die gleiche, lediglich die Phasenkennlinie muß an der 0° -Grad-Linie gespiegelt werden.

Beispiel 1.2.24: Zeichne das Bodediagramm der folgenden Übertragungsfunktion.

$$G(s) = \frac{1}{1 - 10s}; \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{j\omega}{0,1}}$$

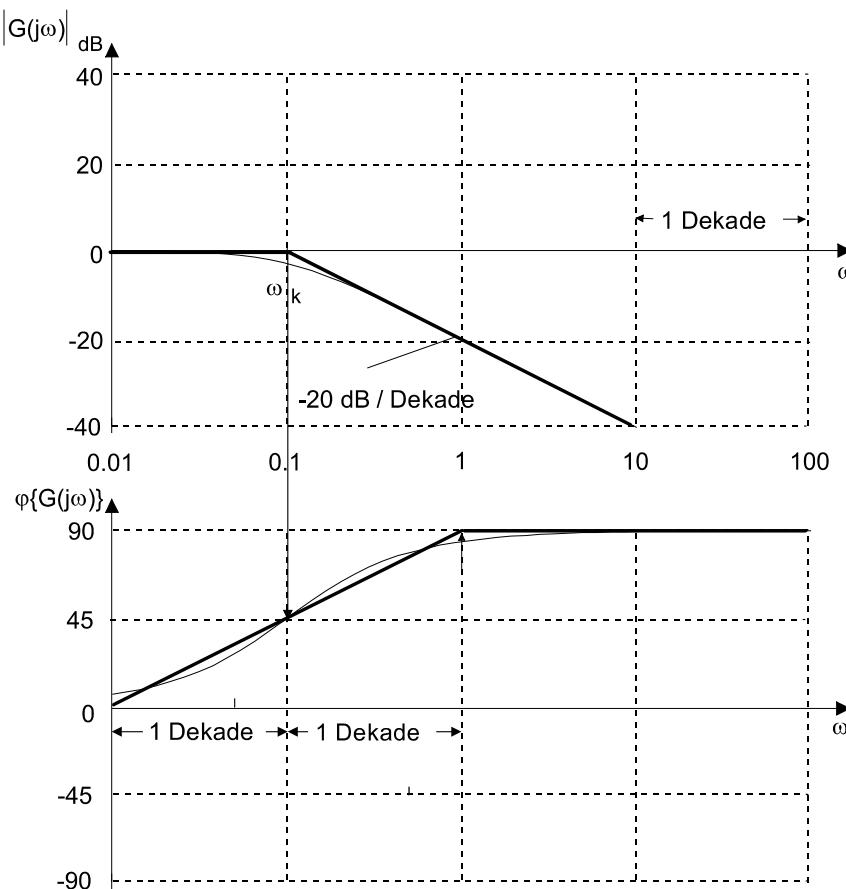


Bild 1.2.31 Bodediagramm eines Verzögerungsgliedes mit negativem ω_k

Die vorangehend betrachteten Frequenzkennlinien haben uns einen Einblick in das Frequenzverhalten von elementaren Übertragungsfunktionsteilen gegeben. Dies ist einerseits wichtig, um das Frequenzverhalten eines Übertragungssystem–Modells abschätzen zu können, andererseits erlaubt der Katalog eine schnelle Konstruktion der Frequenzkennlinien komplexer Übertragungsfunktionen mit Papier und Bleistift. Obwohl dies für die meisten Anforderungen in der System– und Regelungstechnik ausreicht, ist diese Art der Konstruktion doch sehr mühsam und vom Ansatz her fehlerbehaftet.

Wir wollen daher im Folgenden einen Algorithmus ableiten, der es uns erlaubt, Frequenzkennlinien von Systemmodellen höherer Ordnung exakt rechnergestützt zu berechnen. Zur Ableitung des Algorithmus gehen wir von der Polynomschreibweise einer Übertragungsfunktion (1.2.62) aus und lassen auch den Fall zu, daß $a_n \neq 1$ ist:

$$G(s) = \frac{b_m s^n + b_{m-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} e^{-sT_t} . \quad (1.2.135)$$

Um die Herleitung überschaubar zu halten, beschränken wir uns auf ein System 5. Ordnung und berücksichtigen den Totzeitterm e^{-sT_t} zunächst nicht:

$$G^*(s) = \frac{b_5 s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} . \quad (1.2.136)$$

Beim Übergang in den Frequenzbereich ($s = j\omega$) erhalten wir folgenden Frequenzgang:

$$G^*(j\omega) = \frac{b_5(j\omega)^5 + b_4(j\omega)^4 + b_3(j\omega)^3 + b_2(j\omega)^2 + b_1 j\omega + b_0}{a_5(j\omega)^5 + a_4(j\omega)^4 + a_3(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0} . \quad (1.2.137)$$

Mit Hilfe der bekannten Beziehung $j = \sqrt{-1} \Rightarrow j^2 = -1$ können wir feststellen, welche $j\omega$ –Potenzen auf reelle und welche auf imaginäre Ausdrücke führen und welche Vorzeichen sie haben:

$$\begin{aligned} (j\omega)^1 &= j\omega && : \text{imaginär positiv}, \\ (j\omega)^2 &= -\omega^2 && : \text{reell negativ}, \\ (j\omega)^3 &= -j\omega^3 && : \text{imaginär negativ}, \\ (j\omega)^4 &= \omega^4 && : \text{reell positiv}, \\ (j\omega)^5 &= j\omega^5 && : \text{imaginär positiv}. \end{aligned}$$

Darauf aufbauend können Zähler $Z\{j\omega\}$ und Nenner $N\{j\omega\}$ von (1.2.137) in Real– und Imaginärteil aufgespalten werden

$$G^*(j\omega) = \frac{\underbrace{\frac{\operatorname{Re}\{Z(j\omega)\}}{b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4}}_{\operatorname{Re}\{N(j\omega)\}} + j \underbrace{\frac{\operatorname{Im}\{Z(j\omega)\}}{(b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5)}}_{\operatorname{Im}\{N(j\omega)\}}}{\underbrace{\frac{\operatorname{Re}\{N(j\omega)\}}{a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4}}_{\operatorname{Re}\{N(j\omega)\}} + j \underbrace{\frac{\operatorname{Im}\{N(j\omega)\}}{(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5)}}_{\operatorname{Im}\{N(j\omega)\}}}. \quad (1.2.138)$$

Durch anschließendes konjugiert komplexes Erweitern erhält man den Real- und Imaginärteil von $G^*(j\omega)$. (Zur Schreibvereinfachung lassen wir im Folgenden das Argument $(j\omega)$ weg)

$$\begin{aligned} G^*(j\omega) &= \frac{\operatorname{Re}\{Z\} + j \operatorname{Im}\{Z\}}{\operatorname{Re}\{N\} + j \operatorname{Im}\{N\}} \cdot \frac{\operatorname{Re}\{N\} - j \operatorname{Im}\{N\}}{\operatorname{Re}\{N\} - j \operatorname{Im}\{N\}} \\ &= \underbrace{\frac{\operatorname{Re}\{Z\} \cdot \operatorname{Re}\{N\} + \operatorname{Im}\{Z\} \cdot \operatorname{Im}\{N\}}{(\operatorname{Re}\{N\})^2 + (\operatorname{Im}\{N\})^2}}_{\operatorname{Re}\{G^*(j\omega)\}} + j \underbrace{\frac{\operatorname{Re}\{N\} \cdot \operatorname{Im}\{Z\} - \operatorname{Re}\{Z\} \cdot \operatorname{Im}\{N\}}{(\operatorname{Re}\{N\})^2 + (\operatorname{Im}\{N\})^2}}_{\operatorname{Im}\{G^*(j\omega)\}}. \end{aligned} \quad (1.2.139)$$

Mit Hilfe der Beziehung (1.2.120) und (1.2.121) lassen sich aus (1.2.139) die Betrags- und Phasenverläufe berechnen

$$\left|G^*(j\omega)\right|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{(\operatorname{Re}\{G^*(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{G^*(j\omega)\})^2}, \quad (1.2.140)$$

$$\varphi\{G^*(j\omega)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{G^*(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G^*(j\omega)\}}. \quad (1.2.141)$$

Abschließend muß noch der eingangs abgespaltene Totzeitterm mit in die Berechnung einbezogen werden. Da bekanntlich eine reine Totzeit keinen Einfluß auf die Betragskennlinie hat, ist

$$\left|G(j\omega)\right|_{\text{dB}} = \left|G^*(j\omega)\right|_{\text{dB}}. \quad (1.2.142)$$

Zur Phasenkennlinie muß lediglich der Term $-\omega T_t$ hinzugefügt werden. (Vergleiche mit dem Katalog der Elementarfrequenzkennlinien).

$$\varphi\{G(j\omega)\} = \varphi\{G^*(j\omega)\} - \omega T_t. \quad (1.2.143)$$

Da der Phasenverlauf in der Form (1.2.143) im Bogenmaß [rad] berechnet wird, die Phasenkennlinie aber im Winkelmaß [Grad] dargestellt werden soll, muß (1.2.143) noch mit $180^\circ/\pi$ multipliziert werden.

$$\varphi\{G(j\omega)\} [\text{Grad}] = \frac{180}{\pi} \cdot \varphi\{G(j\omega)\} [\text{rad}] . \quad (1.2.144)$$

Zur Berechnung der Frequenzkennlinien muß nun der vorangehend beschriebene Rechnungsgang für einzelne ω -Werte abgearbeitet werden. Eine logarithmisch gestufte ω -Achse liefert der folgende Algorithmus:

Berechne von $i = 1$ bis p

$$\omega = \omega_A \cdot 10^{\frac{k \cdot i}{p}} \quad (1.2.145)$$

Nächstes i

p = Anzahl der gewünschten ω -Punkte,

k = Anzahl der Dekaden der ω -Achse,

ω_A = Anfangsfrequenz der ω -Achse.

Aufbauend auf dieser Ableitung kann nun im folgenden Bild 1.2.32 der gesamte Algorithmus zur exakten Berechnung von Bodediagrammen angegeben werden.

Wir führen numerische Bodediagramm-Berechnungen wiederum mit dem Programm Matlab durch. Auch hier kann das Bodediagramm wiederum mit einem einzigen Matlab-Befehl

bode (Parametrierung siehe /16/);

graphisch dargestellt werden. Nähere Einzelheiten findet der Leser im Matlab-Skript /16/.

1.2.6 Gekoppelte Übertragungssysteme

In den vorangehenden Kapiteln haben wir verschiedenste Methoden zur mathematischen Modellierung von Übertragungssystemen kennengelernt. Dabei haben wir immer vorausgesetzt, daß das zu beschreibende Übertragungssystem eine Einheit mit einem Eingang und einem Ausgang darstellt.

Technische Wirkungsanordnungen (z. B. die später zu besprechenden Regelkreise) sind jedoch oft aus miteinander gekoppelten Übertragungssystemen zusammengesetzt. Solche Verkopplungen werden häufig durch sogenannte Strukturbilder (Blockschaltbilder) dargestellt.

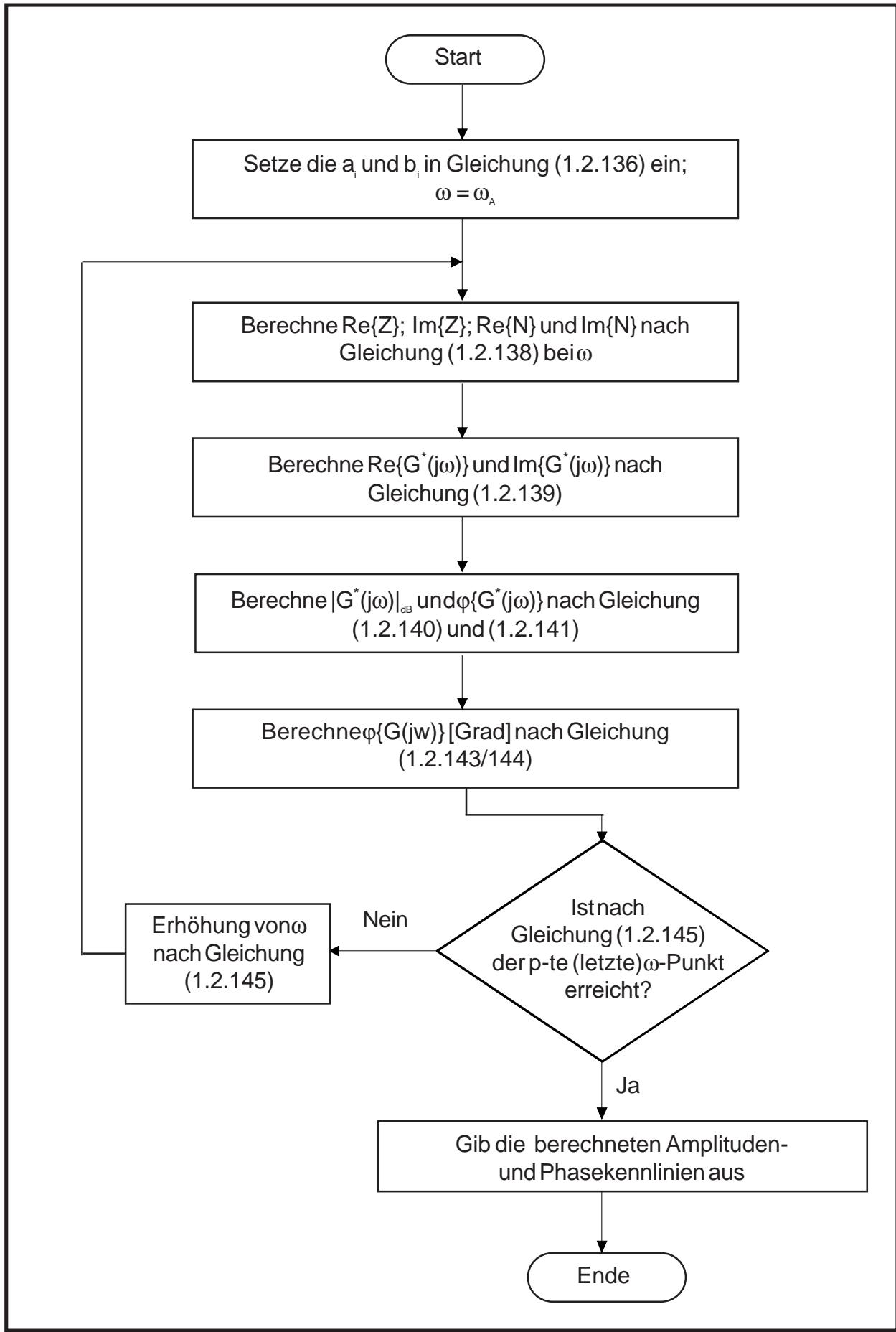


Bild 1.2.32 Ein Algorithmus zur exakten Berechnung eines Bodediagramms

Wenn wir uns auf Systemverknüpfungen im s-Bereich beschränken, setzen sich Strukturbilder linearer Übertragungssysteme aus den in Bild 1.2.33 dargestellten vier Strukturbildelementen zusammen.

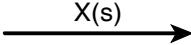
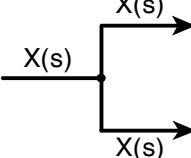
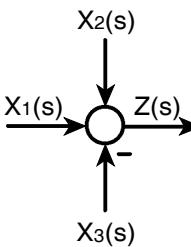
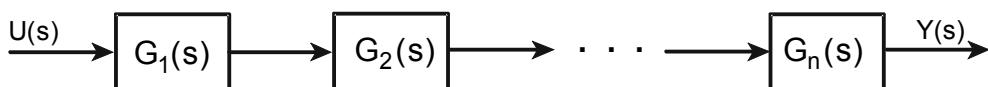
	<u>Wirkungslinie</u> eines Signals $X(s)$; das Signal wirkt rückwirkungsfrei von links nach rechts.
	<u>Verzweigungsstelle</u> des Signals $X(s)$; das Signal wird ausschließlich verzweigt und erfährt keine Veränderung.
	<u>Signalsummationsstelle</u> ; das Ausgangssignal $Z(s)$ ist die vorzeichengerechte Summe der Eingangssignale $Z(s) = X_1(s) + X_2(s) - X_3(s)$. Negativ zu bewertende Signale werden durch einen Pfeil mit einem Minuszeichen, positive Signale mit einem Pfeil ohne Kennzeichnung in den Summationspunkt geführt.
	<u>Signaldurchgang</u> durch ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion $G(s)$. Das Ausgangssignal berechnet sich zu $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$. Diese Beziehung ist direkt aus der Definition der Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ abgeleitet.

Bild 1.2.33 Strukturbildelemente linearer Übertragungssysteme

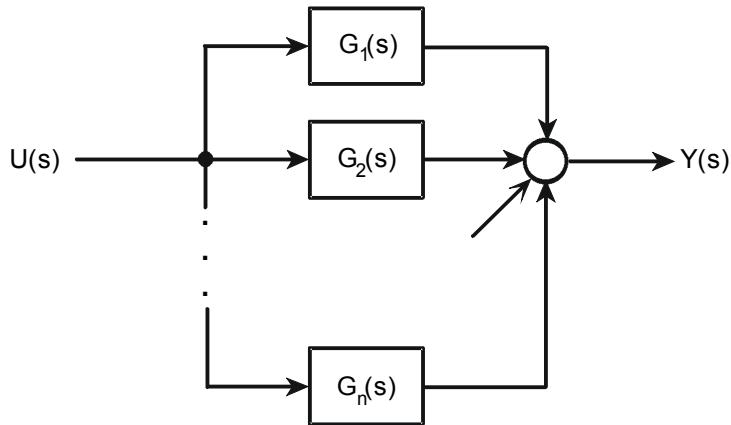
Mit Hilfe dieser vier Strukturbildelemente lassen sich alle Verkopplungsstrukturen linearer Übertragungssysteme im s-Bereich beschreiben. Analysiert man nun wiederum diese Verknüpfungen, erkennt man, daß nur drei verschiedene Grundverknüpfungsformen existieren. Wir geben im Folgenden diese Strukturen und die Beziehungen zur Berechnung der daraus entstehenden Gesamtübertragungsfunktionen ohne Ableitung an. Anhand von Beispielen werden anschließend diese Beziehungen abgeleitet.

- Reihenschaltung von Übertragungssystemen



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_n(s) \quad (1.2.146)$$

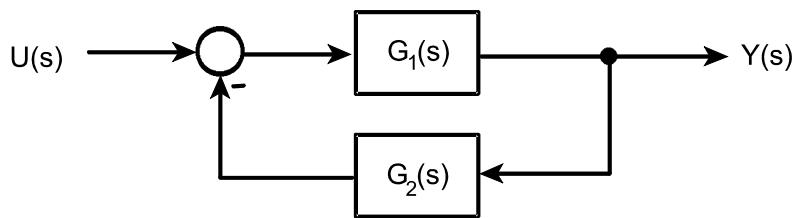
- Parallelschaltung von Übertragungssystemen



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s) \quad (1.2.147)$$

Münden die Signalpfeile mit einer negativen Kennzeichnung in den Summenpunkt, müssen die entsprechenden Übertragungsfunktionen negativ addiert werden.

- Kreisschaltung von Übertragungssystemen

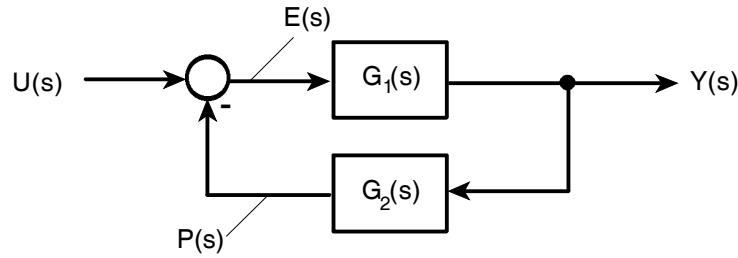


$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \quad (1.2.148)$$

Wird in einer Kreisschaltung – wie oben abgebildet – das zurückgeführte Signal negativ in die Summationsstelle eingespeist, spricht man auch von einer Gegenkopplung. Wird das Signal positiv zurückgespeist, spricht man von einer Mitkopplung, deren Gesamtübertragungsfunktion dann folgende Form annimmt

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_2(s)} \quad (1.2.149)$$

Anhand der Kreisschaltung wollen wir ableiten, wie man auf die vorangehenden Beziehungen kommt. Dazu führen wir in der Kreisschaltung folgende weitere Signalbezeichnungen ein



Mit Hilfe der Strukturbildelemente erkennen wir zunächst, daß $G_2(s)$ mit $Y(s)$ gespeist wird (Signalverzweigung von $Y(s)$). Mit dem Strukturbildelement "Signaldurchgang durch ein Übertragungssystem" gelten dann folgende Beziehungen

$$Y(s) = G_1(s) \cdot E(s) \quad (1.2.150)$$

$$P(s) = G_2(s) \cdot Y(s) . \quad (1.2.151)$$

Für die Signalsummationsstelle können wir schreiben

$$E(s) = U(s) - P(s) . \quad (1.2.152)$$

Zur Berechnung der Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ müssen nun durch Einsetzen der Gleichungen ineinander zunächst die neu eingeführten Signalnamen wieder eliminiert und dann der Quotient $Y(s)/U(s) = G(s)$ gebildet werden. Setzt man (1.2.152) in (1.2.150) und anschließend (1.2.151) ein

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s) \cdot (U(s) - P(s)) \\ Y(s) &= G_1(s) \cdot (U(s) - G_2(s) \cdot Y(s)) \end{aligned}$$

multipliziert die Gleichung aus

$$Y(s) = G_1(s) \cdot U(s) - G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot Y(s)$$

und bringt die Terme mit $Y(s)$ auf die linke und die mit $U(s)$ auf die rechte Gleichungsseite

$$Y(s) + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot Y(s) = G_1(s) \cdot U(s),$$

erhält man nach Ausklammern von $Y(s)$ und Bildung des Quotienten $G(s) = Y(s)/U(s)$ die gesuchte Beziehung

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

Zur Bestimmung der Gesamtübertragungsfunktion einer Kreisschaltung wird häufig eine Faustformel benutzt. Nennt man den Zweig der Schaltung von seinem Eingang bis zu seinem Ausgang Vorwärtzweig,

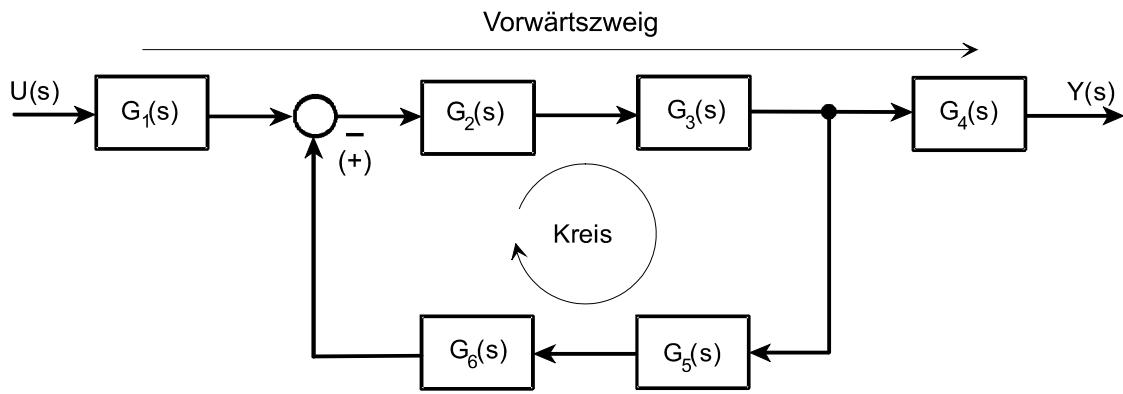


Bild 1.2.34 Zur Erläuterung der Faustformel für eine Kreisschaltung

dann berechnet sich die Gesamtübertragungsfunktion aus der Beziehung

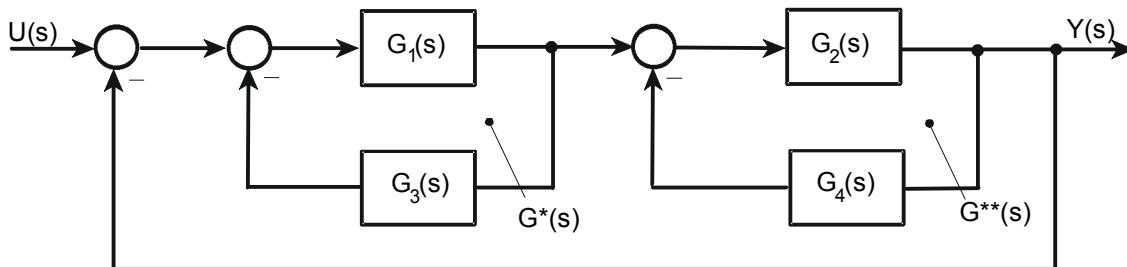
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Produkt aller Übertragungsfunktionen im Vorwärtszweig}}{1 + \underset{(-)}{\text{Produkt aller Übertragungsfunktionen im Kreis}}} \quad (1.2.153)$$

Für das Beispiel in Bild 1.2.34 ergibt sich damit

$$G(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_5(s) \cdot G_6(s)}$$

Mit Hilfe der Grundverknüpfungsformen "Reihen-, Parallel- und Kreisschaltung" lassen sich beliebig komplexe Strukturbilder zu einer Gesamtübertragungsfunktion zusammenfassen. Wir wollen die Vorgehensweise an zwei Beispielen verdeutlichen.

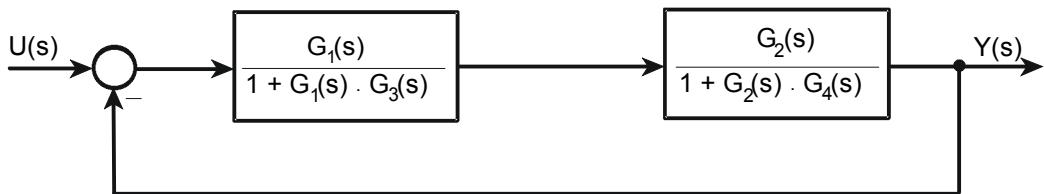
Beispiel 1.2.25: Berechne die Gesamtübertragungsfunktion des Übertragungssystems mit folgendem Strukturbild



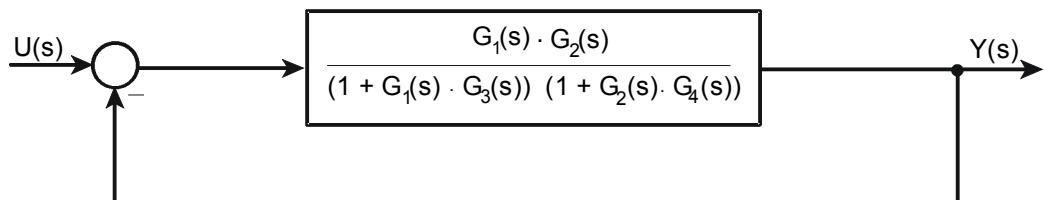
Strukturbilder werden zweckmäßig von innen nach außen aufgelöst, d. h. wir berechnen zunächst die Übertragungsfunktion der beiden inneren Kreisschaltungen $G^*(s)$ und $G^{**}(s)$ nach (1.2.153)

$$G^*(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_3(s)} ; \quad G^{**}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_4(s)}$$

und erhalten dadurch folgendes vereinfachte Strukturbild:



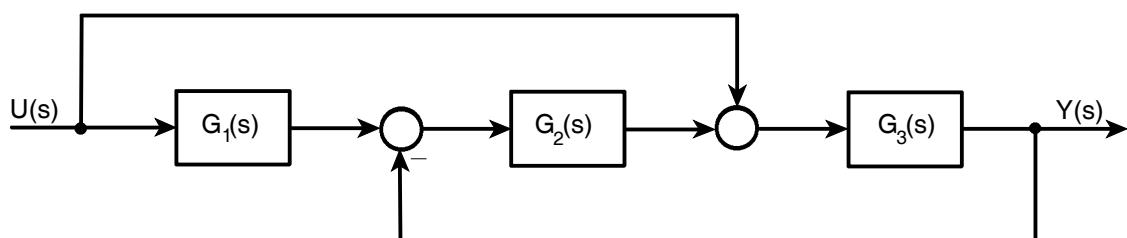
Die beiden im Vorwärtszweig in Reihe geschalteten Glieder können nach (1.2.146) multiplikativ zusammengefaßt werden, so daß folgende Kreisschaltung entsteht



Diese Kreisstruktur wird abschließend mit (1.2.153) berechnet, wobei sich aber im Rückwärtszweig kein Übertragungsglied befindet. Eine reine Wirkungslinie kann als Übertragungsfunktion mit einem proportionalen Verstärkungsfaktor von $G(s) = 1$ aufgefaßt werden. Damit ergibt sich

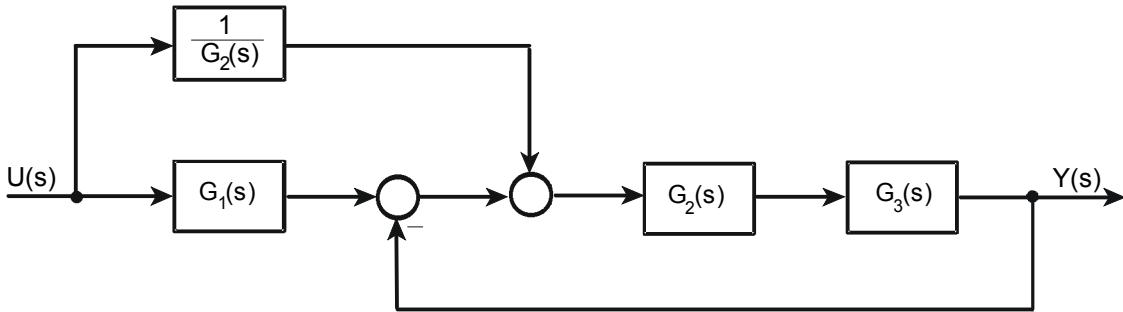
$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)) \cdot (1 + G_2(s) \cdot G_4(s))}}{1 + \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)) \cdot (1 + G_2(s) \cdot G_4(s))}} \\ &= \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)) \cdot (1 + G_2(s) \cdot G_4(s)) + G_1(s) \cdot G_2(s)} \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.26: Berechne die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des folgenden Übertragungssystems

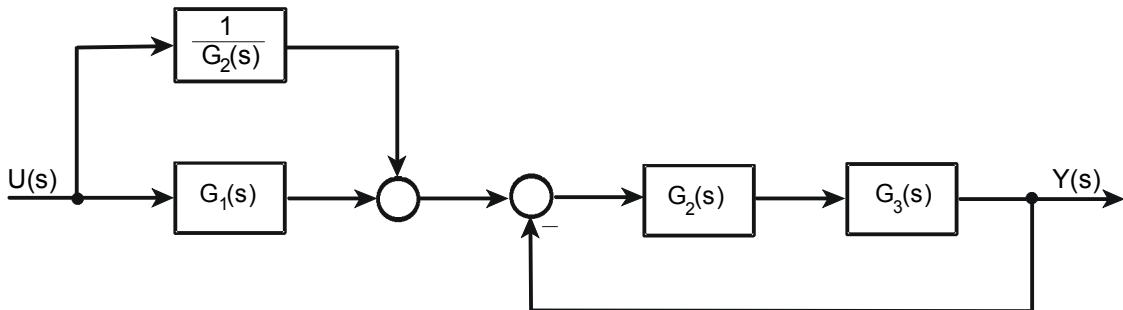


Auf den ersten Blick scheint wegen der ineinandergreifenden Vermaschung eine Auflösung der Schaltung in die drei Grundstrukturen nicht möglich. Durch gezielte Vertauschungen von Übertragungsblöcken und/oder Summationsstellen gelingt dies aber doch.

Um die Kreisstruktur vom Mittelantriff zu befreien, wird die Summationsstelle vor $G_2(s)$ gelegt. Um dadurch die Übertragungseigenschaften des Systems nicht zu verändern, muß dies durch Einführung eines Blocks $1/G_2(s)$ in den verschobenen Zweig kompensiert werden:



Da diese Summationsstelle aber immer noch innerhalb des Kreises liegt und so eine Zusammenfassung verhindert, muß sie vor die Summationsstelle der Kreisrückführung gelegt werden. Dies ist erlaubt, weil man die Summanden einer Summe in beliebiger Reihenfolge addieren darf:



Nun sind die zusammenfaßbaren Strukturen deutlich erkennbar: Eine Parallelschaltung von $G_1(s)$ und $1/G_2(s)$, die in Reihe zu einer Kreisschaltung mit $G_2(s)$ und $G_3(s)$ liegt:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[G_1(s) + \frac{1}{G_2(s)} \right] \cdot \left[\frac{G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s)} \right] \\
 &= \frac{G_1(s) \cdot G_2(s) + 1}{G_2(s)} \cdot \frac{G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s)} \\
 &= \frac{G_3(s) \cdot (1 + G_1(s) \cdot G_2(s))}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s)}
 \end{aligned}$$

Zur Erleichterung solcher Umformungen sind in Bild 1.2.35 alle wichtigen Umformungsregeln zusammengefaßt.

Die vorangehend vorgestellten Verfahren erlaubten es, vermaschte Systemstrukturen zu einer Gesamtübertragungsfunktion zusammenzufassen.

Aus bestimmten, später noch einsichtigen Gründen, ist man auch oft bestrebt, Übertragungsfunktionen höherer Ordnung in Teilsysteme aufzuspalten, deren Teilübertragungsfunktionen entweder in Reihe oder parallel geschaltet sind. Durch Verknüpfung unseres Wissens über die Schreibweisen von Übertragungsfunktionen (Kap. 1.2.2.1) und die Tatsache, daß in Reihe geschaltete Systeme durch das Produkt und parallel geschaltete Systeme durch die Summe der Teilübertragungsfunktionen zu einer Gesamtübertragungsfunktion zusammengefaßt werden, kann man folgende Schlüsse ziehen:

- Soll eine Übertragungsfunktion als eine Reihenschaltung von Teilübertragungsfunktionen realisiert werden, muß die Übertragungsfunktion in ihre Produktform umgerechnet werden. Die Produktterme können z. B. gerätetechnisch einzeln realisiert werden, um dann in Reihe geschaltet die Funktion des Gesamtsystems zu übernehmen.
- Soll eine Übertragungsfunktion als eine Parallelschaltung von Teilübertragungsfunktionen realisiert werden, muß die Übertragungsfunktion in ihre Partialbruchform umgerechnet werden. Zur Realisierung können dann die Partialbrüche einzeln aufgebaut werden, um dann parallel geschaltet die Funktion des Gesamtsystems zu übernehmen.

Beispiel 1.2.27: Realisiere die folgende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 12s + 32} \quad (2.1.154)$$

aus einer Reihenschaltung (a) und aus einer Parallelschaltung (b) möglichst elementarer Übertragungsfunktionen (d.h. möglichst niedriger Ordnung).

