Die z-Transformation

Zur Analyse zeitdiskreter Systeme ist die Fourier-Transformation wie bei analogen Systemen aufgrund mathematischer Schwierigkeiten nur bedingt geeignet

Dies ließe sich durch die Laplace-Transformation vermeiden, allerdings treten hier aufgrund der periodischen Abtastung immer Reihen gewichteter e-Funktionen auf

Die formale Substitution $\boxed{e^{sT} = z}$ führt auf:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(k)\, e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\, z^{-k} = u(0) + u(1)\cdot z^{-1} + u(2)\cdot z^{-2} + \cdots$$

Man nennt allgemein die Abbildung: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k}$

die *z-Transformierte F(z)* der Folge *f(k)*

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$$

Anmerkungen zur z-Transformation

Die z-Transformation beschreibt formal eine Abbildungsvorschrift zwischen einer Zahlenfolge $\{f(k)\}$ und der Funktion $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$

Analog zur Laplace-Transformation vereinfacht die z-Transform. die Berechnung der Übertragung von Sequenzen über diskrete Systeme

Die komplexe Funktion $F(z)$ existiert nur für Werte von z, die im Konvergenzbereich liegen, das heißt, für die die Reihe konvergiert

Die mathematische Berechnung von $F(z)$ ist häufig schwieriger als diejenige von $F(s)$, da Reihensummen statt Integralen zu lösen sind

In der Praxis verwendet man entweder Korrespondenztabellen oder führt die Berechnung der z-Transformierten mit dem Rechner durch

z-Transformation einfacher Sequenzen

z-Transformierte des Diracstoßes δ(k):

$$\mathcal{Z}\left\{\delta(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)\cdot z^{-k} = z^{-0} = 1$$

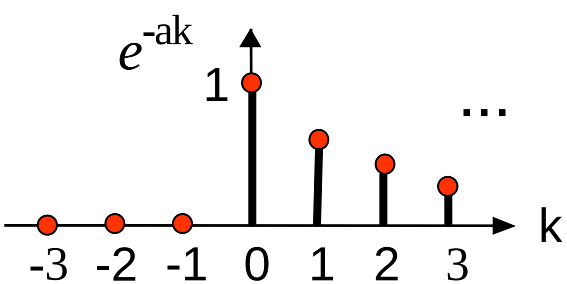
Geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad \textit{für}: \; q<1$$

z-Transformierte des Einheitssprunges σ(k):

$$\mathcal{Z}\left\{\sigma(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \qquad \textit{für}: \; |z|>1$$

z-Transformierte eines Exponentialimpulses:



$$\mathcal{Z}\left\{e^{-ak}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak}\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-a}\, z^{-1}\right)^k$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-a}\, z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-a}} \qquad \textit{für}: \; |z| > e^{-a}$$

Wichtige Theoreme der z-Transformation

Linearitätssatz:

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) + \cdots + a_n f_n(k) \quad ○\!\!-\!\!● \quad a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) + \cdots + a_n F_n(z)$$

Verschiebungssatz nach rechts:

$$f(k-n) \quad ○\!\!-\!\!● \quad z^{-n} \cdot F(z) \qquad n > 0$$

Verschiebungssatz nach links:

$$f(k+n) \quad ○\!\!-\!\!● \quad z^{n} \cdot F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \cdot z^{n-i} \qquad n > 0$$

Faltungssatz:

$$\sum_{i=0}^{k} f_1(i) \cdot f_2(k-i) \quad ○\!\!-\!\!● \quad F_1(z) \cdot F_2(z)$$

Beschreibung zeitdiskreter LTI-Systeme im z-Bereich

Aus der Diskretisierung von Zustandsmodellen folgte, dass sich jedes System durch eine rekursive Differenzengleichung beschreiben lässt:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} -\alpha_i \cdot y(k-i) + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot u(k-i)$$

$$= -\alpha_1 \cdot y(k-1) - \alpha_2 \cdot y(k-2) - \cdots - \alpha_n \cdot y(k-n) + \cdots$$

$$\cdots + \beta_0 \cdot u(k) + \beta_1 \cdot u(k-1) + \cdots + \beta_m \cdot u(k-m)$$

