高等代数 (II) 第六次习题课

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1 内容概要

- 最小多项式;
- Jordan 标准形和 Jordan 基.

2 补充知识

2.1 准素分解

Lemma 2.1.1. *设 $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, $A \in \mathrm{End}(V)$, $f, g \in \mathbb{F}[x]$. 那么有*

- $\ker f(A)$, $\mathrm{im}\, f(A)$ *均为 A-子空间;*
- $\ker f(A) \cap \ker g(A) = \ker(f,g)(A)$*;*
- $\ker f(A) + \ker g(A) = \ker[f,g](A)$*.*

证明. 利用 Bézout's identity 证明集合的双边包含关系即可, 此处略去细节. □

Corollary 2.1.2. *设 $V \in \mathbf{FDVect}_{\mathbb{F}}$, $A \in \mathrm{End}(V)$, $f, g \in \mathbb{F}[x]$. 那么有*

$$\mathrm{rank}\, f(A) + \mathrm{rank}\, g(A) = \mathrm{rank}(f,g)(A) + \mathrm{rank}[f,g](A).$$

Corollary 2.1.3. *设 $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, $A \in \mathrm{End}(V)$, $f = gh \in \mathbb{F}[x]$ 且 $(g,h) = 1$. 那么有*

$$\ker f(A) = \ker g(A) \oplus \ker h(A),$$

归纳地, 对于任意分解 $f = f_1 \cdots f_s$ 满足 $f_1, \cdots, f_s$ 两两互素, 有

$$\ker f(A) = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker f_k(A).$$

Corollary 2.1.4. *设 $V \in \mathbf{FDVect}_{\mathbb{F}}$, $A \in \mathrm{End}(V)$, 由 Hamilton-Cayley 定理可知, 若 A 的特征多项式满足分解*

$$f_\lambda = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s},$$

其中 $p_1, \cdots, p_s$ 为互不相同的不可约首一多项式, 那么对全空间有如下直和分解

$$V = \ker f_\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker p_k(A)^{r_k},$$

通常也称其为关于 A 的准素分解.

2.2 根子空间

若 f_λ 可写成一次因式的乘积 (例如 $\mathbb{F}$ 为代数闭域总可以保证这一点), 可令

$$f_\lambda(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_s)^{r_s},\ p_k(x) = (x-\lambda_k),$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的互不相同的特征值, 那么

$$V = \bigoplus_{k=1}^{s}\ker p_k(A)^{r_k} = \ker(A-\lambda_1 I)^{r_1}\oplus\cdots\oplus(A-\lambda_s I)^{r_s}.$$

记

$$W_k = \ker p_k(A)^{r_k} = \ker(A-\lambda_k I)^{r_k},\ k=1,2,\cdots,s,$$

联想到

$$V = \bigoplus_{k=1}^{s}\ker p_k(A)^{r_k} = W_1\oplus\cdots\oplus W_s,$$

我们猜想 $\dim W_k = r_k$. 注意到每个 W_k 均为 A-子空间, 不妨将 A 限制在 W_k 上进行考虑. 若 λ 为 $A|_{W_k}$ 的一个特征值,

$$0\neq\ker(\lambda I - A|_{W_k}) = \ker(\lambda I - A)\cap W_k = \ker(x-\lambda, p_k(x)^{r_k})(A),$$

这说明 $(x-\lambda)\mid p_k(x)^{r_k}$, 即 $\lambda=\lambda_k$, $A|_{W_k}$ 的特征值只有 λ_k. 所以 $A|_{W_k}$ 关于特征值 λ_k 的代数重数等于 $\dim W_k$, 不超过 A 关于特征值 λ_k 的代数重数 r_k, 即已证得

$$\dim W_k \le r_k,\ \forall k.$$

结合关系式

$$\dim W_1 + \cdots\dim W_s = \deg f_\lambda = r_1+\cdots+r_s$$

立即可得等号成立.

