# Systemtheorie (SYT)

# Übungsaufgaben

**Aufgabe 1**

a) Geben Sie die Sequenz $a = [1, 2, 3, 4, 5]$ als Zeilenvektor in Matlab ein, generieren Sie aus a durch Invertierung den Vektor $b = [5, 4, 3, 2, 1]$ und erzeugen Sie eine weitere Sequenz c der Länge 100, die nur Nullen enthält.

b) Schreiben Sie die Zahlenfolgen a, b und c hintereinander in die neue Sequenz d, ermitteln Sie die Länge von d und löschen Sie dann die letzten fünfzig Elemente aus d.

**Aufgabe 2**

Zeichnen Sie das Signal $s(t) = 2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ im Zeitbereich $0 \leq t \leq 5$.

**Aufgabe 3**

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion *u = sigma(x)*, welche die Sprungfunktion $\sigma$ für einen beliebigen Vektor x berechnet und das Ergebnis als Vektor *u* zurückgibt.

**Aufgabe 4**

Zeichnen Sie folgende Signale. Welche Signale weisen eine endliche Gesamtenergie *E* auf? Berechnen Sie jeweils die Energie dieser Signale.

a) $s(t) = \sigma(t) \cdot e^{-t}$
b) $s(t) = \sigma(t - T)$
c) $s(t) = t \cdot \sigma(t - T)$
d) $s(t) = (t - T) \cdot \sigma(t - T)$
e) $s(t) = [\sigma(t - \pi/2) - \sigma(t - 3\pi/2)] \cdot \cos(t)$
f) $s(t) = \sigma(-t)$
g) $s(t) = \sigma(1 - t^2)$

**Aufgabe 5**

In welchem Bereich für $\tau$ hat die Korrelationsfunktion $\varphi^E_{s_1 s_2}(\tau)$ zwischen den beiden Signalen

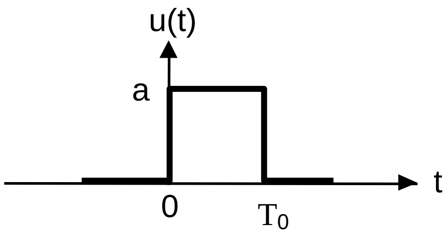
$$s_1(t) = \sigma(t - 1) - \sigma(t - 3)$$
$$s_2(t) = \sigma(t - 2) - 2 \cdot \sigma(t - 3) + \sigma(t - 4)$$

von Null abweichende Werte und für welches $\tau$ nimmt $\varphi^E_{s_1 s_2}(\tau)$ seinen Maximal- und Minimalwert an? Berechnen Sie die Extremwerte und zeichnen Sie $\varphi^E_{s_1 s_2}(\tau)$.

## Aufgabe 6

Gegeben sei das folgende System (T=2): $g(t) = \frac{1}{T} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-t/T}$

Über dieses System werde ein Rechteckimpuls u(t) entsprechend der folgenden Darstellung übertragen (a = 5, $T_0$ = 4):




a) Ermitteln Sie einen analytischen Ausdruck für u(t).

b) Zeichnen Sie die Funktion g(t) sowie $g(t_0 - t)$ für $t_0 = 0$ und $t_0 = T$.

c) Berechnen Sie das Signal y(t) am Ausgang des Systems, indem Sie das Faltungsintegral mit einer geeigneten Fallunterscheidung lösen, und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

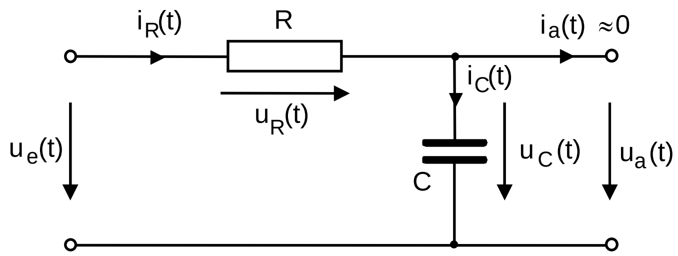
## Aufgabe 7

Berechnen und zeichnen Sie für den in der vorherigen Aufgabe gegebenen Rechteckimpuls das Ergebnis der Faltung mit einem identischen aber um T=2 verschobenen Impuls:

$$y(t) = u(t) * u(t-T)$$

## Aufgabe 8

Gegeben sei der folgende unbelastete Spannungsteiler mit *R = 1kΩ* und *C = 1 mF*. Der Kondensator sei zum Zeitpunkt *t = 0* auf die Spannung $U_C = 5V$ geladen:




Das System soll durch seine Zustandsform beschrieben werden:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t)$$
$$y(t) = \underline{c} \cdot \underline{x}(t) + d \cdot u(t)$$

a) Geben Sie die Eingangsgröße u(t) und die Ausgangsgröße y(t) an.

b) Welche Dimension weist der Vektor der Zustandsvariablen $\underline{x}(t)$ auf und welche physikalische(n) Größe(n) sind mögliche Zustandsvariablen?

c) Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}$, die Vektoren $\underline{b}$ und $\underline{c}$ sowie den Parameter d.

**Aufgabe 9**

Das folgende nichtlineare System soll in einem Arbeitspunkt linearisiert werden:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \left(x_1(t)\right)^2 - x_2(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

a) Nach welcher Zeit ist das System eingeschwungen, wenn als Eingangssignal ein Sprung mit der Amplitude 2 verwendet wird und welchen stationären Endwert nimmt der Systemausgang ein?

b) Berechnen Sie die Systemparameter $\underline{A}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ und $d$ in dem unter a) ermittelten Arbeitspunkt.

**Aufgabe 10**

Berechnen und zeichnen Sie die Fourier-Transformierte für den folgenden Rechteckimpuls:

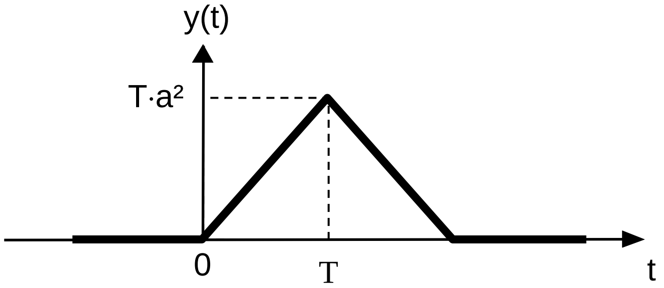
$$s(t) \;=\; 3\cdot\left[\sigma(t) - \sigma(t-2)\right]$$

**Aufgabe 11**

Wie sieht das Spektrum der Funktion $y(t) = s(t) * s(t)$ mit *s(t)* aus der vorherigen Aufgabe aus?

**Aufgabe 12**

Gegeben sei der folgende Dreieckimpuls:



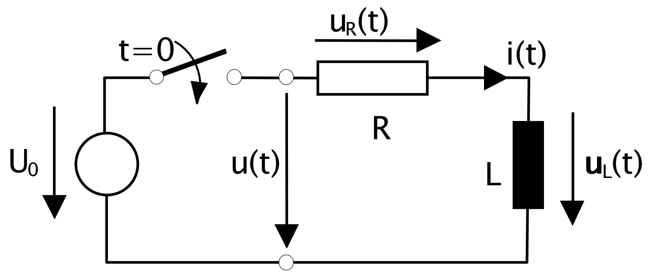

a) Geben Sie einen analytischen Ausdruck für die Funktion *y(t)* an.

b) Ermitteln Sie die Laplace-Transformierte $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$

c) Zeigen Sie durch Zerlegung von *Y(s)* in das Produkt zweier Funktionen, dass *y(t)* sich als Faltung von Rechteckimpulsen darstellen lässt.

**Aufgabe 13**

Gegeben sei die folgende Schaltung bestehend aus einer konstanten Spannungsquelle $U_0$ =12 V, einem Schalter, dem Widerstand $R$ = 1 $k\Omega$ und einer Spule der Induktivität $L$ mit $L/R$ = 50 ms. Zum Zeitpunkt t = 0 werde der Schalter geschlossen.




a) Geben Sie einen analytischen Ausdruck für den zeitlichen Verlauf der Spannung *u(t)* an der Reihenschaltung von *R* und *L* an.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$

c) Transformieren Sie $I(s) = \mathscr{L}\{i(t)\}$ in den Zeitbereich und zeichnen Sie den Verlauf des Stromes *i(t)*.

d) Welchen Verlauf hat *i(t)*, falls statt $U_0$ eine sinusförmige Spannungsquelle $U_0(t) = 12\,V \cdot \sin(t \cdot 2\pi/T)$ verwendet wird?