Hieraus ergibt sich mit Anwendung der Theoreme der z-Transformation eine äquivalente Beschreibung digitaler Systeme im z-Bereich:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{\mathrm{y(k)}\} = -\alpha_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} - \alpha_2 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} - \cdots - \alpha_n \cdot Y(z) \cdot z^{-n} + \cdots$$

$$\cdots + \beta_0 \cdot U(z) + \beta_1 \cdot U(z) \cdot z^{-1} + \cdots + \beta_m \cdot U(z) \cdot z^{-m}$$

Die z-Übertragungsfunktion G(z)

Durch Sortieren nach Y(z) und U(z) lässt sich hieraus die sogenannte z-Übertragungsfunktion G(z) bestimmen:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot z^{-1} + \beta_2 \cdot z^{-2} + \cdots + \beta_m \cdot z^{-m}}{1 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \alpha_2 \cdot z^{-2} + \cdots + \alpha_n \cdot z^{-n}}$$

G(z) hat eine große Ähnlichkeit mit der Polynomform von G(s) zeitkontinuierlicher Systeme

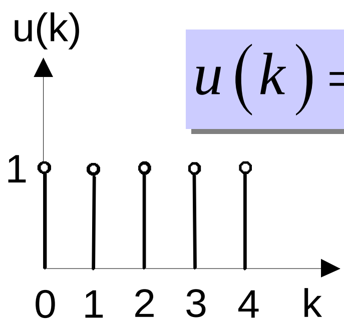
Durch Erweitern mit der jeweils höchsten z-Potenz kann G(z) in eine Form mit positiven Potenzen gewandelt werden

Faktorisierung und Partialbruchzerlegung sowie die Methoden zur Berechnung gekoppelter Systeme sind auch auf G(z) anwendbar

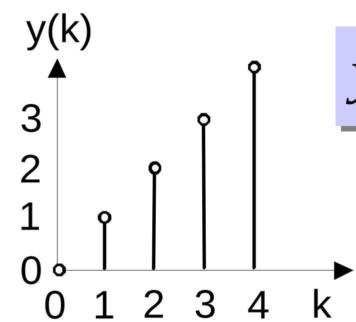
Globalverhalten zeitdiskreter Systeme

Das Globalverhalten hängt davon ab, ob ein System einen Integrator enthält

Dazu Berechnung von G(z) eines zeitdiskreten Integrators:



$$u(k) = \sigma(k)$$



$$y(k) = k \cdot \sigma(k)$$

$$U(z) = Z\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z-1} \qquad Y(z) = Z\{y(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z-1}$$

Ein zeitdiskretes System wirkt **global integral**, falls G(z) bei z = 1 eine Polstelle besitzt, andernfalls wirkt das System **global proportional**

Kausale Systeme

Wie im zeitkontinuierlichen Fall sind auch zeitdiskrete Systeme nur dann realisierbar, falls der Zählergrad den Nennergrad nicht übersteigt

Zur Begründung soll folgendes System betrachtet werden:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_o + \beta_1 \cdot z^{-1}}{\alpha_1 \cdot z^{-1}} = \frac{\beta_o \cdot z + \beta_1}{\alpha_1}$$

hier: Zählergrad > Nennergrad

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = \beta_0 \cdot U(z) + \beta_1 \cdot U(z) \cdot z^{-1}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

