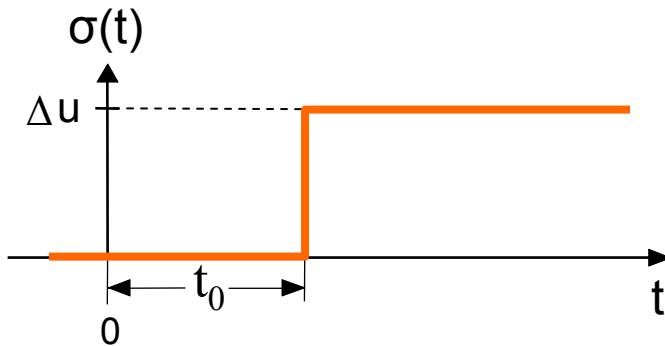


Signal- und Systembeschreibung im Zeitbereich

Systeme dienen zur Übertragung und Beeinflussung von Signalen

Als Signale werden beliebige zeitabhängige Funktionen bezeichnet

Die Sprungfunktion $\sigma(t)$ stellt ein wichtiges Elementarsignal dar, da sich viele andere Signale aus Sprungfunktionen konstruieren lassen



$$\Delta u \cdot \sigma(t - t_0) = \begin{cases} \Delta u & \text{für } t \geq t_0 \\ 0 & \text{für } t < t_0 \end{cases}$$

$\Delta u = 1 \rightarrow$ Einheitssprung

Bei einem Sprung der Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ reagiert ein System am Ausgang mit der sogenannten **Sprungantwort** $y(t) = h(t)$



Energie und Leistung von Signalen

Eine Spannung $u(t)$ erzeugt in einem ohmschen Widerstand R die Augenblicksleistung $p(t)$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

Allgemein wird als **Leistung $p(t)$** eines Signals $s(t)$ das Quadrat seines Augenblickswertes $s(t)$ bezeichnet:

$$p(t) = s^2(t)$$

Die **Gesamtenergie E** eines Signals ergibt sich durch Integration über $p(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

Die **mittlere Leistung P** in einem Zeitintervall $t_2 - t_1$ kann auch bei Signalen mit unbegrenzter Energie angegeben werden

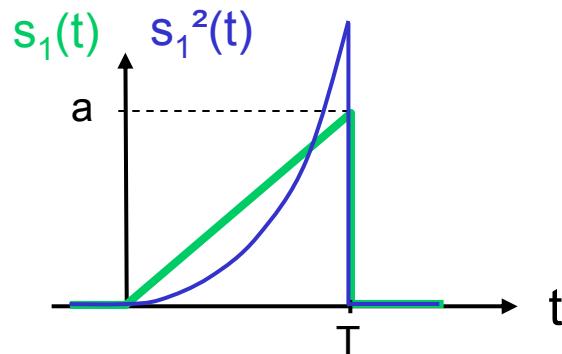
$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

Bei periodischen Signalen wird für P als Integrationsintervall die Periodendauer T gewählt



Beispiele zur Berechnung von Energie und Leistung

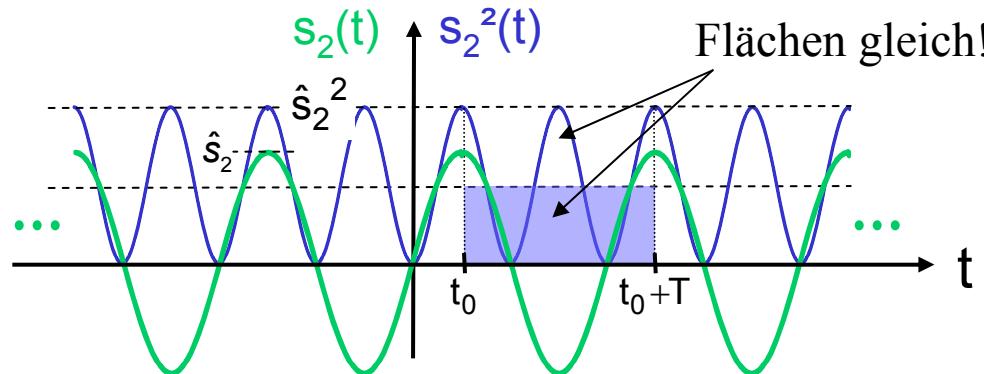
Beispiel 1: Energie eines einzelnen Dreieckimpulses



$$s_1(t) = \frac{a \cdot t}{T} \cdot (\sigma(t) - \sigma(t-T))$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt = (a/T)^2 \cdot \int_0^T t^2 dt = \frac{1}{3} a^2 T$$

