$\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$，

> 两个四元数的乘积是双线性的，并且可以被表示成两个等价矩阵相乘，即
>
> $$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_1]_L \mathbf{q}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_2]_R \mathbf{q}_1 ,$$
>
> 其中 $[\mathbf{q}_1]_L$ 和 $[\mathbf{q}_2]_R$ 左和右四元数乘矩阵，通过式（12）和（17）可以推出：
>
> $$[\mathbf{q}_1]_L = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}_1]_R = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix},$$
>
> 或者更简洁地，从式（13）和（17），
>
> $$[\mathbf{q}]_L = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & [\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_R = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix},$$

其中，*斜算子*$[\bullet]_\times$产生了叉乘矩阵，

$$[\mathbf{a}]_\times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix},$$

它是一个 **skew operator（反对称矩阵或斜对称矩阵）**【2】，$[\mathbf{a}]_\times^\top = -[\mathbf{a}]_\times$，与叉乘等价，即，

$$[\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 .$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}$$

四元数**q**在3D空间中对物体的旋转角度ϕ满足

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi/2 \\ \mathbf{u}\sin\phi/2 \end{bmatrix} .$$

R(q)表示q对应的R，一个q对应一个R，但是一个R对应两个q，旋转覆盖

四元数插值公式，delta表示q0到q1的变化