接下来为叙述简便, 我们略去角标 k, 仅针对同一个特征值得到的不同阶数的根子空间进行讨论, 由定义有如下包含关系

$$0 = \ker(\lambda I - A)^0 \subseteq \ker(\lambda I - A)^1 \subseteq\cdots\subseteq \ker(\lambda I - A)^r = W,$$

且由上册知识不难得到存在 $l\le r$ 使得

$$0 = \ker(\lambda I - A)^0 \subsetneqq\cdots\subsetneqq \ker(\lambda I - A)^l = \cdots = \ker(\lambda I - A)^r = W,$$

这里的 l 为 $B = \lambda I - A|_W \in \mathrm{End}(W)$ 的幂零指数. 由 Jordan 标准形相关理论可知总存在一组基使得 B 所对应的矩阵表示形如

$$\begin{pmatrix} 0 & * & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中次对角元 “*” 取值为 0 或 1, 且连续出现的 1 的最大长度为 $(l-1)$. 记 C_q 为 $q\times q$ 的 Jordan 块的数目, 那么

$$\dim\ker B^k = \sum_{q=1}^{l} C_q\min(q,k) = \sum_{q=1}^{k} qC_q + \sum_{q=k+1}^{l} kC_q,$$

简单计算可知

$$\dim\ker B^k - \dim\ker B^{k-1} = \sum_{q=k}^{l} C_q.$$

即 $\ker B^{k-1}$ 扩大至 $\ker B^k$ 增加的维数恰为 Jordan 块尺寸不小于 $k\times k$ 的数目. 综合上述讨论整理可得

Proposition 2.2.1. *根子空间的维数满足如下关系*

$$0=\dim\ker(\lambda I-A)^0<\cdots<\dim\ker(\lambda I-A)^l=\cdots=\dim\ker(\lambda I-A)^r=\dim W=r,$$

其中

- $t=\dim\ker(\lambda I-A)$ *表示特征子空间的维数, 为几何重数;*
- $r=\dim\ker(\lambda I-A)^\infty$ *表示 W 的维数, 为代数重数, 其中 "∞" 指代充分大的次数, 如 r;*
- $l=\min\{q\mid \dim\ker(\lambda I-A)^q=\dim\ker(\lambda I-A)^\infty\}$ *表示幂零指数, 同时也为一次因式 $(x-\lambda)$ 在最小多项式中的次数.*

Corollary 2.2.2. *$r=l$, 即一次因式 $(x-\lambda)$ 在最小多项式的次数 (相应幂零变换的幂零指数) 与其在特征多项式中的次数 (代数重数) 相等, 当且仅当下列之一成立 (TFAE)*

- *维数关系*
  $$0=\dim\ker(\lambda I-A)^0<\cdots<\dim\ker(\lambda I-A)^l=\dim W=l,$$
  中每个不等号都恰好相差 1;
- $\dim\ker(\lambda I-A)^k-\dim\ker(\lambda I-A)^{k-1}=\sum_{q=k}^{l}C_q=1,\ \forall k=1,2,\cdots,l$. *$B$ 的 Jordan 块仅有一个.*

$r=t$, 即一次因式 $(x-\lambda)$ 对应特征子空间的维数 (几何重数) 与其在特征多项式中的次数 (代数重数) 相等, 当且仅当下列之一成立 (TFAE)

- $0=\dim\ker(\lambda I-A)^0<\dim\ker(\lambda I-A)^1=\dim W=r$*;*
- $B=0$*, 或* $A|_W=\lambda I$*;*
- $\dim\ker(\lambda I-A)^1-\dim\ker(\lambda I-A)^0=\sum_{q=1}^{l}C_q=r$*, 即 Jordan 块的个数为 r, 与子空间维数相等;*
- *Jordan 块的大小均为 1×1, B 可对角化.*

2.3 Jordan 基

由上一节的讨论可知, 只需对一般的幂零变换 $B\in\mathrm{End}(W)$ 求得相应的 Jordan 基即可. 设 B 在某一组基下的 Jordan 标准形为 $\mathrm{diag}(J_{m_1},\cdots,J_{m_t})$, 其中 J_{m_k} 为 $m_k\times m_k$ 的 Jordan 块, $k=1,2,\cdots,t$, 对应的基向量为 $\alpha_1^{(k)},\cdots,\alpha_{m_k}^{(k)}$, 满足

$$B(\alpha_1^{(k)},\cdots,\alpha_{m_k}^{(k)})=(\alpha_1^{(k)},\cdots,\alpha_{m_k}^{(k)})\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$$

