Der Frequenzgang

Der Frequenzgang wird formal dadurch gebildet, dass in der Übertragungsfunktion G(s) das Argument s durch jω ersetzt wird

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$$

Im Gegensatz zur Übertragungsfunktion gestattet der Frequenzgang eine anschauliche Betrachtungsweise von Systemen

Die physikalische Interpretation des Frequenzganges als Fourier-Transformierte der Stoßantwort g(t) ist allerdings nur zulässig, falls keine Pole von G(s) auf der imaginären Achse liegen

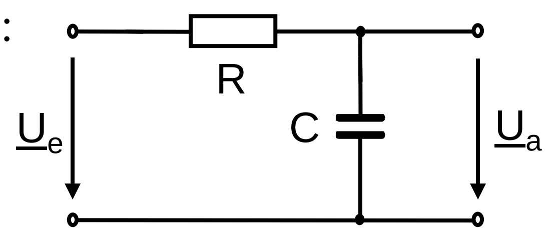
Berechnung des Frequenzganges mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung

Bei der Einführung der komplexen Wechselstromrechnung erfolgte ursprünglich eine Beschränkung auf rein sinusförmige Signale

Die komplexe Wechselstromrechnung ermöglicht deshalb eine direkte Bestimmung des Frequenzganges G*(jω)* für beliebige Systeme

Durch die formale Transformation $j\omega \rightarrow s$ kann daraus sofort die Laplace-Transformierte d. h. die Übertragungsfunktion ermittelt werden

Beispiel:



$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

Damit kann die Übertragung beliebiger Signale *s(t)* bei als elektrische Ersatzschaltbilder gegebenen Systemen einfach behandelt werden

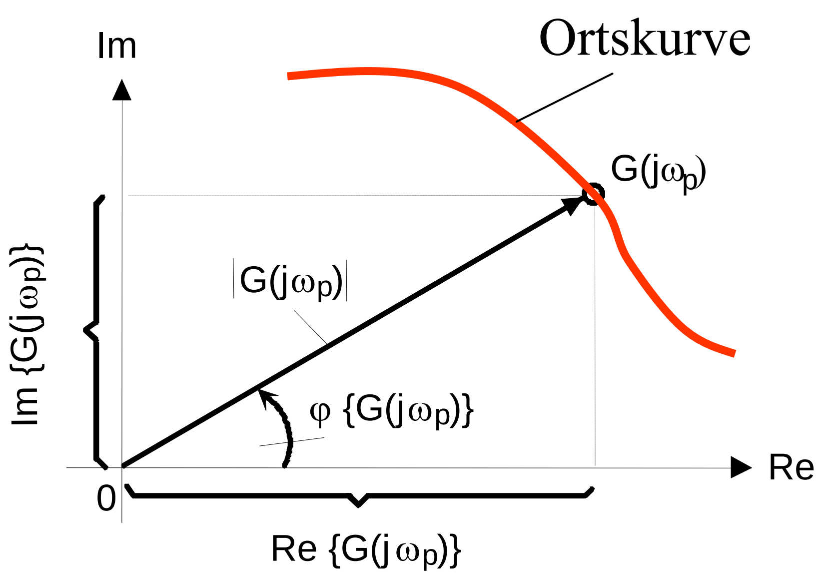
Aufspaltung des Frequenzganges in Betrag und Phase

Der Frequenzgang kann als komplexe Funktion analog zu einer komplexen Zahl in Real- und Imaginärteil zerlegt werden

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} + j \cdot \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = |G(j\omega)|\, e^{\,j\varphi\{G(j\omega)\}}$$

Amplitudengang (Betragskennlinie)

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\,\{G(j\omega)\}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}\right]^2}$$



Phasengang (Phasenkennlinie)

$$\varphi\{G(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\right) + \varphi_0$$

<u>mit</u>: $\varphi_0 = \pm 180$, falls $\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} < 0$, sonst: $\varphi_0 = 0$

Beispiel: Berechnung von Betrag und Phase

<u>RC-Glied:</u>

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}} \qquad \text{mit}: \quad T = RC$$

$$G(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1-(j\omega T)^2} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2} = \underbrace{\frac{1}{1+(\omega T)^2}}_{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}} + j\cdot\underbrace{\frac{-\omega T}{1+(\omega T)^2}}_{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+(\omega T)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega T}{1+(\omega T)^2}\right)^2} = \frac{1}{1+(\omega T)^2}\cdot\sqrt{1+(\omega T)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

$$\varphi\{G(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{-\omega T}{1}\right) = -\arctan(\omega T)$$

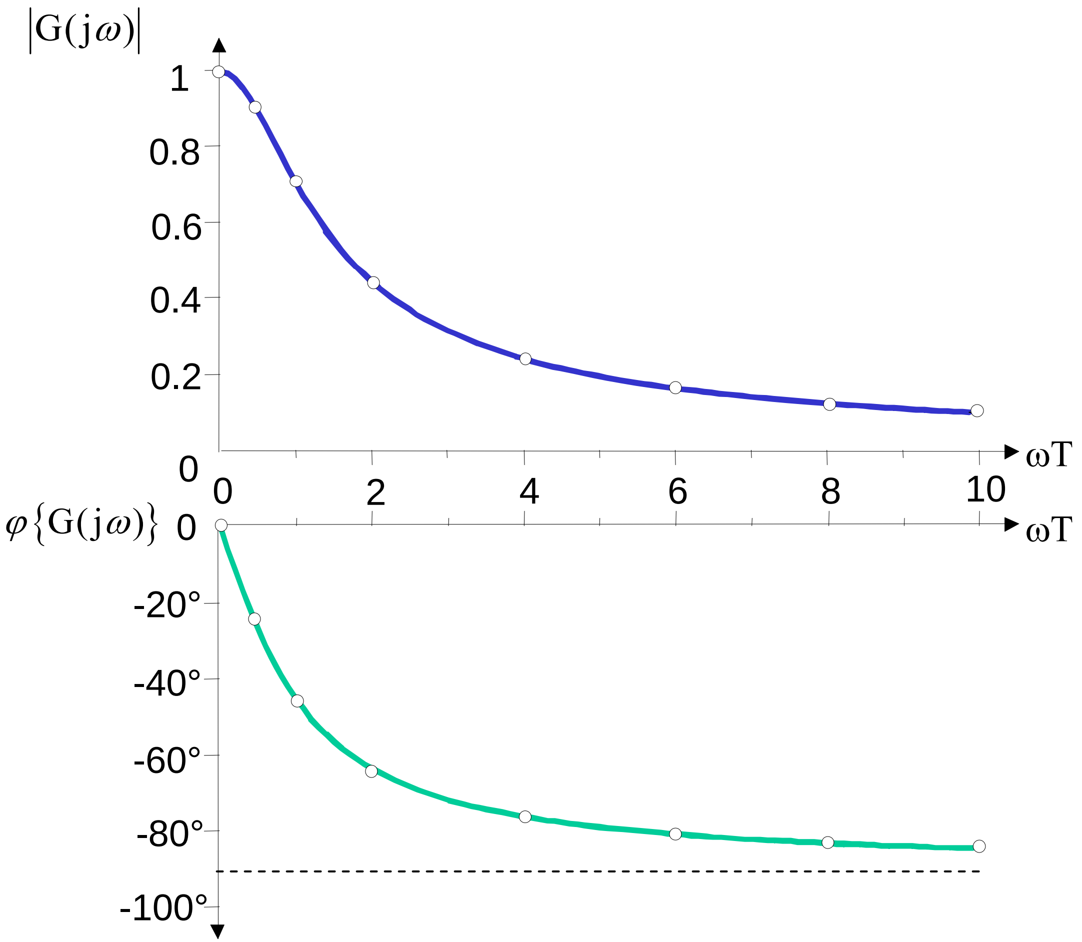
Beispiel: Darstellung von Betrag und Phase