Da wir in beiden Fällen die Produktform der Übertragungsfunktion benötigen, berechnen wir diese zunächst

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 12s + 32} = \frac{s + 1}{(s + 4) \cdot (s + 8)} .$$

Zur Lösung der Aufgabenstellung a) könnte man auf die Idee kommen, die drei entstandenen Produktterme separat zu realisieren und in Reihe zu schalten

Vertauschung von Summationsstellen

$$\begin{array}{ccc}
 \text{U}_1 \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{Y} & = & \text{U}_1 \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{Y} \\
 \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{U}_2 \quad \text{U}_3 & & \text{U}_3 \quad \text{U}_2 \\
 \text{Y} = \text{U}_3 + (\text{U}_1 + \text{U}_2) & = & \text{U}_2 + (\text{U}_1 + \text{U}_3)
 \end{array}$$

Vertauschung von Blöcken

$$\begin{array}{ccc}
 \text{U} \rightarrow \boxed{G_1(s)} \rightarrow \boxed{G_2(s)} \rightarrow \text{Y} & = & \text{U} \rightarrow \boxed{G_2(s)} \rightarrow \boxed{G_1(s)} \rightarrow \text{Y} \\
 \text{Y} = G_1(s) \cdot G_2(s) & = & G_2(s) \cdot G_1(s)
 \end{array}$$

Verlegung eines Blockes vor eine Verzweigungsstelle

$$\begin{array}{ccc}
 \text{U} \rightarrow \boxed{\bullet} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{Y} & = & \text{U} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \boxed{\frac{1}{G(s)}} \rightarrow \text{Y}
 \end{array}$$

Verlegung eines Blockes hinter eine Verzweigungsstelle

$$\begin{array}{ccc}
 \text{U} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \boxed{\bullet} \rightarrow \text{Y} & = & \text{U} \rightarrow \boxed{\bullet} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{Y}
 \end{array}$$

Verlegung eines Blockes vor eine Summationsstelle

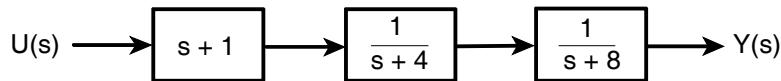
$$\begin{array}{ccc}
 \text{U}_1 \rightarrow \text{O} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{Y} & = & \text{U}_1 \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{Y} \\
 \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \\
 \text{U}_2 \rightarrow \text{O} & = & \text{U}_2 \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{Y} \\
 \text{Y} = G(s) \cdot (\text{U}_1 + \text{U}_2) & = & G(s) \cdot \text{U}_1 + G(s) \cdot \text{U}_2
 \end{array}$$

Verlegung eines Blockes hinter eine Summationsstelle

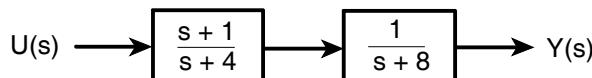
$$\begin{array}{ccc}
 \text{U}_1 \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{Y} & = & \text{U}_1 \rightarrow \text{O} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \text{Y} \\
 \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \\
 \text{U}_2 \rightarrow \text{O} & = & \text{U}_2 \rightarrow \boxed{\frac{1}{G(s)}} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{Y} \\
 \text{Y} = \text{U}_2 + \text{U}_1 \cdot G(s) & = & (\text{U}_2 \cdot \frac{1}{G(s)} + \text{U}_1) \cdot G(s)
 \end{array}$$

Bild 1.2.35 Umformungsregeln für Strukturbilder

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+4} \cdot \frac{1}{s+8}$$



Dies ist jedoch, wie wir in Kapitel 1.2.2.1 festgestellt haben, nicht möglich: Im ersten Übertragungsblock befindet sich eine Übertragungsfunktion $s+1$, deren Zählergrad $m=1$ und Nennergrad $n=0$ ist. Übertragungsfunktionen mit $m>n$ sind gerätetechnisch nicht realisierbar. Abhilfe bringt die Zusammenfassung von Teilblock 1 mit Teilblock 2 oder 3, z. B.

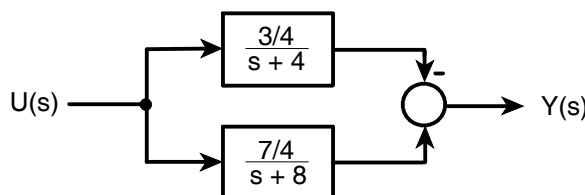


Damit ist die Übertragungsfunktion nach Aufgabenstellung a) mit elementaren Übertragungsfunktionen realisiert.

Zur Lösung der Aufgabenstellung b) muß die Partialbruchform der Übertragungsfunktion berechnet werden.

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 12s + 32} = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s + 8} = \frac{-3/4}{s + 4} + \frac{7/4}{s + 8} .$$

Beide Partialbrüche sind einzeln realisierbar und haben die niedrigstmögliche Ordnung. Damit wird (2.1.154) durch folgende Parallelschaltung realisiert



Wir kommen im Rahmen des Lehrgebiets "Regelungstechnik" bei der praktischen Realisierung von Regeleinrichtungen und Regelalgorithmen noch einmal auf dieses Thema zurück.

Es sei an dieser Stelle noch abschließend bemerkt, daß man alle denkbaren linearen Übertragungssysteme ausschließlich aus Integratoren, Summationsstellen und Proportionalfaktoren realisieren könnte, wenn man als Verknüpfungsstrukturen nicht nur die Reihen- und Parallelschaltung von Systemelementen, sondern auch Kreisschaltungen zulassen würde. Im Anhang A1.1 "Strukturbilder von Zustandsmodellen" wird ausführlich darauf eingegangen.

1.2.7 Eine Übersicht über Modellierungsformen von Übertragungssystemen und deren Umrechnung

Zum Abschluß des Kapitels 1.2 "Mathematische Modellierung von Übertragungssystemen" wollen wir uns anhand einer Grafik noch einmal alle besprochenen mathematischen Modellierungsformen, und ihre Umrechnungen vor Augen führen. Wir betrachten dazu Bild 1.2.36; es stellt alle bereits behandelten Modellierungsformen von Übertragungsfunktionen

- im Zeitbereich (math. Zustandsmodell),
- ~ im Bildbereich (Übertragungsfunktion) und
- im Frequenzbereich (Frequenzgang)

zusammen und zeigt, wie sie z. B. für regelungstechnische, d.h. systembeeinflussende Zwecke ausgewertet werden können:

- Berechnung von Systemantworten im Zeitbereich,
- Analyse der Übertragungsfunktion (Systemeigenschaften, Systemkomposition),
- Berechnung eines Graphen des Frequenzganges (z. B. das Bodediagramm).

Weiterhin ist der Graphik zu entnehmen, wie man von der realen Wirkungsanordnung (Übertragungssystem) zu einer Modellierungsform des Systems gelangt. Die unter der Überschrift "Theoretische Analyse" aufgeführte mathematisch/physikalische Modellbildung wurde von uns ausführlich behandelt. Die daneben dargestellte "Modellbildung nach der symbolischen $j\omega$ -Methode" wurde noch nicht besprochen, müßte aber aus elektrotechnischen Grundlagenvorlesungen bekannt sein. Wir gehen im folgenden Kapitel 1.2.7.3 noch einmal kurz auf diese Methode ein.

Unter der Überschrift "Experimentelle Analyse" wird neben den schon besprochenen Systemantwort- und Frequenzgangmessungen die Methode "Bestimmung der Übertragungsfunktion aus gemessenen Systemantworten" aufgeführt. Diese Methode stellt eine sehr wichtige praktische Alternative zur mathematisch/physikalischen Modellbildung dar, die sich wegen ihrer relativ einfachen Anwendbarkeit in der praktischen System-und Regelungstechnik einen bedeutenden Stellenwert erworben hat. Im Kapitel 1.4 und im Anhang A1.3 dieses Skriptes wird ein einfacher Ansatz dieses Verfahrens beschrieben.

Die dritte Information, welche uns Bild 1.2.36 noch einmal vor Augen führt, sind die Übergänge zwischen den drei Betrachtungsbereichen Zeitbereich, Laplace-und Frequenzbereich. Zum Beispiel gelangt man vom Zustandsmodell mittels der Operation Laplace-Transformation (\mathcal{L}) zur Übertragungsfunktion und von dort mit der Substitution $s = j\omega$ zum Frequenzgang. Drei der dargestellten Übergänge, nämlich

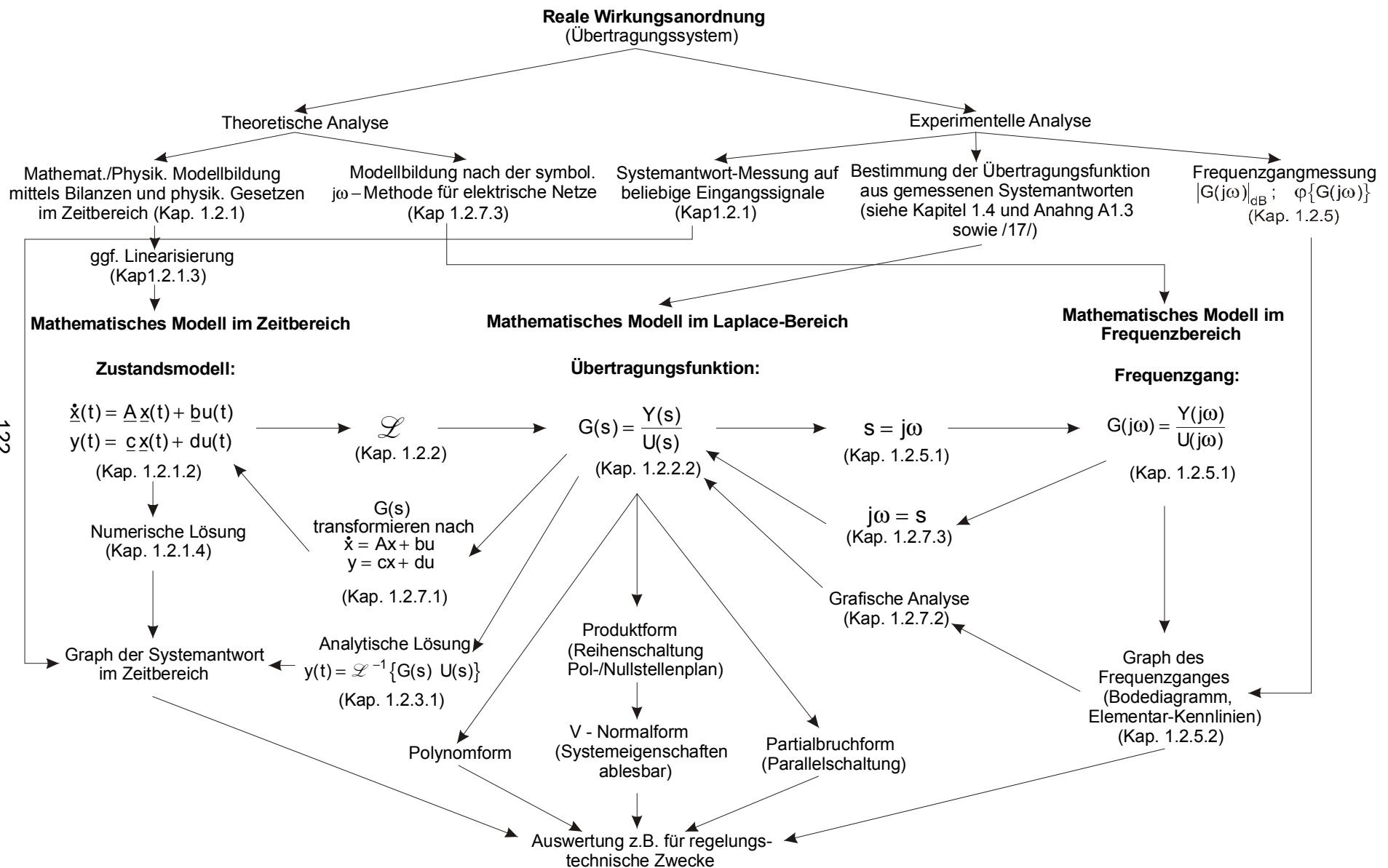


Bild 1.2.36 : Systemtheoretische Methoden zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Übertragungssystemen und deren Umrechnung

- von der Übertragungsfunktion zum math. Zustandsmodell ($G(s) \rightarrow Ax+bu$),
- vom Bodediagramm–Graphen zur Übertragungsfunktion (grafische Analyse) und
- vom Frequenzgang zur Übertragungsfunktion ($j\omega = s$)

wurden noch nicht besprochen und sollen in den folgenden Kapiteln kurz dargestellt werden.

1.2.7.1 Berechnung von Zustandsmodellen aus gegebenen Übertragungsfunktionen

Da wir bei allen folgenden Problemstellungen die Übertragungsfunktion in den Mittelpunkt unserer Betrachtungen stellen wollen und auch die meisten experimentiellen Modellbildungsverfahren /17/ auf Übertragungsfunktionen führen, ist es erstrebenswert, von der Übertragungsfunktion aus zu allen anderen Systembeschreibungsformen zu gelangen. Während es mittels inverser Laplace–Transformation möglich ist, aus einem analytisch gegebenen $G(s)$ eine Systemantwort im Zeitbereich zu berechnen, benötigt man zur numerischen Berechnung der Sprungantwort das mathematische Zustandsmodell. Die folgende Transformation erlaubt es, bei bekannter Polynomform der Übertragungsfunktion direkt ein dazugehöriges mathematisches Zustandsmodell hinzuschreiben: Es müssen nur die Koeffizienten der Polynomform der Übertragungsfunktion (1.2.155a) an die im folgenden Zustandsmodell (1.2.155b) bezeichneten Stellen übernommen werden:

$$G(s) = \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + b_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad (1.2.155a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t); \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + d \cdot u(t); \quad (1.2.155b)$$

Wie man erkennt, ist das Zustandsmodell damit bis auf den Faktor d in der Ausgangsgleichung vollständig bestimmt.

Der Faktor d ist gleich 0 für den Fall, daß der Zählergrad des Polynoms (1.2.155a) – wie im obigen Fall – kleiner ist als der Nennergrad. Falls der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist, muß vor der Transformation der Beziehung (1.2.155a) in die Beziehung (1.2.155b) eine Polynomdivision vorgenommen werden. Ergebnis einer solchen Division ist bekanntlich (vergleiche Beispiel 1.2.12) ein konstanter Faktor, der additiv mit einer Restübertragungsfunktion verknüpft ist, die nun die Bedingung erfüllt, daß der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms. Die Koeffizienten des Restpolynoms können dann in das Zustandsmodell übertragen werden. Der berechnete konstante Faktor der Polynomdivision wird als Faktor d in (1.2.155b) eingesetzt.

Bevor wir einige Beispiele zur Umformung einer Übertragungsfunktion in ein Zustandsmodell rechnen, sei noch auf folgende Zusammenhänge hingewiesen:

- Der Faktor d im Zustandsmodell (1.2.155b) bzw. im Modell (1.2.28) steht in keiner Beziehung zum Faktor d, der in der Übertragungsfunktion des Vorhalt- und Verzögerungsgliedes 2. Ordnung als Dämpfungsfaktor auftritt. Beide Faktoren haben lediglich die gleiche Kurzbezeichnung.
- Die Form (1.2.155b) des Zustandsmodells ist eine sog. Normalform und zwar die Beobachter-Normalform. Es gibt noch weitere Normalformen des Zustandsmodells mit anderen markanten Eigenschaften. Normalformen von Zustandsmodellen entstehen durch sog. lineare Ähnlichkeitstransformationen /4/. Wir verzichten wir an dieser Stelle auf eine Ableitung. Durch Anwendung der Laplace-Transformations-Korrespondenzen Nr. 9 und 10 ist jedoch relativ einfach (1.2.155b) in (1.2.155a) zu überführen.
- Während die Zeitverläufe der Zustandsgrößen eines Zustandsmodells, das durch mathematisch/physikalische Modellbildung entstanden ist, physikalische Zusammenhänge des Systems wiederspiegeln (z. B. stellen die Zustände $v(t)$ und $s(t)$ im Zustandsmodell des Gasdruckmeßgerätes (1.2.14) die Geschwindigkeit und den Wegverlauf des Gestänges von Bild 1.2.6 dar), haben die Zustandsgrößenverläufe von (1.2.155b) keine physikalische Bedeutung. Lediglich die Systemantwort auf eine Eingangserregung, die wir ja auch berechnen wollen, entspricht der des realen, durch (1.2.155b) modellierten Systems. Aus diesem Grund werden auch die Anfangszustände bei einer Berechnung der Systemantwort auf der Grundlage der Transformation (1.2.155) immer zu Null gesetzt.

Beispiel 1.2.28: Berechne das zur folgenden Übertragungsfunktion gehörige mathematische Zustandsmodell.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{10s^3 + 6s^2 + 10,5s + 1}. \quad (1.2.156)$$

Die Transformationsbeziehung schreibt vor, daß der Koeffizient vor der höchsten (n-ten) s-Potenz im Nenner gleich 1 ist. Die Übertragungsfunktion muß daher im Zähler und Nenner durch 10 dividiert werden

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 0,6s^2 + 1,05s + 0,1}.$$

Da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, kann die Transformationsbeziehung direkt angewendet werden. Aus der höchsten s-Potenz lesen wir ab, daß $n = 3$ ist.

Damit ergibt sich folgendes Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1 \\ 1 & 0 & -1,05 \\ 0 & 1 & -0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad \underline{x}(0) = \underline{0} \\ y(t) &= [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.157)$$

Beispiel 1.2.29: Berechne das mathematische Zustandsmodell, welches zur folgenden Übertragungsfunktion gehört

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10 \cdot (1 + 5s) \cdot (1 + 2s)}{s \cdot (1 + 0,5s)}. \quad (1.2.158)$$

Die Übertragungsfunktion ist in Produkt- (V-Normal-) Form gegeben, sie muß zunächst in die Form (1.2.155a) umgeformt werden

$$G(s) = \frac{100s^2 + 70s + 10}{0,5s^2 + s} = \frac{200s^2 + 140s + 20}{s^2 + 2s}.$$

Da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist, muß weiterhin eine Polynomdivision vorgenommen werden

$$\begin{aligned} (200s^2 + 140s + 20) : (s^2 + 2s) &= 200 + \frac{-260s + 20}{s^2 + 2s} \\ . - \underline{(200s^2 + 400s)} & \\ &- 260s + 20 \end{aligned}$$

Die höchste vorkommende s-Potenz ist 2, so daß sich folgendes Zustandsmodell ergibt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ x_1(t) \\ \cdot \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ -260 \end{bmatrix} u(t); \quad x(0) = \underline{0} \\ y(t) &= [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 200 u(t) \end{aligned} \quad (1.2.159)$$

1.2.7.2 Grafische Analyse von Bodediagrammen

Ein weiterer, noch nicht besprochener Übergang von einer Systembeschreibungsform zur anderen stellt die grafische Analyse von Bodediagrammen dar. Dieser Übergang erlaubt es, aus einem vorliegenden, z. B. gemessenen Bodediagramm auf die dazugehörige Übertragungsfunktion zu schließen.

Die Grundidee dieser Analysemethode liegt darin, das vorliegende Bodediagramm durch Elementarfrequenzgänge, deren Frequenzgang-gleichung (bzw. Übertragungsfunktion) man kennt, anzunähern. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist dies bei einfachen Bodediagrammen leicht möglich. Bei komplexen Systemstrukturen mit dicht beieinanderliegenden Kennfrequenzen der Elementarfrequenz-gänge ist diese Analyseform langwierig und mühsam.

Eine numerische Alternative, auf die wir hier nicht eingehen wollen, wird in /1/ vorgestellt. Das grafische Analyseverfahren kann auch daran scheitern, daß das Übertragungssystem nicht "minimalphasig" ist.

Aus didaktischen Gründen wollen wir auch auf diese Problematik nicht eingehen. Sie wird aber ausführlich in der Standard-Literatur /1, 4/ behandelt.

Beispiel 1.2.30: Bestimme die Übertragungsfunktion des Übertragungssystems, das folgendes Bodediagramm besitzt:

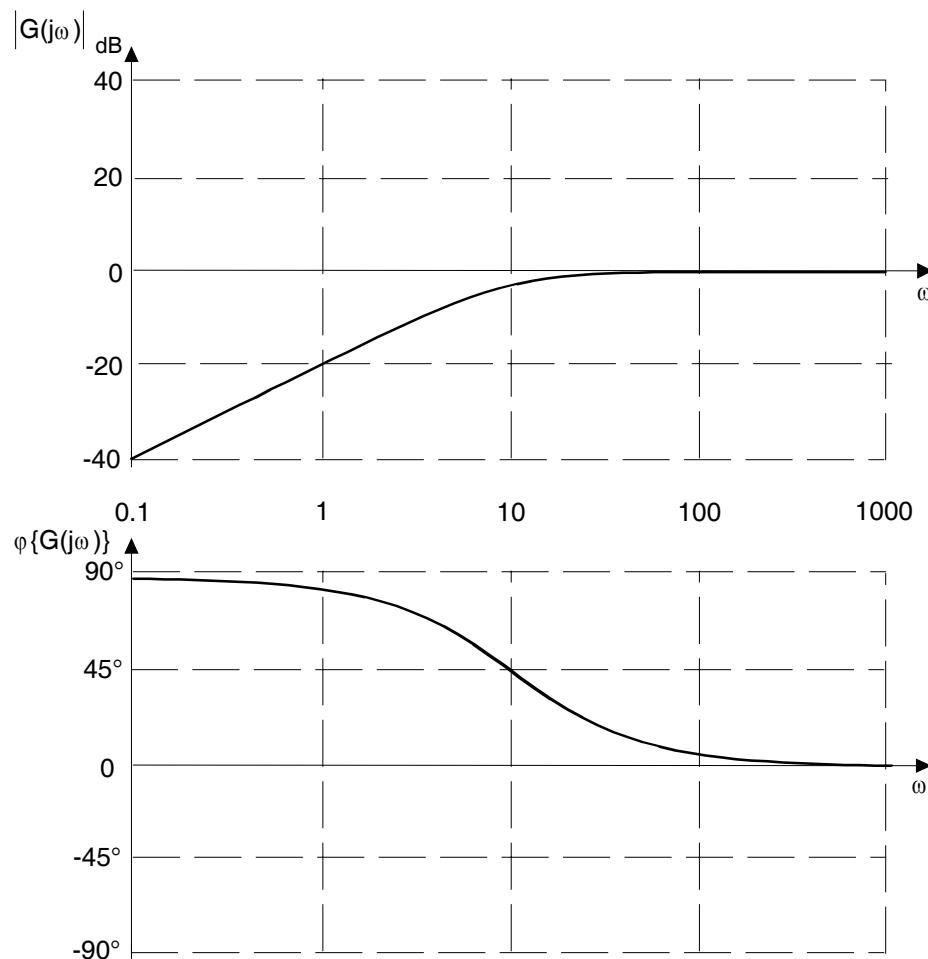


Bild 1.2.37 Ein grafisch zu analysierendes Bodediagramm

Mit Kenntnis der Betrags- und Phasenverläufe der Elementarfrequenzgänge erkennt man, daß nur ein Differenzierer $j\omega$ in der Lage ist, bei kleinen Frequenzen ω einen Betraganstieg von 20 dB/Dekade bei einer konstanten Phasenverschiebung von $+90^\circ$ zu bewirken. Da der Amplitudenanstieg bei $\omega = 10$ in einen parallelen Betragsverlauf zur ω -Achse übergeht und die Phase in diesem Frequenzbereich auf 0° absinkt, muß an dieser Stelle ein Verzögerungsglied 1. Ordnung mit einer Kennfrequenz $\omega_k = 10$ wirksam werden. Zeichnen wir diese Elementarkennlinien in das Bodediagramm ein und addieren ihre Amplituden- und Phasenverläufe, erhalten wir das Bodediagramm nach Bild 1.2.38.

Wie man deutlich erkennt, entspricht der analysierte Phasenverlauf schon dem Phasenverlauf des gegebenen Bodediagramms. Nur die Amplitudenkennlinie läuft bei allen Frequenzen 20 dB oberhalb des gegebenen Verlaufes. Eine Absenkung der Betragskennlinie um -20 dB

$$V = 10^{\frac{V_{dB}}{20dB}} = 10^{\frac{-20}{20}} = 10^{-1} = 0,1$$

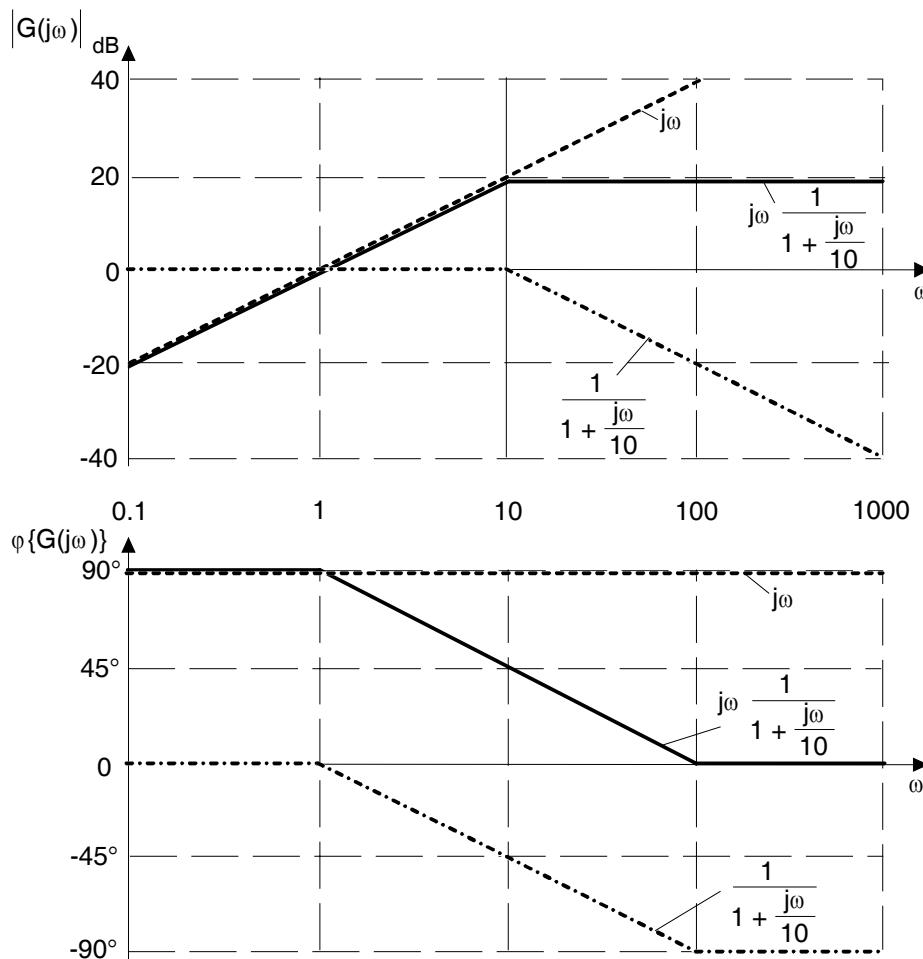


Bild 1.2.38 Zur grafischen Analyse eines Bodediagramms

führt dann auf einen Gesamtfrequenzgang, in dem noch ein Verstärkungsfaktor von 0,1 enthalten ist:

$$G(j\omega) = 0,1 \cdot j\omega \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{10}}.$$

Durch die Substitution $j\omega = s$ (Übergang vom Frequenzgang zur Übertragungsfunktion) erhalten wir die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0,1s}{1 + 0,1s}.$$

Es sei an dieser Stelle vermerkt, daß bei praktischen Problemstellungen dieser Weg sehr selten gegangen wird.

1.2.7.3 Theoretische Modellbildung nach der symbolischen $j\omega$ -Methode

Wie bereits weiter vorn angekündigt, wollen wir uns noch kurz mit einer für elektrotechnische Problemstellungen gut geeigneten Methode zur theoretischen Modellbildung auseinandersetzen.

Zur Vermeidung von Differentialgleichungen bedient man sich in der Elektrotechnik zur mathematischen Modellierung von RLC-Netzwerken häufig der sogenannten symbolischen $j\omega$ -Methode. Dazu betrachtet man das zu analysierende Netzwerk als harmonisch erregt und kann dann für die Netzwerkelemente folgende Widerstandsoperatoren angeben /14/

$$\begin{aligned} \text{Wirkwiderstand} &: X_R(j\omega) = R \\ \text{Induktivität} &: X_L(j\omega) = j\omega L \\ \text{Kapazität} &: X_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}. \end{aligned} \quad (1.2.160)$$

Unter diesen Voraussetzungen kann man die Kirchhoffschen und die daraus abgeleiteten Gesetze (Reihenschaltungs- und Parallelschaltungsregel, Spannungsteiler, Stromteiler) wie in der Gleichstromtechnik anwenden. Wir zeigen die Vorgehensweise an einem Beispiel.

Beispiel 1.2.31: Bestimme die Übertragungsfunktion des folgenden Netzwerkes

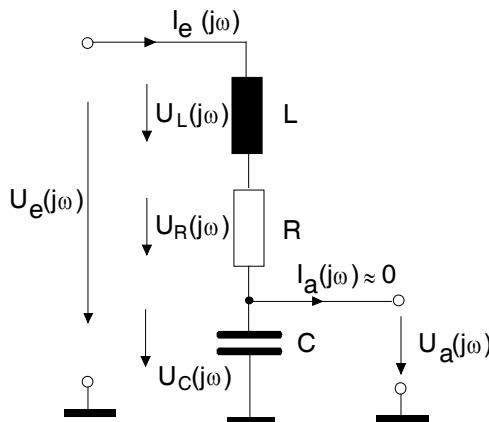


Bild 1.2.39 Zur Modellbildung mit der symbolischen $j\omega$ -Methode

Aus dem Netzwerk lassen sich folgende Strom- und Spannungsbilanzen ablesen

$$I_e(j\omega) = I_L(j\omega) = I_R(j\omega) = I_C(j\omega) \quad (1.2.161)$$

$$U_e(j\omega) - U_C(j\omega) - U_R(j\omega) - U_L(j\omega) = 0 \quad (1.2.162)$$

$$U_C(j\omega) - U_a(j\omega) = 0, \quad (1.2.163)$$

die über die Widerstandsoperatoren wie folgt miteinander verknüpft sind

$$U_L(j\omega) = j\omega L \cdot I_L(j\omega); \quad U_R(j\omega) = R \cdot I_R(j\omega); \quad U_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_C(j\omega).$$

Zur Berechnung des Frequenzganges $G(j\omega) = U_a(j\omega)/U_e(j\omega)$ müssen die obigen Gleichungen so ineinander eingesetzt werden, daß bis auf $U_a(j\omega)$ und $U_e(j\omega)$ alle anderen Signale verschwinden. (Zur Schreibvereinfachung werden die Signalargumente weggelassen).

$$\begin{aligned} U_C &= U_e - U_R - U_L = U_e - R \cdot I_R - j\omega L \cdot I_L = U_e - R \cdot I_C - j\omega L \cdot I_C \\ U_C &= U_e - R \cdot j\omega C \cdot U_c - j\omega L \cdot j\omega C \cdot U_C; \end{aligned}$$

mit $U_a = U_c$ folgt daraus

$$\begin{aligned} U_a &= U_e - j\omega RC \cdot U_a - (j\omega)^2 LC \cdot U_a \\ U_a \cdot (1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC) &= U_e \\ G(j\omega) &= \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}. \end{aligned} \quad (1.2.164)$$

Der Übergang zur Übertragungsfunktion ist wieder trivial, man erhält $G(s)$ indem $j\omega = s$ gesetzt wird

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2}. \quad (1.2.165)$$

1.3. Stabilität von Übertragungssystemen

Der im Kapitel 1.1.3.3 eingeführte Begriff der Stabilität, als eine wichtige Eigenschaft eines Übertragungssystems, soll an dieser Stelle etwas vertieft werden. Wir folgen dabei den Überlegungen von Föllinger /4/.

Betrachtet man die zu untersuchende Wirkungsanordnung als Übertragungssystem, liegt es nahe, zur Stabilitätsuntersuchung seine Reaktion auf Eingangsgrößen heranzuziehen. Darüberhinaus ist es vom praktischen Standpunkt her günstig, hierzu eine einfache Testfunktion, z.B. die Sprungfunktion zu verwenden. Unter diesen Voraussetzungen

definieren wir Stabilität wie folgt:

- ||| Ein lineares kontinuierliches Übertragungssystem heißt stabil, wenn seine Sprungantwort für $t \rightarrow \infty$ einem endlichen Wert zustrebt. Andernfalls heißt es instabil.
- (1.3.1)

Diese praktische Definition kann dadurch gerechtfertigt werden, daß eine sprungartige Veränderung der Eingangsgröße eine besonders intensive Beanspruchung des Übertragungssystems darstellt. Beruhigt sich das System danach wieder, kann man erst recht erwarten, daß es bei sanfteren Eingangserregungen auch zur Ruhe kommt.

Darüberhinaus bietet diese Definition die Möglichkeit, die Stabilität eines Übertragungssystems durch Messung seiner Sprungantwort zu überprüfen.

Auch beim Vorliegen eines mathematischen Modells des Übertragungssystems kann mit den erlernten Methoden, z.B. rechnergestützt die Sprungantwort berechnet und so die Stabilität überprüft werden.

Um tiefere Einsichten in das Stabilitätsverhalten eines Systems zu erlangen, z.B. um die Abhängigkeit der Stabilität von einer Parameteränderung feststellen zu können, ist der Weg über die Simulation, d.h. Berechnung der Sprungantwort oft zu mühsam.

Aus der obigen Stabilitätsdefinition läßt sich ein leicht handhabbares Stabilitätskriterium, das die Untersuchung solcher Zusammenhänge zuläßt, ableiten. Es lautet:

- ||| Ein lineares kontinuierliches Übertragungssystem ist genau dann stabil, wenn die Pole seiner Übertragungsfunktion (1.2.63) ausschließlich einen negativen Realteil haben.
- (1.3.2a)

Stellt man die Pol-/Nullstellenverteilung der Übertragungsfunktion in Form einer Grafik nach Bild 1.2.14 dar, kann man das Stabilitätskriterium auch wie folgt formulieren:

- ||| Ein lineares kontinuierliches Übertragungssystem ist genau dann stabil, wenn die Pole seiner Übertragungsfunktion ausschließlich in der linken s-Halbebene (d.h. links von der imaginären Achse) liegen.
- (1.3.2b)

Es sei darauf hingewiesen, daß die Nullstellenlage der Übertragungsfunktion keinen Einfluß auf die Stabilität hat.

Aus Platzgründen wollen wir auf eine exakte Ableitung des Stabilitätskriteriums (1.3.2) verzichten und nur anhand einiger Überlegungen den Ableitungshintergrund andeuten. Die folgenden Übertragungsfunktionen beschreiben nach der Stabilitätsfunktion (1.3.2) ein stabiles und ein instabiles Übertragungssystem

Übertragungsfunktion :	$G(s) = \frac{a}{s + a};$	$G(s) = \frac{a}{s - a}$
Polstellenlage :	$s + a = 0 \Rightarrow s = -a;$	$s - a = 0 \Rightarrow s = +a$
Stabilitätsaussage :	stabil;	instabil
Einheitssprungantwort :	$h(t) = 1 - e^{-at};$	$h(t) = e^{at} - 1$

Wie man deutlich erkennt, zieht ein stabiler Pol ($-a$) in der Sprungantwort eine e–Funktion mit negativem Exponenten nach sich, die für wachsendes t gegen Null geht und damit $h(t)$ gegen einen stationären Endwert laufen lässt. Im instabilen Fall führt der instabile Pol ($+a$) auf eine e–Funktion mit positivem Exponenten, die für $t \rightarrow \infty$ ständig wächst, also keinen stationären Endwert einnimmt.

Man kann nun zeigen, daß bei allen möglichen Konfigurationen des Nennerpolynoms (einfache, mehrfache, reelle und konjugiert komplexe Nullstellen) in der Sprungantwort immer dann e–Funktionen mit positivem Exponenten auftreten, wenn diese Nullstellen einen positiven Realteil haben. Schon eine e–Funktion mit positivem Realteil reicht dann aus, das System nach (1.3.2) instabil zu machen. In /4/ wird diese Ableitung vollständig dargestellt.

Die Anwendung des Stabilitätskriteriums (1.3.2) birgt eine gewisse rechentechnische Schwierigkeit. Zum Studium der Pollage einer Übertragungsfunktion müssen die Nullstellen des Nennerpolynoms bekannt sein. Bekanntlich kann man nur für Polynome bis dritten Grades analytische Lösungswege angeben. Liegen Polynome höherer Ordnung vor, müßte mit numerischen Polynomfaktorisierungsalgorithmen gearbeitet werden.

