

化繁为简

新知一下

贪心算法

NOI 基础算法系列课程

版本: 1.0.0

讲师: 孙伟航

The background of the slide features a high-angle view of the Earth from space, showing the curvature of the planet and the cloud-covered surface. Overlaid on this is a network of thin, white lines connecting various points, resembling a global communication or data network. Several bright, star-like light sources are scattered across the scene, adding a sense of depth and technological sophistication.

01

贪心算法

贪心算法（又称贪婪算法），是指在对问题求解时，总是做出在当前看来是最好的选择。也就是说，不从整体最优上加以考虑，算法得到的时某种意义上的局部最优解。

贪心算法不是对所有问题都能得到整体最优解，关键是贪心策略的选择。

算法思路：

- 1、建立数学模型来描述问题。
- 2、把求解的问题分成若干个子问题。
- 3、对每个子问题求解，得到子问题的局部最优解。
- 4、把子问题的解局部最优解合成原来解问题的一个解。

0

使用条件：

1、贪心选择性质

一个问题的整体最优解可通过一系列局部的最优解的选择达到，并且每次的选择可以依赖以前做出的选择。

2、最优子结构性质

当一个问题的最优解包含其子问题的最优解时，称此问题具有最优子结构性质。问题的最优子结构性质是该问题可用贪心法求解的关键所在。



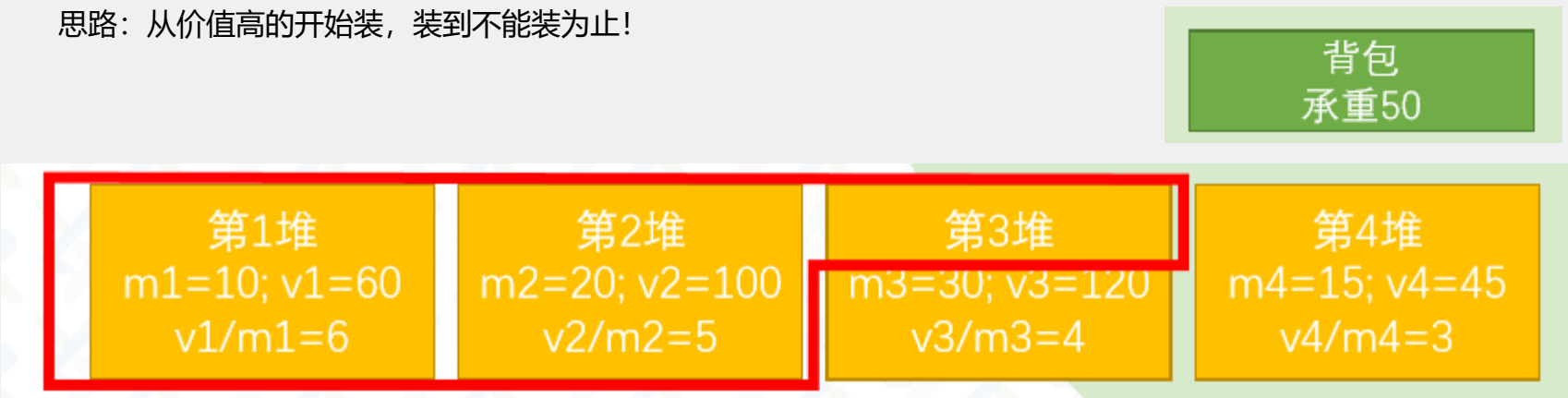
例1-金银岛

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1225



例1-金银岛-解析

思路：从价值高的开始装，装到不能装为止！



证明：

1. 所有的东西价值都是正的，因此只要金属总数足够，背包就必须要装满而不能留空；
2. （反证法）假设没在背包中放入单价高的金属，而放入了单价低的金属，那么可用等重量的高价值金属替换掉背包里的低价值金属，总价值更高了。



例1-金银岛-解析

思考:

如果藏宝洞里面不是一堆堆金币，而是一个个单价不一且无法分割的金块，还能使用类似的策略吗？从单价高的开始装，装到不能装为止？

答案是否定的。战略性放弃性价比最高的金块可能会让你获得更多。

仅仅举出了一个反例就推翻了一个错误的贪心算法，可见使用贪心策略时要特别注意正确性。

贪心需要证明正确性！

小结:

每一步都选择最优策略，结果也可以最优。

大胆假设，小心求证。找到一组反例就可以推翻贪心！

证明：反证法、数学归纳法。



例2-排队接水

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1319



例2-排队接水-解析

证明:

从微观的角度: 相邻的两个人。设第一个人花时间 a , 第二个人花时间 b

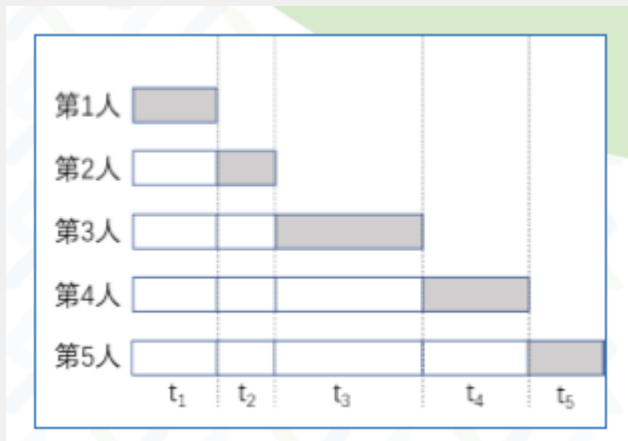
如果第一个人在前, 那么总时间为 $b + 2a$

如果第二个人在前, 那么总时间为 $a + 2b$

$b + 2a$ 与 $a + 2b$, 统统减去 $a+b$

变成 a 和 b , 也就是说谁时间短就排在前面更优

另一种证明:



可发现, t_1 的系数较大, t_n 系数较小。猜测: t_1 到 t_n 应该从小到大排序, 可以使时间总和 s 最小。



例2-排队接水-解析

证明:

假设最佳方案中, t_1 到 t_n 不是小到大排, 当 $i < j$ 时, $t_i > t_j$ 。

这两项贡献的总时间是 $S1 = a \cdot t_i + b \cdot t_j$, 其中系数 $a > b$ 。

若将 t_i 和 t_j 调换, 那么贡献总时间变为 $S2 = a \cdot t_j + b \cdot t_i$ 。

两者相减 $S1 - S2 = a(t_i - t_j) - b(t_i - t_j) = (a - b)(t_i - t_j) > 0$ 。 调换后总时间会缩短, 和原来认为是“最佳方案”矛盾。 所以贪心算法成立。



例3-活动选择

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1323



例3-活动选择-解析

定理：最早结束的活动，总是最优解的一部分

已知：一个A的集合SK，A表示一个时间区间，具有两个属性S，E表示开始和结束时间。

求证：当 A_m 是SK中E最小的区间时，则 A_m 一定在SK的某一个最大兼容子集中。

证明：

假设 A_k 为SK的一个最大兼容子集，则对于 A_k 具有的结束时间最早的区间设为 A_a ，

则 A_a 有两种情况：1. $A_a == A_m$ ，与结论相符。

2. $A_a \neq A_m$ ，由于 A_m 是SK中结束时间最早的，所以显然 $E_m \leq E_a$ 。

又因为 A_k 这个最大兼容集中的元素互不相交，所以我们用 A_m 替换 A_a 之后显然 A_k 还是一个最大兼容子集！

图示如下：



用 A_m 替换 A_a 后， A_k 仍然为SK的最大兼容子集！证明成立



贪心算法-小提示

一般用两种办法证明贪心成立。

反证法：假设所选方案非贪心算法所要求的方案，只需要证明将 需要贪心的方案替换掉所选方案，结果会更好（至少不会更差）

数学归纳法：每一步的选择都是到当前为止的最优解，一直到最后一步就成为了全局的最优解。

可以大胆猜想贪心策略，但要保证正确性（最好能严格证明） 推翻贪心：只需要找到一个反例！

大胆假设，小心求证。实在没办法的话，也可不用求证



练习1-接水问题

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1233



练习1-接水问题-解析

每来一个人，就把这个人拼接到剩余时间最少的队伍上，然后取剩余时间最多的队伍为答案



练习2-书架

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1228



练习2-书架-解析

将奶牛按身高从大到小排序，累计奶牛的高度，直到达到书架的高度。



练习3-删数问题



练习3-删数问题-解析

找规律1:

如果要从1789543中删除一个数，使这个数最小，应该删除？答案是9。

如果要从178543中删除一个数，使整个数最小，应该删除？答案是8。

以此类推，我们应该依次删除7、5、4、3

找规律2:

如果要从12343564中删除一个数，使这个数最小，应该删除？答案是4

如果要从1233564中删除一个数，使整个数最小，应该删除？答案是6。

.....