RC-Glied:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

$$\varphi\{G(j\omega)\} = -\arctan(\omega T)$$

Messung Nr.	ωT	$\frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e}$	$\frac{\varphi}{°}$
0	0	1,00	0
1	0,5	0,89	-26,6
2	1	0,71	-45,0
3	2	0,45	-63,4
4	4	0,24	-76,0
5	6	0,16	-80,5
6	8	0,12	-82,9



Verstärkungsangaben in Dezibel

Für die Angabe des Betrages von Leistungsverstärkungen wählt man in der Technik üblicherweise einen logarithmisch gestuften Maßstab

$$A\left[dB\right] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Hierdurch wird der große Zahlenbereich überschaubar eingegrenzt, außerdem ist die mathematische Handhabung wesentlich vereinfacht

Bei Annahme eines identischen Widerstandes am Ein- und Ausgang des Systems folgt hieraus auch die Spannungsverstärkung in dB

$$10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{U_2^2 / R}{U_1^2 / R}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) \quad \Rightarrow \quad A = 20 \log\left(\frac{u_a}{u_e}\right)$$

Logarithmische Frequenzkennlinien

Auch der Frequenzgang wird häufig logarithmisch angegeben:

$$G(j\omega) = \left|G(j\omega)\right| \cdot e^{\,j\varphi\{G(j\omega)\}} \quad \Rightarrow \quad \lg\left(G(j\omega)\right) = \lg\left|G(j\omega)\right| + j \cdot \lg(e) \cdot \varphi\left\{G(j\omega)\right\}$$

Hierdurch ergibt sich der wesentliche Vorteil, dass die Amplituden- und Phasengänge von Produkten mehrerer Übertragungsterme einfach addiert werden dürfen

$$\lg\left(G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)\right) = \lg\left(\left|G_1(j\omega)\right| \cdot \left|G_2(j\omega)\right| \cdot e^{\left(\varphi\{G_1(j\omega)\}+\varphi\{G_2(j\omega)\}\right)}\right)$$

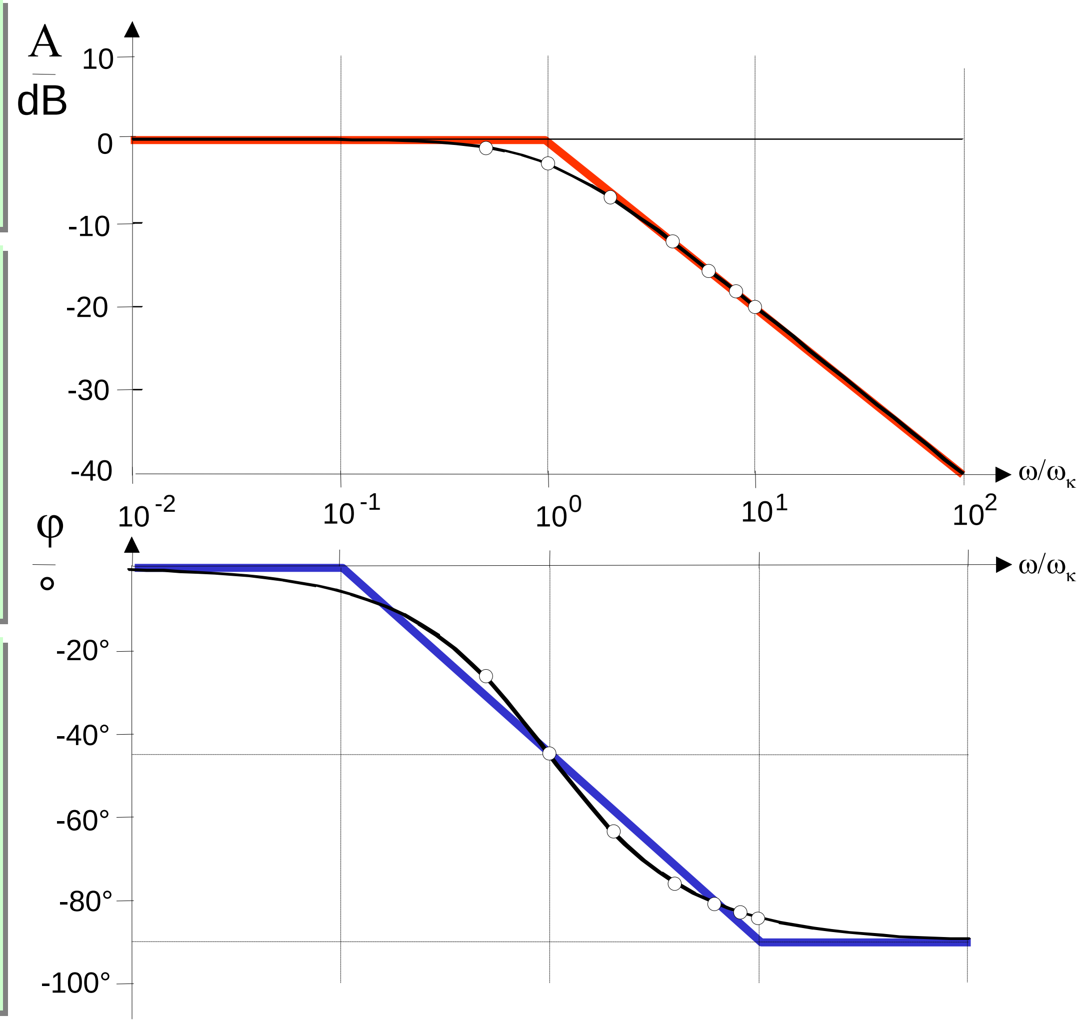
$$= \lg\left|G_1(j\omega)\right| + \lg\left|G_2(j\omega)\right| + j \cdot \lg(e) \cdot \left(\varphi\left\{G_1(j\omega)\right\} + \varphi\left\{G_2(j\omega)\right\}\right)$$

Bode-Diagramm

Das Bodediagramm dient zur Darstellung von Frequenz- und Phasengängen

Dabei werden beide Größen über dem Logarithmus der Frequenz aufgetragen, so dass die Darstellung insgesamt doppelt logarithmisch erfolgt

Damit können Übertragungsfunktionen einfach konstruiert werden, da das asymptotische Verhalten von A(ω) und φ(ω) einen linearen Verlauf hat

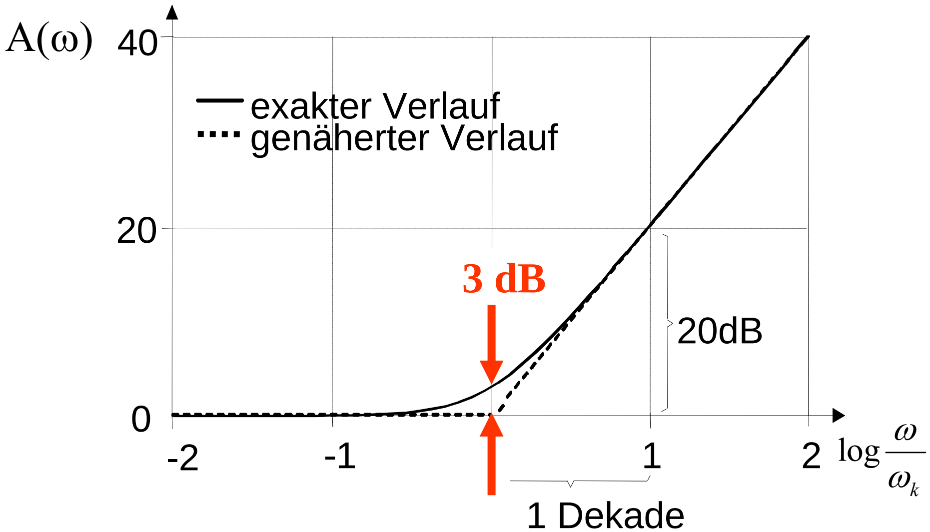


Asymptotische Darstellung des Amplitudenganges im Bode-Diagramm

Beispielhaft soll das asymptotische Verhalten für ein Vorhalteglied erster Ordnung berechnet werden:

$$G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_k}$$

$$A(\omega) = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} = 10 \cdot \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 \right)$$



