高等代数 (II) 第三次作业情况

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1　3 月 17 日作业

P66: 3(1)(2), 4(2), 6, 7, 8, 9

P66: 4(2). 注意讨论 $3 \le n < 5$ 的情形.

P66: 9. $f(x) = g(x + a_1/3)$ for

$$g(x) = x^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right)x + \left(a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3\right),$$

then

$$D(f) = D(g) = -4\left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right)^3 - 27\left(a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3\right)^2 = -4a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

题目 1.1. *求*

$$f(x) = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

的 9 个根的平方和.

证明. By Newton's identity,

$$s_2 = \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2 = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2.$$

□

2　3 月 21 日作业

题目 2.1. *已知 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的三个根为 x_1, x_2, x_3.*

1. *设 $x_1x_2x_3 \neq 0$, 求三个根倒数的平方和;*

2. *求一个三次方程使其根为 x_1^2, x_2^2, x_3^2.*

证明. 1. 求三个根倒数的平方和:

我们需要求 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$.

根据已知条件, 我们可以得到以下关系:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= q \\ x_1x_2x_3 &= -r \end{aligned}$$

首先, 我们将 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ 通分:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{q}{-r}$$

接下来我们计算 $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}$:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_3+x_2+x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{-p}{-r}=\frac{p}{r}$$

为了计算 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}$, 我们考虑根的倒数和的平方:

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\left(\frac{q}{-r}\right)^2=\frac{q^2}{r^2}$$

其中,

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}\right)$$

我们已经知道了 $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}$ 的值, 为 $\frac{p}{r}$. 代入上面的等式, 我们有:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{q^2}{r^2}-2\frac{p}{r}=\frac{q^2-2pr}{r^2}.$$

The proof is generated by ChatGPT (GPT-4) Mar 23 Version.

2. 设三次方程为 $x^3+p'x^2+q'x+r'=0$, 我们需要求一个三次方程使其根为 x_1^2, x_2^2, x_3^2, 由 Vieta's formula, 我们有:

$$\begin{aligned}
-p'&=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1s_1-2\sigma_2=p^2-2q\\
q'&=x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=x_1^2x_2^2x_3^2\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\right)=q^2-2pr\\
-r'&=x_1^2x_2^2x_3^2=r^2,
\end{aligned}$$

于是该三次多项式为 $x^3-(p^2-2q)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0$. □

题目 2.2. 设 f 为 n 次多项式, g 为 m 次多项式, 证明

$$D(fg)=D(f)D(g)R(f,g)^2.$$

证明. 设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\quad g(x)=\sum_{l=0}^{m}b_lx^l,$$

并考虑其在 $\mathbb{C}$ 上的完全分解

$$f(x)=a_n\prod_{s=1}^{n}(x-z_s),\quad g(x)=b_m\prod_{t=1}^{m}(x-w_t).$$

那么

$$
\begin{aligned}
D(fg) &= D\left(a_n b_m \prod_{s=1}^{n}(x-z_s)\prod_{t=1}^{m}(x-w_t)\right)\\
&= (a_n b_m)^{2(m+n)-2} D\left(\prod_{s=1}^{n}(x-z_s)\prod_{t=1}^{m}(x-w_t)\right)\\
&= (a_n b_m)^{2(m+n)-2} \prod_{1\le p_1<p_2\le n}(z_{p_1}-z_{p_2})^2 \prod_{1\le q_1<q_2\le m}(w_{q_1}-w_{q_2})^2 \prod_{\substack{1\le p\le n\\1\le q\le m}}(z_p-w_q)^2\\
&= D(f)D(g)a_n^{2m}a_m^{2n}\prod_{\substack{1\le p\le n\\1\le q\le m}}(z_p-w_q)^2\\
&= D(f)D(g)R(f,g)^2.
\end{aligned}
$$

□

3 3 月 24 日作业

题目 3.1. 将下列 λ-阵化为标准形.

1.

$$
\begin{pmatrix}
3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3\\
4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4\\
\lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1
\end{pmatrix}
$$

2.

$$
\begin{pmatrix}
2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda\\
4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda\\
0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0\\
\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\
3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

证明. 1. 做初等变换

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3\\
4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4\\
\lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1
\end{pmatrix}\\
\to&\begin{pmatrix}
3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3\\
\lambda^2+\lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-1\\
\lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1
\end{pmatrix}
\to\begin{pmatrix}
-\lambda+3 & -\lambda+2 & \lambda^2-\lambda\\
\lambda^2+\lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-1\\
-2 & -1 & 0
\end{pmatrix}\\
\to&\begin{pmatrix}
\lambda-1 & -\lambda+2 & \lambda^2-\lambda\\
\lambda^2-\lambda & \lambda-1 & \lambda-1\\
0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\to\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0\\
0 & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda\\
0 & \lambda^2-\lambda & \lambda-1
\end{pmatrix}
\to\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0\\
0 & \lambda-1 & 0\\
0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+1)
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. 做初等变换

$$
\begin{pmatrix}
2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\
4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\
0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\
\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\
3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\
0 & 0 & \lambda & 2\lambda & 0 \\
\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\
3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\to \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 2\lambda & 0 \\
\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\
0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
\lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\to \begin{pmatrix}
1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda
\end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1
\end{pmatrix}
\to \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)
\end{pmatrix}
$$

□

题目 3.2. 求不变因子.