这等价于
$$B\alpha_1^{(k)}=0,\ B\alpha_2^{(k)}=\alpha_1^{(k)},\ \cdots,\ B\alpha_{m_t}^{(k)}=\alpha_{m_t-1}^{(k)}.$$
一个自然的想法是, 对于每一个 Jordan 块 J_{m_k}, 其对应的 $\alpha_1^{(k)}$ 都可以通过求解 $\ker B$ 得到, 然后通过 $B\alpha_2^{(k)}=\alpha_1^{(k)}$ 得到 $\alpha_2^{(k)}$, 以此类推最终得到全体 Jordan 基. 但是这样做的问题在于, 对于一般的幂零变换 B, 其 $\ker B$ 的维数可能很大, 这样求解 $\ker B$ 的代价很大, 此外我们也暂时没有理论保证求解出的 $\{\alpha_1^{(k)}\}_k$, $\{\alpha_2^{(k)}\}_k,\cdots$ 是线性无关的. 回忆如下结论:

Lemma 2.3.1. 若 $A^l\alpha=0\neq A^{l-1}\alpha$, l 为正整数, 则必有 $A^{l-1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 线性无关.

故应当转而求解 $A^l\alpha=0\neq A^{l-1}\alpha$. 具体求解 Jordan 基的算法如下:

- 首先求出直和分解
$$W=\ker B^l=\operatorname{span}(\beta_1^{(l)},\cdots,\beta_{C_l}^{(l)})\oplus\ker B^{l-1},$$
具体地, $\beta_{1\sim C_l}^{(l)}$ 为满足 $B^{l-1}\beta\neq 0$ 的线性无关的解.
- 计算 $B\beta_{1\sim C_l}^{(l)}$, 他们应当落在 $\ker B^{l-1}$ 中, 再对 $\ker B^{l-1}$ 进行直和分解
$$\ker B^{l-1}=\operatorname{span}(B\beta_1^{(l)},\cdots,B\beta_{C_l}^{(l)})\oplus\operatorname{span}(\beta_1^{(l-1)},\cdots,\beta_{C_l-1}^{(l-1)})\oplus\ker B^{l-2}$$
- 以此类推, 最终得到

$$\begin{aligned}
W=\ker B^l&=\operatorname{span}(\beta_1^{(l)},\cdots,\beta_{C_l}^{(l)})\oplus\ker B^{l-1}\\
&=\operatorname{span}(\beta_1^{(l)},\cdots,\beta_{C_l}^{(l)})\oplus\operatorname{span}(B\beta_1^{(l)},\cdots,B\beta_{C_l}^{(l)})\oplus\operatorname{span}(\beta_1^{(l-1)},\cdots,\beta_{C_l-1}^{(l-1)})\oplus\ker B^{l-2}\\
&=\cdots\cdots\cdots\\
&=\operatorname{span}(\beta_{1\sim C_l}^{(l)})\\
&\quad\oplus\Big(\operatorname{span}(B\beta_{1\sim C_l}^{(l)})\oplus\operatorname{span}(\beta_{1\sim C_{l-1}}^{(l-1)})\Big)\qquad[\ker B^l/\ker B^{l-1}]\\
&\quad\oplus\Big(\operatorname{span}(B^2\beta_{1\sim C_l}^{(l)})\oplus\operatorname{span}(B\beta_{1\sim C_{l-1}}^{(l-1)})\oplus\operatorname{span}(\beta_{1\sim C_{l-2}}^{(l-2)})\Big)\qquad[\ker B^{l-1}/\ker B^{l-2}]\\
&\quad\oplus\cdots\cdots\cdots\\
&\quad\oplus\Big(\operatorname{span}(B^{l-1}\beta_{1\sim C_l}^{(l)})\oplus\operatorname{span}(B^{l-2}\beta_{1\sim C_{l-1}}^{(l-1)})\oplus\cdots\oplus\operatorname{span}(\beta_{1\sim C_1}^{(1)})\Big)\qquad[\ker B^1/\ker B^0]
\end{aligned}$$

3 典型例题

Problem 3.1. 设 $\dim V=3$, $A\in\operatorname{End}(V)$ 在 V 上的一组基 α_1, α_2, α_3 下的矩阵表示为
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix},$$
求 A 的最小多项式 m, 并根据 m 的因式分解将 V 分解为平凡 A-子空间的直和.