Da häufig gar nicht die exakte Pollage von Interesse ist, sondern nur die Globalaussage, ob alle Pole in der linken s –Halbebene liegen, ausreicht, wurden einige relativ leicht von Hand durchrechenbare Stabilitätsverfahren auf dieser Basis entwickelt. Sie werden in der Literatur /1,2,3,4/ unter den Begriffen "HURWITZ–Kriterium", "ROUTH–Kriterium" und "Kriterium von CREMER–LEONHARD–MICHAILOW" beschrieben. Wir gehen auf diese numerischen Stabilitätskriterien nicht näher ein, da wir bei komplexen Systemen mit einer Ordnung $n > 3$ durch Simulation das Stabilitätsverhalten z.B. direkt mit der Stabilitätsdefinition (1.3.1) überprüfen können.

Für die sehr wichtige Überprüfung der Stabilität von Regelkreisen werden wir später ein speziell auf diese Problematik zugeschnittenes Stabilitätskriterium - das Nyquistkriterium - einführen.

1.4 Eine Übersicht über die Beschreibungsformen der wichtigsten Übertragungsglieder

Abschließend zu unseren Betrachtungen über die Systemtheorie linearer kontinuierlicher Übertragungssysteme wollen wir eine Aufstellung der wichtigsten real existierenden Übertragungsglieder vornehmen. Dabei steht als mathematisches Modell die Übertragungsfunktion im Mittelpunkt. Für die meisten Übertragungsglieder existieren geprägte Namen und Kurzbezeichnungen, die auch angegeben werden. Um einen schnellen Überblick über das Verhalten der einzelnen Systeme zu bekommen, werden weiterhin qualitative Skizzen des Sprungantwortverhaltens, des Bodediagramms und des Pol/Nullstellenplanes angegeben. Für einfache Übertragungsglieder mit wenigen Zeitkonstanten oder in Fällen besonderer Wichtigkeit wird auch die analytische Lösung der Sprungantwort dargestellt. Um einen gewissen Bezug zur Realität herstellen zu können, werden zu jedem beschriebenen Übertragungsglied einige reale technische Wirkungsanordnungen angegeben, die dieses Wirkungsverhalten haben.

Der folgende Katalog dient in erster Linie dazu, sich einen schnellen qualitativen Überblick über die Modellierung von einfachen Übertragungsgliedern zu verschaffen. Da sich technische Übertragungssysteme aus einer Vielzahl von elementaren Übertragungsgliedern zusammensetzen können, ist es einsichtig, daß die Aufstellung nicht vollständig sein kann. Weiterhin kann der Katalog im konkreten Fall, wenn z.B. für regelungstechnische Zwecke ein System genau analysiert werden muß, die Berechnung z.B. der Sprungantwort oder des Bodediagramms nicht ersetzen.

Der Katalog unterstützt und ergänzt das Kapitel 1.2.4 über "Praktische Bezüge zwischen Übertragungsfunktion und Übertragungssystem" hinsichtlich der Aussagefähigkeit der Übertragungsfunktion über das Global und Einschwingverhalten:

- Wir erkennen bei allen Übertragungsgliedern, bei denen der Term $1/s$ in der Übertragungsfunktion auftaucht, den charakteristischen global integralen Anstieg der Sprungantwort für $t \rightarrow \infty$ und bei allen Übertragungsfunktionen ohne den Term $1/s$ das Erreichen des charakteristischen stationären Endwertes eines global proportionalen Systems, d.h. den Verlauf der Sprungantwort parallel zur \tilde{t} -Achse für $t \rightarrow \infty$.

Bezüglich des Einschwingverhaltens können dem Katalog folgende Zusammenhänge entnommen werden:

- Bei allen Systemen, bei denen Vorhalte auftreten bzw. dominieren (Katalog Nr. 8 und 9a) treten keine Signalverzögerungen der Sprungantwort auf, sondern das

Ausgangssignal antwortet prompt mit einer Spitze bei $t = 0$.

Diese Aussage trifft auch für die beiden Übertragungsglieder von Katalog Nr. 10a und 10b zu. Allerdings tritt die Spitze bei $t = 0$ in die entgegengesetzte Richtung des Eingangssprungs auf. Dies liegt daran, daß die Vorhaltzeitkonstanten dieser sogenannten Allpässe bzw. allpaßähnlichen Glieder ein negatives Vorzeichen haben.

- Bei allen Systemen in denen Verzögerungsglieder auftreten (Katalog Nr. 2, 3a, 3b, 3c, 4, 6 und 7) oder dominieren (Katalog Nr. 9b) kommt es zu einem deutlichen Verzögerungsverhalten. Wie man erkennt, gilt dies sowohl für global proportional als auch global integral wirkende Systeme.
- Die Katalog Nr. 3a offenbart noch eine bemerkenswerte Eigenschaft von Verzögerungsgliedern zweiter Ordnung, die insbesondere durch einen Vergleich mit den Katalog Nr. 3b und 3c deutlich wird: Immer wenn konjugiert komplexe Übertragungsfunktionspole auftreten, bzw. wenn der Dämpfungsfaktor $0 < d < 1$ ist, zeigt die Sprungantwort eine gedämpfte harmonische Schwingung (und Resonanzüberhöhungen in der Betragskennlinie des Bodediagramms). Verzögerungsglieder 2. Ordnung mit $d \geq 1$, die sich bekanntlich in zwei Verzögerungsglieder 1. Ordnung aufspalten lassen, und auch Aneinanderreihungen weiterer Verzögerungsglieder 1. Ordnung zeigen dagegen immer aperiodisches Sprungantwortverhalten. (Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß zur Unterscheidung dieser Verhaltensweisen in Kapitel 1.2.2.2 die quadratische Form der V-Normalform eingeführt wurde (Formeln 1.2.67 und 1.2.70)).
- Mit Hilfe des Katalogs ist auch auf einfacher Basis eine experimentelle Modellbildung, wie sie im Kapitel 1.2.1 und 1.2.7 angedeutet wurde, möglich. Nähere Einzelheiten findet der Leser im Anhang A1.3 "Kataloggestützte, experimentelle Modellbildung".

Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, daß zur Berechnung der Sprungantwort $h(t)$ und des Graphen der Sprungantwort in der Aufstellung folgende Eingangserregung zugrunde gelegt wurde:

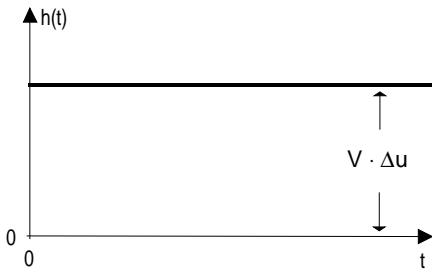
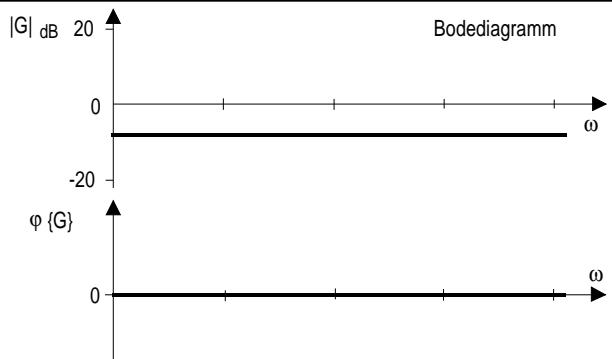
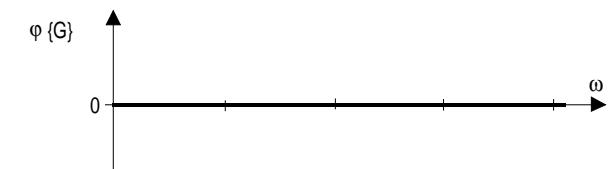
$$u(t) = \begin{cases} \Delta u \cdot \sigma(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

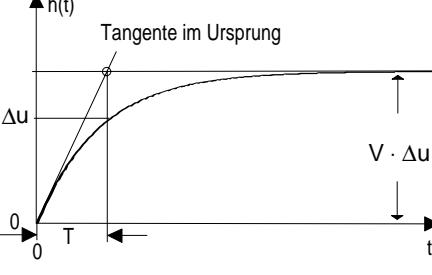
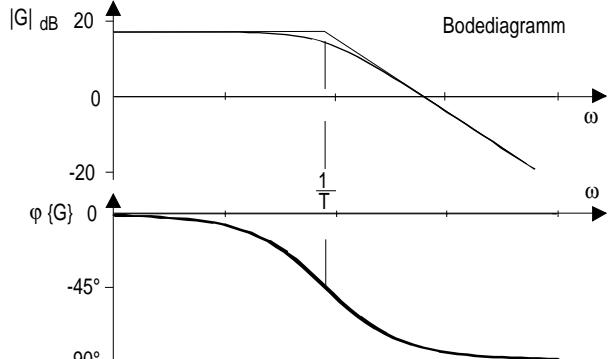
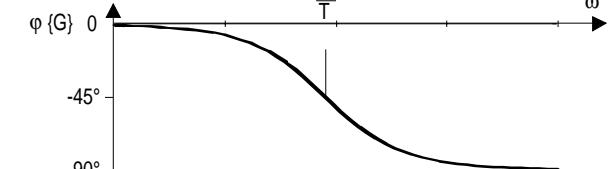
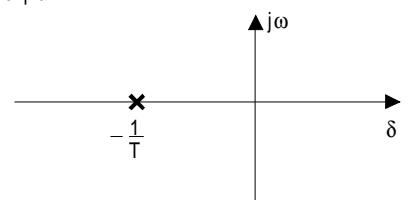
```

graph LR
    u["u(t)"] --> System[\"System\"]
    System --> y["y(t) = h(t)"]

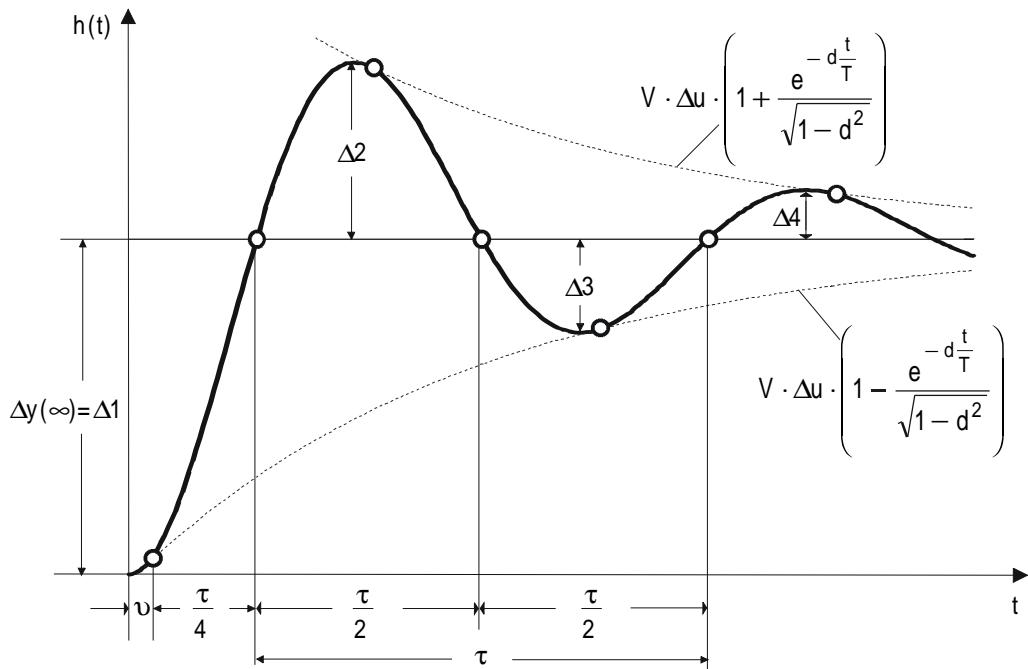
```

(Zur Erinnerung: Die Ausgangsgröße $y(t)$ wird auch $h(t)$ genannt, wenn die Eingangserregung ein Sprung war).

Nr.	1	Proportionalglied	P-Glied
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = V$		(1.4.1)
Sprungantwort	$h(t) = V \cdot \Delta u$		(1.4.2)
Graph der Sprungantwort		Bodediagramm	 
Pol-/Nullstellenplan	Keine Pole und Nullstellen	Beispiele	<ul style="list-style-type: none"> • Widerstandsnetzwerke • elektr. Verstärker • Hebel • Druckfortpflanzung in hydraulischen Netzen

Nr.	2	Verzögerungsglied 1. Ordnung	PT ₁ -Glied
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{1 + sT}$		(1.4.3)
Sprungantwort	$h(t) = V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \Delta u$		(1.4.4)
Graph der Sprungantwort		Bodediagramm	 
Pol-/Nullstellenplan		Beispiele	<ul style="list-style-type: none"> • RC-Kombination • Druckfortpflanzung in pneumatischen Netzen • Drehzahlverhalten eines Otto-Motors bei sprungartiger Gaspedaländerung

Nr. 3a	Verzögerungsglied 2. Ordnung (gedämpft schwingend)	PT ₂ -Glied, d<1
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{1 + 2dTs + (Ts)^2} ; \quad d < 1$ (1.4.5)	
Sprungantwort	$h(t) = V \left\{ 1 - e^{-\frac{d}{T}t} \left[\cos\left(\sqrt{1-d^2} \frac{t}{T}\right) + \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \left(\sin\left(\sqrt{1-d^2} \frac{t}{T}\right) \right) \right] \right\} \cdot \Delta u \quad (1.4.6)$	
Graph der Sprungantwort		Bodediagramm
Poli/Nullstellenplan		Beispiele
Erläuterungen	<p>Das gedämpft schwingende PT₂-Glied zeichnet sich dadurch aus, daß sein sogenannter Dämpfungsfaktor d kleiner als eins ist. "d" ist in der obigen Übertragungsfunktion definiert (Vergleiche(1.2.70)). Bei $d < 1$ sind die Pole von $G(s)$ konjugiert komplex</p> $s_{1,2} = -\frac{d}{T} \pm j \frac{1}{T} \sqrt{1-d^2} . \quad (1.4.7)$ <p>Aus der Sprungantwort ist zu erkennen, daß mit sinkendem d die Schwingneigung des PT₂-Gliedes wächst. In der Betragskennlinie des Bodediagramms steigt die Betragsüberhöhung mit sinkendem d und die Phasenübergangsgeschwindigkeit von 0° nach -180°.</p> <p>Im Folgenden werden ohne Ableitung weitere markante Parameter von Sprungantwort und Bodediagramm dargestellt.</p>	



Periodendauer

$$\tau = T \frac{2\pi}{\sqrt{1-d^2}} ; \quad \text{Frequenz der Schwingung } \omega_s = \frac{2\pi}{\tau} \quad (1.4.8a)$$

Zeitkonstante

$$T = \frac{\tau \sqrt{1-d^2}}{2\pi} \quad (1.4.8b)$$

Amplitudendämpfung

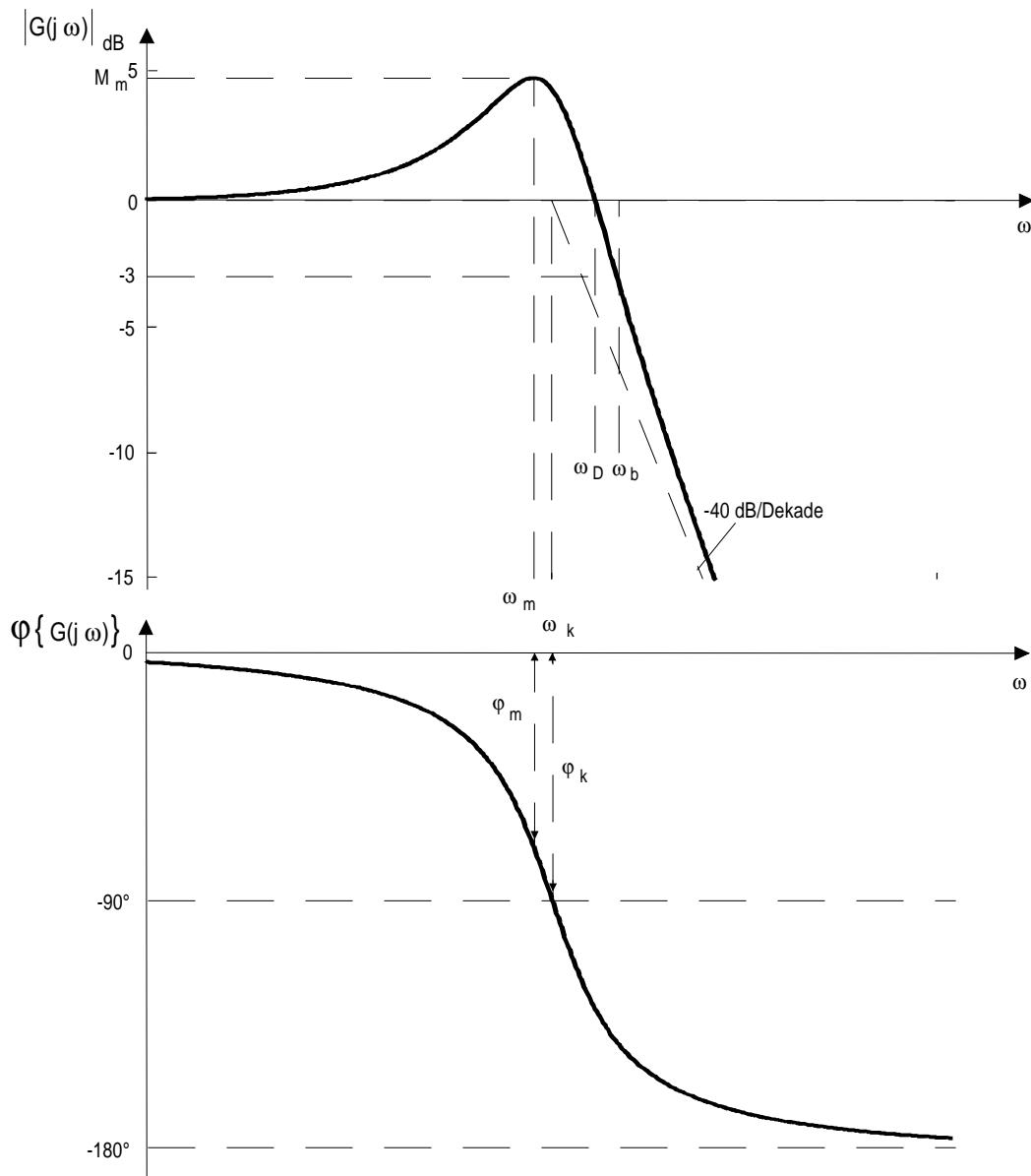
$$\frac{\Delta 1}{\Delta 2} = e^{\frac{\pi d}{\sqrt{1-d^2}}} ; \quad \frac{\Delta 1}{\Delta 2} = \frac{\Delta 2}{\Delta 3} = \frac{\Delta 3}{\Delta 4} = \dots \quad (1.4.9a)$$

Dämpfungs faktor

$$d = \sqrt{\frac{\ln \frac{\Delta 1}{\Delta 2}}{\pi^2 + \left(\ln \frac{\Delta 1}{\Delta 2} \right)^2}} \quad (1.4.9b)$$

Verschiebungskonstante

$$v = \tau \frac{\arcsin(d)}{2\pi} \quad (1.4.10)$$



ω_k : Kennfrequenz; $\omega_k = \frac{1}{T}$; $\varphi_k = -90^\circ$

ω_D : Durchtrittsfrequenz der Betragkennlinie durch 0 dB

$$\omega_D = \omega_k \cdot \sqrt{2(1-d^2)} = \sqrt{2} \cdot \omega_m \quad (1.4.11)$$

ω_m : Frequenz des Maximums der Betragüberhöhung (Resonanzfrequenz)

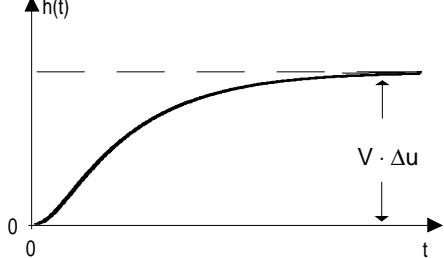
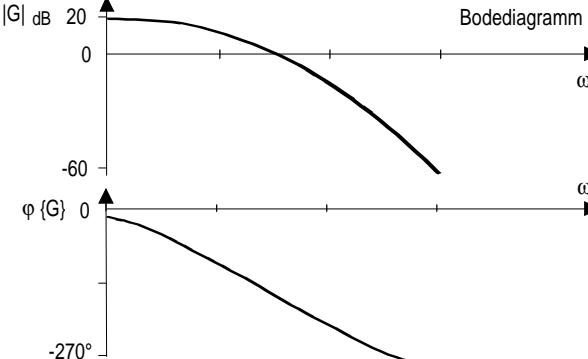
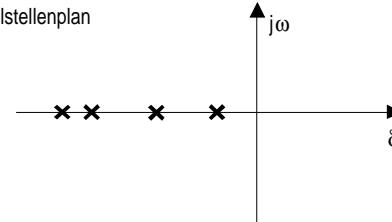
$$\omega_m = \omega_k \sqrt{1-2d^2}; |M_m|_{dB} = 20 \log \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}}; \varphi_m = -\arctan\left(\frac{1}{d}\sqrt{1-2d^2}\right) \quad (1.4.12)$$

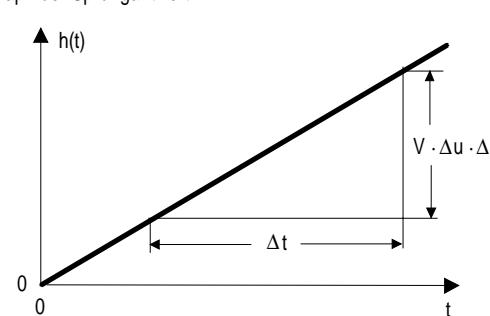
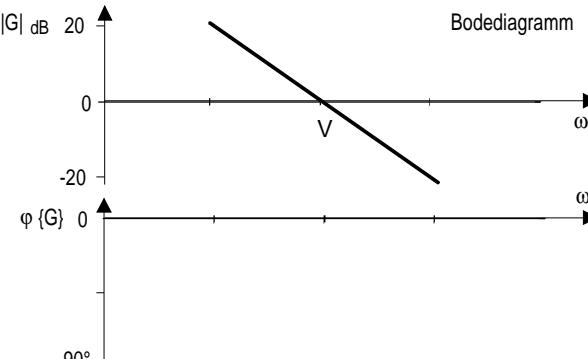
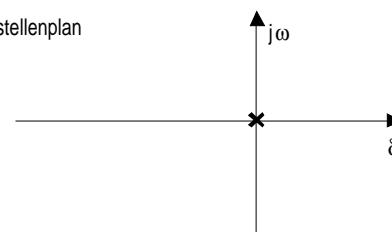
ω_b : Bandbreite des PT_2 -Gliedes

$$\omega_b = \omega_k \sqrt{1-2d^2 + \sqrt{(1-2d^2)^2 + 1}} \quad (1.4.13)$$

Nr. 3 b	Verzögerungsglied 2. Ordnung (aperiodisch einschwingend)	PT ₂ -Glied; d>1
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} ; T_1 > T_2$	(1.4.14)
Sprungantwort	$h(t) = V \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \cdot \Delta u$	(1.4.15)
Graph der Sprungantwort		Bodediagramm
Pol/Nullstellenplan		Beispiele
Erläuterungen		<ul style="list-style-type: none"> • zwei in Reihe geschaltete RC-Glieder • Drehzahlverhalten eines Gleichstrommotors bei Ankerspannungseingriff • Temperaturanstieg einer Heizplatte bei Erhöhung der elektrischen Heizleistung
<p>Das aperiodische einschwingende PT₂-Glied unterscheidet sich vom gedämpft schwingenden PT₂-Glied dadurch, daß seine Sprungantwort nicht überschwingt und die Betragskennlinie des Bodediagramms keine Amplitudenüberhöhung besitzt. Würde man (1.4.14) in die Form (1.4.5) überführen, ergäbe sich ein Dämpfungsfaktor d>1. Nach Kapitel 1.2.2.2 besitzt das PT₂-Glied dann zwei verschiedene reelle Pole. Damit ist eine Darstellung der Übertragungsfunktion in Form zweier in Reihe geschalteter PT₁-Glieder mit unterschiedlichen Zeitkonstanten (1.4.14) möglich.</p>		

Nr. 3c	Verzögerungslied 2. Ordnung (aperiodischer Grenzfall)	PT ₂ -Glied ; d=1
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{(1+sT)(1+sT)} = \frac{V}{(1+sT)^2}$	(1.4.16)
Sprungantwort	$h(t) = V \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right) \cdot \Delta u$	(1.4.17)
Graph der Sprungantwort		Bodediagramm
Pol/Nullstellenplan		Beispiele <ul style="list-style-type: none"> • Zeigerausschlag von Zeigermeßgeräten (siehe Beispiel 1.2.1 4) • häufiges Sprungantwortverhalten von Regelkreisen, die nicht überschwingen dürfen
Erläuterungen	<p>Das PT₂-Glied mit aperiodischem Grenzfall-Verhalten unterscheidet sich vom gedämpft schwingenden und vom aperiodischen PT₂-Glied dadurch, daß sein Sprungantwortverhalten genau die Grenze zum gedämpften Schwingfall darstellt, ohne selbst noch überzuschwingen. Würde man (1.4.16) in die Form (1.4.5) überführen, ergäbe sich ein Dämpfungsfaktor d=1. Nach Kapitel 1.2.2.2 besitzt das PT₂-Glied dann genau zwei gleiche reelle Pole. Daher ist die Schreibweise der Übergangsfunktion in der Form (1.4.16) möglich.</p>	

Nr.	4	Verzögerungsglied n-ter Ordnung	PT _n -Glied; n>2
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_n)}$		(1.4.18)
Sprungantwort	Die analytische Lösung der Sprungantwort ist sehr unübersichtlich /4/ und muß für den konkreten Einzelfall berechnet werden		
Graph der Sprungantwort		Bodediagramm	 
Pol/Nullstellenplan		Beispiele	<ul style="list-style-type: none"> • Raumtemperatur bei Erhöhung der Heizleistung • Wärmeaustausch durch Trennwände • physikalische Vermischungsvorgänge

Nr.	5	Integrierglied (Integralglied)	I-Glied
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{s}$		(1.4.19)
Sprungantwort	$h(t) = V \cdot t \cdot \Delta u$		(1.4.20)
Graph der Sprungantwort		Bodediagramm	 
Pol/Nullstellenplan		Beispiele	<ul style="list-style-type: none"> • elektrischer Integrierer • Füllstand eines zylindrischen Behälters bei konstantem Zufluß • hydraulischer Linearantrieb bei konstantem Speisedruck

Nr. 6

Integralglied mit Verzögerung 1. Ordnung

IT₁-Glied

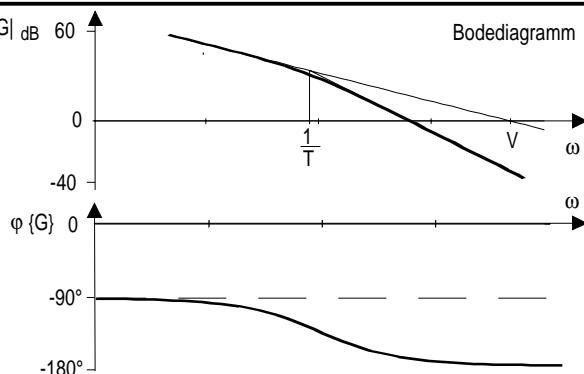
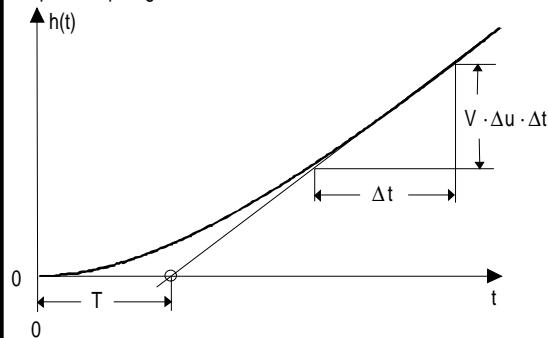
Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{s(1 + sT)} \quad (1.4.21)$$

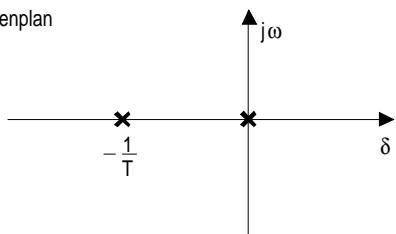
Sprungantwort

$$h(t) = V \cdot (t + T(e^{-\frac{t}{T}} - 1)) \cdot \Delta u \quad (1.4.22)$$

Graph der Sprungantwort



Pol/Nullstellenplan



Beispiele

- Drehwinkel einer Motorachse bei einem Sprung der Ankerspannung
- Wegänderung eines Fahrzeugs bei konstanter Energiezufuhr

Nr. 7

Integralglied mit Verzögerung n-ter Ordnung (aperiodisch)

IT_n-Glied

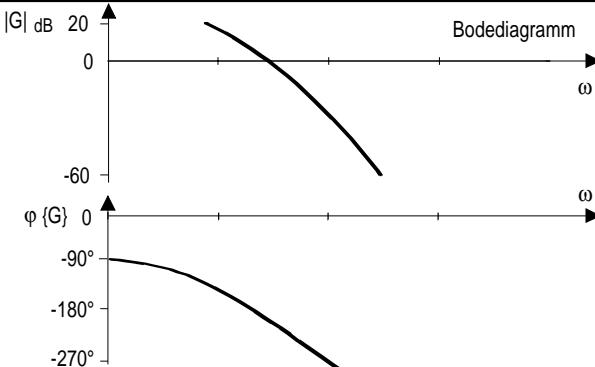
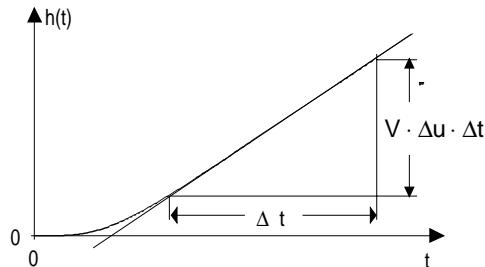
Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_n)} \quad (1.4.23)$$

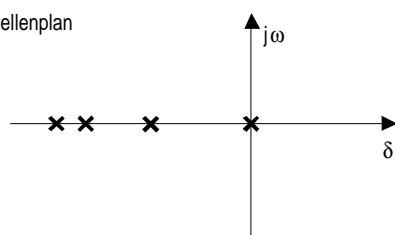
Sprungantwort

Die analytische Lösung der Sprungantwort ist sehr unübersichtlich /4/ und muß für den konkreten Einzelfall berechnet werden

Graph der Sprungantwort



Pol/Nullstellenplan



Beispiele

- Drehwinkel einer belasteten Motorachse bei einem Sprung der Ankerspannung
- Wegänderung eines Fahrzeugs bei konstanter Energiezufuhr

Nr. 8

Differenzierer mit Verzögerung 1. Ordnung

DT₁-Glied

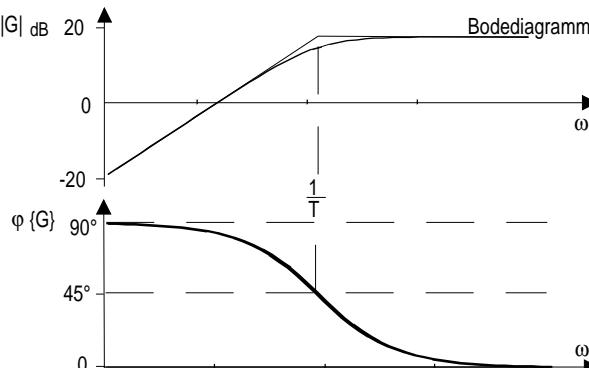
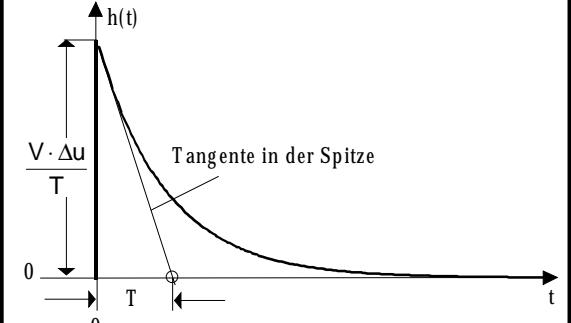
Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V s}{1 + sT} ; \quad (1.4.24)$$

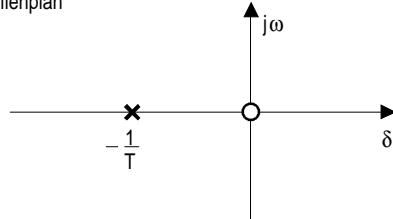
Sprungantwort

$$h(t) = \frac{V}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot \Delta u \quad (1.4.25)$$

Graph der Sprungantwort



Pol/Nullstellenplan



- Beispiele
- elektronisches Hochpaß-Filter
 - C-R-Kombination
 - elektronischer Spezialverstärker (Baseline-Restorer)
 - ungestörter Ausfluß aus einem zylindrischen Behälter (näherungsweise)

Nr. 9a

Vorhaltglied mit Verzögerung 1. Ordnung (phasenanhebend; Lead-Glied)

VHT₁-Glied

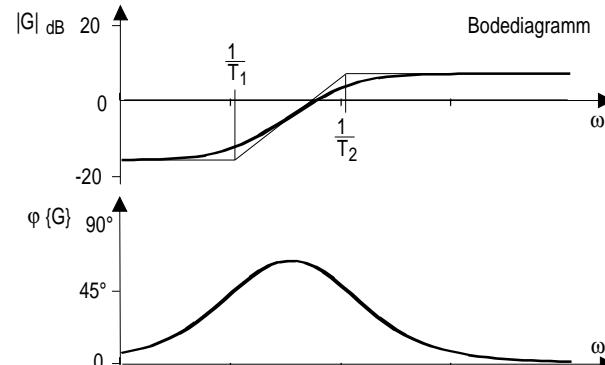
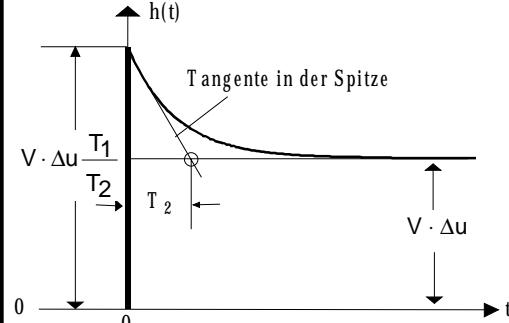
Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V \cdot (1 + sT_1)}{1 + sT_2} ; \quad T_1 > T_2 \quad (1.4.26)$$

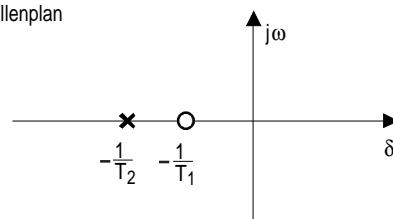
Sprungantwort

$$h(t) = V \cdot \left(1 + \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \cdot \Delta u \quad (1.4.27)$$