Grenzfallbetrachtung:

$$\lim_{\omega \to 0} \left(A(\omega) \right) = 20 \cdot \log(1) = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \left(A(\omega) \right) = 20 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)$$

max. Fehler bei $\omega = \omega_k$:

$$A(\omega = \omega_k) = 10 \cdot \log(2) = 3\,dB$$

$$\left| G(\omega = \omega_k) \right| = \sqrt{2}$$

Asymptotische Darstellung des Phasenganges im Bode-Diagramm

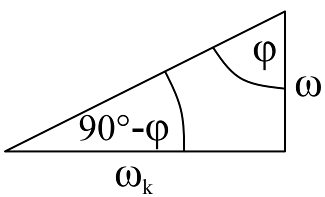
$$G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_k}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)$$

Grenzfallbetrachtung:

$$\lim_{\omega\to 0}\left(\varphi(\omega)\right) = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\left(\varphi(\omega)\right) = \frac{\pi}{2}$$

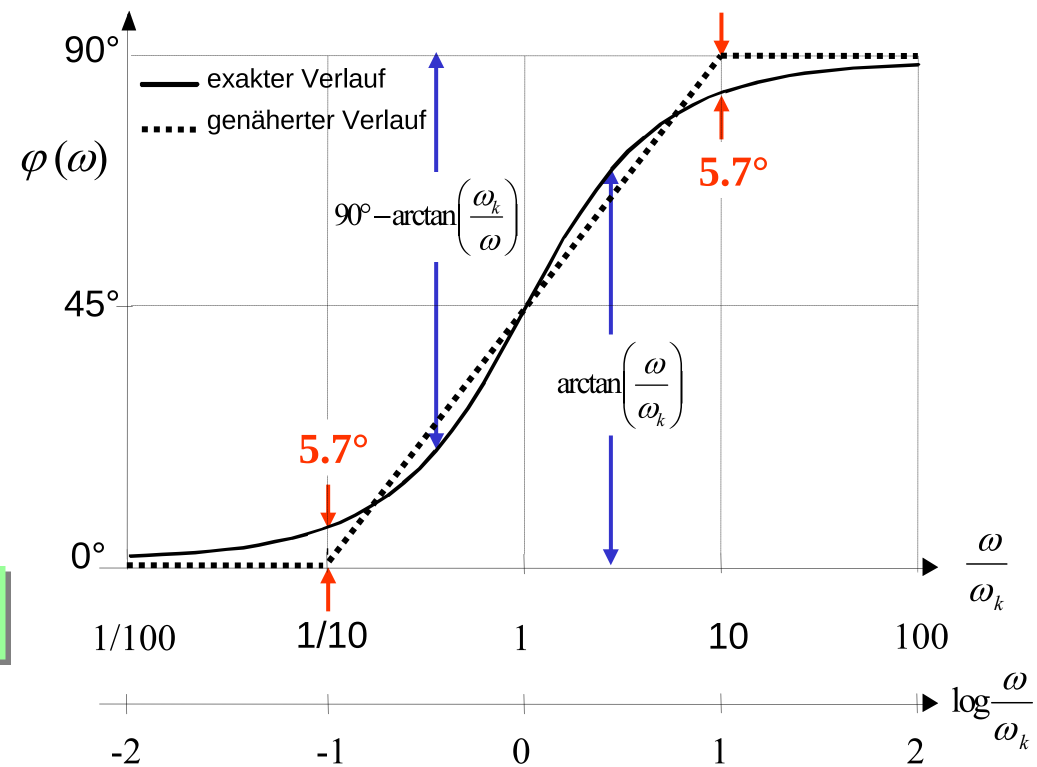
Symmetrie:



$$\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) = 90° - \arctan\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)$$

max. Fehler bei ω/ω_k=0.1 bzw. 10

$$\varphi(\omega = 0.1\cdot\omega_k) = \arctan(0.1) = 5.7°$$



Elementarfrequenzkennlinien von Übertragungsfunktionen

Die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems besteht im allgemeinen aus dem Produkt mehrerer elementarer Übertragungsterme

Terme im Zähler von G(s) werden *Vorhalteglieder*, solche im Nenner aufgrund der verzögerten Sprungantwort *Verzögerungsglieder* genannt

Das Gesamt-Bodediagramm kann durch die additive Überlagerung der Bodediagramme dieser einzelnen Übertragungsterme gebildet werden

Bei Kenntnis der Verläufe der Elementarfunktionen können auch komplizierte Übertragungsfunktionen systematisch konstruiert werden

Die Konstruktion kann rein graphisch erfolgen und hierbei lassen sich Veränderungen von G(s) schnell berücksichtigen

Logarithmische Frequenzkennlinien von Übertragungsfunktionen linearer Systeme

$$G(j\omega) = \frac{V \cdot \prod_{m=1}^{M}\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kZm}}\right) \cdot e^{-j\omega T_t}}{(j\omega)^N \cdot \prod_{q=1}^{Q}\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kNq}}\right) \cdot \prod_{p=1}^{P}\left(1 + 2d\frac{j\omega}{\omega_{kNp}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{kNp}}\right)^2\right)}$$

$$\lg(G(j\omega) = A'(\omega) + \varphi(\omega)$$

Amplitudengang

$$A'(\omega) = \lg(V) + \sum_{m=1}^{M} \lg\left|1 + \frac{j\omega}{\omega_{kZm}}\right| - N \cdot \lg(\omega) - \sum_{q=1}^{Q} \lg\left|1 + \frac{j\omega}{\omega_{kNq}}\right| - \sum_{p=1}^{P} \lg\left|1 + \frac{j\omega 2d}{\omega_{kNp}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{kNp}}\right)^2\right|$$