**Aufgabe 14**

Ermitteln Sie für folgendes LTI-System die zugehörige Übertragungsfunktion G(s):

$$\dot{x}_1(t) = -5 \cdot x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

**Aufgabe 15**

Bestimmen Sie aus folgender Übertragungsfunktion die Zustandsform des Systems:

$$G(s) = \frac{100}{10s^3 + 6s^2 + 10.5s + 1}$$

**Aufgabe 16**

Rechnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen jeweils in die Produktform, die Partialbruchform und in die V-Normalform um:

a) $G_1(s) = \frac{s+2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$

b) $G_2(s) = \frac{4s^2 + 20s + 24}{2s^3 + 8s^2 + 16s}$

c) $G_3(s) = \frac{1}{s^2 + s^3}$

**Aufgabe 17**

Zeichnen Sie für die folgenden Systeme jeweils den Pol- und Nullstellenplan und bestimmen Sie das Globalverhalten. Sind die Systeme realisierbar und stabil?

a) $G_1(s) = \dfrac{s+4}{s+3}$ b) $G_2(s) = \dfrac{s^2+5s+4}{s^3+4s^2+8s}$ c) $G_3(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+2s-3}$

**Aufgabe 18**

Gegeben sei das folgende System:

$$G(s) = \frac{3s+12}{\left(s^2+2s+4\right)\left(s+6\right)}$$

a) Zeigen Sie, dass *G(s)* ein dominantes Polstellenpaar besitzt.

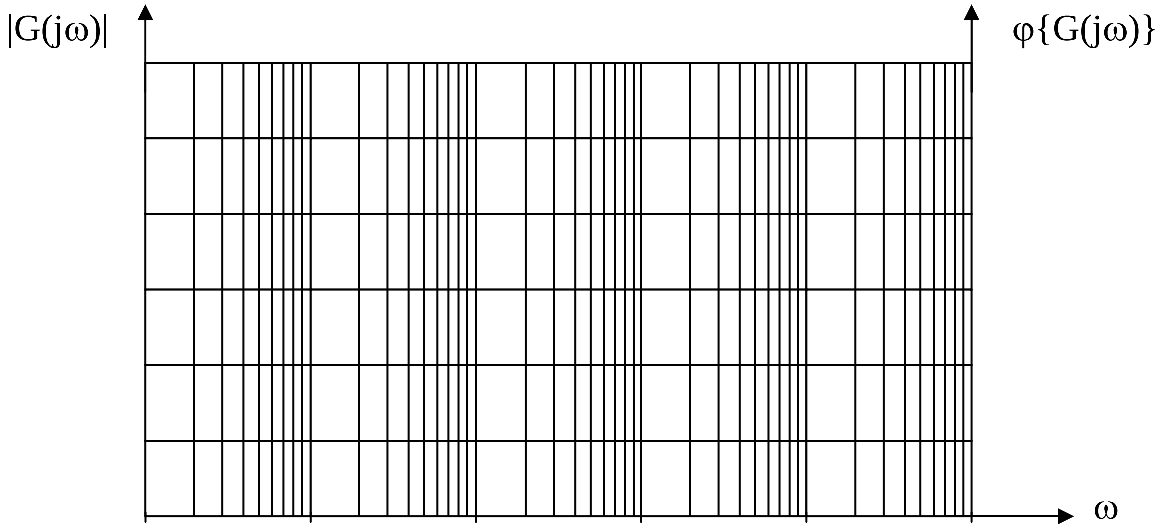
b) Geben Sie für die Sprungantwort *h(t)* von *G(s)* die Größen $T_s$, $T_p$ und $M_p$ an und zeichnen Sie *h(t)*.

**Aufgabe 19**

Gegeben sei das folgende System:

$$G(s) = \frac{10+10s}{s+10s^2}$$

Tragen Sie den asymptotischen Frequenzgang (Amplituden- und Phasengang) von G(s) in das Bode-Diagramm ein.