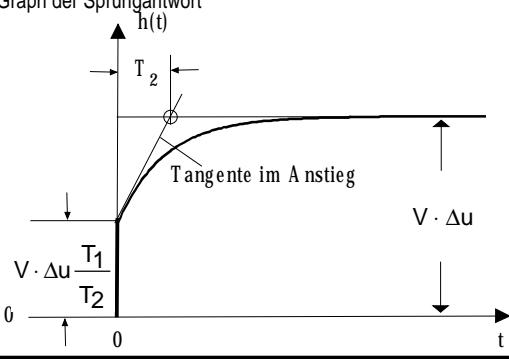
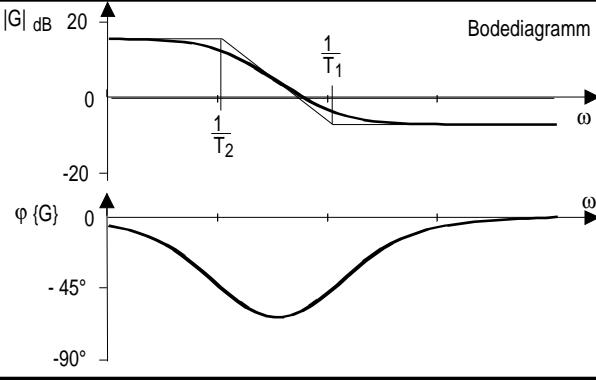
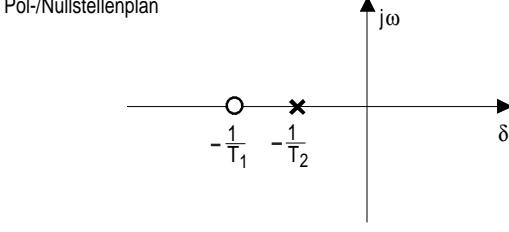
Graph der Sprungantwort

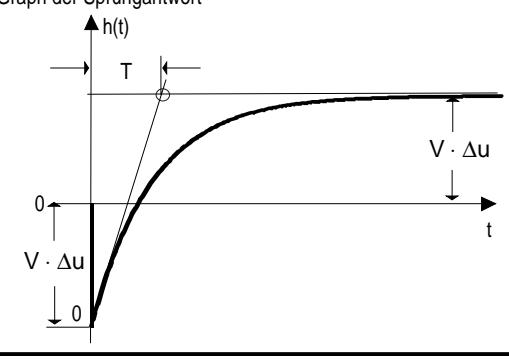
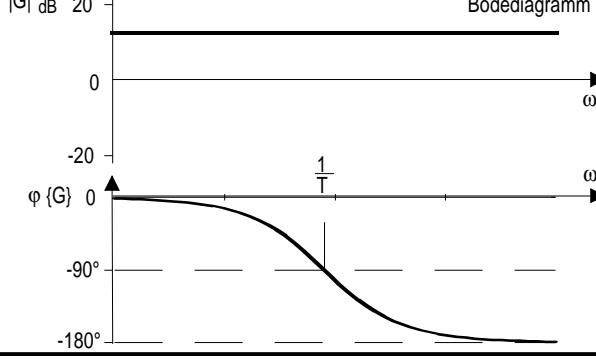
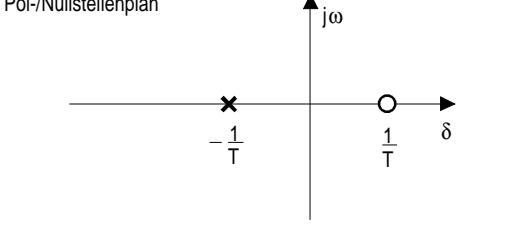


Pol/Nullstellenplan



- Beispiele
- Sprungantwortverhalten eines Tachogenerators
 - unabgeglichen Teiler-Tastkopf eines Oszilloskops
 - Systembeeinflussungsglied (Lead-Regler)

Nr. 9b	Vorhalt mit Verzögerung 1. Ordnung (phasenabsenkend, Lag-Glied)	VHT ₁ -Glied
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V \cdot (1 + sT_1)}{1 + sT_2} ; \quad T_1 < T_2$	(1.4.28)
Sprungantwort	$h(t) = V \cdot (1 + (\frac{T_1}{T_2} - 1) e^{-\frac{t}{T_2}}) \cdot \Delta u$	(1.4.29)
Graph der Sprungantwort 	Bodediagramm 	
Pol/Nullstellenplan 	Beispiele	<ul style="list-style-type: none"> Systembeeinflussungsglied (Lag-Regler) unabgeglichen Teiler-Tastkopf eines Oszilloskops

Nr. 10a	Allpaß 1. Ordnung	
Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V(1 - sT)}{1 + sT}$	(1.4.30)
Sprungantwort	$h(t) = V \cdot (1 - 2 e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \Delta u$	(1.4.31)
Graph der Sprungantwort 	Bodediagramm 	
Pol/Nullstellenplan 	Beispiele	<ul style="list-style-type: none"> abgeglichene Brückenschaltung (z.B. RC-Brücke)

Nr. 10b

Allpaßähnliches Übertragungsglied 1. Ordnung

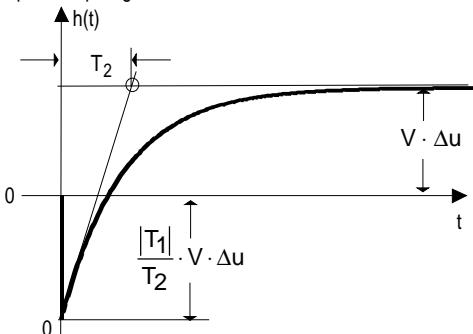
Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V(1 - sT_1)}{1 + sT_2} \quad (1.4.32)$$

Sprungantwort

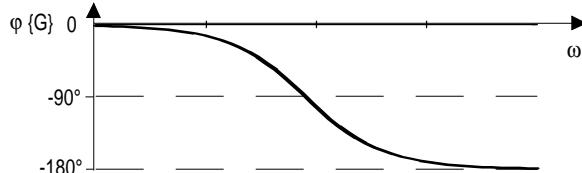
$$h(t) = V \cdot (1 - \frac{T_1 + T_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}) \cdot \Delta u \quad (1.4.33)$$

Graph der Sprungantwort

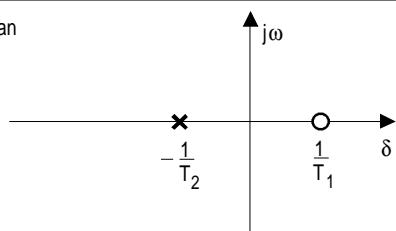


Betrag verläuft wie
Lead-Glied bei $|T_1| > |T_2|$
Lag-Glied bei $|T_1| < |T_2|$

Bodediagramm



Pol/Nullstellenplan



Beispiele

- nicht vollständig abgeglichene RC-Brücke
- Wasserturbinenleistung in Folge von Druckstoßverhalten bei Ventilöffnungsänderungen /15/

Nr. 11

Totzeitglied

 T_t -Glied

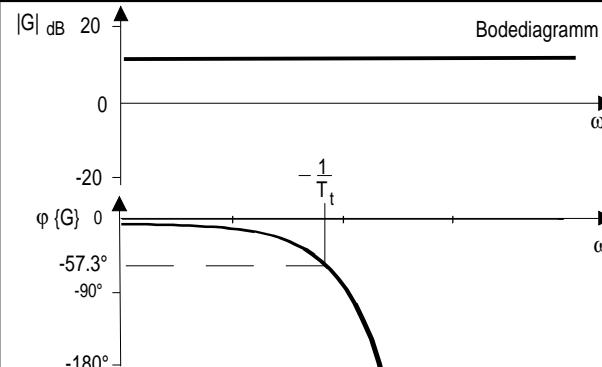
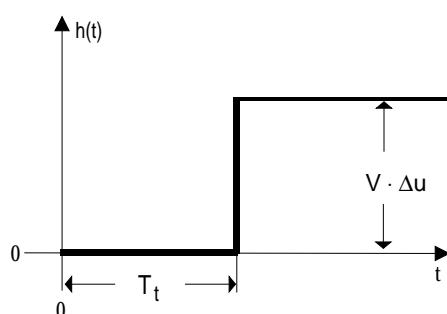
Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = V \cdot e^{-sT_t} \quad (1.4.34)$$

Sprungantwort

$$h(t) = V \cdot (t - T_t) \cdot \Delta u \quad (1.4.35)$$

Graph der Sprungantwort



Pol/Nullstellenplan

Keine Pole und Nullstellen

Beispiele

- Massen- und Energietransportprozesse
 - Gurtbandförderer
 - Wärmetransport (meist gekoppelt mit PT_n -Verhalten)
- elektronische Verzögerungsleitungen

2 Grundlagen der Systemtheorie linearer zeitdiskreter Übertragungssysteme

Nachdem wir uns im ersten Kapitel mit linearen kontinuierlichen Übertragungssystemen auseinandergesetzt haben, wollen wir uns jetzt einer zweiten wichtigen Gruppe linearer Systeme zuwenden, zeitdiskreten Übertragungsgliedern.

In Kapitel 1.1.2.1 hatten wir sie im Rahmen der Beschreibung der Eigenschaften von Übertragungssystemen dadurch charakterisiert, daß ihre Eingangssignale nur zu diskreten Zeitpunkten auftreten und nach der Verarbeitung innerhalb des Systems wiederum nur zu diskreten Zeitpunkten ausgegeben werden (vergleiche Bild 1.1.5).

Ein typisches Beispiel eines zeitdiskreten Systems ist ein Radargerät zur Positionsbestimmung eines fliegenden Objektes. Die Positionsänderung kann nur zu diskreten Zeitpunkten festgestellt werden, nämlich immer nur nach einer ganzen Drehung der Radarantenne. Auch viele Analysegeräte, z.B. Spektrometer arbeiten nicht kontinuierlich, da zwischen Probenentnahme, Analyse und Ergebnisausgabe eine endliche Zeit verstreicht.

Das aus technischen Gesichtspunkten wichtigste zeitdiskret arbeitende Übertragungssystem ist jedoch der Digitalrechner.

Diese Tatsache hat ihren Grund darin, daß sich in der modernen Technik digitale Methoden zunehmend durchsetzen, z.B. die digitale Signalverarbeitung in der Audio- und in der Videotechnik oder die digitale Regelungstechnik mittels Speicher-Programmierbaren-Steuerungen und eingebetteten Mikrocomputersystemen. Auch moderne Simulationsysteme, z.B. das Programm P-Spice zur Simulation elektronischer Schaltungen, laufen auf Digitalrechnern.

Der ständig fortschreitende Einsatz der Digitaltechnik bei der Signal- und Systembeeinflussung hat verschiedene Gründe. Einerseits entfallen alle Drift- und Parameterabweichungs-Probleme der analogen Schaltungstechnik, zum anderen bestehen die Beeinflussungsmechanismen aus programmierten Algorithmen, die sich leichter wechselnden Problemstellungen anpassen lassen. Moderne Methoden der Regelungstechnik, z.B. sogenannte adaptive Regler, die sich selbsttätig ändernden Umgebungsbedingungen anpassen können, sind nur mittels Digitaltechnik mit erträglichem Aufwand realisierbar.

Weiterhin sind die zur Signalverarbeitung und Regelung eingesetzten Digitalrechner optimal zur Prozeßvisualisierung und -Sicherung sowie zur Datenfernübertragung bis hin zur Realisierung von CAM- (Computer Aided Manufacturing) und CIM-Projekten (Computer Integrated Manufacturing) einsetzbar

Die systemtheoretische Problematik zeitdiskreter Übertragungssysteme liegt erstens darin, daß sie nicht mehr mit den Methoden und Verfahren für kontinuierliche Systeme mathematisch modelliert werden können. Zweitens werden häufig kontinuierliche Systeme

mit zeitdiskreten Systemen beeinflußt. Für diesen Fall muß eine gemeinsame Systembeschreibungsmöglichkeit gefunden werden.

Zu diesem Zweck arbeiten wir in den folgenden Kapiteln zunächst noch einmal den Unterschied zwischen zeitdiskreten und kontinuierlichen Signalen und Systemen heraus, um dann zu zeigen, wie sich gemischte Systeme beschreiben lassen.

2.1 Kontinuierliche und zeitdiskrete Signale und Systeme

Die meisten technischen Übertragungssysteme verarbeiten kontinuierliche Eingangssignale und geben auch kontinuierliche Ausgangssignale aus.

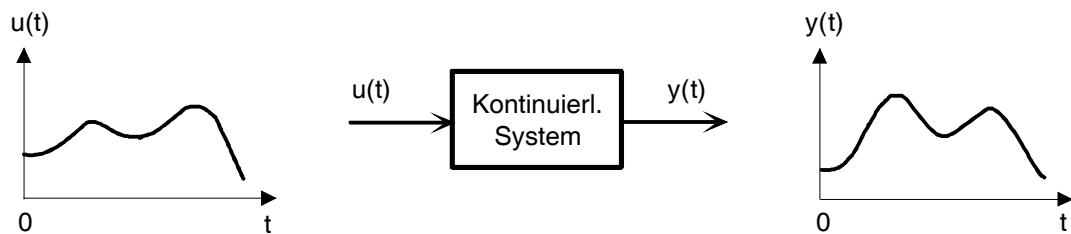


Bild 2.1.1 Ein kontinuierliches Übertragungssystem mit kontinuierlichen Eingangs- und Ausgangssignalen

Das heißt, in den Signalen ist der Informationsparameter Amplitude zu jedem Zeitpunkt t vorhanden und das System nimmt zu jedem Zeitpunkt t eine Amplitudeninformation auf, verarbeitet sie kontinuierlich (die inneren Zustandsgrößen sind auch zu jedem Zeitpunkt vorhanden) und gibt sie kontinuierlich über der Zeit wieder aus.

Sieht man einmal davon ab, daß ein Digitalrechner schon auf Grund der Darreichungsform keine kontinuierlichen Signale verarbeiten kann, ist er darüber hinaus auf Grund seiner endlichen Rechenzeit nicht in der Lage, Eingangssignale zu jedem Zeitpunkt t aufzunehmen, zu verarbeiten und wieder auszugeben.

Seine Eingangssignale können nur Folgen von einzelnen diskreten Amplituden (die natürlich noch in Zahlenwerte gewandelt werden müssen) zu diskreten aufeinanderfolgenden Zeitpunkten sein. Jeder einzelne Zahlenwert wird nach einem bestimmten Algorithmus verarbeitet und wieder als Zahlenwert ausgegeben.

Nennt man den Zeitraum zwischen den Folgewerten Abtastzeit T (die Begriffsbildung wird später erläutert) können die Eingangs- und Ausgangssignale wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} u(kT) &= \{u(0), u(T), u(2T), u(3T), \dots, u(kT), \dots\}; \\ y(kT) &= \{y(0), y(T), y(2T), y(3T), \dots, y(kT), \dots\}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

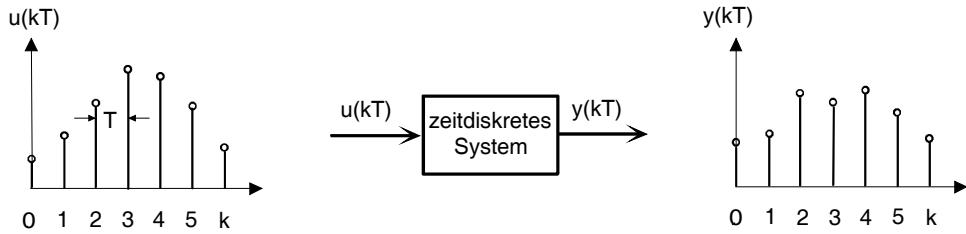


Bild 2.1.2 Ein zeitdiskretes System mit zeitdiskreten Ein- und Ausgangssignalen

Interpretiert man Zahlen- oder Amplitudenfolgen als Signale, bezeichnet man sie, da sie nur zu diskreten Zeitpunkten auftreten, als zeitdiskrete Signale und das sie verarbeitende System als zeitdiskretes System.

Ein solches zeitdiskretes "System" haben wir schon in Kapitel 1.2.1.4 in Form des Algorithmus (1.2.50) zur numerischen Berechnung von Systemantworten von Übertragungssystemen kennengelernt. Der Algorithmus berechnete zu einer Eingangszahlenfolge $u(k\Delta t)$ die dazugehörige Ausgangsfolge $y(k\Delta t)$. (Das dort benutzte Δt ist identisch mit der neu eingeführten Abtastzeit T).

Die zeitliche Diskretisierung des Rechenvorganges war dadurch möglich geworden, daß die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt wurden

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x(t)}{T} = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} . \quad (2.1.2)$$

(dabei ist es egal, ob $\Delta x(t)$ aus $x(kT) - x((k-1)T)$ oder $x((k+1)T) - x(kT)$ berechnet wird).

Ein Verzögerungsglied 1. Ordnung (1.4.3)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V}{1 + sT_1} = \frac{V/T_1}{s + \frac{1}{T_1}} , \quad (2.1.3)$$

das mit dem Transformationsalgorithmus (1.2.155) in folgende Differentialgleichung gewandelt wird

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{T_1} x(t) + \frac{V}{T_1} u(t) \\ y(t) &= x(t) \\ \Rightarrow \dot{y}(t) &= -\frac{1}{T_1} y(t) + \frac{V}{T_1} u(t) , \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

kann mit dem Ansatz (2.1.2) in eine sog. Differenzengleichung gewandelt werden

$$\frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} = -\frac{1}{T_1} y(kT) + \frac{V}{T_1} u(kT). \quad (2.1.5)$$

Stellen wir diese Gleichung zur Ausgangsgröße um

$$y(kT) = \frac{T_1}{T_1 + T} y((k-1)T) + \frac{VT}{T_1 + T} u(kT), \quad (2.1.6)$$

erhält man das mathematische Zeitbereichsmodell eines zeitdiskreten Verzögerungsgliedes in Form einer sog. rekursiven Differenzengleichung.

Mit Hilfe dieser Differenzengleichung kann die Ausgangsfolge $y(kT)$ aus einer beliebigen Eingangsfolge $u(kT)$ berechnet werden. Neben $u(kT)$ und $y(kT)$ sowie den festen Systemparametern $T_1/(T_1 + T)$ und $VT/(T_1 + T)$ tritt in (2.1.6) noch der Term $y((k-1)T)$ auf. $y((k-1)T)$ ist der Ausgangswert, der einen Abtastschritt vor dem gerade aktuellen berechnet wurde. Durch diese Einbeziehung vorangehend berechneter Ausgangswerte wird die Differenzengleichung rekursiv.

Jedes lineare zeitdiskrete System kann im Zeitbereich durch eine rekursive Differenzengleichung beschrieben werden. In ihrer allgemeinen Form müssen noch weiter zurückliegende Ausgangswerte und auch zurückliegende Eingangsfolgewerte berücksichtigt werden (zur Erhöhung der Übersichtlichkeit lassen wir im Folgenden das T in den Signalargumenten weg):

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=1}^n -\alpha_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m \beta_i u(k-i) \\ &= -\alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2) - \dots - \alpha_n y(k-n) + \dots \\ &\quad \dots + \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_m u(k-m). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Zur Berechnung einer Ausgangsfolge auf eine Eingangsfolge werden

$$u(k-i) = y(k-i) = 0, \text{ wenn } (k-i) < 0 \quad (2.1.8)$$

gesetzt, d.h. die Signale verschwinden, wenn ihre Argumente kleiner Null sind. Wie bei einer Differentialgleichung können auch bei einer Differenzengleichung die Anfangswerte bei $(k-i) = 0$ berücksichtigt werden.

Beispiel 2.1.1: Berechne die Ausgangsfolge des zeitdiskreten Verzögerungsgliedes (2.1.6) auf eine Einheitssprungfolge am Eingang

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0, \end{cases}$$

wenn $T_1 = 1$ sek; $V = 1$ und $T = 0,5$ sek gewählt werden. Die Ausgangssprungfolge soll über einen Zeitraum $t_E = 3$ sek dargestellt werden.

Zur Berechnung der Ausgangsfolge setzen wir die vorgegebenen Systemparameterwerte in (2.1.6) ein

$$y(k) = 0,667 \cdot y(k-1) + 0,333 \cdot u(k) \quad (2.1.9)$$

und berechnen für $k = 0,1,2, \dots$ bis $k = t_E/T = 3/0,5 = 6$ die Ausgangsfolgewerte:

k	$y(k)$	$=$	$0,667 \cdot y(k-1)$	$+$	$0,333 \cdot u(k)$	
0	$y(0)$	$=$	$\underbrace{0,667 \cdot y(-1)}_0$	$+$	$\underbrace{0,333 \cdot u(0)}_{0,333}$	$= 0,333$
1	$y(1)$	$=$	$\underbrace{0,667 \cdot y(0)}_{0,667 \cdot 0,333}$	$+$	$\underbrace{0,333 \cdot u(1)}_{0,333}$	$= 0,555$
2	$y(2)$	$=$	$\underbrace{0,667 \cdot y(1)}_{0,667 \cdot 0,555}$	$+$	$\underbrace{0,333 \cdot u(2)}_{0,333}$	$= 0,703$
3	$y(3)$	$=$	$\underbrace{0,667 \cdot y(2)}_{0,667 \cdot 0,703}$	$+$	$\underbrace{0,333 \cdot u(3)}_{0,333}$	$= 0,802$
4	$y(4)$	$=$	$\underbrace{0,667 \cdot y(3)}_{0,667 \cdot 0,802}$	$+$	$\underbrace{0,333 \cdot u(4)}_{0,333}$	$= 0,868$
5	$y(5)$	$=$	$\underbrace{0,667 \cdot y(4)}_{0,667 \cdot 0,868}$	$+$	$\underbrace{0,333 \cdot u(5)}_{0,333}$	$= 0,912$
6	$y(6)$	$=$	$\underbrace{0,667 \cdot y(5)}_{0,667 \cdot 0,912}$	$+$	$\underbrace{0,333 \cdot u(6)}_{0,333}$	$= 0,943$

Die grafische Darstellung der berechneten Ausgangsfolge führt auf folgendes Bild:

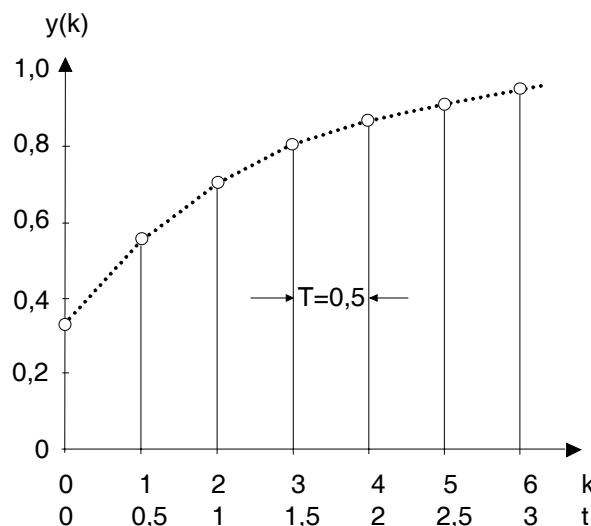


Bild 2.1.3 Sprungantwortfolge eines zeitdiskreten Verzögerungsgliedes

Eine Zeitskalierung der Abszisse ist leicht über die Beziehung

$$t = k \cdot T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.10)$$

herstellbar. Wie man deutlich erkennt, ist das berechnete zeitdiskrete Modell (2.1.9) eine sehr schlechte Approximation seines kontinuierlichen Vorbildes (2.1.3) bzw. (2.1.4). Dies liegt an der zu groß gewählten Abtastzeit T und in der groben Näherung (2.1.2). Auf diese Zusammenhänge wollen wir jedoch erst später eingehen.

Dieses Kapitel sollte nur deutlich machen, daß wesentliche Unterschiede zwischen dem Wirkungsverhalten und der Systembeschreibung eines zeitdiskreten Systems (2.1.7) und dem Verhalten und der Beschreibung eines kontinuierlichen Systems (1.2.4) im Zeitbereich bestehen. Welchen praktischen Sinn eine solche zeitdiskrete Systembeschreibung hat, ist dabei noch nicht klar geworden. Auch die Beantwortung dieser Frage wird im Laufe des Kapitels 2 erfolgen.

2.2 Zeitdiskrete Systeme mit kontinuierlichen Eingangssignalen

Nachdem wir im vorangehenden Kapitel den Unterschied zwischen kontinuierlichen Signalen an kontinuierlichen Systemen und zeitdiskreten Signalen an zeitdiskreten Systemen herausgearbeitet haben, wollen wir uns in diesem Kapitel mit den Problemen auseinandersetzen, die entstehen, wenn ein zeitdiskretes System (z.B. ein Digitalrechner mit einem implementierten Algorithmus (2.1.7)) kontinuierliche Eingangssignale verarbeiten soll.

Wie wir im Lehrgebiet "Regelungstechnik" noch sehen werden, tritt eine solche Signal-/System-Kombination häufig in Regelkreisen auf, wenn ein kontinuierliches Übertragungssystem von einem Digitalrechner beeinflußt werden soll.

Auch wenn nur ein kontinuierliches Signal (z.B. ein Spannungsverlauf) auf einen Digitalrechner-Bildschirm angezeigt werden soll, tritt das Problem auf, daß kontinuierliche Signale Eingangsgrößen zeitdiskreter Systeme sind.

In allen Fällen müssen die kontinuierlichen Signale in zeitdiskrete Signale gewandelt werden. Dies geschieht mit sogenannten Abtastgliedern (vergleiche Bild 2.2.1), die zu diskreten Zeitpunkten $k \cdot T; k = 0, 1, 2, \dots$ das kontinuierliche Signal $e(t)$ abtasten und damit eine Folge diskreter Amplitudenwerte $e^*(kT)$ herstellen.

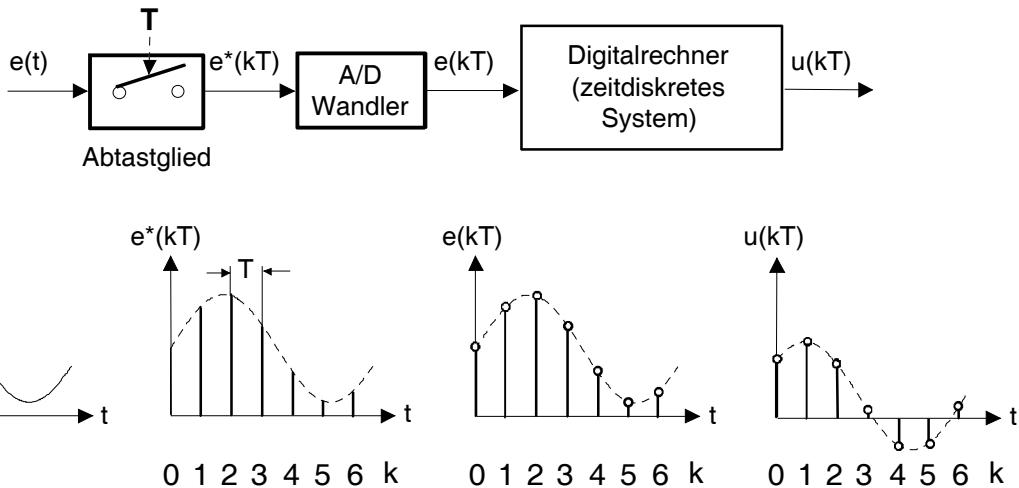


Bild 2.2.1 Ein zeitdiskretes System mit kontinuierlichen Eingangssignal

Signalabtaster werden industriell z. B. unter dem Namen "sample and hold-Schaltkreise" angeboten. Um diese Amplitudenfolge in einem Digitalrechner verarbeiten zu können, muß jeder diskrete Amplitudenwert in eine Zahl $e(kT)$ gewandelt werden. Dies geschieht mittels eines Analog-Digital-Wandlers (A/D-Wandler). An dieser Stelle erkennt man, warum man die zwischen zwei Abtastzeitpunkten verstrichende Zeit Abtastzeit T nennt.

Einige weitere Aspekte dieses Abtastvorganges sind noch erwähnungsbedürftig:

- Nach der Zeitquantisierung des Eingangssignals durch das Abtastglied erfolgt noch eine Amplitudenquantisierung durch den A/D-Wandler. Kann $e^*(t)$ beispielhaft Amplitudenwerte von 0 – 10V annehmen und hat der A/D-Wandler 8 bit Auflösung, können die Eingangsamplituden $e^*(kT)$ in maximal $2^8 = 256$ unterscheidbare Werte gewandelt werden. Das heißt, die Signalamplitude $e(kT)$ besteht aus diskreten Amplitudenquanten von $10V/256 \approx 40mV$. Diese Amplitudenquantisierung kann durch geeignete Wahl der Bit-Breite des A/D-Wandlers sehr klein gehalten werden und beeinflußt das Systemverhalten so gering, daß sie vernachlässigt werden kann.
- Technologisch ist zwischen dem Abtastglied und dem A/D-Wandler noch ein Halteglied erforderlich, das sicherstellt, daß während des Wandlungsvorganges im A/D-Wandler sein Eingangssignal konstant und damit die Wandlung fehlerfrei bleibt. Diese Haltefunktion ist systemtheoretisch auch ohne Bedeutung. Sie darf nicht mit dem Haltevorgang zeitdiskreter Signale vor kontinuierlichen Systemen (siehe Kapitel 2.3) verwechselt werden.

2.3 Kontinuierliche Systeme mit zeitdiskreten Eingangssignalen

Wenn ein zeitdiskretes System steuernd, d.h. beeinflussend auf ein kontinuierliches System wirken soll, z.B. bei der Weg–Steuerung eines Roboterarms durch einen Digitalrechner, wirkt eine zeitdiskrete Amplitudenfolge auf ein kontinuierliches System. In der praktischen Realisierung geschieht dies allerdings nie direkt. In der überwiegenden Mehrzahl aller Fälle wird der aktuelle ausgegebene Amplitudenwert solange gehalten, bis nach Ablauf der Abtastzeit T ein neuer Amplitudenwert bereitsteht. Ein kontinuierliches System wird also von einem zeitdiskreten Systems mittels "Treppenfunktionen" angesteuert. Technologisch wird dies mit Hilfe eines Digital–Analog–Wandlers (D/A–Wandler) realisiert. Ein ihm vom Digitalrechner übergebener Zahlenwert wird in eine analoge Amplitude gewandelt, die bis zur Übergabe des nächsten Zahlenwertes konstant gehalten wird.

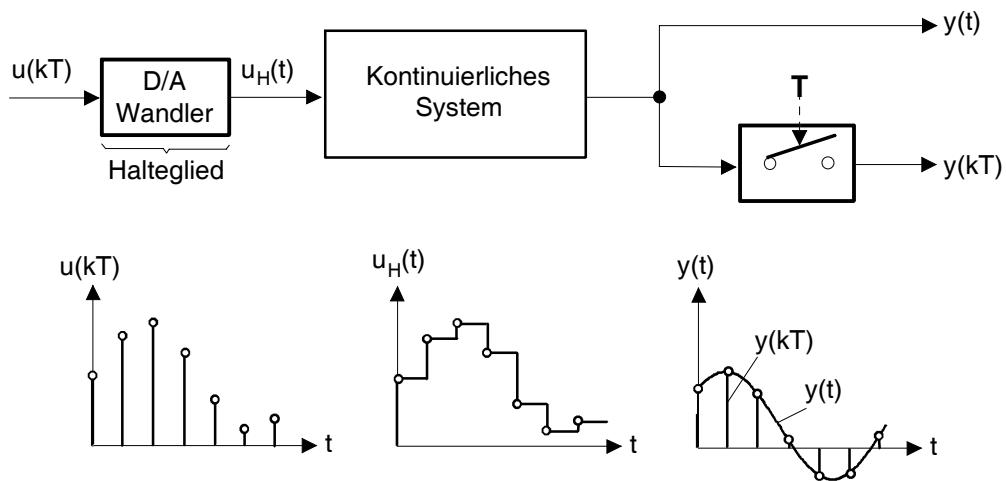


Bild 2.3.1 Ein kontinuierliches System mit zeitdiskretem Eingangssignal

Da dieser Haltevorgang von Abtastsignalen einen wesentlichen Einfluß auf das dynamische Verhalten von Übertragungssystemen hat, soll die Treppenfunktion $u_H(t)$ mit dem Ziel, eine analytische Beschreibung des Haltegliedes zu finden, untersucht werden.

Wendet man die Beziehungen (1.2.1) und (1.2.2) zur Beschreibung einer Sprungfunktion und einer verzögerten Sprungfunktion auf die folgende Treppenfunktion an,

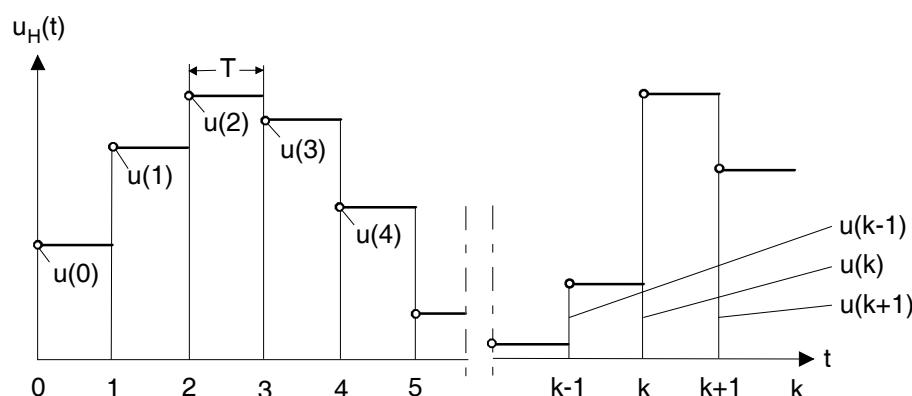


Bild 2.3.2 Treppenförmiges Ausgangssignal eines Haltegliedes

erhält man folgenden Ausdruck (vergleiche Beispiel 1.2.1):

$$\begin{aligned}
 u_H(t) &= u(0) \cdot \sigma(t) + [(u(1) - u(0)) \cdot \sigma(t-T)] + \dots \\
 &\quad \dots + [(u(2) - u(1)) \cdot \sigma(t-2T)] + [(u(3) - u(2)) \cdot \sigma(t-3T)] + \dots \\
 &= u(0) [\sigma(t) - \sigma(t-T)] + u(1) [\sigma(t-T) - \sigma(t-2T)] + \dots \\
 &\quad \dots + u(2) [\sigma(t-2T) - \sigma(t-3T)] + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) [\sigma(t-kT) - \sigma(t-(k+1)T)]. \tag{2.3.1}
 \end{aligned}$$

Obwohl dieser Ausdruck die Treppenfunktion recht kompakt beschreibt, lässt er noch keinen Rückschluß auf die analytische Beschreibung des Haltegliedes zu. Transformiert man jedoch (2.3.1) mit Hilfe der Laplace-Korrespondenz

$$\mathcal{L}\{\sigma(t-T)\} = \frac{1}{s} \cdot e^{-sT} \tag{2.3.2}$$

(Korrespondenzen Nr. 2 und 14 aus Tabelle 1.2.5) in den Laplace-Bereich

$$U_H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \left[\frac{1}{s} e^{-skT} - \frac{1}{s} e^{-s(k+1)T} \right] \tag{2.3.3}$$

und formt den Ausdruck wie folgt um

$$\begin{aligned}
 U_H(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \left[\frac{1}{s} e^{-skT} - \frac{1}{s} e^{-skT} \cdot e^{-sT} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \left[\frac{1}{s} e^{-skT} (1 - e^{-sT}) \right] \\
 &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(k) e^{-skT}, \tag{2.3.4}
 \end{aligned}$$

erkennt man (deutlich allerdings deutlich erst dann, wenn man sich intensiv mit der Materie beschäftigt hat), daß der erste Term

$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} = G_H(s) \tag{2.3.5}$$

das Halteglied und der zweite Term

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(k) e^{-skT} \tag{2.3.6}$$

die Abtastfolge am Eingang des Haltegliedes im Laplace–Bereich beschreiben. Mit Hilfe der Beziehung (2.3.5) wird es uns später gelingen, eine gemeinsame Systembeschreibung für verkoppelte zeitdiskrete und kontinuierliche Systeme abzuleiten.

Beschäftigen wir uns jedoch zunächst mit dem Ausdruck (2.3.6). Er beschreibt durch eine unendliche Summe sehr unhandlich eine Abtastfolge im Laplace–Bereich. Kontinuierliche Funktionen konnten im Laplace–Bereich durch übersichtliche geschlossene Ausdrücke dargestellt werden. Offensichtlich ist der Laplace–Bereich daher nicht als Systembeschreibungshilfsmittel für zeitdiskrete Systeme geeignet. Wir führen deshalb im nächsten Kapitel einen neuen Bildbereich, der sich gut zur Beschreibung zeitdiskreter Signale und Systeme eignet, den sogenannten z–Bereich, ein.