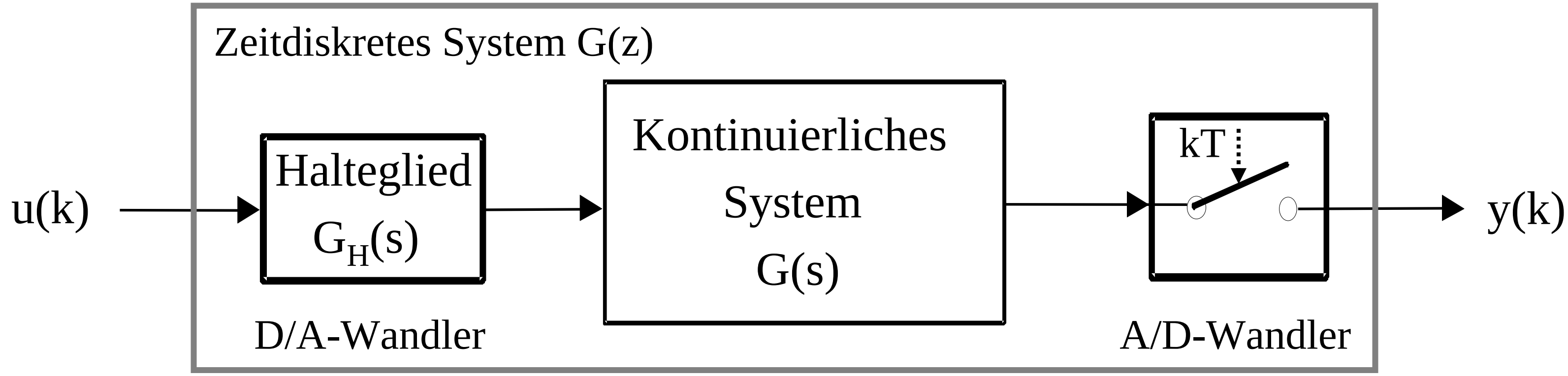
$$y(k-1) = \frac{\beta_0}{\alpha_1} \cdot u(k) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot u(k-1)$$

Ausgangssignal benötigt zukünftiges Eingangssignal!

Systeme, bei denen die Wirkung (Ausgangssignal) niemals vor der Ursache (Eingangssignal) auftritt, nennt man realisierbar oder kausal

Zeitdiskrete Beschreibung kontinuierlicher Systeme

Bei der Einbettung eines analogen Systems in eine digitale Umgebung kann das Gesamtsystem durch ein äquivalentes diskretes System modelliert werden



Für das vorher betrachtete Gesamtsystem mit einem Halteglied als D/A-Wandler und einem idealen A/D-Wandler ergibt sich im s-Bereich:

$$G_H(s) \cdot G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot G(s) = \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s} \cdot e^{-sT}$$

Berechnung der z-Transformierten des äquivalenten zeitdiskreten Systems

Zur Bestimmung der z-Transformierten von $G_H(s)\cdot G(s)$ wird zuerst die inverse Laplace- und anschließend die z-Transformation durchgeführt:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\{G_H(s)\cdot G(s)\}\Big|_{t=kT} \right\} = \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s}\cdot e^{-sT} \right\}\Bigg|_{t=kT} \right\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{ h(kT) - h\big((k-1)\cdot T\big) \right\}$$

$$\underline{mit}:\ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\mathrm{G}(\mathrm{s})}{\mathrm{s}} \right\}\Bigg|_{t=kT} = h(\mathrm{k}T)$$

$$= H(z) - H(z)\cdot z^{-1} = \left(1 - z^{-1}\right)\cdot H(z)$$

h(t): Sprungantwort

$$\Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{z-1}{z}\cdot \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\mathrm{G}(\mathrm{s})}{\mathrm{s}} \right\}\Bigg|_{t=kT} \right\} = \frac{z-1}{z}\cdot \mathbf{Z}\left\{ \frac{\mathrm{G}(\mathrm{s})}{\mathrm{s}} \right\}}$$

Sprunginvarianz-Transformation

Zusätzlich kann ein Totzeitglied von G(s) in G(z) berücksichtigt werden:

$$G(s) = G^*(s)\cdot e^{-s\cdot T_t} \approx G^*(s)\cdot e^{-s\cdot d\cdot T} = G^*(s)\cdot z^{-d}$$

$$\boxed{d \cong \frac{T_T}{T} \quad (ganzzahlig)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(z)} = \frac{z-1}{z}\cdot \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{G^*(s)\cdot z^{-d}}{s} \right\}\Bigg|_{t=kT} \right\} = \boxed{\frac{(z-1)\cdot z^{-d}}{z}\cdot \mathbf{Z}\left\{ \frac{G^*(s)}{s} \right\}}$$