证明. 不妨记矩阵为 A, 则
$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-1\\1&0&\lambda-1\end{pmatrix}.$$

计算可得 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 为其特征多项式, 那么最小多项式 $m(\lambda)$ 为 $(\lambda-1)(\lambda-2)$ 或 $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 可直接验证 $(A-I)(A-2I)\neq 0$ 或观察 $\lambda=1$ 时 $\operatorname{rank}(\lambda I-A)=\operatorname{rank}(I-A)=2$ 得到 $m(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 相应地, 有

$$V=\ker(A-I)^2\oplus\ker(A-2I).$$

下面确定各子空间的一组基, 使得其恰为 Jordan 基. 计算

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

取 $\ker(A-I)^2$ 中的非零元 $\beta=(1,0,0)^\intercal$ 且满足 $(A-I)\beta\neq 0$, 则 $\beta,(A-I)\beta$ 构成 A 在 $\ker(A-I)^2$ 中的一个 Jordan 基. 另一方面, 计算

$$(A-2I)\beta=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

可得 $\ker(A-2I)$ 的一组基 $\gamma=(0,1,0)^\intercal$. 综上所述, 令

$$\begin{aligned}\eta_1&=\beta=(1,0,0)^\intercal,\\ \eta_2&=(A-I)\beta=(0,1,-1)^\intercal,\\ \eta_3&=\gamma=(0,1,0)^\intercal,\end{aligned}$$

即为 A 的一组 Jordan 基.

$$A(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

□

Problem 3.2. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

求其最小多项式 $m(\lambda)$.

证明. 计算可得

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda&-1&&-1\\-1&\lambda&-1&\\&-1&\lambda&-1\\-1&&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&&-\lambda&\\&\lambda&&-\lambda\\&-1&\lambda&-1\\-1&&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&-1&\lambda&-2\\-1&&-2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda^2-4).$$

最小多项式 $m(\lambda)=\lambda(\lambda^2-4)$ 或 $m(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2-4)$. 确定最终的最小多项式有如下几种方法:

- 直接验证是否有 $A(A^2-4)=0$;

- 观察可知 $\mathrm{rank}(A)=2$, 那么 $\dim\ker A=2$, 即关于特征值 $\lambda=0$ 的几何重数等于代数重数, 故而直接得到 $m(\lambda)=\lambda(\lambda^2-4)$;
- 注意到 A 为实对角矩阵必定可对角化, 那么 $m(\lambda)=\lambda(\lambda^2-4)$.

另法: 令 $\gamma=(1,0,0,0)^\mathsf{T}$, 有

$$A\gamma=(0,1,0,1)^\mathsf{T},\ A^2\gamma=(2,0,2,0)^\mathsf{T},\ A^3\gamma=(0,4,0,4)^\mathsf{T},$$

可知 $A^3\gamma=A\gamma$. 由于 $m(A)\gamma=0$, 利用 Bézout's identity 可知

$$(m,x^3-4x)(A)\gamma=0.$$

而容易验证对任意 $p(x)\mid(x^3-4x)$ 且 $p(x)\neq x^3-4x$, $p(A)\gamma\neq 0$, 那么 $(x^3-4x)\mid m(x)$. □

Problem 3.3. 设

$$A=\begin{pmatrix}0 & & & -a_0\\ 1 & 0 & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & -a_{n-2}\\ & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix},$$

求其特征多项式 f 及最小多项式 m, 并判断在 $\mathbb{C}$ 上是否可对角化.

证明. 由 λ-矩阵 $(\lambda I-A)$ 的行列式因子立即有

$$f(\lambda)=m(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

也可利用

$$A\alpha_1=\alpha_2,\ A\alpha_2=\alpha_3,\cdots,\ A\alpha_{n-1}=\alpha_n,\ A\alpha_n=-(a_0\alpha_1+\cdots+a_{n-1}\alpha_n),$$

得

$$g(A)\alpha_1=A^n\alpha_1+a_{n-1}A^{n-1}\alpha_1+\cdots+a_1A\alpha_1+a_0\alpha_1=0,$$

于是有 $(m,g)(A)\alpha_1=0$. 而由 α_1, $\alpha_2=A\alpha_1$, $\cdots$, $\alpha_n=A^{n-1}\alpha_1$ 线性无关可知 $\deg(m,g)\geq n$, 结合 $\deg m\geq n$ 可知 $\deg m=n$, 且 $f=m=g$.