2.4 Die z–Transformation

Substituiert man in der Beschreibung einer Abtastfolge im Laplace–Bereich (2.3.6) den Ausdruck e^{sT} durch z , erhält man eine Potenzreihe in z

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(k) e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = u(0) + u(1) \cdot z^{-1} + u(2) \cdot z^{-2} + \dots . \quad (2.4.1)$$

Falls diese Potenzreihe konvergiert (und für die von uns später betrachteten Fälle können wir immer Konvergenz voraussetzen), kann man für alle wichtigen Wertefolgen $u(k)$ eine geschlossene Summe dieser Potenzreihe angeben, so daß die obige Beziehung (2.4.1) als Vorschrift zur Transformation zeitdiskreter Signale in einen Bildbereich (in diesem Falle den sogenannten z–Bereich) herangezogen werden kann:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}; \quad z = e^{sT} . \quad (2.4.2)$$

Diese Transformationsvorschrift weist, ähnlich wie die Beziehung (1.2.54) zur Laplace–Transformation einer Wertefolge $f(k)$ eine korrespondierende Funktion $F(z)$ im z–Bereich zu. Der Zuordnungsvorgang, den wir hier symbolisch mit

$$F(z) = \mathcal{Z} \{ f(k) \} \quad (2.4.3)$$

abkürzen wollen, erfolgt durch Berechnung der Transformationsvorschrift (2.4.2). Dazu wird an der Stelle $f(k)$ die zu transformierende Wertefolge eingesetzt und der geschlossene Summenausdruck der unendlichen Summe gebildet. Für einfache Wertefolgen kann

dazu die Beziehung zur Berechnung der Summe einer unendlichen geometrischen Reihe /10/

$$\sum_{k=0}^{\infty} p \left(z^{-1} \right)^k = \frac{p}{1 - z^{-1}} \quad (2.4.4)$$

herangezogen werden. Wir zeigen den Transformationsvorgang an zwei einfachen Beispielen und greifen dann – ähnlich wie bei der Laplace–Transformation – auf schon abgeleitete Sätze und Korrespondenztabellen (Tabelle 2.4.1) zurück.

Beispiel 2.4.1: Berechnung von Korrespondenzen zur z–Transformation.

a) Berechne die z–Transformierte der Einheitssprungfolge

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

$$\mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \left(z^{-1} \right)^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \underline{\underline{\frac{z}{z - 1}}} .$$

↑

Beziehung (2.4.4)

b) Berechne die z–Transformierte der e–Funktion e^{ak} .

$$\mathcal{Z}\{e^{ak}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ak} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^a z^{-1} \right)^k = \frac{1}{1 - e^a z^{-1}} = \underline{\underline{\frac{z}{z - e^a}}} .$$

Kompliziertere Wertefolgen können mit Hilfe der in der Korrespondenztabelle angegebenen Sätze der z–Transformation und der Beziehung (2.4.4) in den z–Bereich transformiert werden.

Wie auch bei der Anwendung der Laplace–Transformation wird es notwendig sein, mit Hilfe der Korrespondenzen Rücktransformationen aus dem z–Bereich in den diskreten Zeitbereich vorzunehmen. Wir kürzen diese Operation symbolisch wie folgt ab:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(k) . \quad (2.4.5)$$

Wie bei der Laplace–Transformation werden korrespondierende Funktionen im z–Bereich groß und im Zeitbereich klein geschrieben.

Nr.	Zeitfunktion (Wertefolge) $f(k)$	Bildfunktion (z -Transformierte) $F(z)$	Name
1	$\sigma(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z - 1}$	Einheitssprungfolge
2	k	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	Anstiegsfolge
3	a^k	$\frac{z}{z - a}$	Potenzfolge
4	e^{-ak}	$\frac{z}{z - e^{-a}}$	e-Funktionsfolge
5	$\sin(ak)$	$\frac{z \cdot \sin a}{z^2 - 2z \cdot \cos a + 1}$	Sinus-funktionsfolge
6	$\cos(ak)$	$\frac{z \cdot (z - \cos a)}{z^2 - 2z \cdot \cos a + 1}$	Kosinus-funktionsfolge
7	$e^{-ak} \cdot \sin(bk)$	$\frac{z \cdot e^{-a} \cdot \sin b}{z^2 - 2z \cdot e^{-a} \cdot \cos b + e^{-2a}}$	abklingende Sinus-funktionsfolge
8	$e^{-ak} \cdot \cos(bk)$	$\frac{z \cdot (z - e^{-a} \cdot \cos b)}{z^2 - 2z \cdot e^{-a} \cdot \cos b + e^{-2a}}$	abklingende Kosinus-funktionsfolge
9	$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) + \dots + a_n f_n(k)$	$a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) + \dots + a_n F_n(z)$	Linearitätssatz
10	$f(k - n)$	$z^{-n} \cdot F(z)$	$n \geq 0$ Verschiebungssatz (nach rechts)
11	$\sum_{n=0}^k f_1(n) \cdot f_2(k-n)$	$F_1(z) \cdot F_2(z)$	Faltungssumme

12 $\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ Anfangswertsatz

13 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot F(z)$ Endwertsatz
(a, b: Konstanten)

Tabelle 2.4.1 Korrespondenzen und Sätze der z -Transformation

2.5 Mathematische Modelle zeitdiskreter Systeme

Nachdem wir uns vorangehend mit dem grundlegenden Eigenschaften zeitdiskreter Signale und Systeme auseinandergesetzt haben, wollen wir nun – ähnlich wie bei den kontinuierlichen Systemen – die mathematischen Modellierungsmöglichkeiten zeitdiskreter Systeme im Bild-(z -) Bereich, Zeitbereich und Frequenzbereich näher untersuchen.

2.5.1 Beschreibung zeitdiskreter Systeme im z-Bereich

In Kapitel 2.1 haben wir gezeigt, daß ein zeitdiskretes System durch eine rekursive Differenzengleichung (2.1.7) beschrieben wird

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=1}^n -\alpha_i \cdot y(k-i) + \sum_{i=0}^m \beta_i \cdot u(k-i) \\ &= -\alpha_1 \cdot y(k-1) - \alpha_2 \cdot y(k-2) - \cdots - \alpha_n \cdot y(k-n) + \cdots \\ &\quad \cdots + \beta_0 \cdot u(k) + \beta_1 \cdot u(k-1) + \cdots + \beta_m \cdot u(k-m). \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Wendet man auf diese Gleichung den Linearitäts- und Verschiebungssatz (Korrespondenzen Nr. 9 und 10 aus Tabelle 2.4.1) an

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(k)\} &= Y(z) \cdot z^{-0} = Y(z) \\ \mathcal{Z}\{-\alpha_1 \cdot y(k-1)\} &= -\alpha_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} \\ \mathcal{Z}\{-\alpha_2 \cdot y(k-2)\} &= -\alpha_2 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} \\ &\vdots \\ \mathcal{Z}\{\beta_0 \cdot u(k)\} &= \beta_0 \cdot U(z) \\ \mathcal{Z}\{\beta_1 \cdot u(k-1)\} &= \beta_1 \cdot U(z) \cdot z^{-1} \\ \mathcal{Z}\{\beta_2 \cdot u(k-2)\} &= \beta_2 \cdot U(z) \cdot z^{-2} \\ &\vdots \end{aligned}, \quad (2.5.2)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} Y(z) &= -\alpha_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} - \alpha_2 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} - \cdots - \alpha_n \cdot Y(z) \cdot z^{-n} + \cdots \\ &\quad \cdots + \beta_0 \cdot U(z) + \beta_1 \cdot U(z) \cdot z^{-1} + \cdots + \beta_m \cdot U(z) \cdot z^{-m}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Bringt man nun alle Glieder mit $Y(z)$ auf die linke und alle Glieder mit $U(z)$ auf die rechte Gleichungsseite und klammert sie aus

$$Y(z) \cdot (1 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \alpha_2 \cdot z^{-2} + \cdots + \alpha_n \cdot z^{-n}) = U(z) \cdot (\beta_0 + \beta_1 \cdot z^{-1} + \cdots + \beta_m \cdot z^{-m}), \quad (2.5.4)$$

kann man den Quotienten $Y(z)/U(z)$ bilden, d.h. das Verhältnis zwischen Ausgangssignal und Eingangssignal im z-Bereich – die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ – bilden:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot z^{-1} + \beta_2 \cdot z^{-2} + \cdots + \beta_m \cdot z^{-m}}{1 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \alpha_2 \cdot z^{-2} + \cdots + \alpha_n \cdot z^{-n}}. \quad (2.5.5)$$

(Auch hier wird wie im kontinuierlichen Fall vorausgesetzt, daß die Anfangszustände von (2.5.1) Null sind).

Im kontinuierlichen Fall hatten wir die Übertragungsfunktion in vielerlei Hinsicht umgeformt und analysiert (z.B. Bildung der V-Normalform zur Herstellung eines praktischen Bezugs zwischen realem Übertragungssystem und Übertragungsfunktion). Da dies – aus später einzusehenden Gründen – bei zeitdiskreten Systemen nicht im Vordergrund steht und darüberhinaus viele Analysemethoden direkt aus dem Kontinuierlichen übernommen werden können, sollen nur die wichtigsten Eigenschaften von z–Übertragungsfunktionen im nächsten Kapitel beschrieben werden.

2.5.1.1 Eigenschaften der z–Übertragungsfunktion

- Wenn man die z–Übertragungsfunktion (2.5.5) betrachtet, stellt man fest, daß sie eine große Ähnlichkeit mit der Polynomform der Übertragungsfunktion (1.2.62) eines kontinuierlichen Systems hat. Lediglich die Tatsache, daß die z–Übertragungsfunktion negative Potenzen von z hat, fällt auf. Jede z–Übertragungsfunktion mit negativen Potenzen von z läßt sich jedoch in eine Form mit positiven Potenzen wandeln, indem Zähler und Nenner mit der größten vorkommenden inversen z -Potenz multipliziert werden.

Beispiel 2.5.1 Gegeben ist die folgende z–Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{2z^{-1} + 3}{z^{-3} + 2z^{-2} + 4z^{-1} + 12}. \quad (2.5.6)$$

Berechne die äquivalente Form mit positiven Potenzen von z .

Die höchste vorkommende z -Potenz ist z^{-3} , so daß Zähler und Nenner mit $1/z^{-3} = z^3$ multipliziert werden müssen

$$G(z) = \frac{2z^2 + 3z^3}{1 + 2z + 4z^2 + 12z^3}. \quad (2.5.7)$$

- z–Übertragungsfunktionen werden – aus später auch noch einzusehenden Gründen – primär in Polynomschreibweise mit negativen Potenzen von z dargestellt. Eine Darstellung in Produkt- bzw. Partialbruchschreibweise wird i.a. nur dann vorgenommen, wenn zeitdiskrete Systembeeinflussungssysteme in Reihen- oder Parallelschaltung realisiert werden sollen (vergleiche Beispiel 1.2.27). Dies kann z.B. dann interessant

sein, wenn ein zeitdiskreter Algorithmus zur Durchsatzerhöhung auf zeitlich parallel arbeitenden Rechnern implementiert werden soll. Die faktorisierte V-Normalform ist in der Form (1.2.68) nicht für z-Übertragungsfunktionen definiert.

Alle in Kapitel 1.2.2.2 aufgeführten Verfahren zur Faktorisierung und Partialbruchzerlegung von Übertragungsfunktionen sowie die Methoden zur Berechnung gekoppelter Übertragungssysteme (Kapitel 1.2.6) können auch auf z-Übertragungsfunktionen angewendet werden.

- Zur Feststellung, welches Globalverhalten eine z-Übertragungsfunktion hat, muß geprüft werden, ob ein Integrator im System vorhanden ist oder nicht. Um dies prüfen zu können, müssen wir zunächst wissen wie die Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten Integrators lautet.

Ein reiner zeitdiskreter Integrator muß auf eine Einheitssprungfolge $u(k) = \sigma(k)$ mit einer den Abtastzeitpunkten k proportionalen Ausgangssignalfolge $y(k) = k$ antworten.

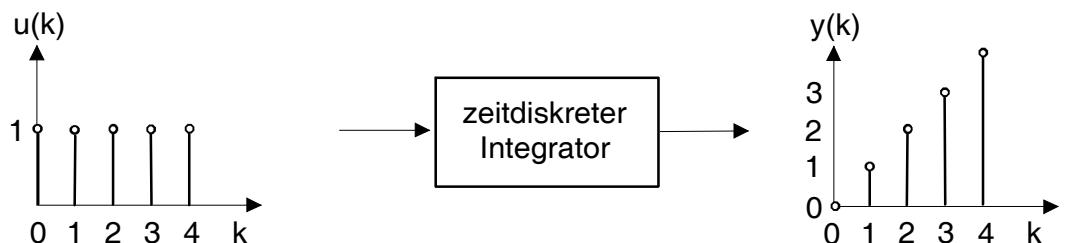


Bild 2.5.1 Sprungantwortfolge eines zeitdiskreten Integrators

Transformiert man Eingangs- und Ausgangssignal in den z-Bereich

$$U(z) = \mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z-1}; \quad Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (2.5.8)$$

und bildet den Quotienten $Y(z)/U(z)$ erhält man die Übertragungsfunktion des Integrierers:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{z}{(z-1)^2}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{1}{z-1}. \quad (2.5.9)$$

Daraus können wir schließen, daß ein Übertragungssystem global integral wirkt, wenn die Übertragungsfunktion einen Pol bei $z-1 = 0 \Rightarrow z = 1$ hat. Liegt kein Pol bei $z = 1$, so wirkt das System global proportional.

Beispiel 2.5.2: Bestimme das Globalverhalten des folgenden Übertragungssystems:

$$G(z) = \frac{0,7}{z^2 - 0,8 \cdot z + 0,15} \quad (2.5.10)$$

Die Frage nach dem Globalverhalten wird durch Lösung des Nennerpolynoms beantwortet

$$\begin{aligned} z^2 - 0,8 \cdot z + 0,15 \\ z_{1,2} = 0,4 \pm \sqrt{0,16 - 0,15} = 0,4 \pm \sqrt{0,01} = 0,4 \pm 0,1 \\ z_1 = 0,3; \quad z_2 = 0,5. \end{aligned}$$

Es liegt keine Nullstelle bei $z = 1$, d.h. das System wirkt global proportional.

- Im kontinuierlichen Fall bezeichneten wir eine Übertragungsfunktion als realisierbar, wenn ihr Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad war. Das gleiche Kriterium gilt auch bei z -Übertragungsfunktionen, wenn sie mit positiven Potenzen von z geschrieben werden. Wesentlich anschaulicher lässt sich im Zeitbereich anhand der Differenzengleichung zeigen, ob die dazugehörige z -Übertragungsfunktion realisierbar ist. Entsteht aus der Übertragungsfunktion eine Differenzengleichung, bei der zur Berechnung eines Ausgangsfolgewertes zum Abtastzeitpunkt k ein zukünftiger Eingangs- oder Ausgangswert, d.h. von Abtastzeitpunkten ($k+n$); $n \geq 1$ benötigt wird, so ist die Übertragungsfunktion nicht realisierbar.

Man bezeichnet ein solches System auch als nicht kausal, weil die Wirkung (Ausgangssignal) vor der Ursache (Eingangssignal) auftreten müßte.

Beispiel 2.5.3: Ist die folgende Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot z^{-1}}{\alpha_1 \cdot z^{-1}} \quad (2.5.12)$$

realisierbar?

Formt man (2.5.12) nach positiven Potenzen von z um,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_0 z + \beta_1}{\alpha_1},$$

erkennt man, daß der Zählergrad (1) größer ist als der Nennergrad (0). Die Übertragungsfunktion ist also nicht realisierbar.

Da wir die zum Nachweis der fehlenden Kausalität notwendige Berechnung der

Differenzengleichung aus der z -Übertragungsfunktion erst in Kapitel 2.5.2 kennenlernen werden, zeigen wir diesen Nachweis erst in Beispiel 2.5.10.

2.5.1.2 Berechnung der z -Übertragungsfunktion kontinuierlicher Systeme

Wie wir in Kapitel 2.3 gesehen haben, kommt es häufig vor, daß gemischte Schaltungen von zeitdiskreten und kontinuierlichen Systemen vorliegen. Dies wird insbesondere dann auftreten, wenn kontinuierliche Systeme von zeitdiskreten Regeleinrichtungen (Digitalrechnern) beeinflußt werden sollen.

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, solche Mischsysteme ausschließlich mit zeitdiskreten Systemdarstellungen zu beschreiben. Zur Ableitung einer zeitdiskreten Systembeschreibung betrachten wir das Bild 2.3.1. Man kann die Anordnung als zeitdiskret auffassen (obwohl sich im Übertragungsweg ein kontinuierliches Übertragungssystem befindet), da das System mit einer Amplitudenfolge angesteuert wird und man ihm synchron zur Eingangsfolge über ein Abtastglied am Ausgang eine Amplitudenfolge $y(k)$ entnehmen kann.

Mit der Übertragungsfunktion des Haltegliedes (2.3.5) kann die Gesamtübertragungsfunktion – allerdings im s -Bereich – leicht hingeschrieben werden

$$G_H(s) \cdot G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot G(s) = \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s} \cdot e^{-sT}, \quad (2.5.13)$$

wobei $G(s)$ die Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Systems ist. Um nun die z -Übertragungsfunktion $Y(z)/U(z) = G(z)$ dieses Gebildes berechnen zu können, muß $G_H(s) \cdot G(s)$ zunächst in den Zeitbereich zurücktransformiert werden (\mathcal{L}^{-1}) und die entstehende kontinuierliche Zeitfunktion zu Abtastzeitpunkten $t = k \cdot T$ abgetastet werden. Diese Abtastfolge kann dann in den z -Bereich transformiert werden (\mathcal{Z}):

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ G_H(s) \cdot G(s) \} \Big|_{t=kT} \right\}. \quad (2.5.14)$$

Häufig wird diese Operation symbolisch mit einem großen lateinischen \mathcal{X} abgekürzt

$$F(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \} \Big|_{t=kT} \right\} = \mathcal{X} \{ F(s) \}. \quad (2.5.15)$$

Wenden wir diese Überlegungen auf die Gleichung (2.5.13) an, erhalten wir

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s} \cdot e^{-sT} \right\} \Big|_{t=kT} \right\}, \quad (2.5.16)$$

wobei

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = h(t) \quad (2.5.17)$$

die Sprungantwort von $G(s)$ auf einen Einheitssprung ist. Durch Abtastung zu den Zeitpunkten $t = kT$ erhält man die Sprungantwortfolge

$$h(kT) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kT} . \quad (2.5.18)$$

Wendet man (2.5.18) auf (2.5.16) an und führt die z -Transformation mit Hilfe des Verschiebungssatzes aus, erhält man

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z} \{ h(kT) - h((k-1) \cdot T) \} = H(z) - H(z) \cdot z^{-1} \\ &= (1 - z^{-1}) \cdot H(z) . \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Da aber

$$H(z) = \mathcal{Z} \{ h(kT) \} \stackrel{(2.5.18)}{=} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kT} \right\} \stackrel{(2.5.15)}{=} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

$$(2.5.18) \qquad \qquad \qquad (2.5.15)$$

ist, kann (2.5.9) auch wie folgt geschrieben werden

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} . \quad (2.5.20)$$

Mit (2.5.20) haben wir eine Möglichkeit gefunden, ein kontinuierliches System, das sich wie auf Bild (2.5.2) in einer zeitdiskreten Umgebung befindet, zeitdiskret in Form einer z -Übertragungsfunktion zu beschreiben:

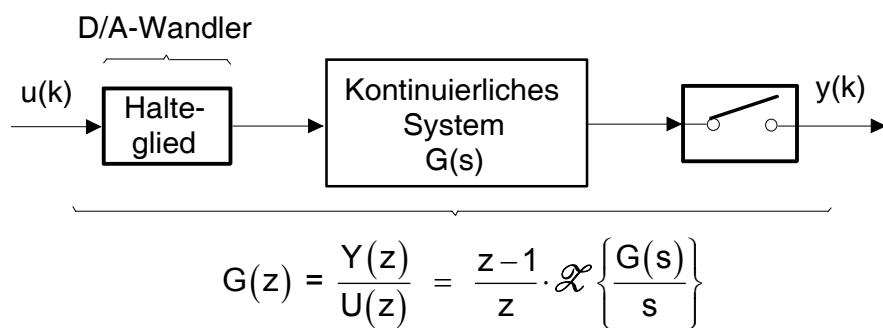


Bild 2.5.2 Zeitdiskrete Systembeschreibung eines kontinuierlichen Systems in einer zeitdiskreten Umgebung

Da bei der praktischen Berechnung von $G(z)$ aus $G(s)$ häufig die Beziehung (2.5.15) zur Herstellung eines direkten Bezugs zwischen s - und z -Übertragungsfunktion benutzt werden muß, sind in der Tabelle 2.5.1 die wichtigsten Korrespondenzen zwischen Laplace- und z -Bereich zusammengefaßt.

Beispiel 2.5.4: Das folgende kontinuierliche IT_1 -Glied

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (2.5.22)$$

wird über einen D/A-Wandler mit einer Amplitudenfolge angesteuert. Berechne seine z -Übertragungsfunktion, wenn die Abtastzeit $T = 0,1$ sek beträgt:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \underbrace{\frac{1}{s^2 \cdot (s+1)}}_{*)} \right\}. \quad (2.5.23)$$

Da sich der mit *) gekennzeichnete Term nicht in der Korrespondenztabelle 2.5.1 wiederfindet, muß eine Partialbruchzerlegung (2.5.24) vorgenommen werden (vergleiche Beispiel 1.2.14)

$$\frac{1}{s^2 \cdot (s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}. \quad (2.5.24)$$

Die Partialbrüche werden gliedweise mit Tabelle 2.5.1 in den z -Bereich transformiert

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \left\{ \frac{T \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right\}. \quad (2.5.25)$$

Durch Ausmultiplikation und Zusammenfassung der Koeffizienten vor gleichen z -Potenzen ergibt sich

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-0,9} = \frac{0,1 \cdot (z-0,9) - (z-1) \cdot (z-0,9) + (z-1)^2}{(z-1) \cdot (z-0,9)} \\ &= \frac{0,1z - 0,09 - z^2 + 1,9z - 0,9 + z^2 - 2z + 1}{z^2 - 1,9z + 0,9} \\ &= \frac{0,01}{z^2 - 1,9z + 0,9} = \frac{0,01z^{-2}}{1 - 1,9z^{-1} + 0,9z^{-2}}. \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

Nr.	$F(s)$	$F(z) = \mathcal{Z} \{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z - 1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T \cdot z}{(z - 1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 \cdot z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
4	$\frac{1}{s + a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
5	$\frac{1}{(1 + T_1 s)s}$	$\frac{z \cdot (1 - e^{-T/T_1})}{(z - 1) \cdot (z - e^{-T/T_1})}$
6	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$\frac{T \cdot z \cdot e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
7	$\frac{1}{(s + a)^{k+1}}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{d^k}{da^k} \cdot \left(\frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
8	$\frac{\omega}{(a^2 + \omega^2) + 2as + s^2}$	$\frac{z \cdot e^{-aT} \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot e^{-aT} \cdot \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$
9	$\frac{s + a}{(a^2 + \omega^2) + 2as + s^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot e^{-aT} \cdot \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cdot e^{-aT} \cdot \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$

Tabelle 2.5.1 Korrespondenzen zwischen Laplace- und z-Bereich

Auch beim Vorliegen eines kontinuierlichen Übertragungsgliedes mit Totzeit

$$G(s) = G^*(s) \cdot e^{-s \cdot T_t}, \quad (2.5.27)$$

wobei $G^*(s)$ der totzeitfreie, gebrochen rationale Teil der Übertragungsfunktion ist, kann die Beziehung (2.5.21) zur Berechnung der z-Übertragungsfunktion herangezogen werden. Im allgemeinen wird die Totzeit T_t groß gegen die Abtastzeit T sein, so daß sich,

zumindest approximativ, T_t ganzzahlig durch T dividieren läßt:

$$d = \frac{T_t}{T} ; \quad d: \text{ganzzahlig, positiv.} \quad (2.5.28)$$

Die Gleichung (2.5.27) geht damit über in

$$G(s) = G^*(s) \cdot e^{-s \cdot d \cdot T}. \quad (2.5.29)$$

Mit der Definitionsgleichung von z (2.4.2) erhält man

$$G(s) = G^*(s) \cdot z^{-d}. \quad (2.5.30)$$

Setzt man diesen Ausdruck abschließend in (2.5.21) ein

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G^*(s) \cdot z^{-d}}{s} \right\} = \frac{(z - 1) \cdot z^{-d}}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G^*(s)}{s} \right\}; \quad d = \frac{T_t}{T}, \quad (2.5.31)$$

ergibt sich die Bestimmungsgleichung der z -Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Übertragungsgliedes mit Totzeit in einer zeitdiskreten Umgebung nach Bild 2.5.2.

2.5.1.3 Andere Diskretisierungstransformationen

Bei der Ableitung der Beziehung (2.5.21) wurde davon ausgegangen, daß das kontinuierliche System über einen D/A-Wandler angesteuert wird, der als Ausgangssignal überlagerte Sprungfunktionen (vergleiche Bild 2.3.2) erzeugt. (Einen solchen A/D-Wandler bezeichnet man in der Systemtheorie auch als "Halteglied nullter Ordnung"). Man kann zeigen, daß ein durch diese Diskretisierungstransformation entstandenes zeitdiskretes System $G(z)$ bei einer sprungförmigen Eingangsfolge in den Abtastpunkten genau die gleichen Ausgangssignalamplituden $y(k)$ erzeugt wie das zugrundeliegende kontinuierliche System $G(s)$ bei äquivalenter Erregung zu den entsprechenden Zeitpunkten. Aufgrund dieser Eigenschaft bezeichnet man die Transformationsvorschrift

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (2.5.21)$$

auch als Sprunginvarianz–Transformation. Bei anderen als sprungförmigen Erregungen liefern $G(z)$ und $G(s)$ (leicht) von einander abweichende Systemantworten.

Hätte man zur Ableitung der Diskretisierungstransformation (2.5.21) kein treppenförmiges Eingangssignal vorausgesetzt, sondern einen D/A-Wandler benutzt, der sein Ausgangs-

signal zwischen den Abtastzeitpunkten rampenförmig interpoliert ("Halteglied erster Ordnung"),

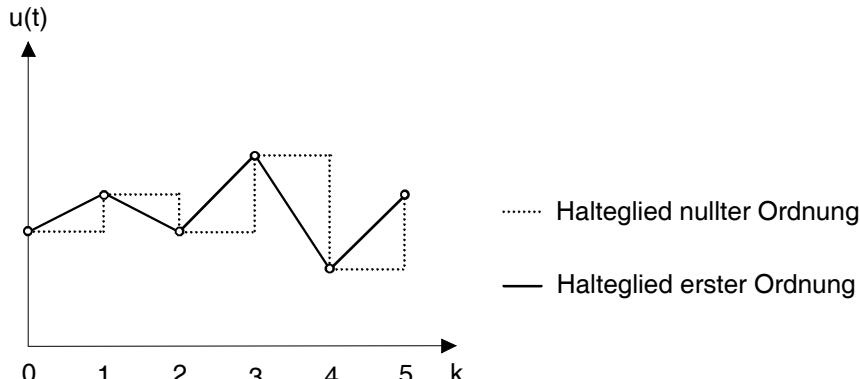


Bild 2.5.3 Ausgangssignale von Haltegliedern nullter und erster Ordnung

wäre man zu einer Diskretisierungs–Transformation der Form

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z - 1)^2}{Tz} \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\} \quad (2.5.32)$$

gelangt. Diese Transformation hat die Eigenschaft der sog. Anstiegsinvarianz, d.h. das durch (2.5.32) entstehende zeitdiskrete System $G(z)$ hat bei einer rampenförmigen Erregungsfolge zu den Abtastzeitpunkten in der Ausgangsfolge genau die gleichen Amplitudenwerte wie sein kontinuierliches Vorbild $G(s)$ bei äquivalenter Erregung.

Beide Transformationen gehören zur Gruppe der sog. Anregungsinvarianz–Transformationen. Wir verzichten auf eine weitere Vertiefung dieser Transformationen, da sich aus dieser Gruppe nur die Transformation (2.5.21) durchgesetzt hat. Dies hat offensichtlich seinen Grund darin, daß marktverfügbare D/A-Wandler immer Halteglieder nullter Ordnung sind.

Neben der Klasse der Anregungsinvarianz–Transformationen gibt es noch eine weitere wichtige Gruppe von Diskretisierungstransformationen, die wir als Approximationstransformationen bezeichnen wollen. Ohne die Zusammenhänge zu kennen, haben wir bereits eine solche Transformation – allerdings im Zeitbereich – im Kapitel 1.2.1.4 bei der numerischen Berechnung von Systemantworten kontinuierlicher Systeme kennengelernt. Zur Ableitung einer solchen Approximationstransformation betrachten wir einen reinen kontinuierlichen Integrator

$$y(t) = \int u(t) \cdot dt \Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = u(t), \quad (2.5.33)$$

der folgende Übertragungsfunktion besitzt

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} . \quad (2.5.34)$$

Zur Diskretisierung nähern wir wie im Kapitel 1.2.1.4 den Differentialquotienten $\dot{y}(t)$ von (2.5.33) durch einen Differenzenquotienten an ($\Delta t = T$):

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y(t)}{T} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T} . \quad (2.5.35)$$

Wie schon in Kapitel 1.2.1.4 erläutert, gehört der Zeitpunkt t der rechten Seite von (2.5.33) zu dem infinitesimal kleinen Zeitraum dt der linken Seite. Da mit (2.5.35) dieser infinitesimal kleine Zeitraum approximativ zu einem endlichen Zeitraum T mit dem Anfangszeitpunkt $k - 1$ und dem Endzeitpunkt k aufgeweitet wurde, erhebt sich die Frage, ob nun $u(t)$ in (2.5.33) dem Zeitpunkt $k - 1$, k oder irgendeinem Zeitpunkt dazwischen zugeordnet werden soll.

Wir wollen zeigen, daß jede Zuordnung auf eine spezielle Diskretisierungstransformation führt:

- Wählt man in (2.5.33) $u(t) = u(k-1)$ wird mit (2.5.35)

$$\frac{y(k) - y(k-1)}{T} = u(k-1) . \quad (2.5.36)$$

Daraus folgt die Differenzengleichung

$$y(k) = y(k-1) + T \cdot u(k-1) , \quad (2.5.37)$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes der z -Transformation wird aus (2.5.37)

$$Y(z) = Y(z) \cdot z^{-1} + T \cdot U(z) \cdot z^{-1} ,$$

woraus folgende z -Übertragungsfunktion entsteht

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{z - 1} . \quad (2.5.38)$$

Da (2.5.38) eine Approximation von (2.5.34) darstellt, kann man schreiben

$$G(z) \approx G(s) \Rightarrow \frac{1}{s} \approx \frac{T}{z - 1} .$$

Durch Bildung des Kehrwertes erhält man eine Substitutionsregel (die sogenannte "Rechteckapproximation links"), mit deren Hilfe man s–Übertragungsfunktionen direkt in z–Übertragungsfunktionen wandeln kann:

$$\underline{\underline{s \approx \frac{z - 1}{T} \Rightarrow G(z) = G(s)|_s = \frac{z - 1}{T}}}$$
(2.5.39)

- Wählt man in (2.5.33) $u(t) = u(k)$ wird mit (2.5.35)

$$\underline{\underline{\frac{y(k) - y(k-1)}{T} = u(k)}},$$
(2.5.40)

und daraus nach kurzer Rechnung folgende z–Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z \cdot T}{z - 1},$$
(2.5.41)

die auf folgende Substitutionsregel führt (die sogenannte "Rechteckapproximation rechts"):

$$\underline{\underline{s \approx \frac{z - 1}{z \cdot T} \Rightarrow G(z) = G(s)|_s = \frac{z-1}{z \cdot T}}}$$
(2.5.42)

- Durch die Wahl des arithmetischen Mittelwertes zwischen $u(k-1)$ und $u(k)$ anstelle von $u(t)$ in (2.5.33)

$$u(t) \approx \frac{u(k-1) + u(k)}{2}$$
(2.5.43)

erhält man eine bessere Approximation von $u(t)$ als in den beiden vorangegangenen Fällen

$$\underline{\underline{\frac{y(k) - y(k-1)}{T} = \frac{u(k-1) + u(k)}{2}}}.$$
(2.5.44)

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wiederum nach kurzer Rechnung, die dazugehörige z–Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1},$$

die schließlich auf folgende Substitutionsregel führt (die sogenannte

"Trapezapproximation" oder "TUSTINsche Näherung"):

$$\underline{s \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow G(z) = G(s)|_s = \frac{2 \cdot z-1}{T \cdot z+1}} \quad (2.5.45)$$

Da die Rechteckapproximationen mit einigen Nachteilen behaftet sind, z.B. erzeugen beide Substitutionen eingeschränkt stabile Systeme, hat sich die "TUSTINsche Näherung" aus dem Bereich der Approximations-Transformationen durchgesetzt.

Obwohl die Sprunginvarianz-Transformation und die TUSTINsche Näherung bei genügend kleinen Abtastzeiten T annähernd gleichgute Diskretisierungsergebnisse liefern, hat sich in der Regelungstechnik die Sprunginvarianz-Transformation, wegen der Möglichkeit totzeitbehaftete Systeme transformieren zu können, durchgesetzt. In der digitalen Filtertechnik (siehe Kapitel 2.7) wird dagegen die TUSTINsche Näherung bevorzugt.

Mit der TUSTINschen Näherung läßt sich im Gegensatz zu allen anderen Diskretisierungs-transformationen auch recht problemlos eine zeitdiskrete z -Übertragungsfunktion in eine kontinuierliche s -Übertragungsfunktion umrechnen. Dazu muß (2.5.45) nur nach z umgestellt werden

$$z = \frac{1 + s \cdot \frac{T}{2}}{1 - s \cdot \frac{T}{2}} \Rightarrow G(s) = G(z) \left|_{z=\frac{1+s\frac{T}{2}}{1-s\frac{T}{2}}} \right. \quad (2.5.46)$$

Wir werden die TUSTINsche Näherung im vorliegenden Skript nur in der Form (2.5.45) verwenden, z.B. zum Entwurf eines digitalen Filters im Rahmen der Anwendung der zeitdiskreten Systemtheorie in Kapitel 2.7. Die Gleichung (2.5.46) wird u.a. als Hilfsmittel zum Entwurf digitaler Regler /5/ benutzt.

Beispiel 2.5.5: Berechne die z -Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Übertragungssystems (2.5.22) aus Beispiel 2.5.4 bei einer Abtastzeit $T = 0,1$ mit Hilfe der TUSTINschen Näherung:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 1)} = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$G(z) = G(s) \Bigg|_{s = \frac{2 \cdot z - 1}{T \cdot z + 1}} = \frac{1}{s^2 + s} \Bigg|_{s = \frac{2 \cdot z - 1}{T \cdot z + 1}} \quad (2.5.47)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\left(\frac{20 \cdot (z - 1)}{z + 1}\right)^2 + \frac{20 \cdot (z - 1)}{z + 1}} = \frac{(z + 1)^2}{400 \cdot (z - 1)^2 + 20 \cdot (z - 1)(z + 1)} \\ &= \frac{z^2 + 2z + 1}{400z^2 - 800z + 400 + 20z^2 - 20} = \frac{z^2 + 2z + 1}{420z^2 - 800z + 380} \\ &= \underline{\underline{\frac{0,0024 \cdot (z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1,9z + 0,9}}} = \underline{\underline{\frac{0,0024 \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,9z^{-1} + 0,9z^{-2}}}} \quad (2.5.48) \end{aligned}$$

Wie man deutlich erkennt, unterscheiden sich die z -Übertragungsfunktionen, die einmal mit der Sprunginvarianz-Transformation (2.5.26) und einmal mit der TUSTINschen Näherung (2.5.48) berechnet wurden, nur im Zählerpolynom. Das die Dynamik des Systems prägende Nennerpolynom ist gleich.