Dieser Zusammenhang zwischen G(s) und G(z) heißt **Sprunginvarianz-Transformation**, da y(k) bei u(k) = σ(k) zu den Abtastzeitpunkten k·T identisch zum Signal y(t) bei Erregung von G(s) mit σ(t) ist

Charakteristisch ist hierbei, dass der D/A Wandler als Treppenfunktion modelliert wird (Halteglied nullter Ordnung)

Alternative Diskretisierungs-Transformationen

Alternativ zu einem Halteglied kann auch ein linear interpolierender D/A-Wandler verwendet werden (Anstiegsinvarianz-Transformation)

Neben der Sprunginvarianz-Transf. hat jedoch nur noch die TUSTINsche Näherung Bedeutung, die zu den Approximations-Transformationen zählt

Eine einfache Approximations-Transformation wurde bereits empirisch im Zeitbereich bei der Diskretisierung von Zustandsmodellen verwendet

Die TUSTINsche Näherung verwendet im Vergleich hierzu lediglich eine präzisere Approximation des zugrunde liegenden analogen Systems

Bestimmung der TUSTINschen Näherung

Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein Integrator:

$$y(t) = \int u(t)\cdot dt \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = u(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

Diskretisierung des Systems ergibt mit: $u(t) \approx \frac{1}{2}\left(u(k-1) + u(k)\right)$

$$\frac{y(k)-y(k-1)}{T} = \frac{u(k-1)+u(k)}{2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1}$$

<u>Ziel</u>:

$$G(s) \approx G(z) \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{G}(z) = \mathrm{G}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$

$$\mathrm{G}(s) = \mathrm{G}(z)\Big|_{z=\frac{1+sT/2}{1-sT/2}}$$

Zusammenfassung Diskretisierungs-Transformationen

Alle Diskretisierungs-Transformationen verfolgen das Ziel, ein analoges System möglichst fehlerfrei durch ein digitales System zu modellieren

Da reale D/A-Wandler meistens Halteglieder nullter Ordnung sind, wird in der Regelungstechnik die Sprunginvarianz-Transformation verwendet

In der digitalen Signalverarbeitung erfolgt der Übergang vom Laplace- in den z-Bereich auch häufig mittels der TUSTINschen Näherung

Mit zunehmender Abtastrate werden die Unterschiede zwischen unterschiedlichen Diskretisierungs-Transformationen immer geringer

Realisierung zeitdiskreter Systeme

Zeitdiskrete Systeme werden entweder mit ihrer z-Übertragungsfunktion oder im k-Bereich als rekursive Differenzengleichung beschrieben

Falls ein System in Form einer Differenzengleichung vorliegt, kann aus dieser sehr effizient y(k) für beliebiges u(k) numerisch berechnet werden

Bei Vorliegen einer Systembeschreibung als Übertragungsfunktion G(z) ist es immer möglich, diese in eine Differenzengleichung umzuwandeln

Alternativ kann y(k) analytisch durch inverse z-Transformation bestimmt werden, wobei die z-Transformierte der Eingangsfolge bekannt sein muss

$$Y(z) = U(z) \cdot G(z) \qquad \Rightarrow \qquad y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{U(z) \cdot G(z)\}$$

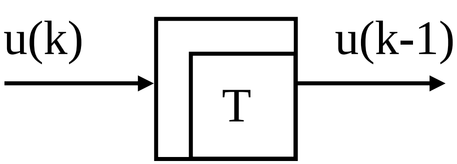
Strukturbilder zeitdiskreter Systeme

Analog zu zeitkontinuierlichen Systemen lassen sich auch zeitdiskrete Systeme durch Strukturbilder veranschaulichen

Wegen der Rückwirkungsfreiheit digitaler Systeme lassen sich zeitdiskrete Strukturbilder auch leicht in Hardware (ASIC) realisieren