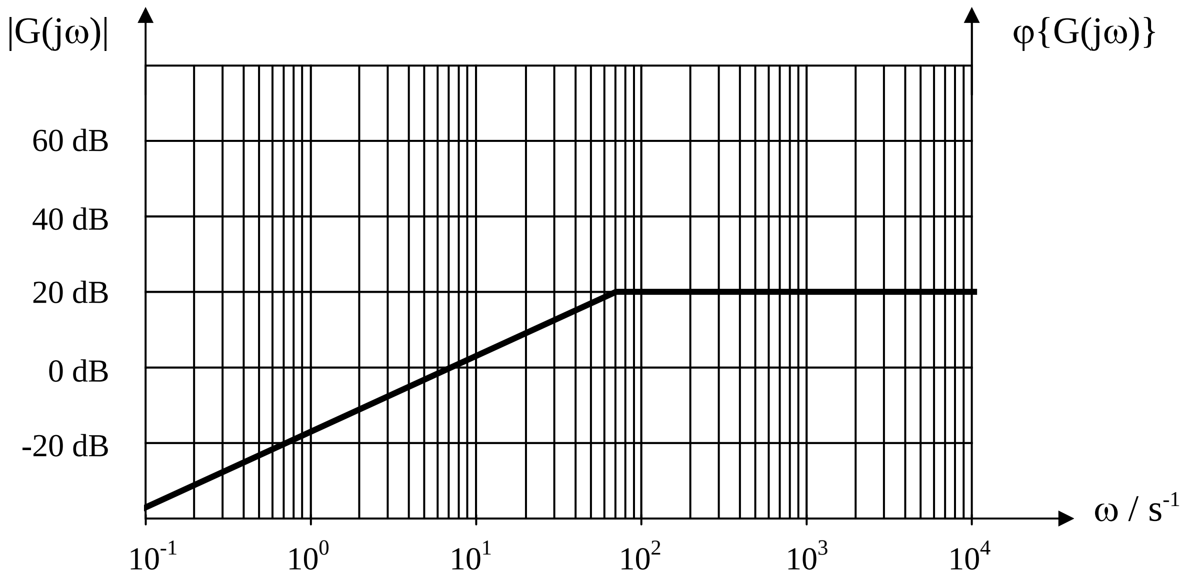

**Aufgabe 20**

Zeichnen Sie jeweils den Frequenzgang der folgenden Systeme:

a) $G_1(s) = \dfrac{s^2+20s+24}{2s^3+8s^2+16s}$ b) $G_2(s) = \dfrac{4s^2+13s+20}{\left(2s^2+8\right)\left(s+1\right)}$ c) $G_3(s) = \dfrac{1}{1+s^2+s} \cdot e^{-s5}$

**Aufgabe 21**

Von einem LTI-System wurde der Amplitudengang aufgenommen. Bestimmen Sie G(s) und tragen Sie in das Diagramm den zugehörigen minimalen Phasengang ein.




**Aufgabe 22**

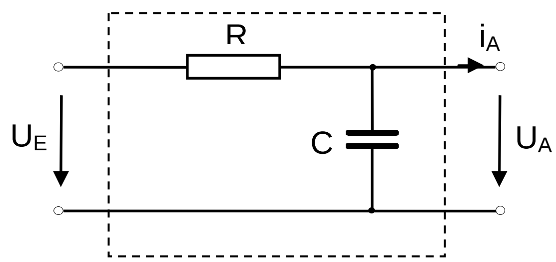
Gegeben sei die folgende Übertragungsfunktion mit *T = 10*: $G(s) = \frac{1}{(1+sT)^2}$

a) Zeichnen Sie den asymptotischen Frequenzgang (Amplituden- und Phasengang) von *G(s)*.

b) Wie groß ist der Betrag von G(jω) bei der Eckfrequenz $\omega_g = 1/T$ ?

Das System soll durch eine Reihenschaltung von RC-Tiefpässen erster Ordnung mit *RC* = *T* näherungsweise realisiert werden, wobei als Übertragungsfunktion die Leerlaufspannungsverstärkung $v_u$ betrachtet wird:

$$v_u = \left.\frac{u_A}{u_E}\right|_{i_A = 0}$$




c) Geben Sie für einen der Tiefpässe $v_u(j\omega)$ an.

d) Berechnen Sie für die Reihenschaltung von zwei identischen Tiefpässen $v_u(j\omega)$ und zeichnen Sie den Frequenzgang.

e) Durch welche Ergänzung in der Schaltung könnte man erreichen, dass die Reihenschaltung einen identischen Frequenzgang wie *G(s)* aufweist?