Beispiel 2: Mittlere Leistung eines Sinus-Signals



$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{s}_2^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\frac{\hat{s}_2^2}{2} - \frac{\hat{s}_2^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right) dt = \frac{\hat{s}_2^2}{2} \end{aligned}$$



Ähnlichkeit von Signalen - Korrelation

Als Maß für die Ähnlichkeit zweier um t verschobener Signale $s(\tau)$ und $g(\tau)$ dient die Energie E_{Δ} des Differenzsignals:

$$E_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (s(\tau) - g(t + \tau))^2 d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(\tau) d\tau}_{E_s} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\tau) d\tau}_{E_g} - 2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot g(t + \tau) d\tau}_{\varphi_{sg}^E(t)}$$

Die Funktion $\varphi_{sg}^E(t)$ nennt man **Korrelationsfunktion** der Energiesignale $s(\tau)$ und $g(\tau)$

$$\varphi_{sg}^E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot g(t + \tau) d\tau$$

$\varphi_{ss}^E(t)$ heißt **Autokorrelationsfunktion** mit: $\varphi_{ss}^E(0) = E$ und $\varphi_{ss}^E(-t) = \varphi_{ss}^E(t)$

Analog nennt man $\varphi_{sg}(t)$ **Korrelationsfunktion** für Leistungssignale

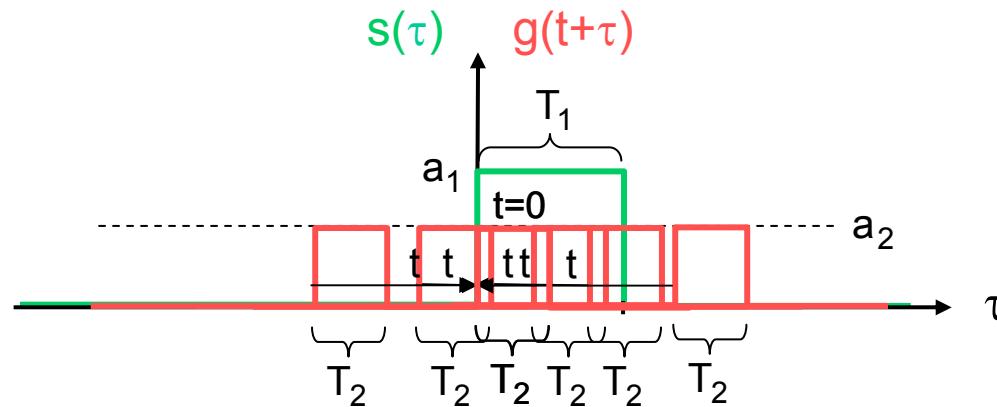
$$\varphi_{sg}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} s(\tau) \cdot g(t + \tau) d\tau$$

$\varphi_{ss}(t)$ heißt **Autokorrelationsfunktion** mit: $\varphi_{ss}(0) = P$ und $\varphi_{ss}(-t) = \varphi_{ss}(t)$