Phasengang

Kurzschreibweise: $\arg(X) = \arctan(\mathrm{Im}\{X\}/\mathrm{Re}\{X\})$

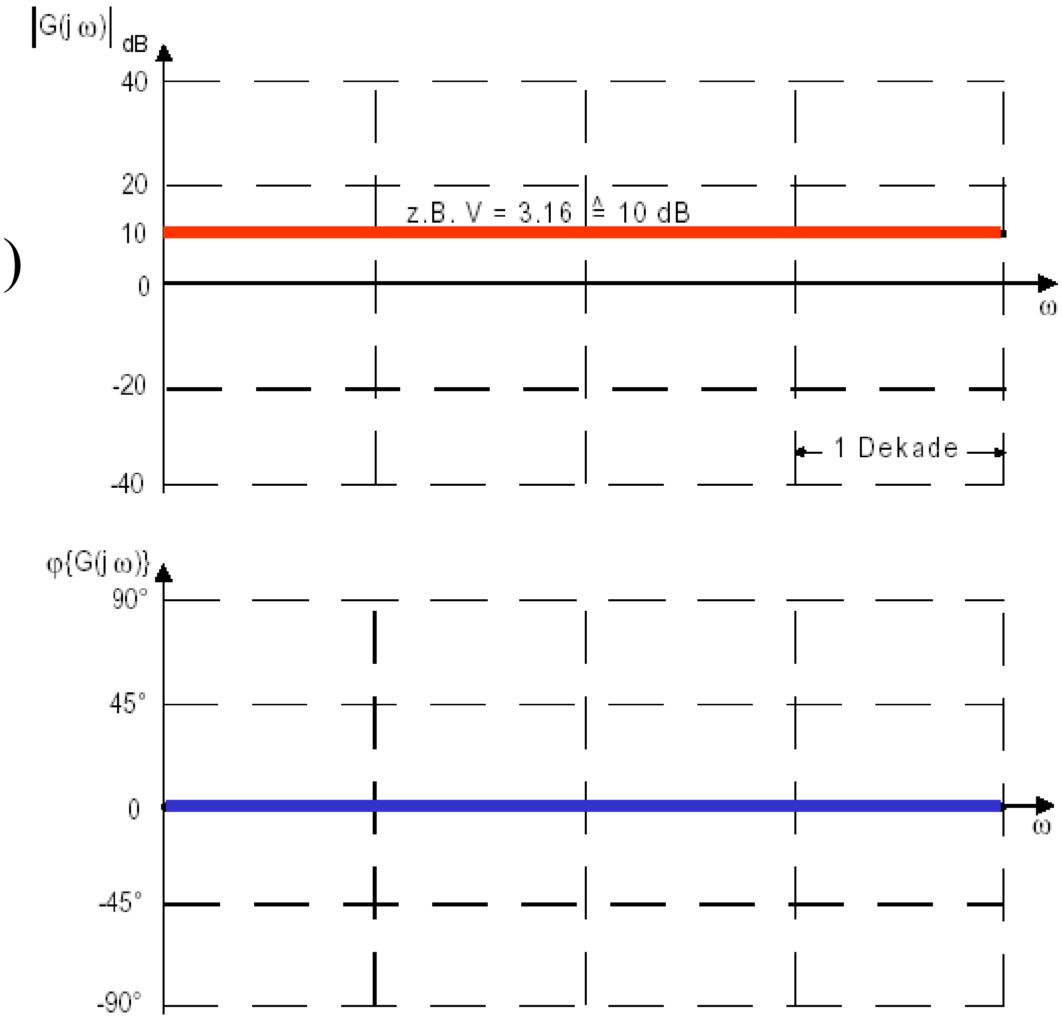
$$\varphi(\omega) = \sum_{m=1}^{M} \arg\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kZm}}\right) - N \cdot \frac{\pi}{2} - \sum_{q=1}^{Q} \arg\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{kNq}}\right) - \sum_{p=1}^{P} \arg\left(1 + \frac{j\omega 2d}{\omega_{kNp}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{kNp}}\right)^2\right) - \omega T_t$$

Proportionalglied

$$G(j\omega) = V$$

$$A(\omega) = \left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \cdot \log(V)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi\left\{G(j\omega)\right\} = 0$$

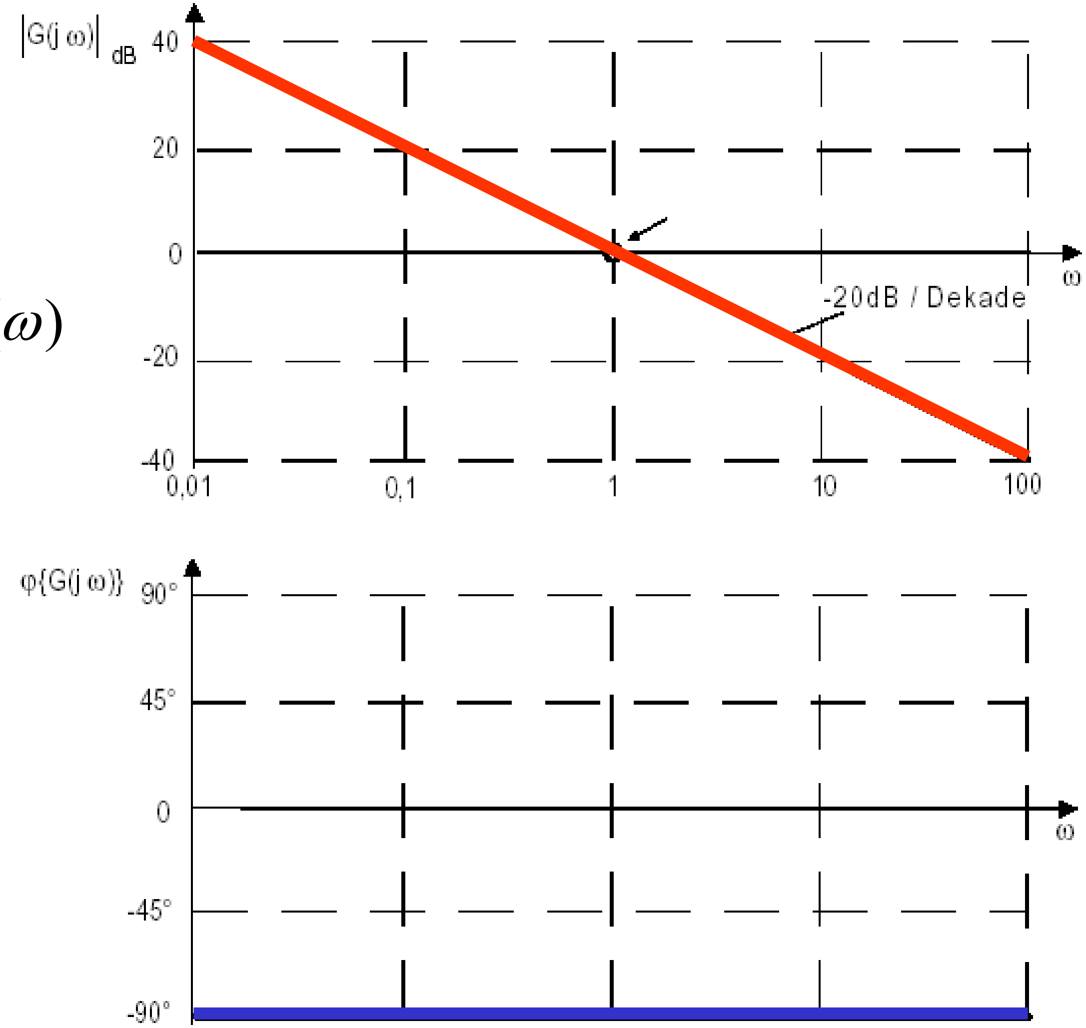


Integrator

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$A(\omega) = \left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20 \cdot \log(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi\left\{G(j\omega)\right\} = -90°$$