综上：

我们选取的贪心策略为：每一步总是选择一个使剩下的数最小的数字删去。**即按高位到低位的顺序搜索，若各位数字递增，则删除最后一个数字，否则，则删除第一个递减区间的首字符。**



练习4-电池的寿命

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1229



练习4-电池的寿命-解析

想要做出这道题，我们需要考虑三个模型：

1、**两块电池**：电量少的能用多久就用多久

2、**三块电池**：

情况1：最大的电量比其余两块的电量之和还要大，那么最多只能使用其余两块电池的电量之和。

情况2：最大的电池电量小于其余两块电池的电量之和，那么这三块电池是可以完全用尽的。

方法如下：

- a、将三块电池按电量从小到大排列，分别编号为1,2,3
- b、2号和3号一起用，直到2号电池的剩余电量等于1号电池。
- c、分别用1号和2号电池与3号搭配，各自消耗3号的一半电量
- d、最后1号和2号一起用完。



例4-电池的寿命-解析

3、三块以上电池：该模型存在两种情况

a、最长电量不足所有电池总电量的一半。对于此种情况，我们可以把所有电池分成三组，方法如下。

a1、将所有电池按照电量从小到大的顺序排序，第一组取前 m 块，($m \leq n-2$ ，保证不超过总电量的二分之一)

a2、将其余电池随意分配即可，这样即可保证没有任意一块的电量能够超过总电量的二分之一。

此模型即可转化为三块电池的模型进行处理。

b、最长电量超过总电量长度的一半，将此类电池分成两组即可，方法如下。

b1、电量最长的电池自己一组。

b2、其余剩下的电池分在一组。

这样，我们就把当前的情况转化成了两块电池的情况。

综上所述，此题共两种情况：

1、最大电量超过总电量和的二分之一：使用时长为较少那一组电池的总和

2、最大电量不超过总电量和的二分之一：可以全部消耗完毕，总时长为总电量除以2。



练习5-极大点

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1230



练习5-极大点-解析

根据题意，极大点即为在自己右上方（包括正右和正上方）没有其它点的点，最简单的思路就是直接暴力枚举每个点，判断它的右上方是否有其它点，如果没有则该点即为极大点，这种算法的时间复杂度为 $O(n^2)$ ，对于 $n=100000$ 的数据显然会超时。

其实根据极大点的定义和样例解释的图，我们不难发现在 x 由小到大有序排列时，极大点的 y 是严格递减的。

所以我们可以先将输入的点按 x 由小到大排序（ x 相等时，按 y 由小到大排序），因为 x 最大且 y 最大的点（即排序后的最后一个点）一定是极大点，所以可以从第 N 个点开始倒着枚举每个点，设 $maxy$ 来记录当前极大点中 y 的最大值，当第 i 个点的 y 大于 $maxy$ 时，该点就是极大点。

对于极大点的记录可以用 vis 数组进行标记，或者将极大点存在一个结构体中，找完极大点后将该结构体按题目要求的顺序排序，然后输出即可，此算法的时间复杂度为 $O(n)$ 。



练习6-过河

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1232



练习6-过河-解析

首先分情况讨论（剩余人数记为left）

left==1时，直接自己过去

left==2时，直接一趟过去

left==3时，先用最快的人送走最慢的人，再回来，然后一趟就过去了

left>=4时，就有两种可能了（四个人为1,2,3,4）

(1) 用速度最快的那个每次将人载过河，再回来载其他的人。

(2) 用速度最快的和次快的循环载人，即最快的和次快的先过河，次快的留下，最快的回来，接着最慢和次慢的人过河，次快的回来。

挑其中最小耗费，这样就可以把3和4送过去了。



练习7-An easy problem

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1223



练习7-An easy problem-解析

从n+1项开始，计算当前数字中所包含2的数量是否等于目标值，如果是则跳出循环



练习8-Ride To Office

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1227



练习8-Ride To Office-解析

通过分析题意可知：

- 1、Charley会与从后方赶超上来的陪伴人保持相同的速度奔跑，因此，我们只需要找到所有跑者中，最快到达的那个人即可
- 2、提前的跑者为本题的干扰项，原因如下：
 - a、如果该跑者的速度快于Charley，则Charley永远追不上她，即无法与之相遇，因此无法提速到该跑者的数值。
 - b、如果该跑者的速度慢于Charley，并且被Charley追上的话，那么说明当前的陪跑者速度更快，因此也无须理会提前的跑者