Abschließend einige Bemerkungen zur praktischen Berechnung von zeitdiskreten Übertragungsfunktionen $G(z)$ aus kontinuierlichen $G(s)$.

- Die Systemordnung (Nennergrad) der z -Übertragungsfunktion ist gleich der Systemordnung der kontinuierlichen s -Übertragungsfunktion. Falls bei einer Berechnung $G(z)$ eine höhere Ordnung als $G(s)$ hat, hätte während der vorangehenden Rechnung gekürzt werden können. Eine solche Kürzung sollte immer vorgenommen werden, weil dadurch die kürzest mögliche Differenzengleichung entsteht (siehe folgendes Kapitel). Diese hat dann im Falle einer Echtzeit-Implementierung die kürzeste Rechenzeit. Da weniger rekursive Terme auftreten, ist auch die Fehlerfortpflanzung geringer.
- Die Koeffizienten der z -Übertragungsfunktion müssen mit mehrstelliger Genauigkeit berechnet werden. Auch schon geringe Rundungen können zu erheblichen Fehlern führen. Es sind deshalb CAE-Programme zur Berechnung von z -Übertragungsfunktionen zu bevorzugen.

2.5.2 Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich

Im Kapitel 1.2.1.2 hatten wir kontinuierliche Systeme im Zeitbereich durch ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung (Zustandsmodell) der Form (1.2.4) bzw. (1.2.28) modelliert. Eine solche Modellierung zeitdiskreter Systeme, jetzt allerdings durch ein System von Differenzengleichungen 1. Ordnung, ist auch möglich. Für unsere folgenden

Betrachtungen wollen wir aber die schon in Kapitel 2.1 eingeführte rekursive Differenzengleichung (2.1.7)

$$\begin{aligned} y(kT) &= \sum_{i=1}^n -\alpha_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m \beta_i u(k-i) \\ &= -\alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2) - \dots - \alpha_n y(k-n) + \dots \\ &\quad \dots + \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_m u(k-m) \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

als mathematisches Modell zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich beibehalten.

Die Umrechnung einer gegebenen Differenzengleichung (2.5.49) in eine z-Übertragungsfunktion erfolgt mit den Regeln der z-Transformation

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$$

und zwar ausschließlich mit Hilfe des Linearitäts- und Verschiebungssatzes. Die Vorgehensweise haben wir schon in Kapitel 2.5.1 eingehend kennengelernt.

Liegt umgekehrt eine z-Übertragungsfunktion vor und soll daraus die Differenzengleichung (2.5.49) berechnet werden, müssen der Linearitäts- und Verschiebungssatz invers angewendet werden

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} .$$

Wir zeigen die Vorgehensweise am folgendem

Beispiel 2.5.6: Bestimme zu der im Beispiel 2.5.4 berechneten z-Übertragungsfunktion (2.5.26)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,01z^{-2}}{1 - 1,9z^{-1} + 0,9z^{-2}} \quad (2.5.50)$$

die dazugehörige Differenzengleichung.

Bei der Berechnung der Differenzengleichung aus einer gegebenen z-Übertragungsfunktion gehen wir immer von ihrer Form mit negativen Potenzen aus und multiplizieren diese mit dem Eingangs- und Ausgangssignal

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,01z^{-2}}{1 - 1,9z^{-1} + 0,9z^{-2}} \quad (2.5.51)$$

kreuzweise aus

$$Y(z) - 1,9Y(z) \cdot z^{-1} + 0,9Y(z) \cdot z^{-2} = 0,01U(z) \cdot z^{-2} . \quad (2.5.52)$$

Wegen der Gültigkeit des Linearitätssatzes können die Summenterme von (2.5.52) einzeln mit Hilfe des inversen Verschiebungssatzes

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z) \cdot z^{-n}\} = f(k - n)$$

in den diskreten Zeitbereich transformiert werden

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} &= y(k) \\ \mathcal{Z}^{-1}\{-1,9 \cdot Y(z) \cdot z^{-1}\} &= -1,9 \cdot y(k - 1) \\ \mathcal{Z}^{-1}\{0,9 \cdot Y(z) \cdot z^{-2}\} &= 0,9 \cdot y(k - 2) \\ \mathcal{Z}^{-1}\{0,01 \cdot U(z) \cdot z^{-2}\} &= 0,01 \cdot u(k - 2) . \end{aligned} \quad (2.5.53)$$

Ordnet man die Transformationsergebnisse wieder in der entsprechenden Form (2.5.52) an

$$y(k) - 1,9 \cdot y(k - 1) + 0,9 \cdot y(k - 2) = 0,01 \cdot u(k - 2) , \quad (2.5.54)$$

kann man nun (2.5.54) zur Ausgangsgröße mit dem aktuellsten Zeitpunkt (im vorliegenden Fall $y(k)$) umstellen

$$\underline{\underline{y(k) = 1,9 \cdot y(k - 1) - 0,9 \cdot y(k - 2) + 0,01 \cdot u(k - 2)}} \quad (2.5.55)$$

und hat damit die gesuchte Differenzengleichung bestimmt.

Mit dem Vorliegen der Differenzengleichung eines zeitdiskreten Übertragungssystems ist man nun in der Lage die Systemantwort $y(k)$ auf eine beliebige Eingangserregung $u(k)$ dieses Systems zu berechnen. Dies ist bei zeitdiskreten Systemen auf verschiedene Arten möglich. Wir zeigen im Folgenden

- die analytische Berechnung von Systemantworten mit Hilfe der Korrespondenzen der z -Transformation (Tabelle 2.4.1) und
- die rekursive Berechnung von Systemantworten durch direktes Einsetzen in die Differenzengleichung.

Die analytische Lösung wird ähnlich wie bei kontinuierlichen Systemen mittels Korrespondenztafel und Partialbruchzerlegung berechnet. Die gegebene Differenzengleichung wird zunächst in den z-Bereich transformiert (Linearitäts- und Verschiebungssatz) und die z-Übertragungsfunktion $G(z) = Y(z) / U(z)$ gebildet. Anhand der gewünschten Systemerregung $u(k)$ wird das korrespondierende $U(z)$ aus der Korrespondenztafel gewählt und in die Lösung im z-Bereich $Y(z) = G(z) \cdot U(z)$ eingesetzt. Nach der meist notwendigen Partialbruchzerlegung von $G(z) \cdot U(z)$ können die entstehenden Summenterme gliedweise, wiederum mit der Korrespondenztafel, in den diskreten Zeitbereich zurücktransformiert werden

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z) \cdot U(z)\} .$$

Beispiel 2.5.7: Berechne analytisch die Systemantwort $y(k)$ des zeitdiskreten Übertragungssystems, das durch folgende Differenzengleichung beschrieben wird

$$y(k) = 0,607 \cdot y(k - 1) + 0,393 \cdot u(k - 1), \quad (2.5.56)$$

auf eine Einheitssprungfolge $u(k) = \sigma(k)$ am Eingang des Systems.

Die Differenzengleichung wird zunächst nach den Vorschriften des Kapitels 2.5.1 in den z-Bereich transformiert, um dort die z-Übertragungsfunktion zu bilden

$$\begin{aligned} Y(z) &= 0,607 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} + 0,393 \cdot U(z) \cdot z^{-1} \\ G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,393 \cdot z^{-1}}{1 - 0,607 \cdot z^{-1}} = \frac{0,393}{z - 0,607} . \end{aligned} \quad (2.5.57)$$

Die Lösung im z-Bereich ergibt sich mit

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) , \quad (2.5.58)$$

wobei $U(z)$ laut Aufgabenstellung

$$U(z) = \mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z - 1} \quad (2.5.59)$$

ist, zu

$$Y(z) = \frac{0,393 \cdot z}{(z - 0,607) \cdot (z - 1)} . \quad (2.5.60)$$

Der Ausdruck (2.5.60) findet sich nicht in der Korrespondenztafel wieder, so daß eine Partialbruchzerlegung vorgenommen werden muß

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0,393}{(z - 0,607) \cdot (z - 1)} = \frac{A}{z - 0,607} + \frac{B}{z - 1} \quad (2.5.61a)$$

$$= \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - 0,607}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - 0,607}. \quad (2.5.61b)$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z - 1}\right\} = \sigma(k) = 1 \quad (\text{da nur Zeitpunkte } k \geq 0 \text{ betrachtet werden})$$

↑
Korr. Nr. 1

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{z}{z - 0,607}\right\} = -\left(0,607^k\right),$$

↑
Korr. Nr. 3 oder 4

womit die analytische Lösung gefunden ist

$$\underline{y(k) = 1 - (0,607^k)}. \quad (2.5.62)$$

Hinweis: Bei der Partialbruchzerlegung empfiehlt es sich (z.B. beim Übergang von (2.5.60) nach (2.5.61a) ein z vom Zähler der rechten Seite in den Nenner der linken Seite zu ziehen. Nach Beendigung der Partialbruchzerlegung (2.5.61b) wird dieses z wieder auf die rechte Seite gebracht. Damit erhält man leichter Partialbrüche, die sich in der Korrespondenztabelle wiederfinden.

Liegt eine Systembeschreibung bereits als z -Übertragungsfunktion vor, erspart man sich bei der analytischen Berechnung der Systemantwort –ähnlich wie im kontinuierlichen Fall– die anfängliche Transformation in den z -Bereich.

Beispiel 2.5.8: Berechne analytisch die Systemantwort $y(k)$ des Übertragungssystems, das durch folgende z -Übertragungsfunktion beschrieben wird

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,5}{z - 1} \quad (2.5.63)$$

auf eine Einheitssprungfolge $u(k) = \sigma(k)$ am Eingang des Systems.

Mit

$$U(z) = \mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z - 1} \quad (2.5.64)$$

kann die Lösung im z-Bereich bereits hingeschrieben werden

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) = \frac{0,5}{z - 1} \cdot \frac{z}{z - 1} = \frac{0,5 \cdot z}{(z - 1)^2}. \quad (2.5.65)$$

Da sich das Ergebnis direkt in der Korrespondenztabelle wiederfindet, berechnet sich die Systemantwort zu

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ 0,5 \cdot \frac{z}{(z - 1)^2} \right\} = \underline{\underline{0,5 \cdot k}}. \quad (2.5.66)$$

Bei der rekursiven Berechnungsmethode, die wir rein intuitiv bereits einmal in Kapitel 2.1, Beispiel 2.1.1 angewendet haben, gehen wir von der Differenzengleichung aus und setzen nacheinander für aufeinanderfolgende Zeitpunkte k die zu diesen Zeitpunkten gehörenden Eingangssignalwerte und – falls es die Gleichung vorschreibt – auch bereits vorangehend berechnete Ausgangssignalwerte y ein.

Für aufeinanderfolgende Zeitpunkte k lassen sich so die dazugehörigen Ausgangssignalwerte berechnen.

Dabei setzen wir Eingangs- und Ausgangsfolgewerte mit negativen Signalargumenten (vergleiche (2.1.8)), die vor unseren Betrachtungszeitraum $k \geq 0$ auftreten, gleich Null

$$\left. \begin{array}{l} u(k - i) = 0 \\ y(k - i) = 0 \end{array} \right\} \text{falls } (k - i) < 0. \quad (2.5.67)$$

Beispiel 2.5.9: Berechne die Systemantwort für das in Beispiel 2.5.7 gegebene Systemmodell unter den gleichen Erregungsbedingungen mit der rekursiven Berechnungsmethode.

Zur Lösung der Aufgabenstellung benutzen wir folgendes Schema und gehen, wie oben beschrieben, vor:

k	$y(k) = 0,607 \cdot y(k-1) + 0,393 \cdot u(k-1) =$
0	$y(0) = 0,607 \cdot \underbrace{y(0-1)}_{0 \text{ wegen } 2.5.67} + 0,393 \cdot \underbrace{u(0-1)}_{0 \text{ wegen } \sigma(-1)=0} = 0$
1	$y(1) = 0,607 \cdot \underbrace{y(1-1)}_{y(0)=0 \text{ (s. vor. Zeile)}} + 0,393 \cdot \underbrace{u(1-1)}_{u(0)=\sigma(0)=1} = 0,393$
2	$y(2) = \underbrace{0,607 \cdot \underbrace{y(2-1)}_{y(1)=0,393}}_{0,239} + \underbrace{0,393 \cdot \underbrace{u(2-1)}_{u(1)=\sigma(1)=1}}_{0,393} = 0,632$
3	$y(3) = \underbrace{0,607 \cdot y(2)}_{0,384} + \underbrace{0,393 \cdot u(2)}_{0,393} = 0,777$
4	$y(4) = 0,472 + 0,393 = 0,865$
5	$y(5) = 0,525 + 0,393 = 0,918$
:	:

(2.5.68)

Durch Einsetzen von $k = 0, 1, \dots$ in die berechnete analytische Lösung (2.5.62) des gleichen Systemmodells, sieht man, daß beide Lösungen identisch sind

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 1 - (0,607^0) = 0 \\
 y(1) &= 1 - (0,607^1) = 0,393 \\
 y(2) &= 1 - (0,607^2) = 0,632 \\
 y(3) &= 1 - (0,607^3) = 0,777 \\
 &\vdots && \vdots
 \end{aligned} \tag{2.5.69}$$

Wie man deutlich erkennt, ist die analytische Lösung universeller. Während zur Berechnung des z. B. zwanzigsten Ausgangsfolgewertes bei der rekursiven Lösung alle vorangehenden neunzehn Folgewerte berechnet sein müssen, braucht man bei der analytischen Lösung nur $k = 20$ einzusetzen und erhält sofort das gewünschte Ergebnis. Die rekursive Lösung eignet sich dagegen gut zur Auswertung auf dem Digitalrechner, insbesondere auch dann, wenn beliebig geformte Eingangssignalfolgen betrachtet werden sollen. (Dies würde bei der analytischen Lösung auf komplizierte z-Transformierte von

$u(k)$ und langwierige Partialbruchzerlegungen führen).

Bevor wir uns dem nächsten Unterkapitel zuwenden, wollen wir ein weiter vorn besprochenes Thema etwas vertiefen. Wir rechnen dazu folgendes

Beispiel 2.5.10: Im Kapitel 2.5.2 hatten wir die Nichtrealisierbarkeit der Übertragungsfunktion (2.5.12)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot z^{-1}}{\alpha_1 \cdot z^{-1}}$$

anhand der Zähler-/Nennergrad – Relation nachgewiesen. Wir wollen jetzt zeigen, daß die dazugehörige Differenzengleichung nicht kausal ist. Zur Berechnung der Differenzengleichung multiplizieren wir (2.5.12) wieder kreuzweise aus

$$\alpha_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = \beta_0 \cdot U(z) + \beta_1 \cdot U(z) \cdot z^{-1},$$

transformieren diese Gleichung in den diskreten Zeitbereich und stellen sie zur Ausgangsgröße um

$$y(k - 1) = \frac{\beta_0}{\alpha_1} \cdot u(k) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot u(k - 1).$$

Betrachtet man diese Gleichung einen Abtastschritt später, indem man in den Signalargumenten eine 1 addiert:

$$y(k) = \frac{\beta_0}{\alpha_1} \cdot u(k+1) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot u(k) \quad (2.5.70)$$

erkennt man, daß zur Berechnung des k -ten Ausgangsfolgewertes $y(k)$ ein in der Zukunft ($k+1$) auftretender Eingangsfolgewert $u(k+1)$ benötigt wird. Da also die Wirkung (Ausgangssignal) vor der Ursache (Eingangssignal) auftreten müßte, ist das System nicht kausal und damit nicht realisierbar.

2.5.2.1 Strukturbilder zeitdiskreter Systeme

Systemverkopplungen zeitdiskreter Übertragungssysteme lassen sich wie bei kontinuierlichen Systemen sehr gut mittels Strukturbildern veranschaulichen. Beschränkt man sich auf die Verknüpfung von z -Übertragungsfunktionen, gelten alle Aussagen und Regeln des Kapitels 1.2.6 "Gekoppelte Übertragungssysteme", wenn man die unabhängige Variable s durch z ersetzt. Zeitdiskrete Systeme werden jedoch auch häufig im diskreten Zeitbereich als Strukturbild dargestellt. Neben den drei schon bekannten Strukturelementen Wirkungslinie, Verzweigungsstelle und Summationspunkt eines Signals werden dazu noch die beiden letzten in der Tabelle 2.5.4 aufgeführten Strukturbildelemente benötigt.

	Wirkungslinie eines Signals $x(k)$; das Signal wirkt rückwirkungsfrei von links nach rechts.
	Verzweigungsstelle des Signals $x(k)$; das Signal wird ausschließlich verzweigt und erfährt keine Veränderung.
	Signalsummationsstelle ; das Ausgangssignal ist die vorzeichengerechte Summe der Eingangssignale $z(k) = x_1(k) + x_2(k) - x_3(k).$
	Signal-Verzögerer (-Speicher) mit der Dauer einer Abtastzeit T
	Verstärkungsfaktor, Koeffizient $x_2(k) = a x_1(k)$

Bild 2.5.4 Strukturbildelemente für Strukturbilder zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich

Mit diesen Strukturbildelementen lässt sich z.B. die Differenzengleichung

$$y(k) = -y(k-1) + 0,5y(k-2) + u(k) + 2u((k-1)) - 3u(k-2) \quad (2.5.71)$$

durch folgendes Strukturbild (Bild 2.5.5) grafisch veranschaulichen. Wie man erkennt,, kann man den Koeffizienten 1 in Form eines Verstärkungsfaktorblockes mit $a = 1$ oder durch eine einfache Linie darstellen.

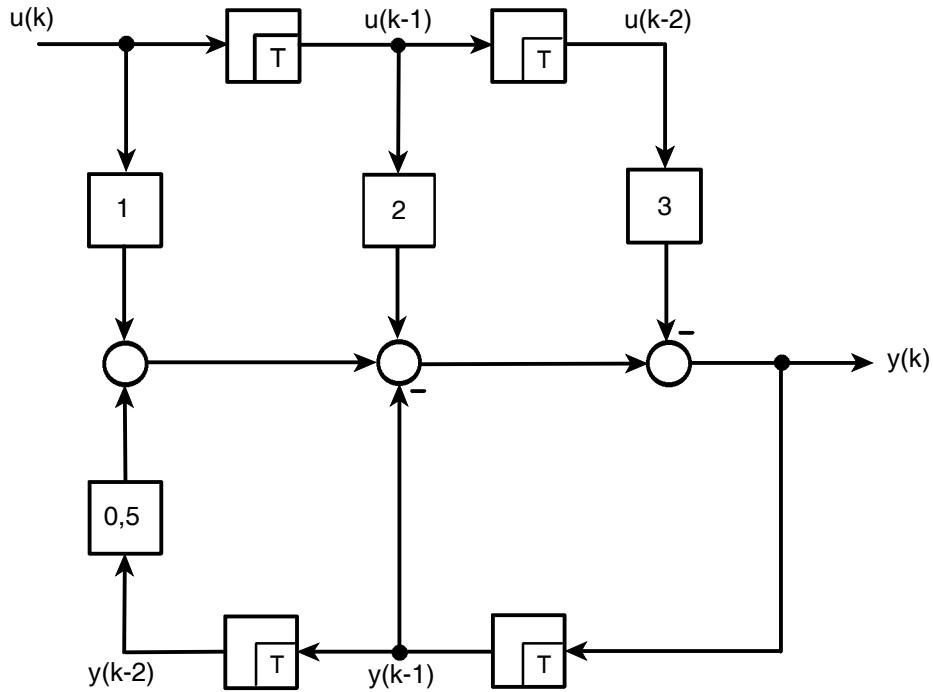


Bild 2.5.5 Strukturbild der Differenzengleichung (2.5.71)

2.5.3 Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich

Wie bei kontinuierlichen kann man auch bei zeitdiskreten Systemen einen Frequenzgang messen, oder beim Vorliegen eines mathematischen Modells den Frequenzgang analytisch berechnen. Auch im zeitdiskreten Fall entsteht der Frequenzgang $G(j\omega_z)$ durch Betrachtung der Übertragungsfunktion $G(z)$ an der Stelle $s = j\omega$, was gleichbedeutend mit einer sinusförmigen Erregung des Systems ist. (Der Index z bei $j\omega$ soll nur deutlich machen, daß es sich um einen Frequenzgang eines zeitdiskreten Systems handelt.) Ersetzt man in der z -Übertragungsfunktion (2.5.5)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot z^{-1} + \beta_2 \cdot z^{-2} + \dots + \beta_m \cdot z^{-m}}{1 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \alpha_2 \cdot z^{-2} + \dots + \alpha_n \cdot z^{-n}}$$

z definitionsgemäß (2.4.2) durch e^{sT} und betrachtet nur harmonische Eingangserregungen ($s = j\omega$)

$$z = e^{sT} \Big|_{s=j\omega} = e^{j\omega T}, \quad (2.5.72)$$

erhält man den Frequenzgang des zeitdiskreten Systems

$$G(j\omega_z) = \frac{Y(j\omega_z)}{U(j\omega_z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-j\omega T} + \beta_2 \cdot e^{-j2\omega T} + \dots + \beta_m \cdot e^{-jm\omega T}}{1 + \alpha_1 \cdot e^{-j\omega T} + \alpha_2 \cdot e^{-j2\omega T} + \dots + \alpha_n \cdot e^{-jn\omega T}}. \quad (2.5.73)$$

Durch Einsetzen der Eulerschen Beziehung

$$e^{-j\omega T} = \cos(\omega T) - j \cdot \sin(\omega T) \quad (2.5.74)$$

offenbart der Frequenzgang

$$G(j\omega_z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot \cos(\omega T) - j\beta_1 \cdot \sin(\omega T) + \dots + \beta_m \cdot \cos(m\omega T) - j\beta_m \cdot \sin(m\omega T)}{1 + \alpha_1 \cdot \cos(\omega T) - j\alpha_1 \cdot \sin(\omega T) + \dots + \alpha_n \cdot \cos(n\omega T) - j\alpha_n \cdot \sin(n\omega T)}, \quad (2.5.75)$$

daß er durch die in ihm enthaltenen periodischen Sinus- und Kosinusfunktionen eine Periodizität besitzt. Dies bestätigt das folgende

Beispiel 2.5.11: Berechne und zeichne den Frequenzgang in Form eines Bodediagramms für folgendes zeitdiskrete Übertragungssystem

$$G(z) = \frac{0,1 \cdot z^{-1}}{1 - 0,9 \cdot z^{-1}}. \quad (2.5.76)$$

Das zeitdiskrete System sei nach Bild 2.5.2 unter Anwendung der Sprunginvarianz-Transformation aus einem kontinuierlichen PT₁-Glied

$$G(s) = \frac{1}{1 + s} \quad (2.5.77)$$

bei einer Abtastzeit T = 0,1 entstanden.

Durch Einsetzen von (2.5.72) und (2.5.74) in (2.5.76) erhält man folgenden Frequenzgang

$$G(j\omega_z) = \frac{0,1 \cdot \cos(0,1\omega) - j \cdot 0,1 \cdot \sin(0,1\omega)}{1 - 0,9 \cdot \cos(0,1\omega) + j \cdot 0,9 \cdot \sin(0,1\omega)}. \quad (2.5.78)$$

Nach Bildung von Re {G(jω_z)} und Im {G(jω_z)} durch konjugiert komplexes Erweitern könnte das Bodediagramm punktweise mittels der Beziehungen (1.2.140) und (1.2.141) berechnet werden. Die folgende Betragskennlinie des Bodediagramms wurde jedoch rechnergestützt mit /16/ berechnet. Auf die Darstellung der ebenfalls periodischen Phasenkennlinie wurde verzichtet.

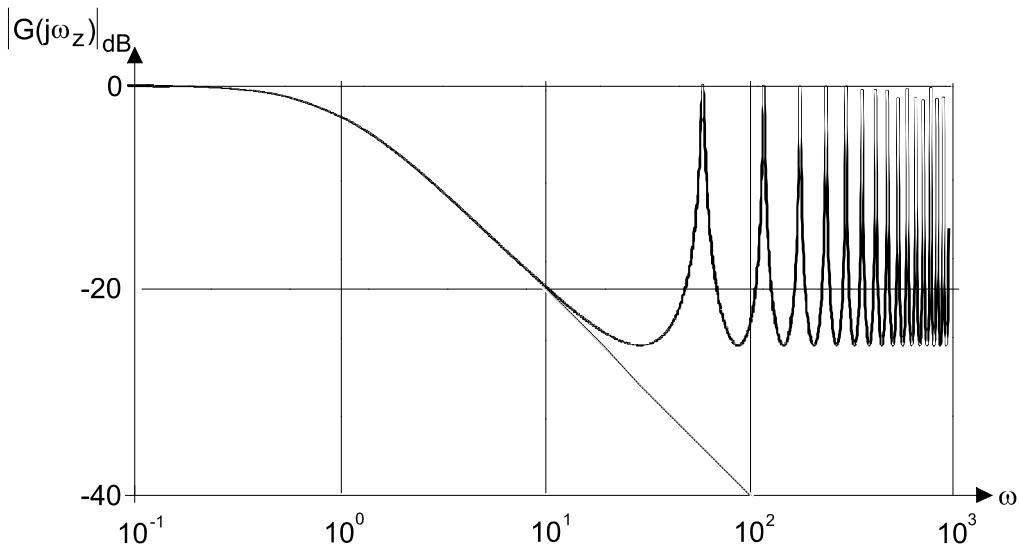


Bild 2.5.6 Betragskennlinie des Bodediagramms eines zeitdiskreten PT_1 -Gliedes (2.5.76)

Die Betragskennlinie zeigt bei kleinen Frequenzen bis ca. $\omega = 10$ 1/sek den typischen Betragskennlinienverlauf des zugrundeliegenden kontinuierlichen PT_1 -Gliedes, der sich zu höheren Frequenzen hin in der gestrichelten Kennlinie fortsetzen würde. Bei ganz-zahligen Vielfachen n der Abtastfrequenz ω_T

$$n \cdot \omega_T = n \cdot 2\pi \cdot f_T = n \cdot \frac{2\pi}{T} = n \cdot \frac{2\pi}{0,1}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5.79)$$

ω_T : Abtast(kreis)frequenz

f_T : Abtastfrequenz

T : Abtastzeit, Abtastperiode

also bei $\omega = 62,8$ 1/sek; $125,6$ 1/sek; $188,5$ 1/sek; ... wiederholt sich der Frequenzgang des zeitdiskreten Systems periodisch: Es entstehen neben dem Grundfrequenzgang sogenannte Seitenbänder, die den Frequenzgang des Grundbandes verformen, das heißt zu höheren Frequenzen hin verfälschen.

Wenn man sich bei der Wahl der Abtastzeit T am sogenannten SHANNONschen Abtasttheorem orientiert, besteht jedoch nie die Gefahr in diese Seitenbänder "hineinzugeraten". Das Abtasttheorem besagt, daß ein Signal mit einer in ihm enthaltenen Frequenzkomponente f_{max} mindestens mit einer Abtastfrequenz

$$f_T > 2 \cdot f_{max} \quad \text{bzw.} \quad \omega_T > 2 \cdot \omega_{max}. \quad (2.5.80)$$

abgetastet werden muß, wenn diese Frequenzkomponente im abgetasteten Signal noch erkennbar sein soll. Hält man sich an diese Vorschrift, werden alle vom System zu verarbeitenden Frequenzen

$$f_{\max} < \frac{f_T}{2} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\max} < \frac{\omega_T}{2} \quad (2.5.81)$$

sein, d.h. links der periodischen Fortsetzung des Frequenzganges liegen. In unserem vorangehenden Beispiel liegt diese Frequenz bei

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_T}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_T}{2} = \frac{\pi}{T} = \frac{3,14}{0,1} = 31,4 \frac{1}{\text{sek}}. \quad (2.5.82)$$

Da es nun aber vorkommen kann, daß im zu verarbeitenden Nutzsignal dennoch Frequenzkomponenten größer f_{\max} (bzw. ω_{\max}) auftreten (z.B. nicht erwartete Störsignale), die das Abtasttheorem verletzen:

$$f_{\max} \geq 2 \cdot f_T \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\max} \geq 2 \cdot \omega_T, \quad (2.5.83)$$

orientiert man sich bei regelungstechnischen Problemstellungen mit der Wahl der Abtastzeit nicht an den Signalfrequenzen sondern am Frequenzgang des kontinuierlichen Vorbilds des zeitdiskreten Systems (siehe Bild 2.5.7). Man wählt als ω_{\max} die Frequenz, bei der die Betragskennlinie des Bodediagramms zwischen ca. -20 dB und -40 dB abgesunken ist, die hier zu verarbeitenden Signalkomponenten also 10- bis 100-fach gedämpft werden.

Mit (2.5.80) ergibt sich dann folgende optimale Wahl der Abtastzeit:

$$\begin{aligned} \omega_T > 2 \cdot \omega_{\max} &\Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot f_T > 2 \cdot \omega_{\max} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} > 2 \cdot \omega_{\max} \Rightarrow \\ T &< \frac{\pi}{\underline{\omega_{\max}}} \end{aligned} \quad (2.5.84)$$

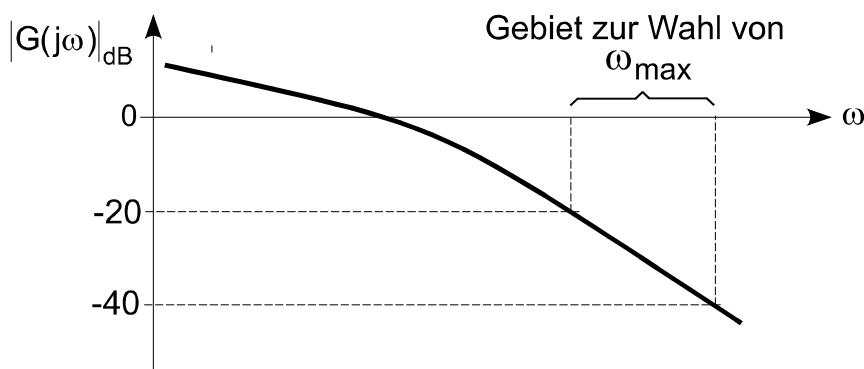


Bild 2.5.7 : Zur Bestimmung der Größe ω_{\max} in Gleichung (2.5.84)

Der Sinn dieser Wahl von T liegt darin, daß nun Frequenzkomponenten des Eingangssignals, die das Abtasttheorem verletzen würden, bereits 10- bis 100-fach gedämpft das System passieren und somit keine größeren Verfälschungen hervorrufen können.

Wie schon kurz erwähnt, beziehen sich die vorangegangenen Betrachtungen zur Wahl der Abtastzeit auf Problemstellungen der Regelungstechnik, wo kontinuierliche Systeme mittels zeitdiskreter Algorithmen ("digitale Regler"), die auf Digitalrechnern laufen, beeinflußt werden sollen.

Liegt ein Signalverarbeitungsproblem vor, d.h. sollen kontinuierliche Signale mittels zeitdiskreter Algorithmen ("digitale Filter") beeinflußt werden, orientiert man sich mit der Wahl der Abtastzeit an der maximal im Signal vorkommenden Frequenzkomponente f_{\max} und wählt nach dem Shannonschen Abtasttheorem die Abtastfrequenz

$$f_T > 2 \cdot f_{\max}$$

Da es auch hier vorkommen kann, daß im Nutzsignal Störkomponenten $f_{\text{Stör}} > f_{\max}$ auftreten, die das zu filternde Signal verfälschen können, (wie, wollen wir hier nicht klären) baut man in den Signalweg ein sogenanntes "Anti-Aliasing-Filter" (AL-Filter) ein. Ein AL-Filter ist ein kontinuierlicher Tiefpaß mit einer Grenzfrequenz $f_g = f_T/2$. Er filtert also alle Signale aus, die das Nutzsignal verfälschen könnten.

2.6 Stabilität zeitdiskreter Systeme

In Kapitel 1.3 haben wir die Stabilität kontinuierlicher Systeme mit dem Satz (1.3.1) definiert. Für zeitdiskrete Systeme können wir die Definition äquivalent formulieren:

- ||| Ein lineares zeitdiskretes Übertragungssystem heißt stabil, wenn die Sprungantwortfolge $y(k)$ (d.h. die Systemantwort auf eine Eingangssprungfolge $u(k) = \sigma(k)$) für $k \rightarrow \infty$ einem endlichen Wert zustrebt.
Andernfalls heißt das System instabil. (2.6.1)

Das aus (1.3.1) anschaulich abgeleitete Stabilitätskriterium (1.3.2) kann allerdings nicht mehr angewendet werden, da die zeitdiskrete Übertragungsfunktion im z -Bereich definiert ist, das Stabilitätskriterium aber für den s -Bereich gilt. Nun sind aber der s - und der z -Bereich, bzw. die s -Ebene und die z -Ebene nach (2.4.2) über die Beziehung

$$z = e^{sT} \quad (2.6.2)$$

miteinander verknüpft. Berücksichtigt man noch, daß nach (1.2.54) $s = \delta + j\omega$ ist, kann

man (2.6.2) wie folgt formulieren

$$z = e^{\delta T} \cdot e^{j\omega T}. \quad (2.6.3)$$

Dabei sind $e^{\delta T}$ der Betrag und ωT [Rad] $\hat{=} \omega T \cdot \frac{180}{\pi}$ [Grad] der Winkel der Lage der komplexen Zahl z in der z -Ebene.

Mit diesen Beziehungen kann man zeigen, daß sich

- die linke (stabile) s-Halbebene in einen Kreis mit $|z| < 1$ um den Ursprung der z -Ebene,
 - die imaginäre Achse (Stabilitätsgrenze) der s-Ebene auf die Peripherie des Kreises um den Ursprung der z -Ebene mit $|z| = 1$ und
 - die rechte (instabile) s-Halbebene außerhalb des Kreises um den Ursprung der z -Ebene mit $|z| > 1$
- abbilden. Man kann weiterhin zeigen, daß diese Abbildungsbeziehungen für alle Abtastzeiten $T > 0$ gelten.