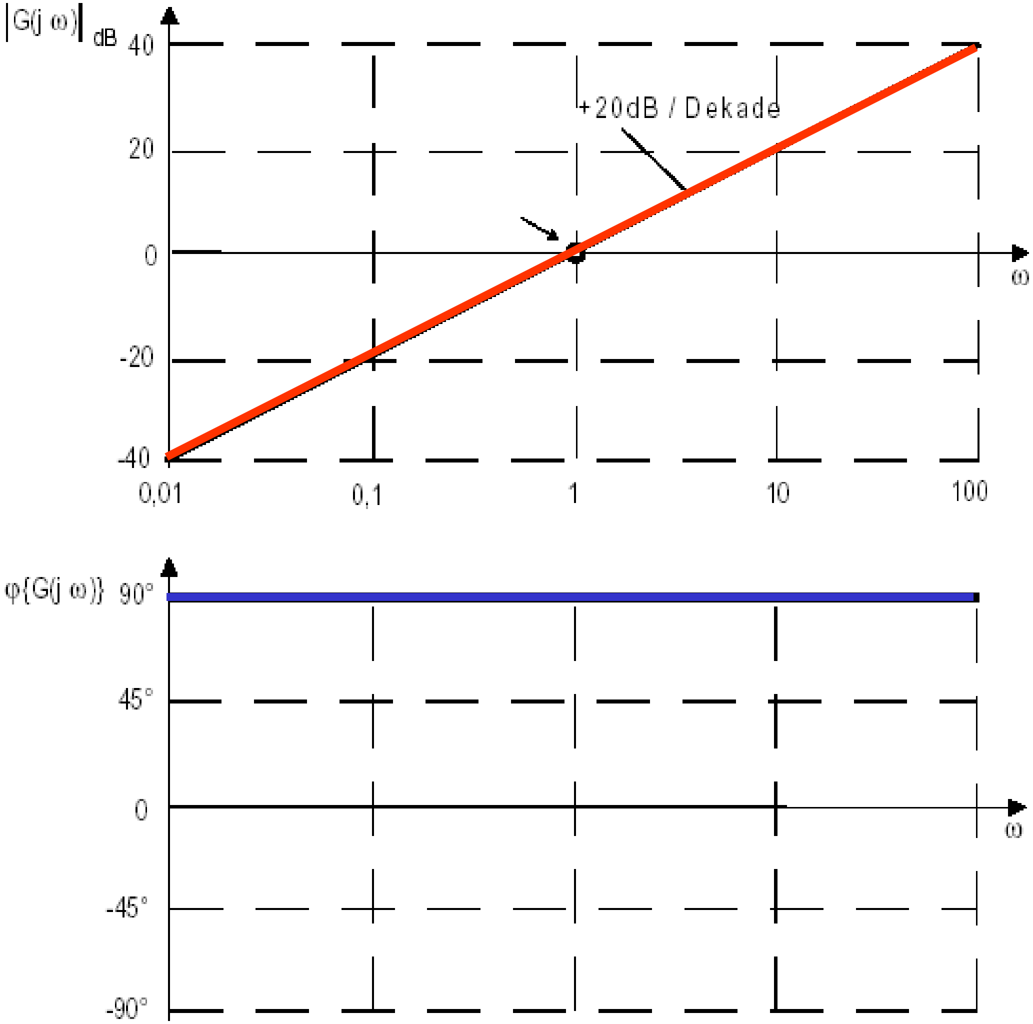


Differenzierer

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \cdot \log(\omega)$$

$$\varphi\left\{G(j\omega)\right\} = 90°$$

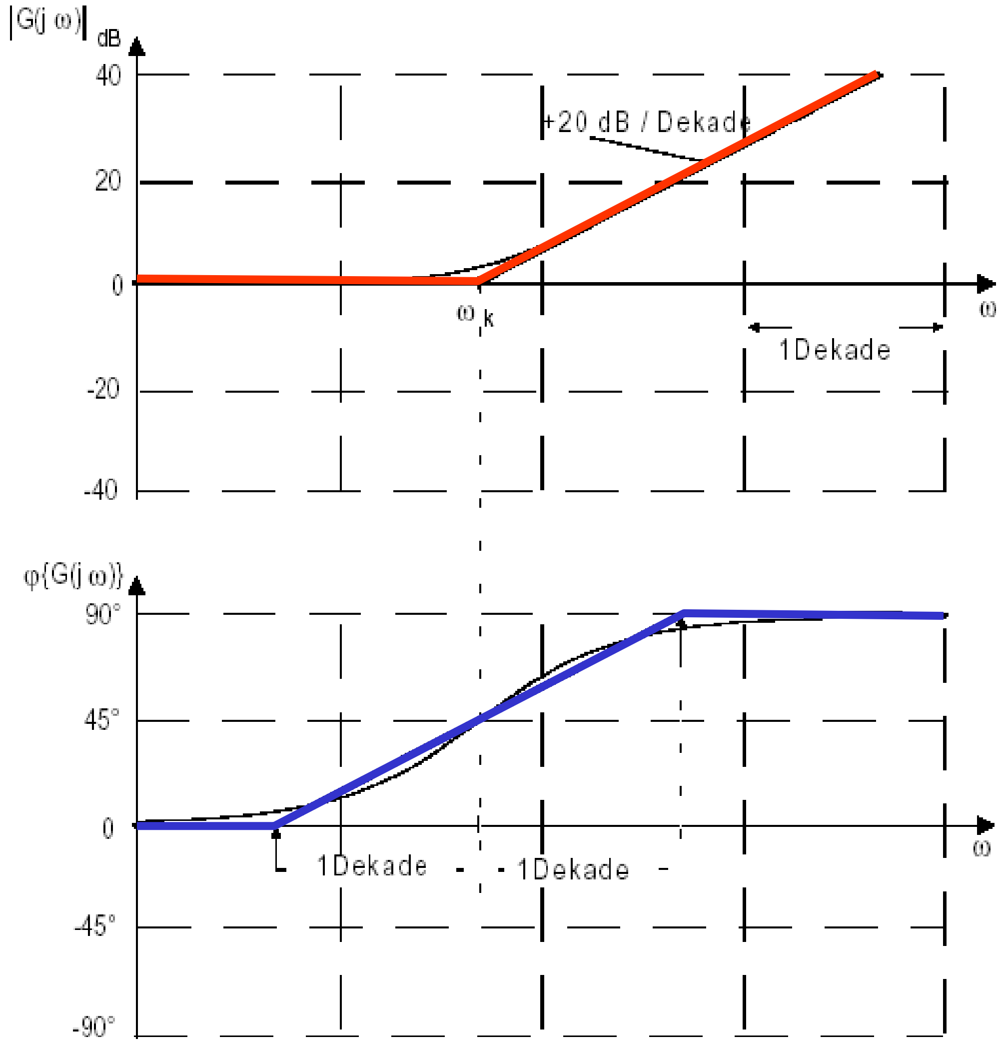


Vorhalteglied 1. Ordnung

$$G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_k}$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 10 \cdot \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)$$

$$\varphi\{G(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)$$



Vorhalteglied 2. Ordnung

$$G(j\omega) = 1 + 2d\,\frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2$$

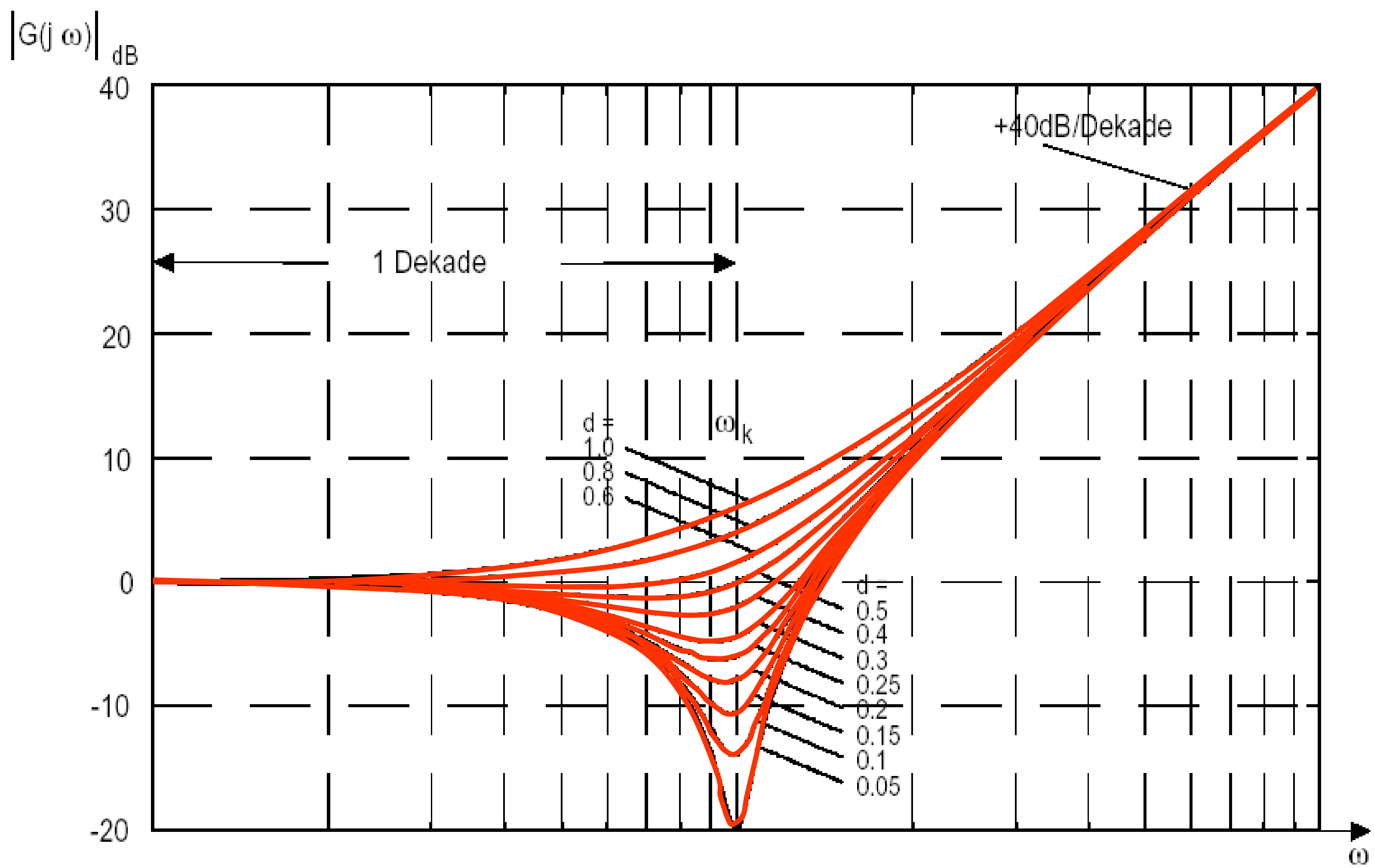
Die Betragskennlinie eines Vorhaltegliedes 2. Ordnung verläuft für Frequenzen $< \omega_k$ auf der 0dB Linie und steigt oberhalb von ω_k mit +40dB an