练习10-均分纸牌

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1320



练习10-均分纸牌-解析

题目锁定了移动方向，所以先后并不影响次数



练习11-导弹防御

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1322



练习11-导弹防御-分析

使用贪心的题目很多都涉及到“最”的问题。

本题使用贪心算法。

1、贪心在哪？

贪心在每次导弹来时都需要从已有系统中寻找能够防御这个导弹的，而且在防御导弹的系统中选择防御度最低的系统，为了将防御高度高的系统留出来。即“以最小损失来完成任务”。

2、用v二维数组记录现存在的系统及其系统防御的最高高度。

3、k表示有多少个系统，通过k的置加来增加系统的数量以及为系统编号。hsys记录每一次寻找中所找到的能够防御且高度最小的系统是第几个，hmin记录这个系统的防御极限高度。

例如：

389 207 155 300 299 170 158 65 64 128 400

系统1	系统2	系统3
389	300	400
207	299	
155	170	
65	158	
64	128	



练习12-装箱问题

http://ybt.ssoier.cn:8088/problem_show.php?pid=1226



练习12-装箱问题-解析

思路：

一、首先装 6×6 的，每个 6×6 的装一个箱子刚好。

二、然后装 5×5 的，每个 5×5 的需要一个箱子，箱子里多余的空间装 1×1 的，可以每个箱子装11个。

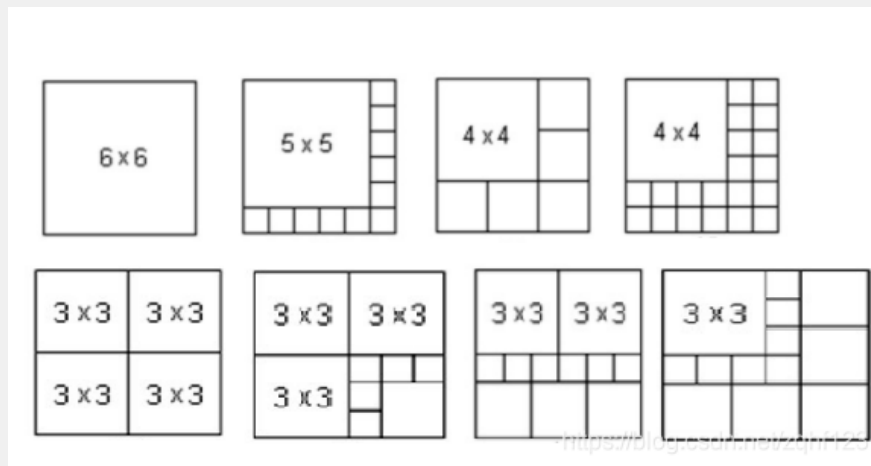
三、然后装 4×4 的，每个 4×4 的需要一个箱子。箱子里多余的空间可以装 2×2 ，也可以装 1×1 。先装 2×2 ，每个箱子最后可以装5个 2×2 ，当 2×2 不够时，再考虑装 1×1 的。每个箱子最多装20个 1×1 。

四、然后装 3×3 的。每个箱子可以装4个 3×3 的。剩下的 3×3 又分3种情形：

- 1) 剩1个 3×3 ，要装一个箱子，剩余27格空间。最多可以装5个 2×2 和7个 1×1 ；
- 2) 剩2个 3×3 ，要装一个箱子，剩余18格空间。最多可以装3个 2×2 和6个 1×1 ；
- 3) 剩3个 3×3 ，要装一个箱子，剩余9格空间，最多可以装1个 2×2 和5个 1×1 ；

然后装 2×2 的，每个箱子可以装9个 2×2 的。剩下的用 1×1 的装。

最后考虑装 1×1 的，每个箱子可以装36个 1×1 ，如果还有多余的，则增加一个箱子装。



感谢观看

联系地址：河北省廊坊市大厂县孔雀英国宫二期

