問題

伝達関数が

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

で与えられる 1 次遅れ要素について以下の問いに答えよ.

(1) ステップ応答を求めよ.

(2) ナイキスト線図の概形を描け.

(3) ボード線図の概形を描け.(但し, $\log_2 = 0.30$ とする.)

(1) ステップ応答を求めよ.

ステップ関数 $u(t)$ をラプラス変換すると,

ラプラス変換表より $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \underline{\frac{1}{s}}$

$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{2}{s+2} \cdot \frac{1}{s}$

この式を部分分数分解すると,

$$\begin{aligned} \frac{2}{s+2} \cdot \frac{1}{s} &= \underline{\frac{a}{s+2} + \frac{b}{s}} \\ &= \frac{as + b(s+2)}{s(s+2)} \\ &= \frac{(a+b)s + 2b}{s(s+2)} \end{aligned}$$

$$\underline{\begin{cases} a + b = 0 \\ 2b = 2 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\therefore\ Y(s) = \underline{-\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}}$

これをラプラス逆変換してステップ応答を求めると,

ラプラス変換表より $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}\right] = \underline{-e^{-2t} + 1 = 1 - e^{-2t}}$

(2) ナイキスト線図の概形を描け.

この伝達関数の周波数応答は, $G(j\omega) = \underline{\frac{2}{j\omega + 2}}$

これを変形すると,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{2}{j\omega + 2} \\ &= \underline{\frac{2(2 - j\omega)}{(2 + j\omega)(2 - j\omega)}} \\ &= \frac{4 - 2j\omega}{4 + \omega^2} \\ &= \underline{\frac{4}{4+\omega^2} - \frac{2\omega}{4+\omega^2} j} \end{aligned}$$

実部, 虚部をそれぞれ x, y と置くと,

$$\begin{cases} x = Re(G(j\omega)) = \underline{\dfrac{4}{4+\omega^2}} \\ y = Im(G(j\omega)) = \underline{-\dfrac{2\omega}{4+\omega^2}} \end{cases}$$

$$x = \frac{4}{4+\omega^2}$$
$$\to (4+\omega^2)x = 4$$
$$\to \omega^2 x = 4 - 4x$$
$$\to \omega^2 = \frac{4(1-x)}{x}$$
$$\to \omega = 2\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2\cdot 2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{4+4\left(\frac{1-x}{x}\right)} \\ &= -\frac{4\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{4\left(1+\frac{1-x}{x}\right)} \\ &= -\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\frac{x+1-x}{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &= -x\sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ &= -\sqrt{x^2\cdot\frac{1-x}{x}} \\ &= -\sqrt{x(1-x)} \end{aligned}$$

$$y^2 = x(1-x)$$
$$\to y^2 = x - x^2$$
$$\to y^2 = -(x^2 - x)$$
$$\to y^2 = -\left\{x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\to y^2 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\to \underline{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

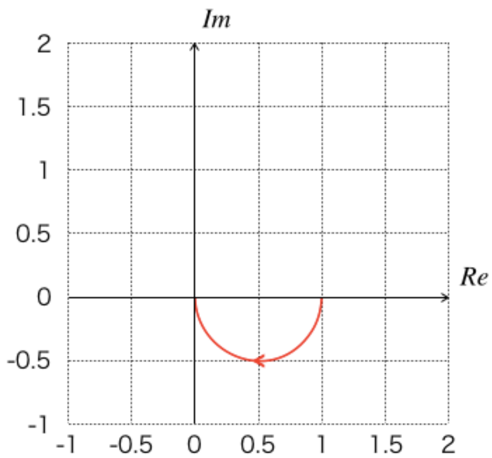
よって, 中心 $\underline{(0.5,\ 0)}$, 半径 $\underline{0.5}$ を通る円を描くことが分かる.

但し, $0 < \omega < \infty$ のとき, $\underline{y < 0}$ であることから,$y < 0$ の範囲のみを通る半円であることが分かる.

また, ナイキスト線図の方向を確認すると,

$$\lim_{\omega\to 0} x = \lim_{\omega\to 0}\frac{4}{4+\omega^2} = \frac{4}{4+0^2} = 1$$
$$\lim_{\omega\to\infty} x = \lim_{\omega\to\infty}\frac{4}{4+\omega^2} = \frac{4}{4+\infty^2} = 0$$

よって, ナイキスト線図の概形は以下のようになることが分かる.



(3) ボード線図の概形を描け.(但し, $\log_2 = 0.3$ とする.)

周波数伝達関数の大きさを求めると,

$$
\begin{aligned}
|G(j\omega)| &= \underline{\sqrt{\left(\frac{4}{4+\omega^2}\right)^2 + \left(-\frac{2\omega}{4+\omega^2}\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{16}{(4+\omega^2)^2} + \frac{4\omega^2}{(4+\omega^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{4(4+\omega^2)}{(4+\omega^2)^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4+\omega^2}}
\end{aligned}
$$

よって, ゲインは

$$
\begin{aligned}
g_{dB} &= \underline{20\log|G(j\omega)|} \\
&= 20\log\left(\frac{2}{\sqrt{4+\omega^2}}\right) \\
&= 20\log 2 - 20\log(4+\omega^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= 20\cdot 0.3 - 10\log(4+\omega^2) \\
&= 6 - 10\log(4+\omega^2)
\end{aligned}
$$

また, 位相は

$$
\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \underline{\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{2\omega}{4+\omega^2}}{\frac{4}{4+\omega^2}}\right)} \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$\omega = 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) \\
&= \tan^{-1} 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{dB} &= 6 - 10\log(4+0) \\
&= 6 - 20\log 2 \\
&= 6 - 20\cdot 0.3 \\
&= 6 - 6 = 0
\end{aligned}
$$

$\omega = 2$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \tan^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right) \\
&= \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{dB} &= 6 - 10\log(4+4) \\
&= 6 - 30\log 2 \\
&= 6 - 30\cdot 0.3 \\
&= 6 - 9 = -3
\end{aligned}
$$

$\omega \to \infty$ のとき,

$$
\phi(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\pi}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{dB} &= 6 - \lim_{\omega\to\infty} 10\log(4+\omega^2) \\
&= 6 - \infty = -\infty
\end{aligned}
$$

よって, これらをプロットすると教科書のようなグラフになる.