Im Frequenzbereich um ω_k ist der Betragsverlauf stark vom Dämpfungsfaktor d abhängig, bei $0 < d < 1$ tritt hierbei ein Unterschwingen auf

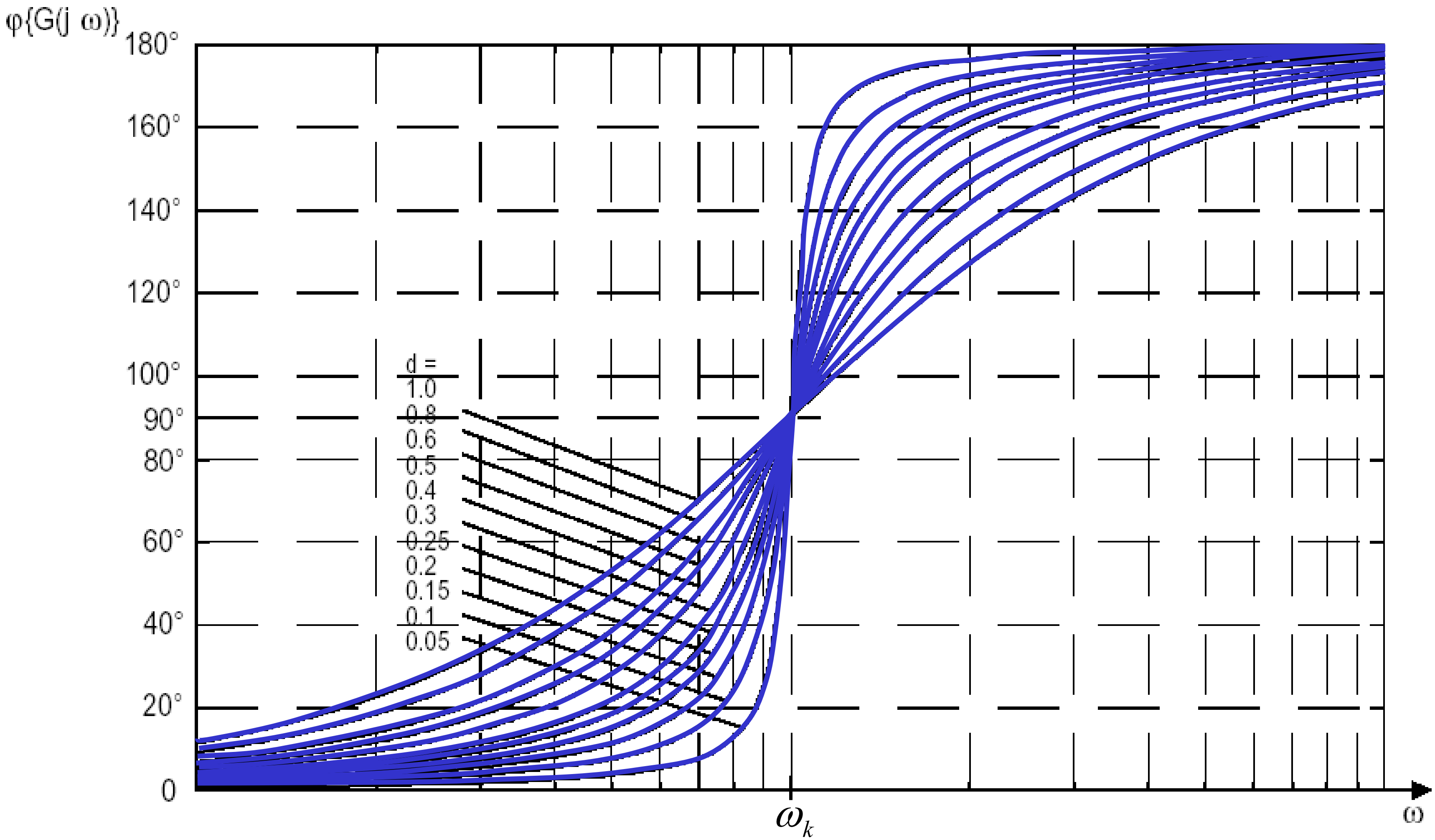
Die Phasenkennlinie eines Vorhaltegliedes 2. Ordnung verläuft für Frequenzen $< \omega_k$ bei 0° und wechselt bei Frequenzen oberhalb von ω_k auf π

Der Frequenzbereich, in dem die Phase von 0° auf π wechselt, ist um so steiler, je kleiner der Dämpfungsfaktor d des Systems ist

Vorhalteglied 2. Ordnung (Amplitudengang)



Vorhalteglied 2. Ordnung (Phasengang)