Beispiel zur Berechnung der Korrelationsfunktion

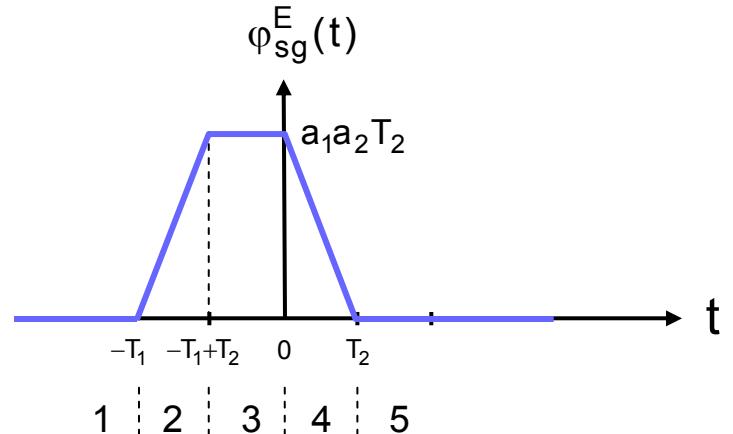
Korrelationsfunktion von zwei Rechteckimpulsen



$$\varphi_{sg}^E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot g(t + \tau) d\tau$$

5 Bereiche für t :

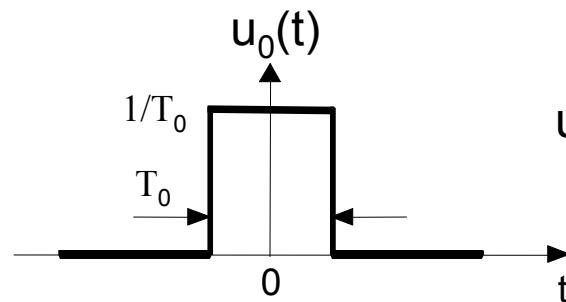
1. $t < -T_1 \Rightarrow \varphi_{sg}^E(t) = 0$
2. $-T_1 \leq t < -T_1 + T_2 \Rightarrow \varphi_{sg}^E(t) = (t + T_1) \cdot a_1 a_2$
3. $-T_1 + T_2 \leq t < 0 \Rightarrow \varphi_{sg}^E(t) = T_2 \cdot a_1 a_2$
4. $0 \leq t < T_2 \Rightarrow \varphi_{sg}^E(t) = (T_2 - t) \cdot a_1 a_2$
5. $t > T_2 \Rightarrow \varphi_{sg}^E(t) = 0$



Übertragung von Signalen über Systeme

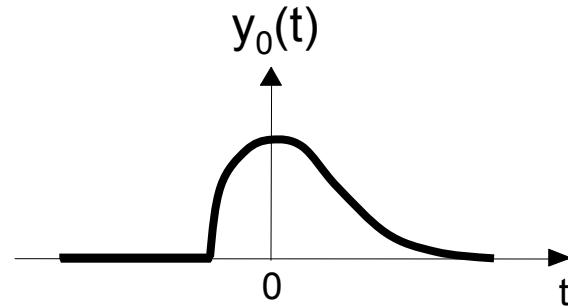
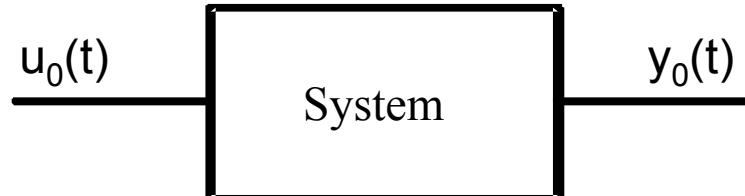
Ziel: Berechnung von Systemantworten für beliebige Eingangssignale

Betrachte normierten Rechteckimpuls:



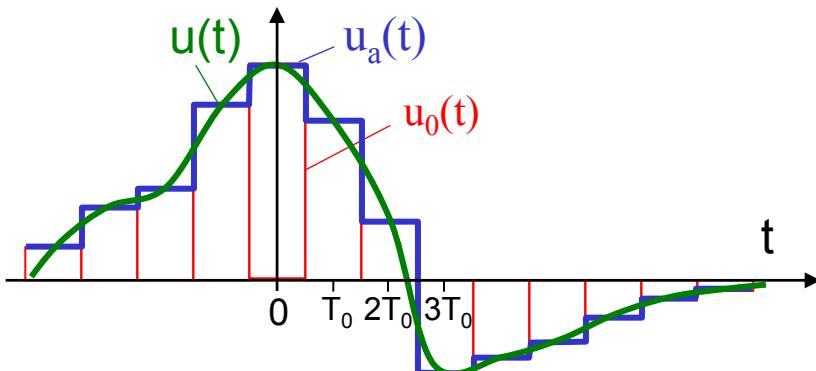
$$u_0(t) = \frac{1}{T_0} \cdot \left[\sigma\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \right] := \frac{1}{T_0} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