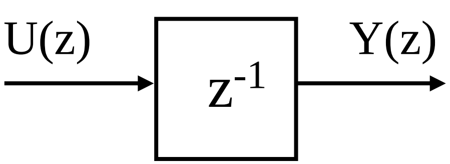
Für diskrete Strukturbilder gelten dieselben Regeln wie für zeitkontinu-ierliche Systeme, wobei die Darstellung oft im k-Bereich erfolgt

Die Systeme werden hierzu in einzelne Verzögerungsglieder zerlegt, die im z-Bereich auch äquivalent durch z^{-1} Glieder beschreibbar sind:

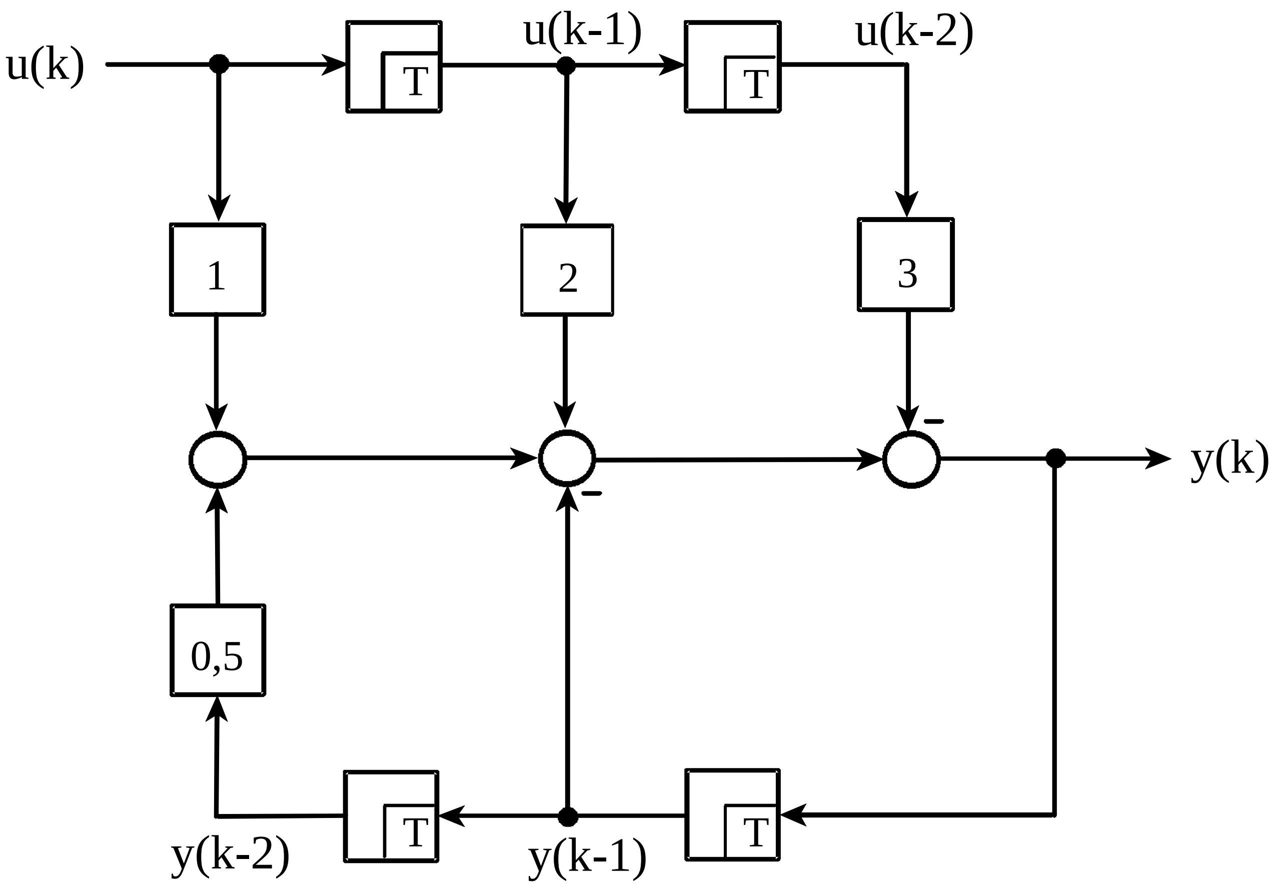


$$Y(z) = \mathcal{Z}\{u(k-1)\} = U(z) \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-1}$$