**Aufgabe 23**

Gegeben sei die folgende Übertragungsfunktion:

$$G(s)=\frac{1+s}{s^2+12s+32}$$

a) Realisieren Sie G(s) als Reihenschaltung von Systemen erster Ordnung
b) Realisieren Sie G(s) als Parallelschaltung von Systemen erster Ordnung
c) Geben Sie eine Realisierung von G(s) an, die ausschließlich aus Integratoren, Summationspunkten und Proportionalgliedern besteht.

**Aufgabe 24**

Das folgende kontinuierliche System soll mit einem Digitalrechner simuliert werden:

$$\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)$$
$$y(t)=x(t)$$

a) Diskretisieren Sie die Zustandsform, indem Sie die Zeit *t* durch die diskreten Zeitpunkte $k\cdot\Delta t$ und die Ableitung näherungsweise durch den Differenzenquotienten $\dot{x}(t)\approx\frac{x((k+1)\cdot\Delta t)-x(k\cdot\Delta t)}{\Delta t}$ ersetzen, und geben Sie eine rekursive Differenzengleichung zur Berechnung des Ausgangssignals *y(k)* an.

b) Ermitteln Sie die zeitdiskrete Sprungantwort des Systems für $u(k) = 2\cdot\sigma(k)$ und $\Delta t = 0.5$ im Bereich $0 \le k \le 5$ mit $y(0) = 0$.

**Aufgabe 25**

Zur Vermeidung von Aliasing-Effekten wird vor der Abtastung das folgende Tiefpassfilter zweiter Ordnung mit $f_g = 3\ kHz$ eingesetzt:

$$G_{TP}(j\omega)=\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{2\pi f_g}\right)^2}$$

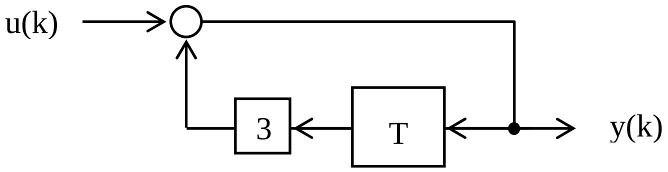
Welche Abtastrate ist erforderlich, damit Signalverzerrungen durch Aliasing um mindestens *60 dB* gedämpft werden?

**Aufgabe 26**

Wie sieht das Spektrum eines abgetasteten Signals aus, wenn statt eines idealen Abtasters eine reale Torschaltung mit der Torbreite $T_0$ eingesetzt wird? Was passiert, wenn als Torbreite die Abtastzeit T gewählt wird?

**Aufgabe 27**

Gegeben sei das folgende Strukturbild eines zeitdiskreten Systems:




a) Ermitteln Sie aus dem Strukturbild eine Differenzengleichung für das System.
b) Berechnen Sie aus der Differenzengleichung die z-Übertragungsfunktion G(z)

**Aufgabe 28**

Gegeben sei die folgende z-Übertragungsfunktion: $G(z) = \frac{0.7}{z^2 - 0.8 \cdot z + 0.15}$

a) Ist das System realisierbar und stabil? Bestimmen Sie das Globalverhalten von G(z).
b) Zeichnen Sie für das System ein Strukturbild, das nur aus Verzögerungsgliedern, Verstärkungsgliedern und Summationspunkten besteht.

**Aufgabe 29**

Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche System: $G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$

Das System werde über einen D/A-Wandler mit einer Amplitudenfolge angesteuert, die Abtastzeit betrage 0.1 Sekunden.

a) Berechnen Sie mittels der Sprunginvarianztransformation die z-Übertragungsfunktion G(z).
b) Bestimmen Sie G(z) durch Anwendung der TUSTINschen Näherung

**Aufgabe 30**

Berechnen Sie für das folgende System analytisch und numerisch die Systemantwort *y(k)* auf die Einheitssprungfolge *u(k)* = $\sigma(k)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.5}{z-1}$$