对于可对角化的判断, 利用 Corrollary 2.2.2 可知这等价于对于每一个 $\mathbb{C}$ 上的特征值, $t=r=l$, 即 Jordan 块的个数只有一个, 大小为 1×1, 这等价于 $f=m$ 没有重根. □

Problem 3.4. 设

$$(x^2+px+q)^s=x^{2s}+a_{2s-1}x^{2s-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

求证下列 $2s$ 阶矩阵相似

$$B_1=\begin{pmatrix}0 & & & -a_0\\ 1 & 0 & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & -a_{2s-2}\\ & & 1 & -a_{2s-1}\end{pmatrix},\qquad B_2=\begin{pmatrix}C & & & \\ D & C & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & D & C\end{pmatrix},$$

其中

$$C=\begin{pmatrix}0 & -q\\ 1 & -p\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

证明. 设 A 为 $2s$ 维线性空间 V 上的一个线性变换, 其在基 $\beta_1,\cdots,\beta_{2s}$ 下的矩阵恰为 B_1, 即

$$A\beta_1=\beta_2,\ A\beta_2=\beta_3,\cdots,\ A\beta_{2s-1}=\beta_{2s},\ A\beta_{2s}=-(a_0\beta_1+\cdots+a_{2s-1}\beta_{2s}).$$

接下来只需求出一组基 $\xi_1,\eta_1,\cdots,\xi_s,\eta_s$ 使得 A 在这组基下的矩阵恰为 B_2 即可. 这等价于

$$\begin{aligned}
A\xi_1&=\eta_1,\ A\eta_1=-q\xi_1-p\eta_1+\xi_2,\\
A\xi_2&=\eta_2,\ A\eta_2=-q\xi_2-p\eta_2+\xi_3,\\
&\cdots\\
A\xi_{s-1}&=\eta_{s-1},\ A\eta_{s-1}=-q\xi_{s-1}-p\eta_{s-1}+\xi_s,\\
A\xi_s&=\eta_s,\ A\eta_s=-q\xi_s-p\eta_s,
\end{aligned}$$

整理可得其蕴含着

$$\begin{aligned}
(A^2+pA+qI)\eta_1&=A^2\eta_1+pA\eta_1+qA\xi_1=A\xi_2=\eta_2,\\
(A^2+pA+qI)\eta_2&=A^2\eta_2+pA\eta_2+qA\xi_2=A\xi_3=\eta_3,\\
&\cdots\\
(A^2+pA+qI)\eta_{s-1}&=A^2\eta_{s-1}+pA\eta_{s-1}+qA\xi_{s-1}=A\xi_s=\eta_s,\\
(A^2+pA+qI)\eta_s&=A^2\eta_s+pA\eta_s+qA\xi_1=0.
\end{aligned}$$

观察 $\xi_1,\eta_1,\cdots,\xi_s,\eta_s$ 的关系可知只需确定合适的 ξ_1, 再令

$$\xi_k=(A^2+pA+qI)^{k-1}\xi_1,\ \eta_k=A\xi_k,\ k=1,2,\cdots,n$$

即可. 这里的 ξ_1 需要适当选取, 以保证 $\xi_1,\eta_1,\cdots,\xi_s,\eta_s$ 线性无关. 注意到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s}u_k\xi_k+\sum_{k=1}^{s}v_k\eta_k=\left(\sum_{k=1}^{s}u_kA^{k-1}+\sum_{k=1}^{s}v_k(A^2+pA+qI)^{k-1}A\right)\xi_1=0\\
\Rightarrow&\left((x^2+px+q)^s,\sum_{k=0}^{s-1}u_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{s-1}v_{k+1}(x^2+px+q)^kx\right)(A)\xi_1=0,
\end{aligned}$$

可取 $\xi_1=\beta_1$, 那么由于 $(x^2+px+q)^s$ 是关于 ξ_1 的最小多项式, 上式成立必定说明

$$\sum_{k=0}^{s-1}u_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{s-1}v_{k+1}(x^2+px+q)^kx=0,$$

可得 $u_k=v_k=0,\forall k$. 线性无关性得以保证. □