Beispiel für eine Differenzengleichung als Strukturbild

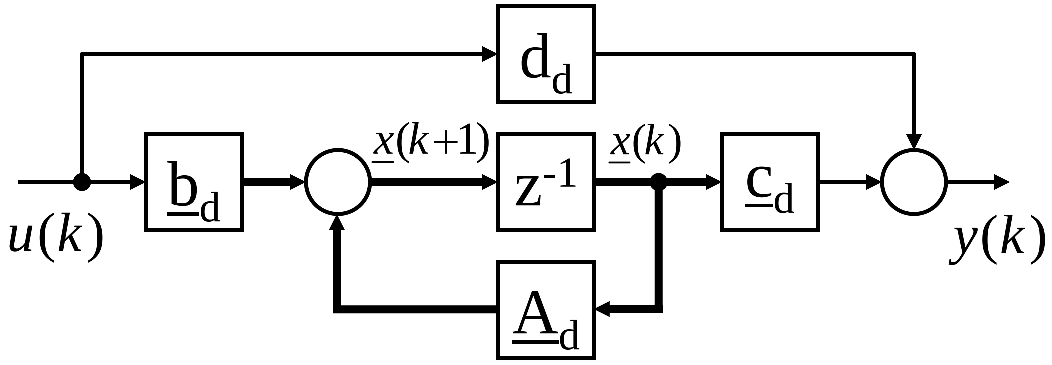


$$y(k) \;=\; -y(k-1) + 0{,}5\cdot y(k-2) + u(k) + 2\cdot u((k-1) - 3\cdot u(k-2)$$

Strukturbild der zeitdiskrete Zustandsform

Auch die zeitdiskrete Zustandsform lässt sich als Strukturbild darstellen, das i. A. für jede Zustandsvariable $x_i(k)$ ein Verzögerungsglied benötigt

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{b}_d \cdot u(k)$$
$$y(k) = \underline{c}_d \cdot \underline{x}(k) + d_d \cdot u(k)$$



Betrachtet man die fett dargestellten Pfeile als Wirkungslinien der Multiplexsignale $\underline{x}(k)$, so ergibt sich ein allgemeingültiges Strukturbild

Stabilität zeitdiskreter Systeme

Definition der Stabilität analog zu zeitkontinuierlichen Systemen:

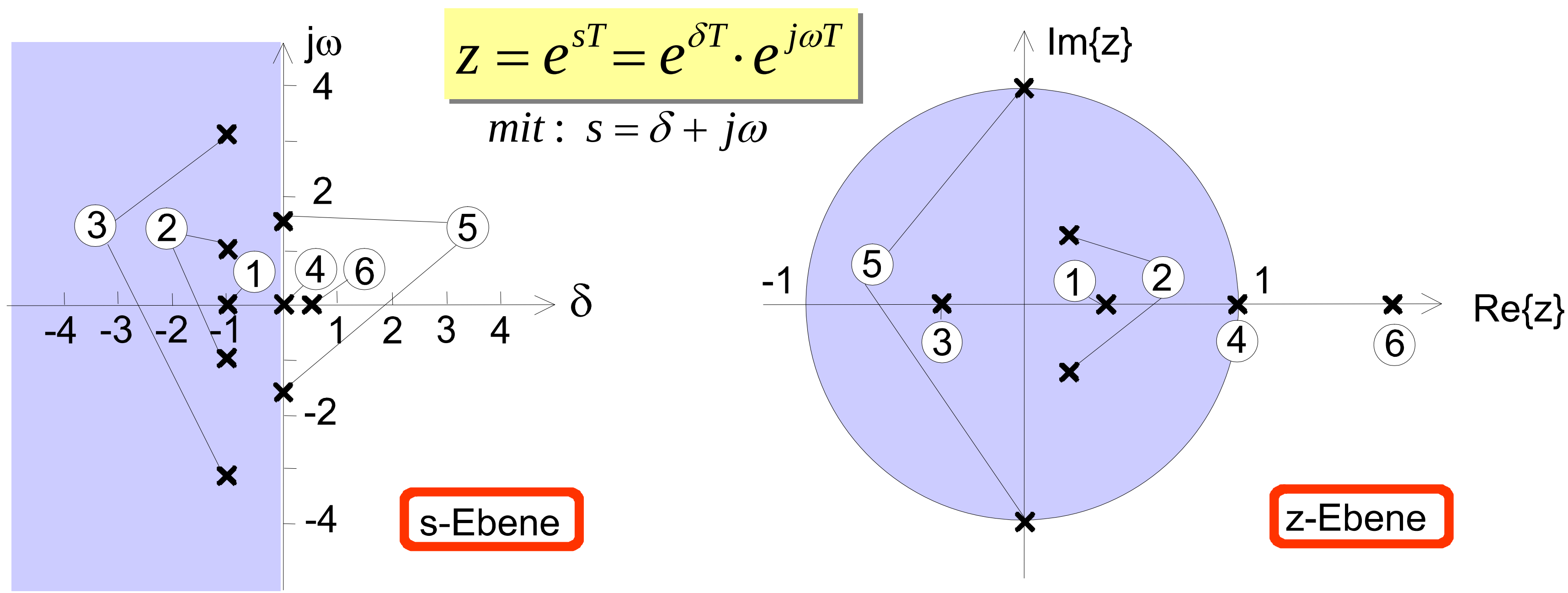
Ein zeitdiskretes Übertragungssystem heißt stabil, wenn die Sprungantwort y(k) (d.h. mit u(k) = σ(k)) für $k \to \infty$ einem endlichen Wert zustrebt. Anderenfalls ist das System instabil.

Für praktische Anwendungen ist dieses Kriterium allerdings unhandlich, denn die Stabilität sollte aus der Übertragungsfunktion bestimmbar sein

Im zeitkontinuierlichen Fall ergab sich, dass bei einem stabilen System sämtliche Polstellen von G(s) einen negativen Realteil aufweisen müssen

Durch Analyse der Abbildung zwischen s und z kann hieraus auch ein Kriterium für zeitdiskrete Übertragungsfunktionen abgeleitet werden

Stabilitätskriterium für zeitdiskrete Systeme



$$z = e^{sT} = e^{\delta T} \cdot e^{j\omega T}$$

$$mit: \; s = \delta + j\omega$$

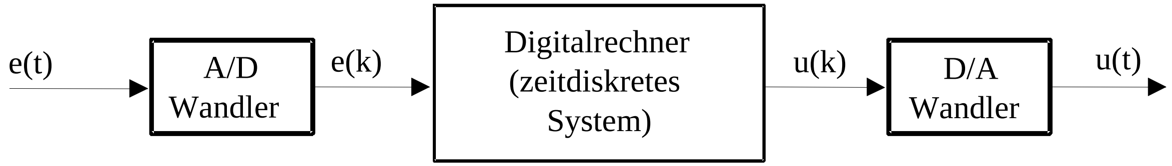
Die konforme Abbildung z = e^{sT} bildet in der s-Ebene den Bereich $\delta < 0$ in das Innere des Einheitskreises um den Ursprung der z-Ebene ab

$\Rightarrow$

Ein zeitdiskretes System ist genau dann stabil, wenn die Pole seiner Übertragungsfunktion G(z) ausschließlich im Einheitskreis um den Ursprung der z-Ebene liegen

Anwendungen der zeitdiskreten Systemtheorie

Die beschriebenen Methoden und Verfahren erlauben die Einbindung digitaler Systeme in zu beeinflussende kontinuierliche Umgebungen



Das digitale System erlaubt hierbei mit relativ geringem Auswand die Implementierung quasi beliebig komplizierter Verarbeitungsalgorithmen

Falls das digitale System ein analoges System nachbilden soll, kann G(z) aus G(s) mittels einer Diskretisierungs-Transformation bestimmt werden

G(z) wird auch zur Analyse des Systemverhaltens verwendet, während die System-Implementierung meistens als Differenzengleichung erfolgt