System reagiert auf das Eingangssignal $u_0(t)$ mit dem Ausgangssignal $y_0(t)$:



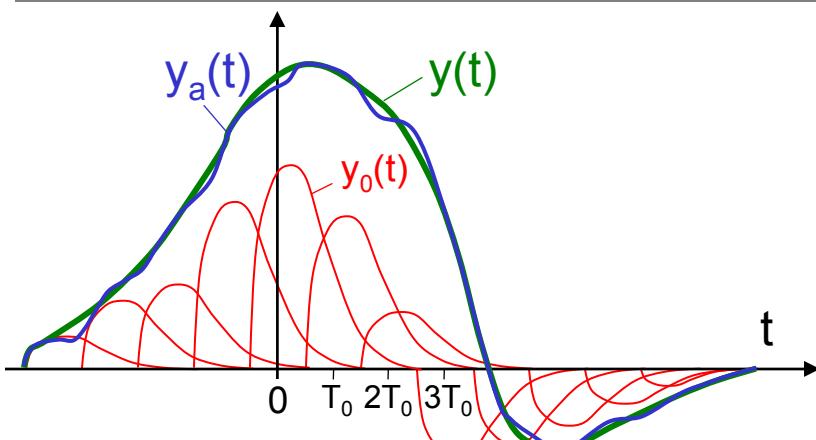
Überlagerte Impulsantworten bei LTI-Systemen

Approximation einer beliebigen Eingangsfunktion durch Rechteckimpulse:



$$u(t) \approx u_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{u(nT_0)}_{\text{Amplitude von } u(t) \text{ für } t = nT_0} \cdot \underbrace{u_0(t-nT_0)}_{\text{verschobener Rechteckimpuls}} \cdot T_0$$

Das Ausgangssignal entsteht durch Überlagerung der Impulsantworten $y_0(t)$:

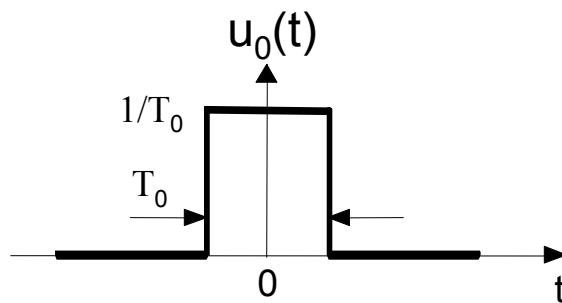


$$y(t) \approx y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{u(nT_0)}_{\text{verschobene Impulsantwort}} \cdot \underbrace{y_0(t-nT_0)}_{\text{Impulsantwort}} \cdot T_0$$



Dirac-Stoß und Stoßantwort

Signal-Modellierung um so besser, je kürzer der Rechteckimpuls ist



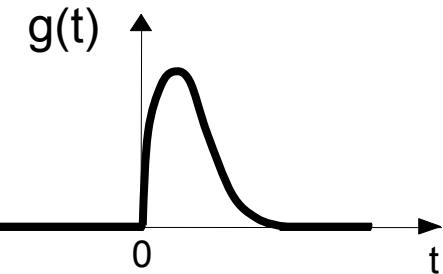
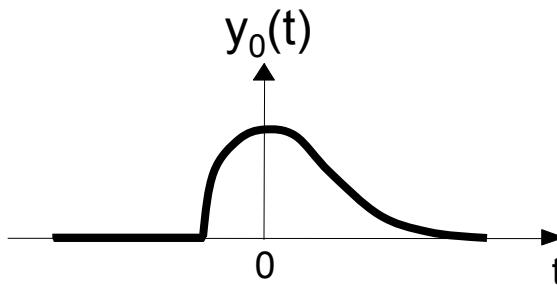
$$\lim_{T_0 \rightarrow 0} (u_0(t)) = \delta(t)$$