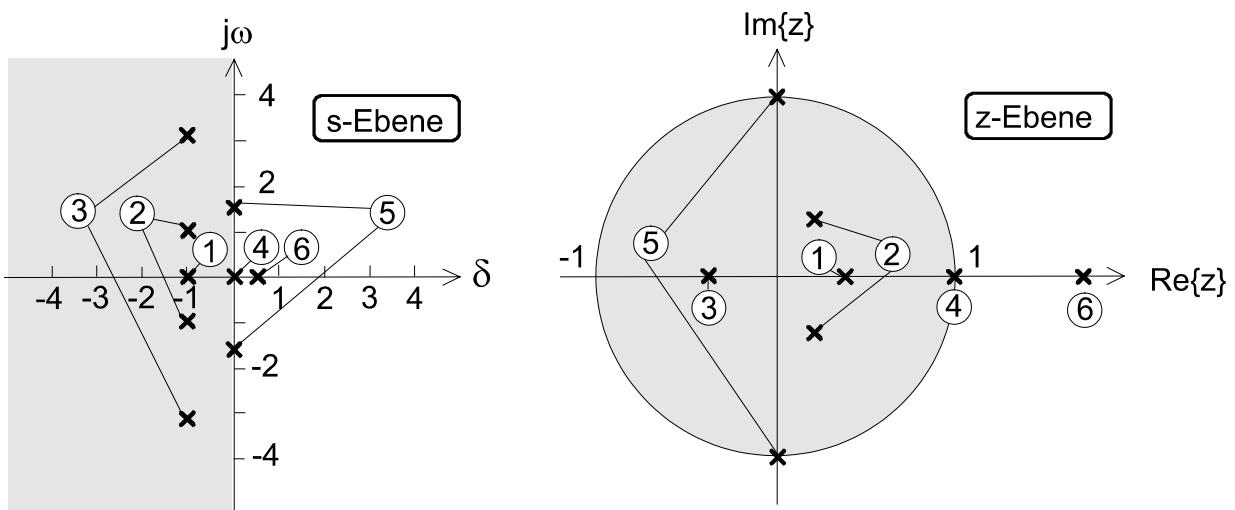


Bild 2.6.1 Stabilitätsgebiete der s- und z-Ebene

Aufgrund dieser Zusammenhänge gilt für zeitdiskrete Systeme

Ein lineares zeitdiskretes Übertragungssystem ist genau dann stabil, wenn die Pole seiner Übertragungsfunktion $G(z)$ (2.5.5) ausschließlich im Einheitskreis um den Ursprung der z -Ebene liegen. Andernfalls ist es instabil. (2.6.4)

Beispielhaft sind in Bild 2.6.1 folgende Pollage-Abbildungen dargestellt, dabei wurde die

Abtastzeit $T = 1$ gewählt:

$$\begin{array}{llll}
 (1) \quad s_1 = -1 \Rightarrow z = e^{-1} \cdot e^{j0} \Rightarrow |z| = 0,37; \quad \varphi\{z\} = 0^\circ \\
 (2) \quad s_{2,3} = -1 \pm j1 \Rightarrow z = e^{-1} \cdot e^{\pm j\frac{180}{\pi}} \Rightarrow |z| = 0,37; \quad \varphi\{z\} = \pm 57,3^\circ \\
 (3) \quad s_{4,5} = -1 \pm j\pi \Rightarrow z = e^{-1} \cdot e^{\pm j180} \Rightarrow |z| = 0,37; \quad \varphi\{z\} = \pm 180^\circ \\
 (4) \quad s_6 = 0 \Rightarrow z = e^0 \cdot e^{j0} \Rightarrow |z| = 1; \quad \varphi\{z\} = 0^\circ \\
 (5) \quad s_7 = \pm j\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = e^0 \cdot e^{\pm j90} \Rightarrow |z| = 1; \quad \varphi\{z\} = \pm 90^\circ \\
 (6) \quad s_8 = 0,5 \Rightarrow z = e^{0,5} \cdot e^{j0} \Rightarrow |z| = 1,65; \quad \varphi\{z\} = 0^\circ
 \end{array}$$

An der Pollage – Abbildung ③ kann man erkennen, daß sich konjugiert komplexe s -Pole nicht unbedingt in konjugiert komplexe z -Pole abbilden: es entsteht ein reeller z -Doppelpol. Bei genauerer Hinsehen erkennt man weiterhin, daß verschiedene Punkte der s -Ebene mehrfach auf die z -Ebene abgebildet werden können. Zum Beispiel werden $s = -1 \pm j\pi$ und $s = -1 \pm j3\pi$ beide auf $z = 0,37; \varphi\{z\} = \pm 180^\circ$ abgebildet.

2.7 Anwendungen der zeitdiskreten Systemtheorie

Mit den vorangehend beschriebenen Methoden und Verfahren sind wir nun in der Lage zeitdiskrete Systeme (primär Digitalrechner) in zu beeinflussende kontinuierliche Umgebungen einzufügen. Dazu muß dem Digitalrechner nach Bild 2.2.1 ein Abtaster und aus technologischen Gründen ein A/D-Wandler vorgeschaltet werden. Um wieder ein kontinuierliches Signal in die Umwelt abgeben zu können, benötigt der Digitalrechner am Ausgang ein Halteglied in Form eines D/A-Wandlers (Bild 2.3.1).

Faßt man diese Elemente zusammen, ergibt sich eine Wirkungsanordnung, wie sie in Bild 2.7.1 dargestellt ist.

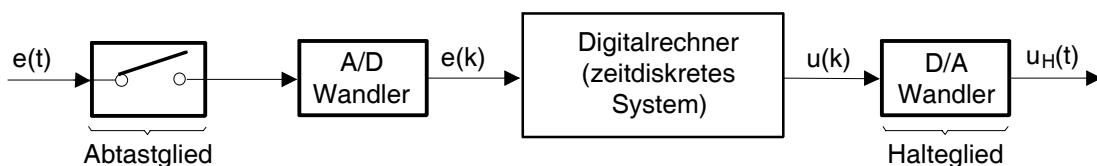


Bild 2.7.1 Ein zeitdiskretes System mit kontinuierlichem Ein- und Ausgangssignal

Implementiert man in den Digitalrechner einen Verarbeitungsalgorithmus in Form einer Differenzengleichung (2.5.49) mit dem Eingangssignal $e(k)$ und dem Ausgangssignal $u(k)$

$$u(k) = \sum_{i=1}^n -\alpha_i \cdot u(k-i) + \sum_{i=0}^m \beta_i \cdot e(k-i), \quad (2.7.1)$$

kann man mittels dieses Algorithmus das Eingangssignal auf seinem Weg vom Eingang zum Ausgang in einer gewünschten Weise beeinflussen. In der Regelungstechnik werden Differenzengleichungen entworfen, die die Funktion von sogenannten Regelalgorithmen haben. Da die dazu notwendigen Grundlagen erst im Rahmen einer Lehrveranstaltung über Regelungstechnik gelehrt werden, wollen wir an dieser Stelle einen Algorithmus entwerfen, der in den Digitalrechner nach Bild 2.7.1 implementiert, aus der gesamten Anordnung ein Signalfilter ("Digitales Filter") macht.

Beispiel 2.7.1: Entwurf eines digitalen Filters

Beim Entwurf eines Digitalfilters ist man häufig bestrebt die Funktion eines kontinuierlichen Filters möglichst genau nachzubilden. Wir wollen uns diesem Gedanken anschließen und z.B. ein digitales Filter entwerfen, das den folgenden Tiefpaß möglichst gut annähert.

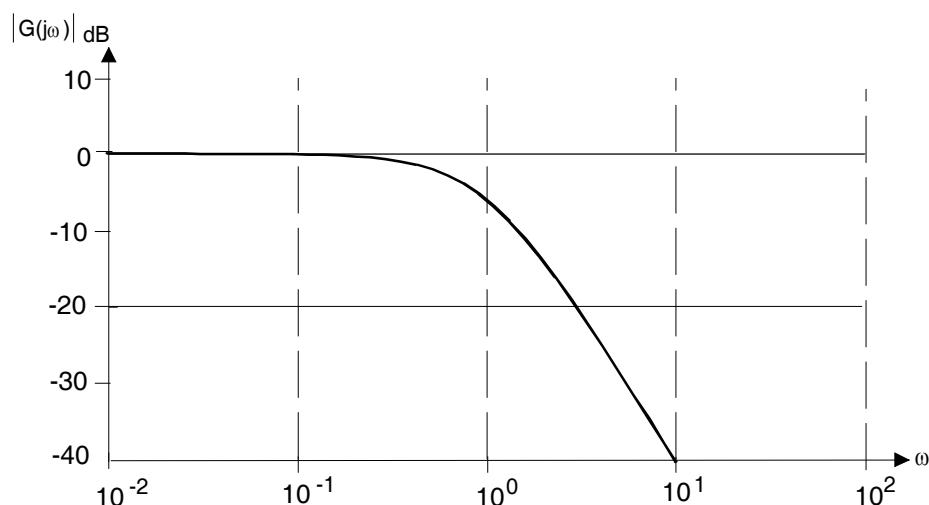


Bild 2.7.2 Betragskennlinie eines zu entwerfenden digitalen Tiefpaßfilters

Der erste Schritt zur Lösung dieser Aufgabe ist die Findung der zu dieser Betragskennlinie gehörenden kontinuierlichen Übertragungsfunktion. Nach den Erläuterungen des Kapitels 1.2.7.2 unter Zugrundelegung der Bodediagramm-Konstruktionsvorschriften kann man erkennen, daß es sich um zwei in Reihe geschaltete Verzögerungsglieder 1. Ordnung mit einer Kennfrequenz von $\omega_k = 1$ handelt

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{1}} = \frac{1}{(1 + j\omega)^2}. \quad (2.7.2)$$

Mit der Substitution $j\omega = s$ erhält man die entsprechende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{(1 + s)^2} . \quad (2.7.3)$$

Die jetzt bekannte kontinuierliche Übertragungsfunktion wird mittels einer Diskretisierungstransformation in eine z -Übertragungsfunktion gewandelt. Wir wählen, wie in der Filtertechnik häufig üblich, die TUSTINSche Näherung:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{2 \cdot z - 1}{T \cdot z + 1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2 \cdot z - 1}{T \cdot z + 1}\right)^2} . \quad (2.7.4)$$

Da ein Signalverarbeitungsproblem vorliegt, d.h. ein kontinuierliches Signal mit einem zeitdiskreten Algorithmus beeinflußt werden soll, muß man sich bei der Wahl der Abtastzeit an der maximal im Signal vorkommenden Frequenzkomponente orientieren. Wenn wir annehmen, daß unser zu filterndes Signal Frequenzkomponenten bis $\omega_{\text{Max}} = 20$ 1/sek enthält, schreibt das Shannonsche Abtasttheorem vor, daß die Abtastfrequenz ω_T mindestens doppelt so hoch sein muß wie die höchste Signalfrequenz

$$\omega_T > 2 \omega_{\text{Max}} , \quad (2.7.5)$$

um einen Aliasing-Effekt (Signalverfälschung) zu vermeiden. Mit der Wahl der Abtastfrequenz

$$\omega_T = 2 \omega_{\text{Max}} = 2 \cdot 20 \text{ 1/ sek} = 40 \text{ 1/ sek} \quad (2.7.6)$$

berechnet sich eine Abtastzeit von

$$T = \frac{1}{f_T} = \frac{2\pi}{\omega_T} = \frac{2\pi}{40} = 0,157 \text{ sek} . \quad (2.7.7)$$

Da $\omega_T > 2 \cdot \omega_{\text{max}}$ sein soll, kann man T auch kleiner wählen. Wir wählen $T = 0,1$, um die Berechnung von $G(z)$ zu erleichtern. Die Abtastzeit darf allerdings nicht geringer gewählt werden, als der Digitalrechner und seine Beschaltung in der Lage sind, einen Eingangsfolgewert in einen Ausgangsfolgewert umzurechnen. Mit $T = 0,1$ wird mit (2.7.4)

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2 \cdot (z - 1)}{0,1 \cdot (z + 1)}\right)^2} = \frac{(z + 1)^2}{((z + 1) + 20 \cdot (z - 1))^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z^2 + 2z + 1}{441z^2 - 798z + 361} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{441 - 798z^{-1} + 361z^{-2}} \\
 &= \frac{0,0023 + 0,0045z^{-1} + 0,0023z^{-2}}{1 - 1,81z^{-1} + 0,819z^{-2}}. \tag{2.7.8}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt mittels inverser z-Transformation die Differenzengleichung

$$\underline{u(k) = 1,81 \cdot u(k-1) - 0,819 \cdot u(k-2) + 0,0023 \cdot e(k) + 0,0045 \cdot e(k-1) + 0,0023 \cdot e(k-2)}. \tag{2.7.9}$$

Implementiert man diesen Algorithmus (2.7.9) in den Digitalrechner nach Bild 2.7.1, realisiert diese Anordnung ein digitales Filter mit einer Betragskennlinie nach Bild 2.7.2.

Um zu zeigen, daß (2.7.9) wirklich eine solche Filterfunktion darstellt, wurde die Differenzengleichung in einer Matlab-Simulation /16/ mit dem Eingangssignal

$$e(t) = \sin(0,1 \cdot t) + \sin(10 \cdot t) \tag{2.7.10}$$

beaufschlagt:

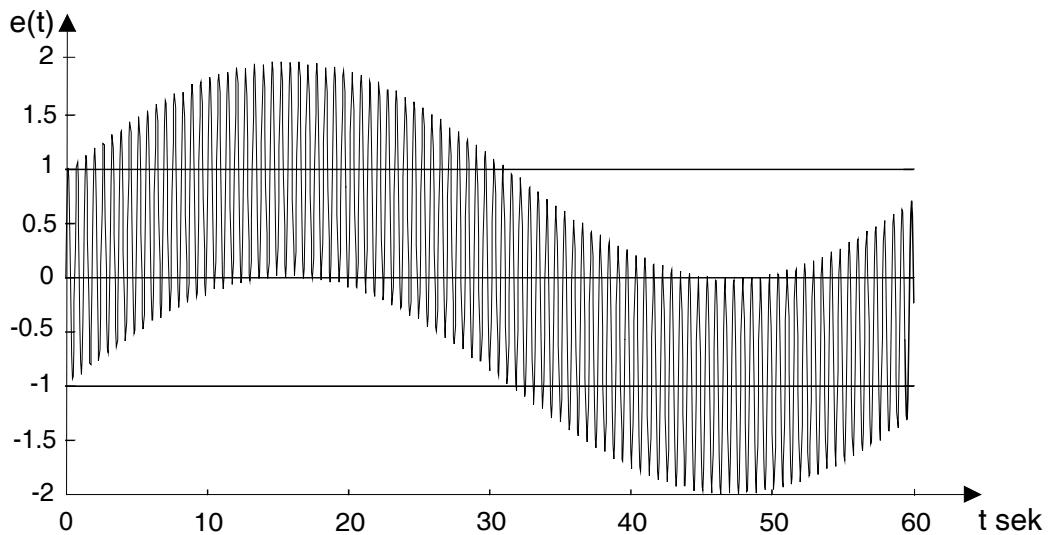


Bild 2.7.3 Eingangssignal $e(t) = \sin(0,1t) + \sin(10t)$ für den Filteralgorithmus (2.7.9)

Das Bild 2.7.4 zeigt den simulierten Ausgangsgrößenverlauf $u(t)$ des Filters. Erwartungsgemäß wird die Signalkomponente mit der hohen Frequenz $\omega = 10$ stark gedämpft (vergleiche mit dem Bodediagramm in Bild 2.7.2) und die Signalkomponente mit der niedrigen Frequenz $\omega = 0,1$ nahezu ungedämpft durchgelassen.

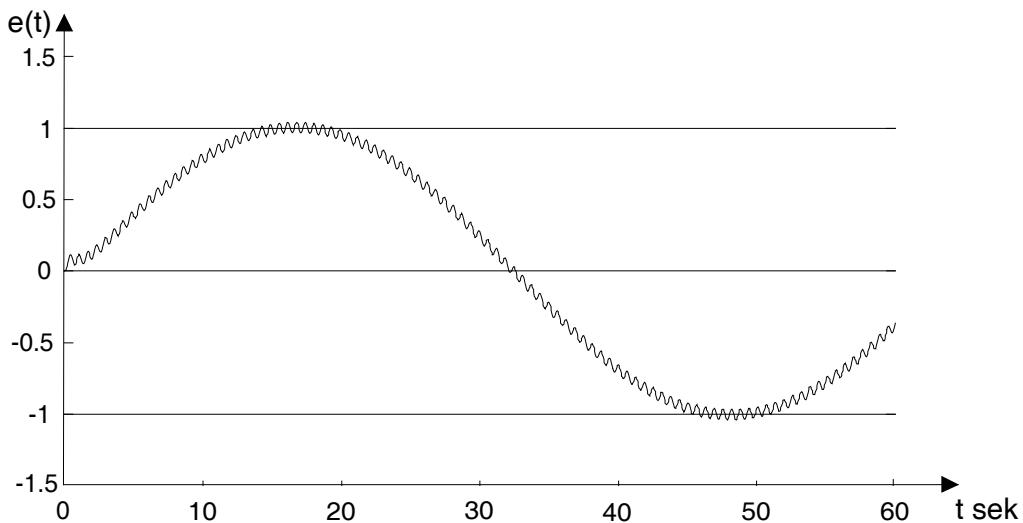


Bild 2.7.4 Ausgangssignal des Digitalfilters (2.7.9) auf das Eingangssignal (2.7.10)

Wir wollen das Ergebnis quantitativ nicht näher bewerten, sondern noch einige allgemeine Aspekte der digitalen Filtertechnik kurz anreißen.

- Ähnlich wie das vorgehend beschriebene Tiefpaßfilter lassen sich auch andere gewünschte Filteralgorithmen berechnen, z.B. Bandpässe, Bandsperren, selektive Bandsperren und Bandpässe, Hochpässe, Differentiatoren. Dies setzt voraus, daß es gelingt, die gewünschte Form des Frequenzverhaltens im Bodediagramm in eine entsprechende Übertragungsfunktion $G(s)$ zu übersetzen. Die darauf folgenden Entwicklungsschritte (2.7.4) bis (2.7.9) sind dann immer die gleichen.
- Auch normierte Digitalfilter (Butterworth-, Bessel-Filter usw.) lassen sich, wenn die Koeffizienten der Übertragungsfunktion zur Verfügung stehen, nach der vorgestellten Methode realisieren.
- Es sei noch darauf hingewiesen, daß die vorgestellten Filteralgorithmen auf der Basis einer Differenzengleichung in der Signaltheorie als IIR-Filter (infinite impulse response) bezeichnet werden. Es gibt noch eine Gruppe anderer Filter, die sog. FIR-Filter (finite impulse response), die etwas komplizierter zu entwerfen sind, aber gegenüber den IIR-Filtern gewisse Vorteile besitzen.

Literatur

- /1/** Unbehauen, H.:
Regelungstechnik I
ab 6., durchgesehene Auflage, 1991
Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
- /2/** Unbehauen, H.:
Regelungstechnik II
ab 5., durchgesehene Auflage, 1989
Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
- /3/** Unbehauen, H.:
Regelungstechnik III
ab 3., verbesserte Auflage, 1988
Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
- /4/** Föllinger, O.:
Regelungstechnik
ab 6., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, 1990
Hüthig Buch Verlag, Heidelberg
- /5/** Günther, M.:
Zeitdiskrete Steuerungssysteme
Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg, 1986
- /6/** Böcker, J.; Hartmann, I.; Zwanzig, Ch.:
Nichtlineare und adaptive Regelungssysteme
ab 1. Auflage, 1986
Springer Verlag; Berlin, Heidelberg, ..., Tokyo.
- /7/** Schulze, K.-P.; Rehberg, K.-J.:
Entwurf von adaptiven Systemen
ab 1. Auflage, 1988
Verlag Technik, Berlin

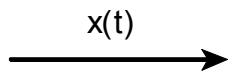
- /8/ Schütt, E.; Nietsch, T.; Rogowski, A.:
Prozeßmodelle
1. Auflage, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1990
- /9/ Zurmühl, R.; Falk, S.:
Matrizen und ihre Anwendungen
ab 5. Auflage
Teil 1: Grundlagen, 1984
Teil 2: Numerische Methoden, 1986
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, ..., Tokyo
- /10/ Stöcker, H. (Hrsg.):
Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren
1. Auflage, 1992
Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main
- /11/ Giloi, W.; Herschel, R.:
Rechenanleitung für Analogrechner
AEG-Telefunken, Konstanz
- /12/ Ameling, W.:
Laplace-Transformation
ab 1. Auflage, 1975
Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf
- /13/ Frost, H.:
Die neuen Einheiten
1. Auflage, 1977
Elitera Verlag, Berlin
- /14/ Lunze, K.:
Theorie der Wechselstromschaltungen
ab 7. Auflage, 1988
Verlag Technik, Berlin
- /15/ Oppelt, W.:
Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge
ab 5. Auflage, 1972
Verlag Chemie, Weinheim/Bergstraße

- /16/** Ottens, M
"Einführung in das CAE-Programm MATLAB"
Vorlesungsskript
TFH Berlin, Fachbereich VI
- /17/** Ottens, M
"Praktische Verfahren zur experimentellen Systemidentifikation"
Vorlesungsskript
TFH Berlin, Fachbereich VI
- /18/** Ljung, L
"System Identification, Theorie for the User"
Prentice Hall, Inc ; Engelewood Cliffs,
New Jersey, 10. Auflage, 1987
- /19/** Ottens, M
"Einführung in die Regelungstechnik"
Vorlesungsskript
TFH Berlin, Fachbereich VI

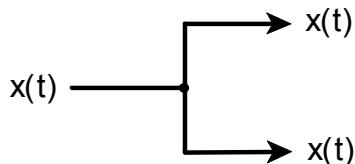
A1.1 Strukturbilder von Zustandsmodellen

Zustandsmodelle der Form (1.2.4) bzw. (1.2.28) lassen sich auch in Form von Strukturbildern anschaulich grafisch darstellen. Man benötigt dazu die folgenden Strukturbildelemente:

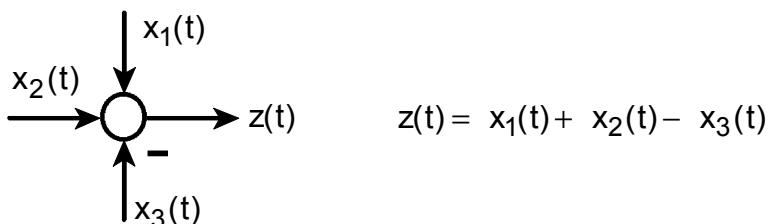
- Wirkungslinie eines Signals $x(t)$. Das Signal wirkt rückwirkungsfrei von links nach rechts:



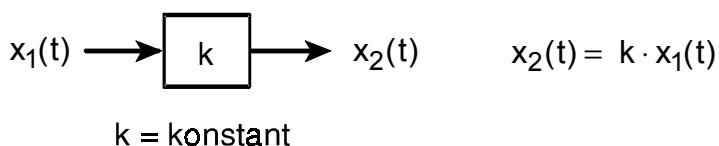
- Verzweigungsstelle des Signals $x(t)$. Das Signal wird ausschließlich verzweigt und erfährt sonst keine Änderung.



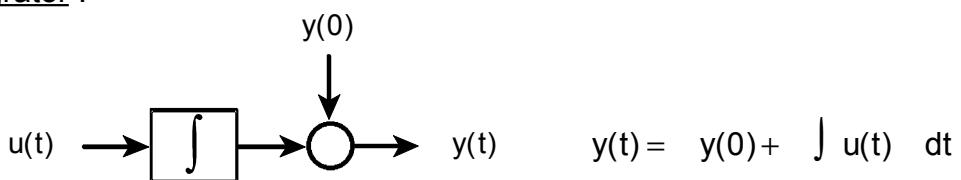
- Summierer : Das Ausgangssignal $z(t)$ ist die vorzeichengerechte Summe der Eingangssignale: $z(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t)$.



- Verstärker / Abschwächer :



- Integrator :



Wie man erkennt, werden nur drei elementare Systeme, nämlich

- Integratoren,
- Summierer und
- Verstärker (Abschwächer)

benötigt. Strukturbilder lassen sich dann direkt aus dem Zustandsmodell ableiten.

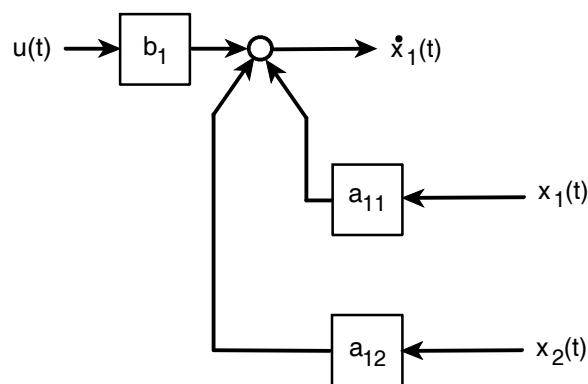
Beispiel A1.1.1: Zeichne das Strukturbild des folgenden Zustandsmodells

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [c_1 \quad c_2] \underline{x}(t)\end{aligned}\quad (\text{A1.1.1})$$

Wir multiplizieren (A1.1.1) zunächst aus

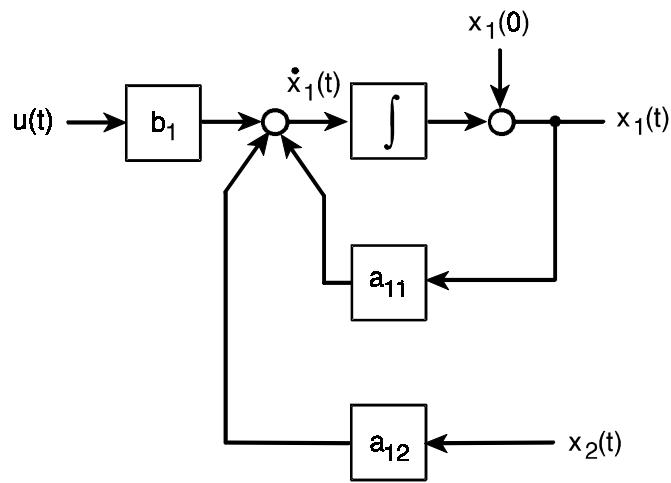
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t) \\ y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\end{aligned}\quad (\text{A1.1.2})$$

und sehen, daß sich z.B. $\dot{x}_1(t)$ aus der Summe $a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t)$ zusammensetzt. Dies können wir wie folgt bildlich darstellen:



Mit Hilfe des Integrators kann aus $\dot{x}_1(t)$ die Zustandsgröße $x_1(t)$ berechnet werden:

$$x_1(t) = x_1(0) + \int^t_0 \dot{x}_1(\tau) d\tau = x_1(0) + \int^t_0 (a_{11} x_1(\tau) + a_{12} x_2(\tau) + b_1 u(\tau)) d\tau,$$



Führt man diese Operation auch für die zweite Differentialgleichung aus und berücksichtigt die Ausgangsgleichung, erhält man das Strukturbild des Zustandsmodells (A1.1.1):

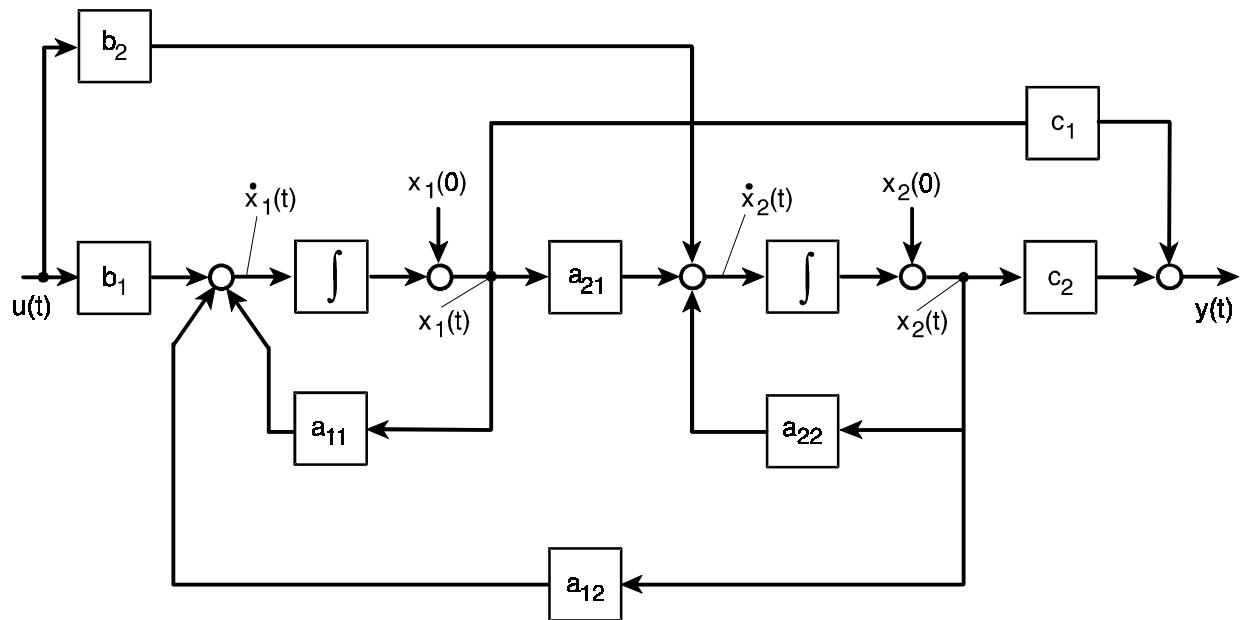


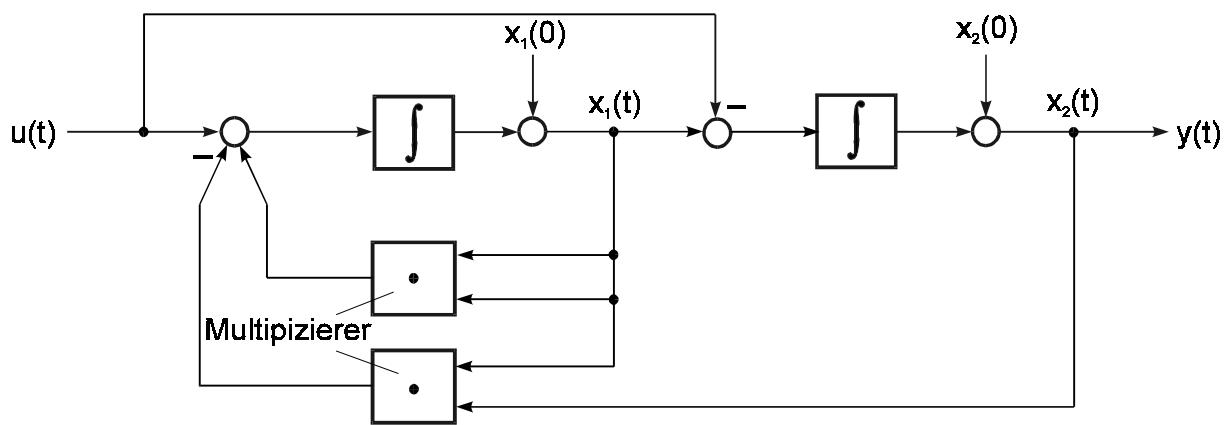
Bild A1.1.2 Strukturbild des Zustandsmodells (A1.1.1)

Auch nichtlineare Systeme lassen sich einfach durch Strukturbilder darstellen. Die nichtlinearen Strukturbildelemente sind überwiegend algebraische Operatoren, wie z.B. Multiplizierer, Wurzelbildner, Potenzierer und harmonische Funktionen. Wir betrachten dazu das folgende

Beispiel A1.1.2 : Zeichne das Strukturbild des nichtlinearen Systems (1.2.40)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)x_2(t) + (x_1(t))^2 + u(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - u(t) \\
 y(t) &= x_2(t)
 \end{aligned} \tag{A1.1.3}$$

Lösung:



A1.2 Berechnung von Übertragungsfunktionen aus Zustandsmodellen

Zur Berechnung von Übertragungsfunktionen aus Zustandsmodellen muß das Zustandsmodell zunächst in den Laplace-Bereich transformiert werden. Dies geschieht immer, egal wie hoch die Systemordnung ist, mit Hilfe des Ableitungs- und Linearitätssatzes der Laplace-Transformation. Wobei nach der Definition der Übertragungsfunktion (1.2.57) die Anfangswerte der Zustandsgrößen immer Null gesetzt werden.

Wir führen die Berechnung beispielhaft an einem System 2. Ordnung durch. Der Rechengang kann leicht auf Systeme höherer Ordnung verallgemeinert werden.

Das Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t) \\ y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\end{aligned}\quad (\text{A1.2.1})$$

hat nach der Transformation in den Laplace-Bereich folgende Form

$$s \cdot X_1(s) = a_{11} X_1(s) + a_{12} X_2(s) + b_1 U(s) \quad (\text{A1.2.2a})$$

$$s \cdot X_2(s) = a_{21} X_1(s) + a_{22} X_2(s) + b_2 U(s) \quad (\text{A1.2.2b})$$

$$Y(s) = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) . \quad (\text{A1.2.2c})$$

Wie man an der Übertragungsfunktion (1.2.61) erkennt, kommen in ihr keine Zustandsgrößen mehr vor. Ziel der weiteren Umformungen muß es also sein, die Zustandsgrößen zu eliminieren, so daß ein Ausdruck entsteht, in dem nur noch die Eingangsgröße $U(s)$, die Ausgangsgröße $Y(s)$ und die Systemparameter a_{ik} , b_i und c_j und die Laplace-Variable s vorkommen, um dann definitionsgemäß den Quotienten $G(s)=Y(s)/U(s)$ zu bilden, der die Übertragungsfunktion beschreibt.

Zu diesem Zweck formt man (A1.2.2a) und (A1.2.2b) wie folgt um

$$X_1(s) = f(a_{ik}, b_i, c_i, s, U(s)) \quad (\text{A1.2.3})$$

$$X_2(s) = f(a_{ik}, b_i, c_i, s, U(s)) \quad (\text{A1.2.4})$$

Die entstehenden Ausdrücke werden in die Ausgangsgleichung (A1.2.2c) eingesetzt. Es entsteht eine Gleichung in der keine Zustandsgrößen mehr vorkommen, nur noch $U(s)$, $Y(s)$, die Systemparameter und die Laplace-Variable s .

Im letzten Schritt wird diese Gleichung so umgeformt, daß sich der Quotient

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \dots,$$

die Übertragungsfunktion, bilden läßt.

Bei Systemen niedriger Ordnung ($n < 3$) ist dies noch mit den einfachen Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme möglich:

Dazu wird (A1.2.2a) durch Einsetzen von Gleichung (A1.2.2b), die zunächst noch nach $X_2(s)$ umgestellt wird

$$(s - a_{22})X_2(s) = a_{21}X_1(s) + b_2U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{a_{21}}{s - a_{22}}X_1(s) + \frac{b_2}{s - a_{22}}U(s)$$

so umgeformt, daß sich $X_1(s)$ in der Form (A1.2.3) dargestellt.

$$sX_1(s) = a_{11}X_1(s) + a_{12}\left(\frac{a_{21}}{s - a_{22}}X_1(s) + \frac{b_2}{s - a_{22}}U(s)\right) + b_1U(s)$$

$$\left(s - a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{s - a_{22}}\right)X_1(s) = \left(\frac{a_{12}b_2}{s - a_{22}} + b_1\right)U(s)$$

$$X_1(s) = \frac{\frac{a_{12}b_2}{s - a_{22}} + b_1}{s - a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{s - a_{22}}}U(s)$$

$$= \frac{b_1s + a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}U(s); \quad (\text{A1.2.5})$$

Der gleiche Rechnungsgang wird zur Bestimmung der Zustandsgröße $X_2(s)$ durchgeführt:

$$X_2(s) = \frac{b_2s + a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}U(s) . \quad (\text{A1.2.6})$$

Setzt man (A1.2.5) und (A1.2.6) in (A1.2.2c) ein, erhält man einen Ausdruck der nur noch $U(s)$, $Y(s)$, die Systemparameter und die Laplace-Variable s enthält:

$$Y(s) = \frac{c_1(b_1s + a_{12}b_2 - a_{22}b_1) + c_2(b_2s + a_{21}b_1 - a_{11}b_2)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} U(s).$$

Daraus lässt sich leicht die Übertragungsfunktion bilden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(c_1b_1 + c_2b_2)s + (c_1a_{12} - c_2a_{11})b_2 + (c_2a_{21} - c_1a_{22})b_1}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} U(s).$$

Die relative Komplexität des Rechenganges wird schon bei einem System 2. Ordnung deutlich. Liegen Systemparameter als numerische Werte vor, kann man den Rechengang mit Hilfe der Matrizenrechnung und geeigneter Rechnerunterstützung auch für Systeme höherer Ordnung wesentlich vereinfachen. Zunächst werden dazu (A1.2.2a/b) in folgende Form umgeformt:

$$\begin{aligned}(s - a_{11}) \cdot X_1(s) + a_{12} X_2(s) &= b_1 U(s) \\ a_{21} \cdot X_1(s) + (s - a_{22}) X_2(s) &= b_2 U(s)\end{aligned}'$$

die auch wie folgt dargestellt werden kann

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (s - a_{11}) & a_{12} \\ a_{21} & (s - a_{22}) \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 U(s) \\ b_2 U(s) \end{bmatrix}}_{\underline{b} U(s)}$$

Nach den Regeln der Matrizenrechnung (siehe Anhang A2) kann diese Gleichung wie folgt gelöst werden:

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} \cdot U(s)$$

Die so berechneten $X_i(s)$ können wieder in (A1.2.2c) eingesetzt und $G(s)$ berechnet werden.