1.

$$
\begin{pmatrix}
\lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\
-\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\
0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\
0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha
\end{pmatrix}
$$

2.

$$
\begin{pmatrix}
\lambda & -1 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & -1 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & -1 \\
5 & 4 & 3 & \lambda+2
\end{pmatrix}
$$

证明. 1. 做初等变换

$$
\begin{pmatrix}
\lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\
-\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\
0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\
0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha
\end{pmatrix}
=: \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}.
$$

其中

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda+\alpha & \beta\\ -\beta & \lambda+\alpha\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}(\lambda+\alpha)^2-\beta^2 & 2(\lambda+\alpha)\beta\\ -\beta-2(\lambda+\alpha)\beta & (\lambda+\alpha)^2-\beta^2\end{pmatrix}$$

考虑最大公因式

$$((\lambda+\alpha)^2-\beta^2,2(\lambda+\alpha)\beta)=\begin{cases}(\lambda+\alpha)^2, & \beta=0,\\ 1, & \beta\neq 0.\end{cases}$$

利用行列式因子的性质可得

$$A^2\to\begin{cases}\operatorname{diag}((\lambda+\alpha)^2,(\lambda+\alpha)^2), & \beta=0,\\ \operatorname{diag}(1,\det(A)^2), & \beta\neq 0.\end{cases}$$

故当 $\beta=0$ 时, 不变因子组为

$$1,\ 1,\ (\lambda+\alpha)^2,\ (\lambda+\alpha)^2;$$

当 $\beta\neq 0$ 时, 不变因子组为

$$1,\ 1,\ 1,\ ((\lambda+\alpha)^2+\beta^2)^2.$$

2. 考虑第 1, 2, 3 行和第 2, 3, 4 列构成的子式知行列式因子 $D_3=1$, 故而

$$D_1=D_2=D_3=1,\ D_4=\det\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2\end{pmatrix}=\lambda^4+5\lambda^3+4\lambda^2+3\lambda+2.$$

立即可得不变因子组为

$$1,\ 1,\ 1,\ \lambda^4+5\lambda^3+4\lambda^2+3\lambda+2.$$

□

题目 3.3. *已知 A 的不变因子组, 分别在 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 上求其初等因子.*

1. $1,\ \cdots,\ 1,\ \lambda,\ \lambda^2(\lambda-1),\ (\lambda-1)^3(\lambda+1)\lambda^2;$

2. $1,\ \cdots,\ 1,\ \lambda,\ \lambda^2+1,\ \lambda(\lambda^2+1),\ \lambda^3(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)(\lambda^2-2).$

证明. 直接写出初等因子如下:

1.

$$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}:\quad \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^2,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^3,\ \lambda+1;$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}:&\quad \lambda,\ \lambda,\ \lambda^3,\ \lambda-1,\ \lambda^2-2,\ \lambda^2+1,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2\\ \mathbb{R}:&\quad \lambda,\ \lambda,\ \lambda^3,\ \lambda-1,\ \lambda-\sqrt{2},\ \lambda+\sqrt{2},\ \lambda^2+1,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2\\ \mathbb{C}:&\quad \lambda,\ \lambda,\ \lambda^3,\ \lambda-1,\ \lambda-\sqrt{2},\ \lambda+\sqrt{2},\ \lambda+\mathrm{i},\ \lambda+\mathrm{i},\ (\lambda+\mathrm{i})^2,\ \lambda-\mathrm{i},\ \lambda-\mathrm{i},\ (\lambda-\mathrm{i})^2\end{aligned}$$

□

题目 3.4. *已知矩阵的初等因子, 求其不变因子组.*

1. λ, λ^2, λ^2, $\lambda-\sqrt{2}$, $(\lambda-\sqrt{2})^2$, $\lambda+\sqrt{2}$, $(\lambda+\sqrt{2})^2$;

2. $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, $\lambda+1$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^3$, $\lambda-2$, $(\lambda-2)^2$.

证明. 直接写出不变因子组如下:

1. $(n=11)$
$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda^2(\lambda^2-2),\ \lambda^2(\lambda^2-2)^2;$$

2. $(n=11)$
$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2),\ (\lambda+1)^3(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2.$$

□

题目 3.5. *求 $\mathbb{Q}$ 上矩阵*
$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -3 & 3 & -5 & 4\\ 8 & -4 & 3 & -4\\ 15 & -10 & 11 & -11\end{pmatrix}$$
的不变因子和有理标准形.