Dirac-Stoß

A graph of the Dirac delta function $\delta(t)$ versus time t . It is zero for all $t \neq 0$ and has a single, infinitely tall peak at $t=0$.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein System reagiert im Grenzfall $u(t) = \delta(t)$ mit der **Stoßantwort** $g(t)$



Durch seine Stoßantwort wird ein LTI-System vollständig beschrieben



Das Faltungsintegral

Grenzübergang der Summengleichungen für $u_0(t) \rightarrow \delta(t)$ mit $y_0(t) \rightarrow g(t)$

$$u(t) = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_0) \cdot u_0(t-nT_0) \cdot T_0 \right) \quad \xrightarrow{\text{mit: } T_0 \rightarrow d\tau} \quad nT_0 \rightarrow \tau$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_0) \cdot y_0(t-nT_0) \cdot T_0 \right) \quad \xrightarrow{\text{mit: } T_0 \rightarrow d\tau} \quad nT_0 \rightarrow \tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Symbolische Schreibweise:
(* : Faltungsoperator)

$$u(t) = u(t) * \delta(t) \quad (1)$$

$$y(t) = u(t) * g(t) \quad (2)$$

mit:
 $s(t) * g(t) = g(t) * s(t)$
 $s(t-T) * g(t) = s(t) * g(t-T)$

Zusammenhang zwischen Faltung und Korrelation:

$$\varphi_{sg}^E(t) = s(-t) * g(t)$$



Bedeutung der Faltung

Das Faltungsintegrals (1) definiert den Dirac-Stoß $\delta(t)$, der wegen seiner Eigenschaften auch Delta- oder Einheitsimpuls heißt

Mit Hilfe des Faltungsintegrals (2) kann bei LTI-Systemen für ein beliebiges Eingangssignal das Ausgangssignal bestimmt werden

Hierzu ist neben dem Eingangssignal nur die Stoßantwort des Systems erforderlich, die gemessen oder berechnet werden kann

In der Praxis ist die Berechnung bei komplizierten Systemen wegen der Integralform aber häufig mathematisch aufwändig



Modellbildung physikalischer Systeme

Ziele:

Herleitung eines mathematischen Modells für ein physikalischen System

Analyse der inneren Struktur (Funktionselemente, Systemparameter)

Beschreibung der Abhängigkeit des Ausgangssignals vom Eingangssignal und ggf. von weiteren internen Größen, sogenannten Zustandsvariablen

Zwei Ansätze:

Theoretische Methode

Experimentelle Methode



Theoretische Modellbildung

1. Schritt:

Festlegung der Eingangsgröße $u(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems

2. Schritt:

Festlegung von zeitabhängigen inneren Parametern $x_n(t)$, die den Zustand des Systems eindeutig und vollständig beschreiben (Zustandsgrößen)

3. Schritt:

Aufstellen der physikalischen Abhängigkeiten zwischen Eingangs-, Ausgangsgröße sowie Zustandsgrößen des Systems (Systemgleichungen)

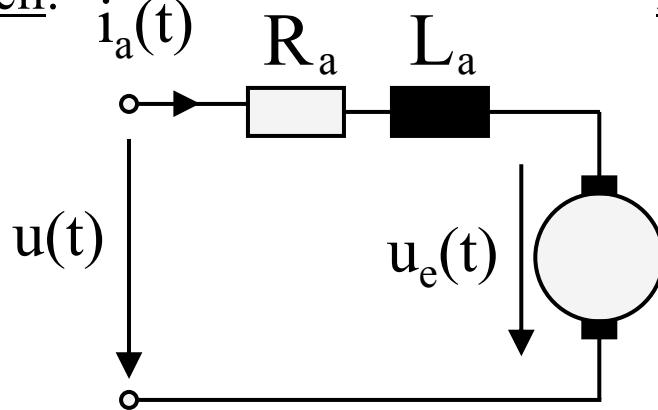
4. Schritt:

Überführung der Systemgleichungen in eine Normalform (Zustandsform)

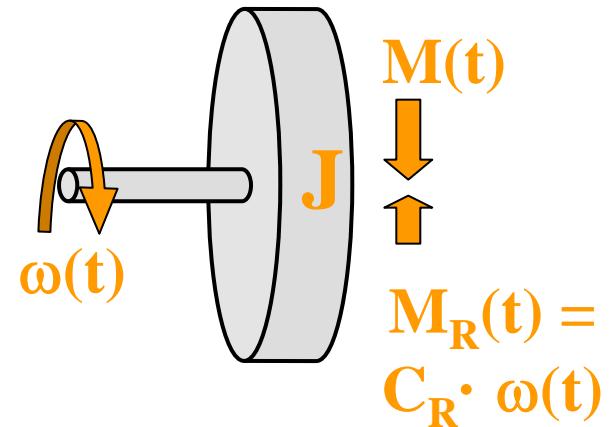


Beispiel: Fremderregter Gleichstrommotor

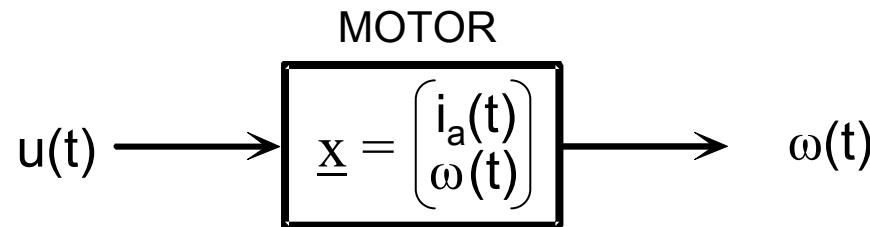
Elektrisches Modell:



Mechanisches Modell:



Festlegung der Eingangs- und Ausgangsgröße und der Zustandsgrößen \underline{x}



Modellbildung Gleichstrommotor (Fortsetzung)

Aufstellung von Bilanzgleichungen:

$$u_a(t) = i_a(t) \cdot R_a + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + \underbrace{u_e(t)}_{K \cdot \omega(t)} = 0 \quad (\text{Maschengleichung})$$

$$\underbrace{M(t)}_{K \cdot i_a(t)} = J \cdot \frac{d\omega}{dt} + \underbrace{M_R(t)}_{C_R \cdot \omega(t)} = 0 \quad (\text{Momentengleichgewicht})$$

Einsetzen der physikalischen Gesetze und Umformung führt auf:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -i_a(t) \cdot \frac{R_a}{L_a} - \omega(t) \cdot \frac{K}{L_a} + u_a(t) \cdot \frac{1}{L_a}$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = i_a(t) \cdot \frac{K}{J} - \omega(t) \cdot \frac{C_R}{J}$$

Das Ausgangssignal entspricht oft einer Zustandsgröße

hier: $y(t) = \omega(t)$



Zustandsform der Systembeschreibung

Jedes LTI-System mit einer Eingangs- und Ausgangsgröße sowie mit n Zustandsgrößen kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t)$$

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + d u(t)$$

mit:

$u(t)$: Eingangsgröße

$x_1(t) \dots x_n(t)$: Zustandsgrößen

$y(t)$: Ausgangsgröße

a_{ij}, b_k, c_l : konstante Parameter



Zustandsgleichungen in Matrizenform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Matrix } A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\text{Vektor } b} \cdot u(t); \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t); \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + d \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\underline{c}}_{\text{Matrix } C} \cdot \underbrace{\underline{x}(t)}_{\text{Zustandsvektor}} + d \cdot u(t)$$

Bedeutung der Formelzeichen:

\underline{A}	: $n \times n$ Systemmatrix
\underline{b}	: $n \times 1$ Eingangsvektor
\underline{c}	: $1 \times n$ Ausgangsvektor
d	: skalarer Durchgangsfaktor
$\underline{x}(t)$: $n \times 1$ Vektor der Zustandsgrößen
$\dot{\underline{x}}(t)$: $n \times 1$ Ableitung des Zustandsvektors
$u(t)$: skalare Eingangsgröße
$y(t)$: skalare Ausgangsgröße
$\underline{x}(0)$: Anfangszustände der Zustandsgrößen
\underline{x}_0	: Werte für die Anfangszustände
n	: Ordnung des Systems



Zusammenfassung Modellbildung

Schon bei relativ einfachen physikalischen Systemen erfordert die Modellbildung erheblichen Aufwand und spezielle Sachkenntnisse

Die Modellbildung wird daher meistens in Teams vorgenommen, bestehend aus Systemingenieuren und den jeweiligen Spezialisten

Hierbei müssen immer Vereinfachungen vorgenommen werden, ohne hierbei jedoch wesentliche Systemeigenschaften zu übersehen

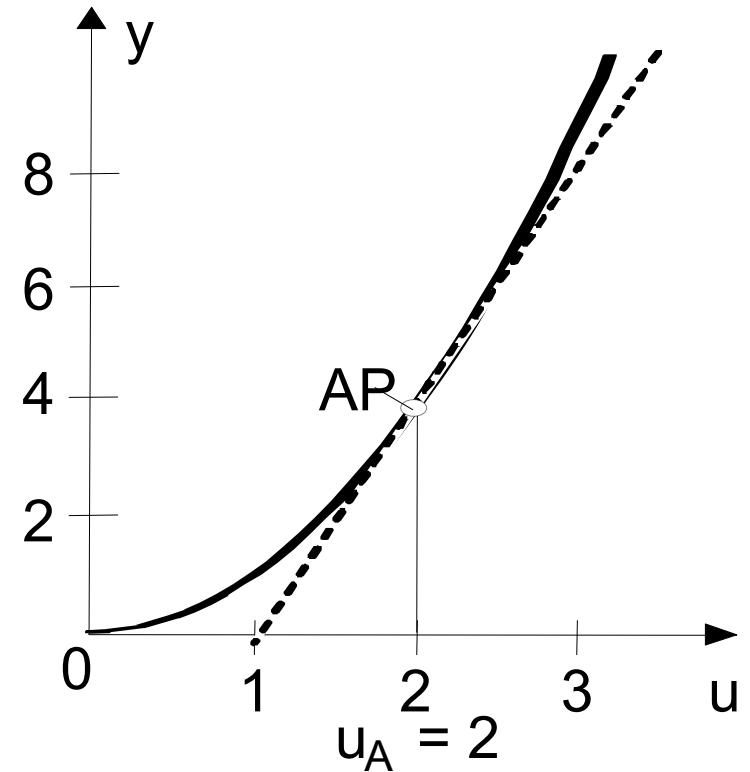
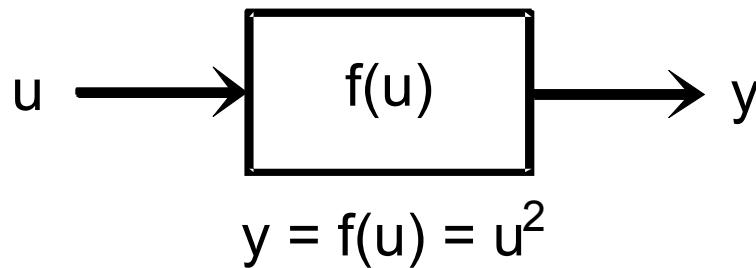
Da eine geschlossene mathematische Theorie nur für LTI-Systeme verfügbar ist, müssen nichtlineare Systeme zuvor linearisiert werden



Linearisierung von Systemen

Viele reale Systeme sind global nicht linear, können aber meistens innerhalb des technisch interessanten Bereiches linearisiert werden

Beispiel Kennlinie:



Taylorreihenentwicklung einer Kennlinie

Linearisierung bedeutet, dass die Kennlinie an einem gewünschten Arbeitspunkt durch eine Gerade angenähert wird