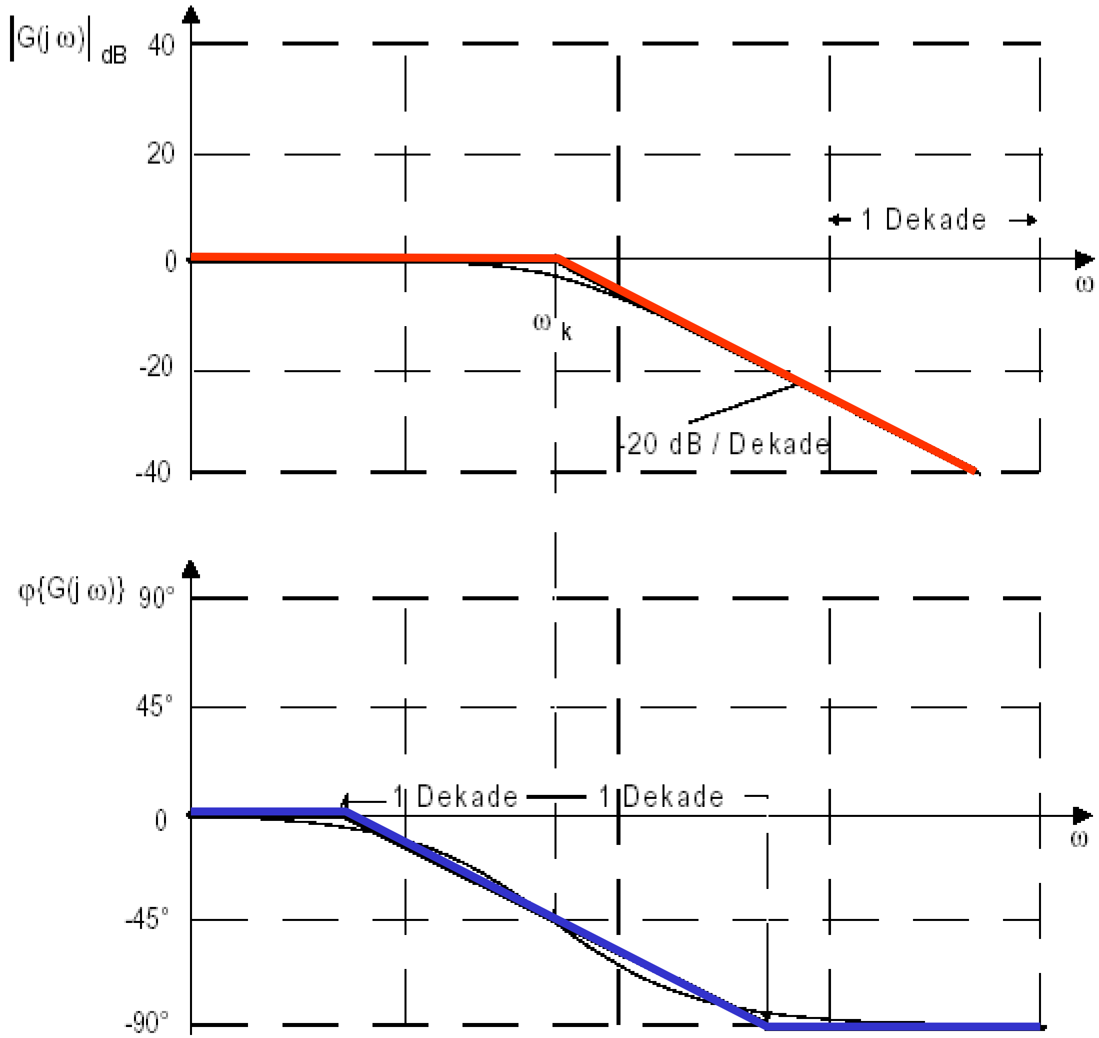


Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT_1)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_k}}$$

$$\left|G(j\omega)\right| = -10 \cdot \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)$$

$$\varphi\left\{G(j\omega)\right\} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)$$



Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT_2)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2d\,\frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2}$$

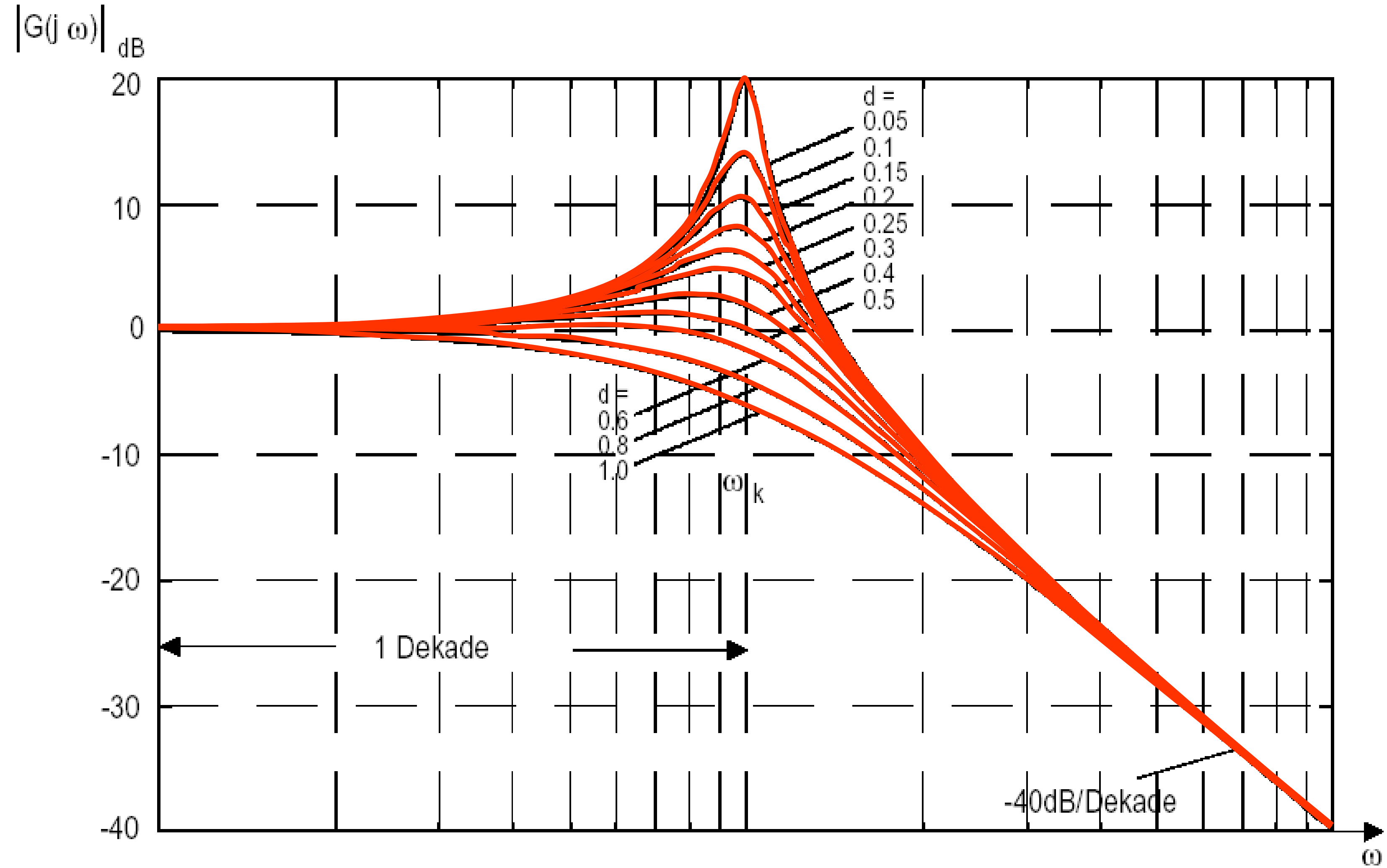
Die Betragskennlinie eines Verzögerungsgliedes 2. Ordnung verläuft für Frequenzen $<\omega_k$ auf der 0dB Linie und fällt oberhalb von ω_k mit +40dB ab

Im Frequenzbereich um ω_k ist der Betragsverlauf stark vom Dämpfungsfaktor *d* abhängig, bei $0 < d < 1$ tritt hierbei ein Überschwingen auf