证明. 考虑其对应的 λ-阵
$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & \lambda-3 & 5 & -4\\ -8 & 4 & \lambda-3 & 4\\ -15 & 10 & -11 & \lambda+11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 5\lambda-2 & \lambda+2 & 5 & 1\\ \lambda^2-4\lambda-5 & \lambda+1 & \lambda-3 & \lambda+1\\ -11\lambda-4 & -1 & -11 & \lambda\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5\lambda-2 & \lambda+2 & 1\\ 0 & \lambda^2-4\lambda-5 & \lambda+1 & \lambda+1\\ 0 & -11\lambda-4 & -1 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5\lambda-2 & \lambda+2 & 1\\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & -11\lambda-4 & -1 & \lambda\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -11\lambda^2-21\lambda-10 & \lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1\\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -(11\lambda+10)(\lambda+1) & (\lambda+1)^2\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & 0\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3\end{pmatrix}$$
得不变因子组
$$1,\ 1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^3,$$

有理标准形为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

□

4 3 月 28 日作业

题目 4.1. *求下列复矩阵的 Jordan 标准形.*

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证明. 考虑其对应的 λ-阵

1.

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & -7 & 3 \\ 2 & \lambda+5 & -2 \\ 4 & 10 & \lambda-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-2 & 1 \\ 2 & \lambda+5 & -2 \\ 0 & -2\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-2 & 1 \\ 2\lambda & 3\lambda+1 & 0 \\ 1-\lambda^2 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 3\lambda+1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda+1 \end{pmatrix}$$

易知其中第 2, 3 行/列对应的子阵行列式因子 $D_1 = 1$, 于是行列式因子 D_2 与子阵对应的子式相伴, 为 $(\lambda^2+1)(\lambda-1)$. 故原矩阵的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 7 & 6 & 1 & \lambda\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -\lambda-4 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 6\lambda-11 & 6 & 1 & \lambda\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda+1)^2 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda-4 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 6\lambda-11 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda-4 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -\lambda^2+2\lambda-11 & (\lambda-1)^2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2+2\lambda-11 & (\lambda-1)^2 & 0\\ 0 & -\lambda-4 & \lambda-2 & 1\end{pmatrix}$$

得行列式因子 $D_1=1$, $D_4=(\lambda-1)^4$, D_2 和 D_3 均为 $(\lambda-1)$ 的方幂, Jordan 标准形必定形如

$$\begin{pmatrix}1 & * & 0 & 0\\ 0 & 1 & * & 0\\ 0 & 0 & 1 & *\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $*$ 取值为 0 或 1. 再取 λ-阵化简形式中 $\lambda=1$, 那么原矩阵必定相抵于

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

其秩为 3, 故 $*$ 全为 1, Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

另法:

$$\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 7 & 6 & 1 & \lambda\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}A(\lambda) & 0\\ C & B(\lambda)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -A(\lambda)C^{-1}B(\lambda)\\ C & B(\lambda)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & A(\lambda)C^{-1}B(\lambda)\end{pmatrix},$$

其中

$$
\begin{aligned}
A(\lambda)C^{-1}B(\lambda) &= \det(C)^{-1}\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1\\ 4 & \lambda+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 1\\ -7 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\\
&\to \begin{pmatrix}\lambda-3 & -1\\ 4 & \lambda+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 1\\ -7 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}6\lambda-11 & \lambda+4\\ -7\lambda+17 & -7\lambda-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}6\lambda^2-22\lambda+26 & \lambda^2-2\lambda+11\\ -7\lambda^2+24\lambda-37 & -7\lambda^2-3\lambda+17\end{pmatrix}\\
&\to \begin{pmatrix}5\lambda^2-20\lambda+15 & \lambda^2-2\lambda+11\\ 27\lambda-54 & -7\lambda^2-3\lambda+17\end{pmatrix}\\
&\to \begin{pmatrix}5(\lambda-1)(\lambda-3) & \lambda^2-2\lambda+11\\ 27(\lambda-2) & -7\lambda^2-3\lambda+17\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \det A(\lambda)\det B(\lambda)\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

而

$$\det A(\lambda)\det B(\lambda) = (\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-1)^4.$$

于是原 λ-阵相抵于 $\mathrm{diag}(1,1,1,(\lambda-1)^4)$, 故原矩阵的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3. 直接令 λ-阵中 $\lambda=1$ 得秩为 3, 那么直接得到 Jordan 标准形与前一题一致.

□

题目 4.2. *已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=0$, 且 A 的秩为 r, 求初等因子组.*

证明. 考虑 A 在 $\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准形, 由 $A^2=0$ 知其所有非零 Jordan 块必定形如 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 又由 A 的秩为 r 知 A 的 Jordan 标准形的秩也为 r, 那么非零 Jordan 块的个数为 r, 故 A 的初等因子组为

$$\underbrace{\lambda,\cdots,\lambda}_{n-2r},\underbrace{\lambda^2,\cdots,\lambda^2}_{r}.$$

□