Das CAE-Programm Matlab ermöglicht die numerische Umrechnung von Zustandsmodellen in Übertragungsfunktionen mit nur einem Befehl. Nähere Einzelheiten können im Matlab-Skript /16/ nachgelesen werden.

A1.3 Kataloggestützte experimentelle Modellbildung

Betrachtet man den Katalog der Beschreibungsformen der wichtigsten Übertragungsglieder im Kapitel 1.4, erkennt man, daß sich die Sprungantworten der verschiedenen Übertragungssysteme relativ stark voneinander unterscheiden. Bei noch genauerer Betrachtung erkennt man weiterhin, daß auch die Strukturen der systembeschreibenden Übertragungsfunktionen bei allen Systemen verschieden sind. Das heißt, zu jeder Sprungantwort gehört eine spezifische Übertragungsfunktionsform.

Auf Grund der durch die Laplace-Transformation gegebenen Beziehungen zwischen Zeit- und Laplace-Bereich können darüber hinaus durch Vermessung markanter Punkte der Sprungantwort Daten gewonnen werden, mit Hilfe derer sich die unbekannten Parameter der gefundenen Übertragungsfunktion berechnen lassen. Der Ergebnis ist ein mathematische Modell des vermessenen Systems in Form einer Übertragungsfunktion.

Diese Tatsache macht man sich bei der kataloggestützten experimentellen Modellbildung zu Nutze: Man mißt die Sprungantwort des zu modellierenden Systems mit einer Sprungerregung der Amplitude Δu , sucht im Katalog in Kapitel 1.4 die ähnlichste Sprungantwortform heraus, liest die dazugehörige Übertragungsfunktions-Form ab und berechnet die unbekannten Systemparameter der Übertragungsfunktion, wie dort angegeben.

Beispiel A1.3.1

Ein Übertragungssystem antwortet auf das Eingangssignal

$$u(t) = \Delta u \cdot \sigma(t); \quad \Delta u = 1;$$

mit einem Verlauf der Ausgangsgröße, wie er auf Bild A1.3.1 auf der folgenden Seite dargestellt ist. Bestimmen Sie das mathematische Modell des Systems in Form einer Übertragungsfunktion!

Zur Lösung wird der Katalog "Eine Übersicht über die Beschreibungsformen der wichtigsten Übertragungsglieder" in Kapitel 1.4 nach einer mit der gemessenen Sprungantwortform übereinstimmende Sprungantwort gesucht. Im vorliegenden Fall

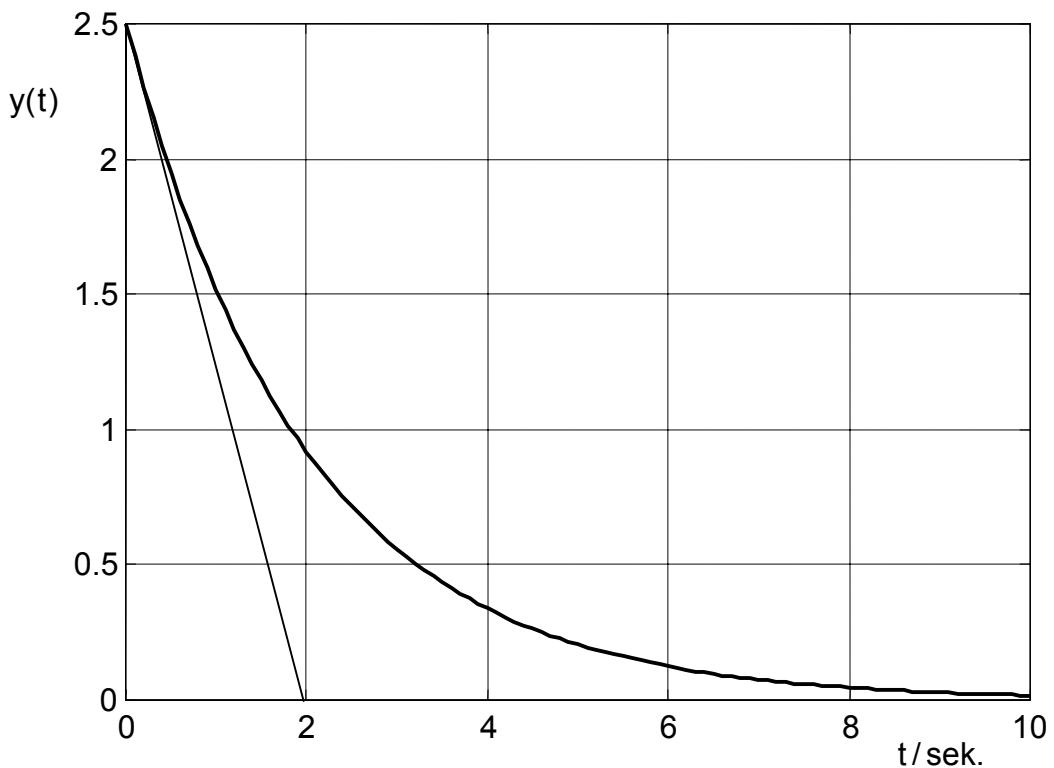


Bild A1.3.1: Sprungantwort eines zu identifizierenden Systems

ist dies die Katalognummer 8, der Differenzierer mit Verzögerung erster Ordnung. (Katalognummer 9 hat eine ähnliche Sprungantwort, kommt aber nicht in Frage, weil die Systemantwort für $t \rightarrow \infty$ nicht gegen Null läuft.). Damit ist die Struktur der systembeschreibenden Übertragungsfunktion gefunden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V \cdot s}{1 + sT}.$$

Nun müssen die unbekannten Parameter V und T der Übertragungsfunktion bestimmt werden.

Wie man deutlich erkennt, kann die Verzögerungszeitkonstante T durch anlegen einer Tangente an die Sprungantwort in der Spitze ermittelt werden. In unserem Falle kann man $T = 2$ ablesen.

Aus der Beschriftung der Sprungantwort in der Katalognummer 8 ist zu erkennen, daß der Anfangswert der Sprungantwort $y(0)$ durch

$$\frac{V \cdot \Delta u}{T}$$

beschrieben wird. Dieser Anfangswert beträgt im vorliegenden Falle 2,5 , so daß

$$\frac{V \cdot \Delta u}{T} = 2,5$$

gilt, woraus durch Umstellen nach V und Einsetzen von T = 2 und Δu = 1

$$V = \frac{2,5 \cdot T}{\Delta u} = \frac{2,5 \cdot 2}{1} = 5$$

berechnet wird. Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s}{1+2s}.$$

Da noch andere Sprungantwortformen als die im Katalog dargestellten existieren, kann die kataloggestützte Modellbildung nur sehr unvollständig sein. Einen tieferen Einblick in die Möglichkeiten der experimentellen Modellbildung findet man in /17/, eine nahezu vollständige Beschreibung des aktuellen Standes der experimentellen Modellbildung in /18/.

A1.4 Berücksichtigung von Einheiten in Zustandsmodellen

Bei systemtheoretischen Problemen formuliert man mathematische Modelle der Übersichtlichkeit halber gern einheitenlos. Die praktische Problemstellung selbst ist aber immer mit Einheiten behaftet.

Diese Kapitel zeigt Wege auf, wie man beiden Tatsachen gerecht werden kann. Die Zusammenhänge sollen exemplarisch an einem Beispiel erläutert werden.

Eine Widerstands- / Kondensator-Kombination (RC-Kombination), wie sie im Beispiel 1.2.4 beschrieben wurde hatte folgendes Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{u}_C(t) &= -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_e(t) \\ u_a(t) &= u_C(t).\end{aligned}\tag{A1.4.1}$$

Durch Einsetzen der Grundeinheiten (Ampere [A] statt Kiloampere [kA] oder Milliampere [mA]) für die vorkommenden Signale

$$\begin{aligned}u_C(t) &: \text{ Volt [V];} \\ u_e(t) &: \text{ Volt [V];} \\ u_a(t) &: \text{ Volt [V];}\end{aligned}\tag{A1.4.2a}$$

und Systemparameter

$$\begin{aligned}R &: \text{ Ohm } [\Omega]; \\ C &: \text{ Farad } [F];\end{aligned}\tag{A1.4.2b}$$

und die Zeit (z.B. dt in $\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt}$) in Sekunden [sek] (A1.4.2c)

erhält man folgendes Zustandsmodell mit Einheiten

$$\begin{aligned}\dot{u}_C(t)\left[\frac{\text{V}}{\text{sek}}\right] &= -\frac{1}{RC}\left[\frac{1}{\Omega F}\right]u_C(t)[\text{V}] + \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{\Omega F}\right]u_e(t)[\text{V}] \\ u_a(t)[\text{V}] &= u_C(t)[\text{V}].\end{aligned}\tag{A1.4.3}$$

In der Ausgangsgleichung kann die Einheit [V] auf der rechten und linken Gleichungsseite bereits gekürzt werden. Damit ist die Ausgangsgleichung bereits

einheitenlos. Um auch die Differentialgleichung einheitenlos zu machen, müssen die Einheiten der Systemparameter Ω und F so umgerechnet werden, daß sie sich aus den Einheiten der Signale zusammensetzen:

$$1\Omega = \frac{1V}{1A};$$

$$1F = \frac{1C}{1V} = \frac{1A\text{sek}}{1V}, \quad (\text{A1.4.4})$$

C : Coulomb

Diese Zusammenhänge zwischen den Einheiten findet man in Tabellenwerken über SI-Einheiten.

Setzt man die Einheiten (A1.4.4) in das Zustandsmodell (A1.4.3) ein,

$$\dot{u}_c \left[\frac{V}{\text{sek}} \right] (t) = -\frac{1}{RC} \left[\frac{A\text{V}}{\text{V}\text{Asek}} \right] u_c(t)[V] + \frac{1}{RC} \left[\frac{A\text{V}}{\text{V}\text{Asek}} \right] u_e(t)[V], \quad (\text{A1.4.5})$$

sieht man, daß sowohl die Terme auf der linken als auch auf der rechten Gleichungsseite die Einheit $\left[\frac{V}{\text{sek}} \right]$ tragen. Diese Einheiten können nun ebenfalls

gekürzt werden, womit das ganze Zustandsmodell einheitenlos ist.

Bei einem richtig aufgestellten Zustandsmodell ist es immer möglich durch solche Umformungen die Situation gleicher Einheiten auf beiden Gleichungsseiten herbeizuführen. (Dies kann unter Umständen als Indiz für eine richtig durchgeföhrte Modellbildung genutzt werden.)

Will man nun analytisch eine Systemantwort berechnen, tut man dies auf der Basis des einheitenlosen Zustandsmodell. Das berechnete Ausgangssignal $y(t)$ hat dann die Einheit, die man ihm vor der Kürzung im Zustandsmodell zugewiesen hat.

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise soll das **Beispiel A1.4.1** gerechnet werden:

Gegeben ist ein RC-Glied nach Bild 1.2.7 und dem Zustandsmodell (A1.4.1) mit $R = 1k\Omega$ und $C = 1000\mu F$. Berechnen Sie die Systemantwort $u_a(t)$ auf folgende Eingangserregung: $u_e(t) = 100mV \cdot \sigma(t)$.

Zur Lösung wird das Zustandsmodell mit Zahlenwerten der Grundeinheiten $u(t)$ [V]; $R[\Omega]$ und $C[F]$ hingeschrieben:

$$\dot{u}_C \left[\frac{V}{\text{sek}} \right] (t) = -\frac{1}{1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \left[\frac{1}{\Omega F} \right] u_C(t)[V] + \frac{1}{1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \left[\frac{1}{\Omega F} \right] u_e(t)[V]$$

$$u_a(t)[V] = u_C(t)[V].$$

Jetzt werden die Zahlenwerte zusammengefaßt, die Einheiten umgerechnet, eingesetzt und gekürzt:

$$\dot{u}_C \left[\frac{V}{\text{sek}} \right] (t) = -1 \left[\frac{\mathcal{A}V}{\mathcal{V}\mathcal{A}\text{sek}} \right] u_C(t)[V] + 1 \left[\frac{\mathcal{A}V}{\mathcal{V}\mathcal{A}\text{sek}} \right] u_e(t)[V]$$

$$u_a[V](t) = u_C(t)[V].$$

Damit ist das Zustandsmodell einheitenslos:

$$\dot{u}_C \left[\frac{V}{\text{sek}} \right] (t) = -1 \left[\frac{1}{\text{sek}} \right] u_C(t)[V] + 1 \left[\frac{1}{\text{sek}} \right] u_e(t)[V]$$

$$u_a[V](t) = u_C(t)[V].$$

Jetzt kann die Systemantwort berechnet werden:

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \cdot U_e(s) \}.$$

Zur Berechnung von $G(s)$ wird zunächst das Zustandsmodell in den Laplace-Bereich transformiert

$$sU_C(s) = -U_C(s) + U_e(s)$$

$$U_a(s) = U_C(s);$$

und anschließend der Quotient $G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)}$ gebildet:

$$sU_a(s) = -U_a(s) + U_e(s)$$

$$U_a(s) \cdot (s + 1) = U_e(s)$$

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{s + 1}.$$

Bei der Berechnung von $U(s)$ muß auf die anfangs gemachte Festlegung geachtet werden, daß $u_e(t)$ in Volt [V] angegeben wird. Da die Amplitude des Eingangssprungs

100mV betrug, wird

$$u_e(t) = 0,1 \cdot \sigma(t)$$

und damit

$$U_e(s) = \frac{0,1}{s}.$$

Damit ergibt sich folgende Lösung im Laplace –Bereich

$$U_a(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{0,1}{s}.$$

Nach Partialbruchzerlegung

$$U_a(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs}{s(s+1)}$$

$$\begin{aligned} A &= 0,1 \\ A + B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 0,1 \\ B &= -0,1 \end{aligned}$$

$$U_a(s) = 0,1 \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\}$$

und Rücktransformation folgt das Ergebnis

$$u_a(t) = 0,1 \left(1 - e^{-t} \right) [V].$$

$u_a(t)$ hat die Einheit Volt, da wir es anfangs so festgelegt hatten.

A2 Grundlagen der Matrizenrechnung und linearer Gleichungssysteme.

A2.1 Matrizen und Vektoren

 A2.1.1 Der Typ einer Matrix

 A2.1.2 Einige besondere Matrizen

A2.2 Verknüpfungen von Matrizen

 A2.2.1 Addition und Subtraktion

 A2.2.2 Multiplikation

 A2.2.3 Die inverse Matrix

 A2.2.3.1 Einiges über Determinanten

 A2.2.3.2 Die Berechnung der inversen Matrix

A2.3 Lineare Gleichungssysteme

A2.4 Numerische Methoden

A2.1 Matrizen und Vektoren

Eine Matrix ist ein rechteckiges, nach m Zeilen und n Spalten geordnetes Schema von $m \times n$ Elementen a_{ik} . Die Elemente sind i.A. Zahlen, können aber auch Funktionen sein.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ik} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \begin{array}{l} i: \text{Zeilenindex} \\ k: \text{Spaltenindex} \end{array} \quad (\text{A2.1.1})$$

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit können die Matrixelemente einer Zeile auch durch Kommas oder Semikolons getrennt werden.

Ist einer der Indizes $m = 1$ oder $n = 1$ spricht man nicht mehr von einer Matrix, sondern von einem Vektor:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \underline{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]. \quad (\text{A2.1.2})$$

Ein stehender Vektor (b) wird Spalten-, ein liegender Vektor (d) wird Zeilenvektor genannt. Die Kurzbezeichnung für eine Matrix ist häufig ein großer unterstrichener Buchstabe, für einen Vektor ein kleiner unterstrichener Buchstabe. Man kann sich eine Matrix aus $m \times n$ Elementen oder aus n -Stück m -steligen Spaltenvektoren oder aus m -Stück n -steligen Zeilenvektoren aufgebaut vorstellen, z.B.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \\ \underline{g}_3 \end{bmatrix} = [\underline{h}_1, \underline{h}_2, \underline{h}_3]. \quad (\text{A2.1.3})$$

Ob es sich bei den \underline{g}_i oder \underline{h}_i um Zeilen- oder Spaltenvektoren handelt, ist der Schreibweise der Matrix, die diese Vektoren beinhaltet, zu entnehmen. In der Spaltenschreibweise der Matrix A sind die Vektoren \underline{g}_i Zeilenvektoren.

$$\begin{aligned}\underline{g}_1 &= [a_{11}, a_{12}, a_{13}] \\ \underline{g}_2 &= [a_{21}, a_{22}, a_{23}] . \\ \underline{g}_3 &= [a_{31}, a_{32}, a_{33}]\end{aligned}\quad (\text{A2.1.4})$$

In der Zeilenschreibweise der Matrix \underline{A} sind die Vektoren \underline{h}_i Spaltenvektoren

$$\underline{h}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}; \quad \underline{h}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}; \quad \underline{h}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} . \quad (\text{A2.1.5})$$

A2.1.1 Der Typ einer Matrix

- Eine Matrix mit m -Zeilen und n -Spalten heißt $m \times n$ -Matrix.
- Ein Zeilenvektor ist eine $1 \times n$ -Matrix.
- Ein Spaltenvektor ist eine $m \times 1$ -Matrix.
- Eine $m \times n$ -Matrix mit $m = n$ ist eine quadratische Matrix, die man $n \times n$ -Matrix nennt.
- Eine $n \times n$ -Matrix mit $n = 1$ ist eine Zahl, die man häufig in diesem Zusammenhang Skalar nennt.

A2.1.2 Einige besondere Matrizen

- Die transponierte Matrix

Vertauscht man in einer gegebenen Matrix \underline{A} die Zeilen gegen die entsprechenden Spalten oder umgekehrt, bezeichnet man die entstehende Matrix als die transponierte Matrix \underline{A}' und beschreibt sie mit \underline{A}' :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} . \quad (\text{A2.1.6})$$

Im Falle von Vektoren bewirkt die Transponierung, daß aus einem Spaltenvektor ein Zeilenvektor wird und umgekehrt

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{c}' = [c_1, c_2, c_3]; \quad \underline{b}' = [b_1, b_2, b_3] \Rightarrow \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} . \quad (\text{A2.1.7})$$

Bemerkung: Wir werden Zeilenvektoren häufig mit einem Transpositionszeichen versehen, um deutlich klar zu machen, daß es sich um einen Zeilenvektor handelt.

- Die Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente außerhalb der sog. Hauptdiagonalen (von oben links nach unten rechts) Null sind, heißt Diagonalmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.1.8})$$

- Die Einheitsmatrix

Eine Diagonalmatrix, in der alle Elemente der Hauptdiagonalen gleich Eins sind, wird Einheitsmatrix genannt. Für sie reservieren wir die Bezeichnung \underline{E}

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.1.9})$$

Weitere besondere Matrixformen werden in /14/ beschrieben.

A2.2 Verknüpfungen von Matrizen

Wie für das Rechnen mit Zahlen gibt es Verknüpfungsoperationen für Matrizen und Vektoren. Die wichtigsten Verknüpfungsregeln werden im folgenden zusammengestellt.

A2.2.1 Addition und Subtraktion

Es können nur Matrizen vom gleichen Typ (vergleiche Kapitel A2.1.1) addiert oder subtrahiert werden; sie werden addiert bzw. subtrahiert indem die einander entsprechenden Elemente addiert bzw. subtrahiert werden:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \pm \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11}; & a_{12} \pm b_{12}; & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21}; & a_{22} \pm b_{22}; & a_{32} \pm b_{32} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.1})$$

Darüber hinaus gelten das

- Kommutativgesetz: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$ (A2.2.2)

- Assoziativgesetz: $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$. (A2.2.3)

A2.2.2 Multiplikation

a) Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit dem Skalar multipliziert wird

$$k \cdot \underline{A} = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.4})$$

Diese Regel gilt auch umgekehrt: haben alle Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor, so kann dieser vor die Matrix gezogen werden. Darüber hinaus gelten das

- Kommutativgesetz: $k \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot k$ (A2.2.5)

- Assoziativgesetz: $k \cdot (l \cdot \underline{A}) = (k \cdot l) \cdot \underline{A} = k \cdot l \cdot \underline{A}$ (A2.2.6)

- Distributivgesetz: $(k \pm l) \cdot \underline{A} = k \cdot \underline{A} \pm l \cdot \underline{A}$ (A2.2.7)

b) Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen \underline{A} vom Typ $m \times n$ und \underline{B} vom Typ $k \times p$ lassen sich multiplikativ miteinander verknüpfen: $\underline{A} \cdot \underline{B}$, wenn der Spaltenindex n der linken Matrix \underline{A} mit dem Zeilenindex k der rechten Matrix \underline{B} übereinstimmt: $n = k = n$. Die Ergebnismatrix $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$ ist dann vom Typ $m \times p$:

$$\underline{A}: [m \times n] \cdot \underline{B}: [n \times p] = \underline{C}: [m \times p]$$

(A2.2.8)

Im allgemeinen Fall gilt daher das kommutative Gesetz nicht, d.h. $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$, falls die beiden Matrizen überhaupt in beiden Richtungen multiplizierbar sind.

Als Produkt einer $m \times n$ -Matrix A und einer $n \times p$ -Matrix B in der Reihenfolge A · B ist die $m \times p$ -Matrix C definiert, in der die Elemente

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} \cdot b_{\nu k}; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, p \quad (A2.2.9)$$

sind. Für die Multiplikation von Hand empfiehlt sich das Schema von Falk:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} \\ c_{12} &= a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ c_{21} &= a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} \\ c_{22} &= a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \\ &\vdots \\ c_{42} &= a_{41} \cdot b_{12} + a_{42} \cdot b_{22} + a_{43} \cdot b_{32} \end{aligned} \quad z.B. \quad (A2.2.10)$$

d.h. ein Element c_{ik} berechnet sich aus der Produktsumme der Zeile i von A und der Spalte k von B. Die Verbindungslien der Zeile und der Spalte schneiden sich genau im zu berechnenden Element c_{ik} (siehe herausgehobenes Beispiel). Auch eine fortgesetzte Multiplikation ist nach diesem Schema, sofern immer die Bedingung (A2.2.8) erfüllt ist, möglich, z.B.:

$$E = A \cdot B \cdot C \cdot D = \underbrace{[\dots]}_{A} \underbrace{[\dots]}_{B} \underbrace{[\dots]}_{C} \underbrace{[\dots]}_{D} = E$$

Die Matrixmultiplikation ist, sofern die Matrizen verknüpfbar sind, assoziativ

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{C} = (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) . \quad (\text{A2.2.11})$$

Es sei noch auf die folgenden Verknüpfungszusammenhänge hingewiesen:

- Die Multiplikation einer quadratischen Matrix \underline{A} mit der Einheitsmatrix \underline{E} führt immer auf die Ursprungsmatrix

$$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A} . \quad (\text{A2.2.12})$$

- Die Transponierte einer Produktmatrix ist das umgedrehte Produkt der einzeln transponierten Matrizen

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})' = \underline{B}' \cdot \underline{A}' . \quad (\text{A2.2.13})$$

A2.2.3 Die inverse Matrix

Die inverse Matrix \underline{A}^{-1} einer quadratischen Matrix \underline{A} ist die Matrix, die mit der Ursprungsmatrix \underline{A} von links oder von rechts multipliziert immer die Einheitsmatrix \underline{E} ergibt

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E} . \quad (\text{A2.2.14})$$

(Die inverse Matrix kann als Äquivalent zur Division bei Skalaren $b^{-1} = 1/b$ betrachtet werden). Zur Berechnung einer inversen Matrix \underline{A} muß immer die Bedingung erfüllt sein, daß \underline{A} regulär ist. \underline{A} ist regulär, wenn ihre Determinante $\det \underline{A} \neq 0$ ist.

A2.2.3.1 Einiges über Determinanten

Jeder quadratischen Matrix \underline{A} ist eine Determinante $\det \underline{A}$ zugeordnet. Determinanten haben im Gegensatz zu Matrizen einen ganz bestimmten Zahlenwert. Um zu zeigen, wie dieser berechnet wird, müssen die folgenden Begriffe eingeführt werden:

- Unterdeterminanten

Werden eine Zeile und eine Spalte einer Determinante gestrichen, so ergeben die restlichen Elemente, zu einer neuen Determinante zusammengefaßt, die zu dem im Kreuzungspunkt der Striche stehenden Element gehörige Unterdeterminante, z.B.:

$$\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.2.15})$$

ist die zum Element a_{21} gehörende Unterdeterminante der Determinante

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.16})$$

- Adjunkten einer Matrix

Versieht man die Unterdeterminante, je nachdem ob die Summe der Indizes $i + k$ des dazugehörigen Kreuzungselements gerade oder ungerade ist, mit einem positiven Vorzeichen ($i + k$: gerade) oder einem negativen Vorzeichen ($i + k$: ungerade), nennt man diese Unterdeterminante Adjunkte des entsprechenden Kreuzungselements.

Adjunkten werden mit großen Buchstaben abgekürzt und den gleichen doppelten Indizes versehen wie die dazugehörigen Kreuzungselemente. So ist z.B. die zur Unterdeterminante (A2.2.16) gehörige Adjunkte

$$A_{21} = - \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad (\text{A2.2.17})$$

↑

wegen $2+1$: ungerade.

Als Matrix der Adjunkten, die wir später noch benötigen, wird der folgenden Ausdruck bezeichnet

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.18})$$

- Berechnung des Wertes einer Determinanten

Der Wert einer Determinante wird nach folgendem sog. Entwicklungssatz berechnet:

Werden die Elemente einer Zeile oder einer Spalte jeweils mit der dazugehörigen Adjunkten multipliziert und anschließend addiert, so ergibt diese Produktsumme den Wert der Determinante:

$$\det \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.19})$$

Entwicklung z.B. zur zweiten Spalte ergibt

$$\det \underline{A} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + \cdots + a_{n2} \cdot A_{n2},$$

oder Entwicklung z.B. zur ersten Zeile ergibt

$$\det \underline{A} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}.$$

Beispiel 2.1: Berechne die Determinante der Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.2.20})$$

Entwicklung zur ersten Zeile:

$$A_{11} = a_{22}; \quad A_{12} = -a_{21} \quad (\text{A2.2.21})$$

$$\det \underline{A} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (\text{A2.2.22})$$

- Vereinfachungsregeln zur Berechnung von Determinanten:

Bevor man den Entwicklungssatz für Determinanten anwendet, bemüht man sich, die Anzahl der Rechenoperationen zu minimieren. Dabei sind folgende Sätze hilfreich :

- Sind sämtliche Elemente einer Reihe (Zeile oder Spalte) Null, dann ist der Wert der Determinante Null.
- Determinanten mit gleichen oder proportionalen parallelen Reihen haben den Wert Null.

- Ein allen Elementen einer Reihe gemeinsamer Faktor kann vor die Determinante gezogen werden.
- Wird zu einer Reihe einer Determinante ein Vielfaches einer Parallelreihe addiert bzw. subtrahiert, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. (Dieser letzte Satz wird dazu benutzt, in einer Reihe viele Nullelemente zu erzeugen, damit möglichst wenig Unterdeterminanten berechnet werden müssen).

Beispiel 2.2: Berechne den Wert der Determinante der folgenden Matrix \underline{A}

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 & 2 \\ 12 & 8 & -6 & 4 \\ -10 & -7 & 7 & -3 \\ 14 & 13 & -6 & 8 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.23})$$

Bei genauem Hinsehen ist zu erkennen, daß in der zweiten Zeile viele Nullen entstehen, wenn man von der zweiten Zeile das Doppelte der ersten Zeile abzieht

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -7 & 7 & -3 \\ 14 & 13 & -6 & 8 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.24})$$

Da nun in der zweiten Zeile nur das Element $a_{21} \neq 0$ ist, wird die Determinante zur zweiten Zeile entwickelt

$$\det \underline{A} = 2 \cdot A_{21} \quad (\text{A2.2.25})$$

$$A_{21} = (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -7 & 7 & -3 \\ 13 & -6 & 8 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.26})$$

Die neue entstandene Determinante wird nun wieder zu einer Zeile oder Spalte entwickelt. Zunächst wird die zweite Spalte zur ersten addiert

$$A_{21} = (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.27})$$

und diese Determinante zur ersten Spalte entwickelt

$$A_{21} = (-1) \left\{ 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} + 7 \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{A2.2.28})$$

Die entstandenen zweireihigen Determinanten können mit (2.24) gelöst werden

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1) \{7 \cdot 8 - (-3) \cdot (-6) + 7 \cdot ((-3) \cdot (-3) - 2 \cdot 7)\} \\ A_{21} &= (-1) \{38 - 35\} = -3 \end{aligned} \quad (\text{A2.2.29})$$

Die Determinante von \underline{A} ergibt sich damit zu

$$\det \underline{A} = 2 \cdot A_{21} = 2 \cdot (-3) = \underline{\underline{-6}} \quad (\text{A2.2.30})$$

A2.2.3.2 Berechnung der inversen Matrix

Transponiert man die Matrix der Adjunkten (A2.2.18) der Matrix \underline{A} , erhält man deren adjungierte Matrix $\text{adj } \underline{A}$

$$\text{adj } \underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.31})$$

Die inverse Matrix \underline{A}^{-1} zur Matrix \underline{A} berechnet sich nun, indem man die Elemente der adjungierten Matrix $\text{adj } \underline{A}$ durch den Wert der Determinante $\det \underline{A}$ dividiert :

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \underline{A}}{\det \underline{A}}. \quad (\text{A2.2.32})$$

Beispiel 2.3: Berechne die inverse Matrix \underline{A}^{-1} zur folgenden Matrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.33})$$

a) Berechnung der Matrix der Adjunkten von \underline{A}

$$A_{11} = +a_{22}; \quad A_{12} = -a_{21}; \quad A_{21} = -a_{12}; \quad A_{22} = +a_{11}.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.34})$$

b) Berechnung der adjungierten Matrix

$$\underline{\text{adj } A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.35})$$

c) Berechnung der Determinante $\det \underline{A}$, z.B. durch Entwicklung zur zweiten Zeile

$$A_{21} = -a_{12}; \quad A_{22} = a_{11}$$

$$\det \underline{A} = A_{21} \cdot a_{21} + A_{22} \cdot a_{22} = -a_{12} \cdot a_{21} + a_{11} \cdot a_{22}$$

$$\det \underline{A} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (\text{A2.2.36})$$

d) Damit ergibt sich die inverse Matrix \underline{A}^{-1} zu

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \underline{A}}{\det \underline{A}} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.2.37})$$

Es sei noch angemerkt, daß ähnlich wie bei der Transponierung folgende Beziehung gilt

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}. \quad (\text{A2.2.38})$$

Weitere Ausführungen zu Matrizen finden sich in der Literatur.

A2.3 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme sind Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
 a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\
 &\vdots && \vdots && \vdots \\
 a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{A2.3.1}$$

wobei die a_{ik} und die b_i bekannte und die x_k unbekannte Größen sind. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des wichtigsten Spezialfalles linearer Gleichungssysteme mit $m = n$, d.h. es liegen keine über- oder unterbestimmte Systeme vor :

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
 a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\
 &\vdots && \vdots && \vdots \\
 a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n
 \end{aligned} \tag{A2.3.2}$$

(A3.2) kann in Matrixschreibweise wie folgt dargestellt werden

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \tag{A2.3.3}$$

Der Vektor der unbekannten Variablen \underline{x} aus

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \tag{A2.3.4}$$

kann durch Multiplikation von links mit der inversen Matrix von \underline{A}

$$\begin{aligned}
 \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} &= \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} \\
 \underline{E} \cdot \underline{x} &= \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} \\
 \underline{x} &= \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}
 \end{aligned} \tag{A2.3.5}$$

berechnet werden. Voraussetzung ist dafür aber bekanntlich, daß \underline{A}^{-1} invertierbar ist. Dazu muß A regulär sein, d.h. $\det(A) \neq 0$ sein.

Bei weniger als vier Unbekannten \underline{x} benutzt man zur Lösung häufig die aus der Schule bekannten Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren. Sehr systematisch - unter Umgehung der Bildung einer inversen Matrix - lassen sich lineare Gleichungssysteme mit der sog. CRAMERschen Regel von Hand berechnen:

Das lineare Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ hat im Falle $\det \underline{A} \neq 0$ die Lösung

$$x_k = \frac{\det \underline{A}_k}{\det \underline{A}}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A2.3.6})$$

Wobei die quadratische Matrix \underline{A}_k aus \underline{A} entsteht, wenn die k -te Spalte durch \underline{b} ersetzt wird.

Beispiel 3.1: Berechne den Lösungsvektor \underline{x} des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 4x_1 - 3x_2 &= 11. \end{aligned} \quad (\text{A2.3.7})$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}; \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}; \underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}; \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det \underline{A}_1}{\det \underline{A}} = \frac{-12 - 22}{-9 - 8} = \frac{-34}{-17} = 2 \\ x_2 &= \frac{\det \underline{A}_2}{\det \underline{A}} = \frac{33 - 16}{-17} = \frac{17}{-17} = -1 \end{aligned}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.3.8})$$

A2.4 Numerische Methoden

In den vorangegangenen Ausführungen haben wir primär analytische Methoden, z.B. zur Berechnung der inversen Matrix kennengelernt. Diese Methoden sind wichtig, wenn man zur Ableitung von Problemlösungen die theoretischen Wirkungszusammenhänge

studieren will. Für praktische Anwendungen greift man gern auf numerische Algorithmen zurück, mit denen es gelingt, Matrixoperationen rechnergestützt auszuführen.

Die analytischen Lösungsmethoden zur Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen lassen sich leicht algorithmisch formulieren und können so direkt zur numerischen Berechnung herangezogen werden. Zur Multiplikation von Matrizen muß z.B. die Formel (A2.2.9) angewendet werden.

Da die Notwendigkeit zur Bildung einer inversen Matrix primär bei der Lösung linearer Gleichungssysteme

$$A \cdot x = b \quad (\text{A2.4.1})$$

auftritt, werden überwiegend numerische Algorithmen zur Lösung dieser Problemstellung angegeben. Dabei taucht die inverse Matrix explizit gar nicht auf.

Man unterscheidet direkte und iterative numerische Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Die bekanntesten direkten Verfahren sind

- das Eliminationsverfahren von Gauß,
- die Links-Rechts-Zerlegung in zwei dreieckige Matrizen (LU- oder LR-Zerlegung),
- das Gauß-Jordan-Verfahren.

Die iterativen Verfahren arbeiten schrittweise und verbessern die Lösung in jedem Rechenschritt. Das bekannteste iterative Verfahren ist das Gauß-Seidel-Verfahren.

Das Programmsystem Matlab (siehe entsprechendes Skript) stellt einige dieser Verfahren zur Verfügung. Am häufigsten wird das Eliminationsverfahren von Gauß benutzt: Zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = b \quad (\text{A2.4.2})$$

muß nach (A2.3.5) folgender Ausdruck

$$x = A^{-1} \cdot b \quad (\text{A2.4.3})$$

berechnet werden. Matlab leistet dies mittels folgender Anweisung

$$x = A \setminus b . \quad (\text{A2.4.4})$$

In einigen Fällen ist auch die explizite Kenntnis der Inversen einer Matrix notwendig. Diese Berechnung gelingt z.B. mit dem Gauß-Jordan-Verfahren . Unter Matlab kann die inverse Matrix A_i von A mittels des Befehls

$$A_i = \text{inv}(A) \quad (\text{A2.4.5})$$

berechnet werden. (A2.4.4) berechnet den Lösungsvektor x wesentlich schneller und exakter als der Ausdruck

$$x = \text{inv}(A) * b . \quad (\text{A2.4.6})$$

Die Determinante

$$\det(A) . \quad (\text{A2.4.7})$$

einer Matrix A wird numerisch durch Links-Rechts-Zerlegung mittels Gauß-Elimination berechnet . Matlab stellt dazu folgenden Befehl zur Verfügung

$$\det_A = \det(A) . \quad (\text{A2.4.8})$$