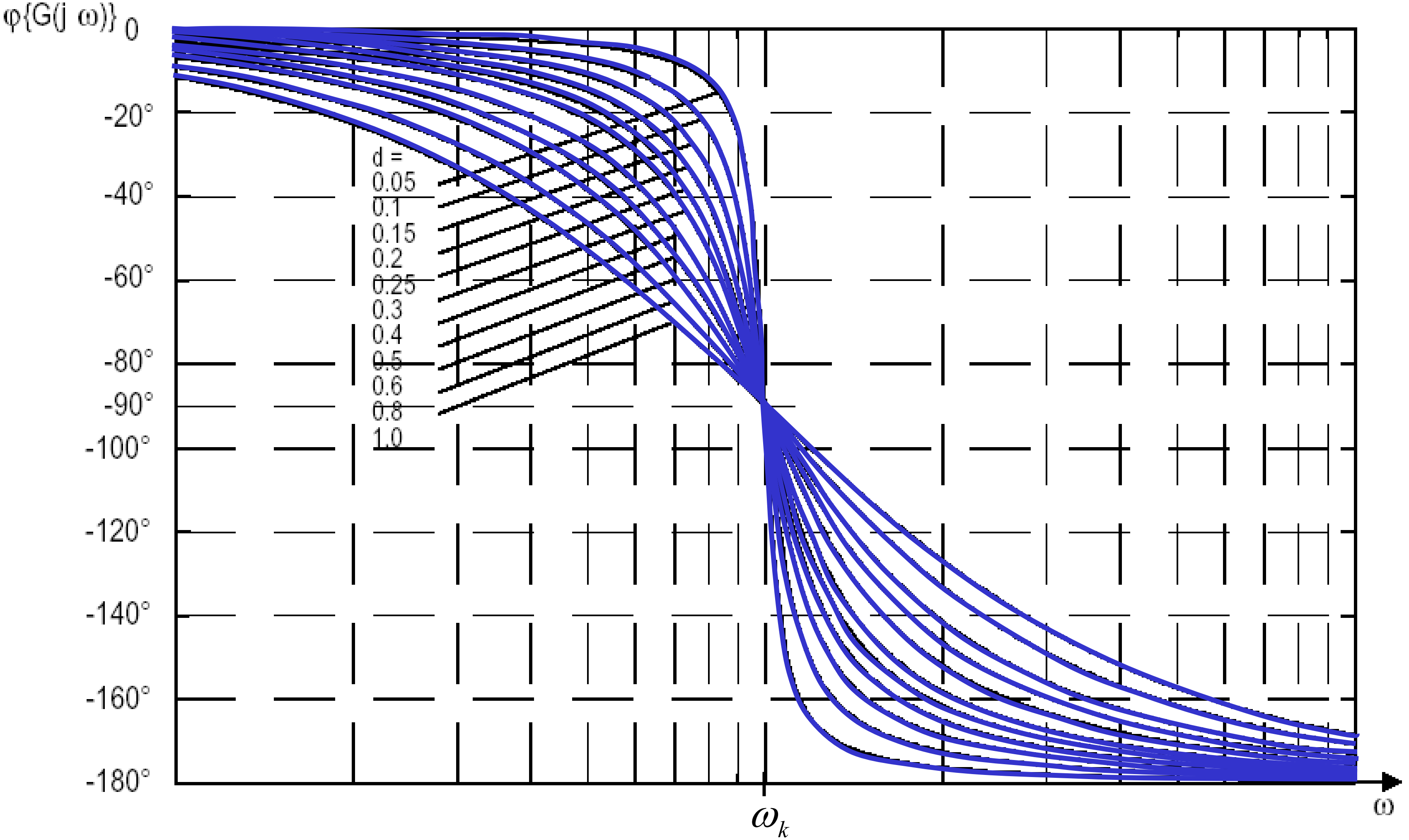
Die Phasenkennlinie eines Vorhaltegliedes 2. Ordnung verläuft für Frequenzen $< \omega_k$ bei 0° und wechselt bei Frequenzen oberhalb von ω_k auf $-\pi$

Der Frequenzbereich, in dem die Phase von 0° auf $-\pi$ wechselt, ist um so steiler, je kleiner der Dämpfungsfaktor *d* des Systems ist

Verzögerungsglied 2. Ordnung (Amplitudengang)



Verzögerungsglied 2. Ordnung (Phasengang)



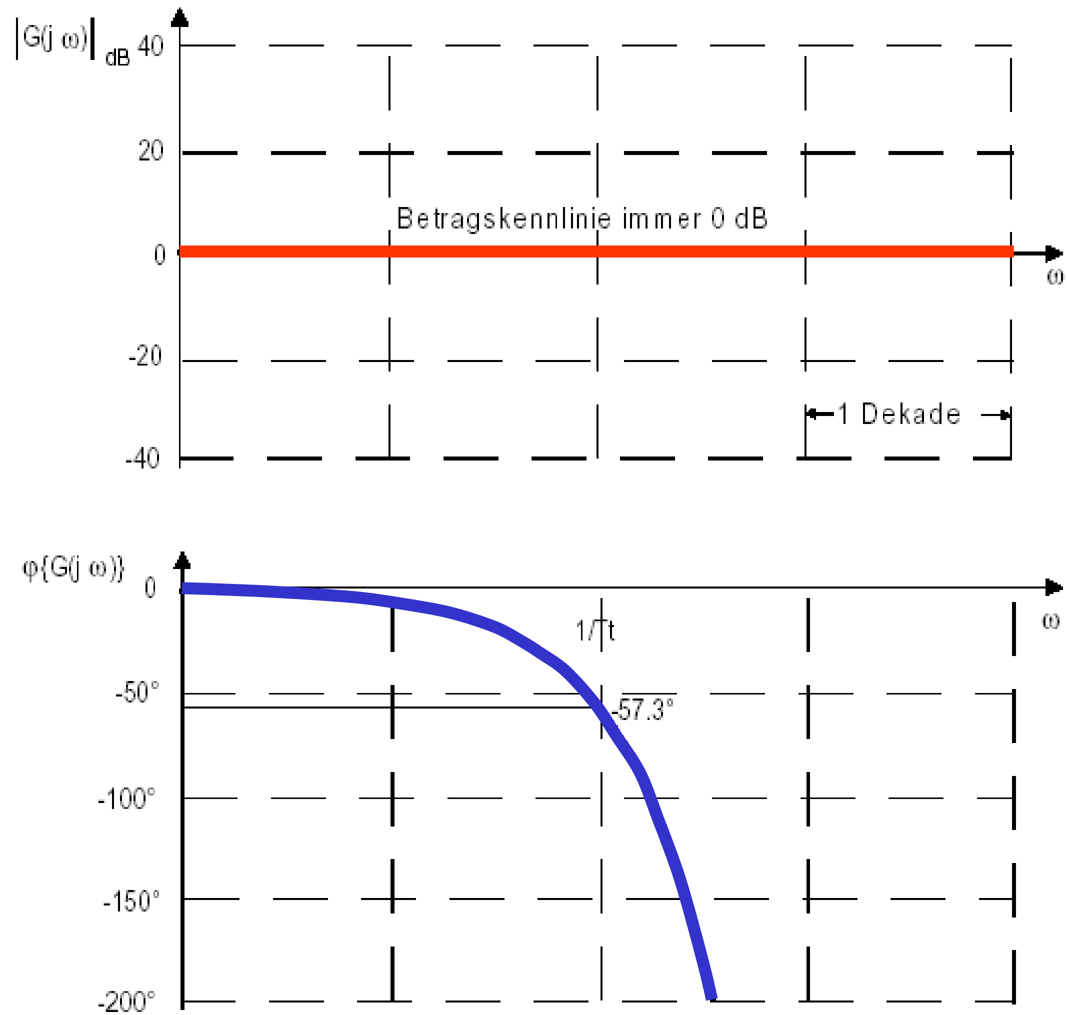
Totzeitglied

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$$

$$|G(j\omega)| = 0$$

$$\varphi\{G(j\omega)\} = -\omega T_t$$

Aufgrund der logarithmischen Darstellung hat der Graph der Phase keinen linearen Verlauf



Systeme mit negativen Kennfrequenzen

Es können auch Vorhalte- und Verzögerungsglieder mit negativen ω_k auftreten. Diese Terme haben die folgende Form:

$$G(j\omega) = 1 - \frac{j\omega}{\omega_k} \;; \qquad G(j\omega) = 1 - 2d\,\frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2 ; \quad d > 0$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{j\omega}{\omega_k}} \;; \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1 - 2d\,\frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2} \;; \quad d > 0$$

Die Frequenzkennlinien solcher Übertragungssysteme lassen sich aus den Elementarkennlinien der entsprechenden Frequenzgänge mit positiven ω_k leicht ermitteln: Bei negativen ω_k bleibt der Amplitudengang unverändert, nur der Phasengang muss an der 0°-Linie gespiegelt werden