Die Güte dieser Näherung ist um so besser, je weniger der tatsächliche Betriebspunkt vom AP abweicht

Ansatz für eine Linearisierung ist die Darstellung einer Funktion als Summe von Potenzen (Taylorreihenentwicklung)

$$y = f(u) = f(u_A) + \frac{u - u_A}{1!} \cdot \left(\frac{d f(u)}{du} \right)_{u=u_A} + \frac{(u - u_A)^2}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 f(u)}{du^2} \right)_{u=u_A} + \dots$$

Vernachlässigung von
Potenzen > 1 führt auf:

$$y \cong y_A + (u - u_A) \left(\frac{d f(u)}{du} \right)_{u=u_A}$$



Linearisierung dynamischer Systeme

Auch das dynamische Verhalten (Zeitverhalten) eines Systems beim Wechsel des Betriebszustandes kann nichtlinear sein

Wegen der Beschreibung durch Differentialgleichungen gestaltet sich der Linearisierungsvorgang aufwändiger als bei einer Kennlinie

Nichtlineares
Zustandsmodell:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t))\end{aligned}$$



Bestimmung linearer Systeme im Arbeitspunkt

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{\begin{array}{l} \underline{x}(t) = \underline{x}_A \\ u(t) = u_A \end{array}}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\begin{array}{l} \underline{x}(t) = \underline{x}_A \\ u(t) = u_A \end{array}}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{\begin{array}{l} \underline{x}(t) = \underline{x}_A \\ u(t) = u_A \end{array}}$$

$$d = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\begin{array}{l} \underline{x}(t) = \underline{x}_A \\ u(t) = u_A \end{array}}$$



Systemgleichungen nach der Linearisierung

Gewünschte Form der Systemgleichungen:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta x_1}(t) \\ \vdots \\ \dot{\Delta x_n}(t) \end{bmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} + \underline{b} \cdot \Delta u(t) ; \quad \begin{bmatrix} \Delta x_1(0) \\ \vdots \\ \Delta x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} - x_{1A} \\ \vdots \\ x_{n0} - x_{nA} \end{bmatrix}$$

$$\Delta y(t) = \underline{c} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} + d \cdot \Delta u(t) ,$$

In Matrzenschreibweise:

$$\dot{\underline{\Delta x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{\Delta x}(t) + \underline{b} \cdot \Delta u(t) ; \quad \underline{\Delta x}(0) = \underline{x}_0 - \underline{x}_A$$
$$\Delta y(t) = \underline{c} \cdot \underline{\Delta x}(t) + d \cdot \Delta u(t)$$



Festlegung des Arbeitspunktes eines Systems

Die Linearisierung eines Systems ist nur in der Umgebung des für die Berechnung gewählten Arbeitspunktes hinreichend genau

Als Arbeitspunkt eines nichtlinearen dynamischen Systems wird im allgemeinen eine sogenannte *Ruhelage* des Systems gewählt

Eine Ruhelage ist dadurch gekennzeichnet, dass bei einer konstanten Eingangsgröße $u(t) = u_A$ das System zur Ruhe kommt, d.h. die Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ werden konstant : $\underline{x}(t) = \underline{x}_A = \text{konst.}$

Damit kann durch Nullsetzen der links stehenden Ableitungen der Zustandsgrößen die Ruhelage des Systems abhängig von u_A berechnet werden, womit der Arbeitspunkt festliegt



Anmerkungen zur Systemlinearisierung

Nicht bei jedem System existiert eine eindeutige Ruhelage abhängig von einem gegebenen konstanten Eingangssignal

Falls mehrere oder sogar unendlich viele Ruhelagen auftreten, sollte gemäß der vorliegenden Problemstellung eine geeignete Ruhelage zur Linearisierung gewählt

Bereits lineare Teilsysteme des zu linearisierenden Systems werden durch den Linearisierungsvorgang nicht verändert

Falls beim Betrieb eines nichtlinearen Systems der Arbeitspunkt sich stark ändert, wird das Modell zeitvariabel und es müssen adaptive Systembeschreibungen verwendet werden

