

递推算法导引

例1:

已知一对兔子，每个月可以生一对幼年兔子，幼年兔子出生后的第二个月会变成成年兔子，会继续生小兔子。假设兔子寿命无限长，最初阶段我们有一对幼年兔子，求N个月后共有多少只兔子？

分析

月份	成年兔子	幼年兔子
1	0	1
2	1	0
3	1	1
4	2	1
5	3	2
6

最初的时刻，只有一对幼年兔子

幼年兔子成长为成年兔子。

成年兔子开始生下小兔子

幼年兔子长大，先前的成年兔子又生下了一对幼年兔子

以此类推

通过上面的图像，我们可以得到：

第i个月的兔子总数 = 第i个月的成年兔子数 + 第i个月的幼年兔子数(下图绿色部分)
即 $f[i] = a[i] + b[i]$ ，其中f代表全部的兔子数，a代表成年兔子，b代表幼年兔子

第i个月的成年兔子数 = 第i-1个月的成年兔子数 + 第i-1个月的幼年兔子数(下图橙色箭头)
 $a[i] = a[i-1] + b[i-1] = f[i-1]$

第i个月的幼年兔子数 = 第i-1个月的成年兔子数(下图红色箭头)
 $b[i] = a[i-1] = a[i-2] + b[i-2] = f[i-2]$

等量带入： $f[i] = f[i-1] + f[i-2]$ ，很明显这是一个斐波那契数列，也是本题的递推公式

月份	成年兔子	幼年兔子	总数
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6

编码

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
int f[10], n;

int main(int argc, char **argv) {
    cin >> n;
    //前两个月只有两只兔子
    f[1] = 1;
    f[2] = 1;
    //从第三个月开始计算
    for (int i = 3; i <= n; ++i) {
        //代入递推式
        f[i] = f[i - 1] + f[i - 2];
    }
    cout << f[n];
    return 0;
}
```

概念

递推法是一种重要的思考问题的方法，在数学各个领域都有广泛的运用，也是计算机用于数值计算的一个重要算法。

这种算法的特点是：一个问题的求解需要一系列的计算，在已知条件和所求问题之间总存在着某种相互联系的关系，在计算，**如果可以找到前后过程之间的数量关系（即递推式）**，那么，这样的问题就可以采用递推法来解决。

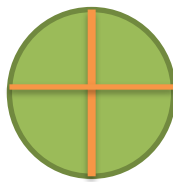
例2:

切西瓜问题，已知用刀切西瓜，一刀可以切两块，两刀可以切四块，求100刀最多可以切几块？

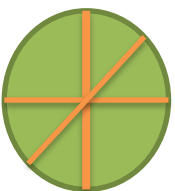
分析



1刀可以切2块



2刀可以切4块



3刀可以切6块？



3刀可以切7块！

我们将上面的结果整理成表格，观察规律

刀数	块数
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11



通过观察上图，我们可以很容易的看出，当前块数 = 前一次的块数 + 刀数，即：

$$f[i] = f[i-1] + i$$

补充一个小知识：想要切的块数最多，我们需要所有的刀口均相交！

编码

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
int f[10], n;

int main(int argc, char **argv) {
    cin >> n;
    //第0刀的时候，西瓜是完整的，即只有1块
    f[0] = 1;
    //从第1刀开始计算
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        //代入递推式
        f[i] = f[i - 1] + i;
    }
    cout << f[n];
    return 0;
}
```

逻辑航线培优教育，信息学奥赛培训专家。

扫码添加作者获取更多内容。

