高等代数 (II) 第四次作业情况

李卓远　　数学科学学院

zy.li@stu.pku.edu.cn

1　3 月 31 日作业

课程暂停.

2　4 月 4 日作业

题目 2.1. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)C$. 证明: $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性无关的充要条件是 C 可逆.

证明. 由线性无关的定义可知

$$\begin{aligned}
\beta_1, \cdots, \beta_s \text{ 线性无关} &\Leftrightarrow ((\beta_1, \cdots, \beta_s)X = 0 \Leftrightarrow X = 0) \\
&\Leftrightarrow ((\alpha_1, \cdots, \alpha_s)CX = 0 \Leftrightarrow X = 0) \\
&\Leftrightarrow (CX = 0 \Leftrightarrow X = 0) \\
&\Leftrightarrow C \text{ 可逆}.
\end{aligned}$$

□

P81: 6, 7, 9, 10, 11

3　4 月 7 日作业

P81: 2(2)(5)

P90: 2, 3, 4, 7, 10, 12

P90: 7. 只需说明 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$ 线性无关等价于 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_r}$, 其中 $\{x_k\}_{k=1}^s$ 为 A 的列向量组. 结论成立是因为

$$\sum_{k=1}^r u_k \beta_{j_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^r u_k (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) x_{j_k} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \sum_{k=1}^r u_k x_{j_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^r u_k x_{j_k} = 0,$$

故而 A 的列向量的极大线性无关组中元素与 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 中极大线性无关组元素相等.

P90: 10. 证明详见第四次讲义中 Corollary 3.9..

P90: 12. 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$ 作初等行变换得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故而可选择 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 作为 $V_1 + V_2$ 的一组基. 考虑其核空间的一组基 $(-1, -2, 0, 1, 1)^\mathsf{T}$, $(2, -1, 1, 0, 0)^\mathsf{T}$, 那么 $V_1 \cap V_2$ 的一组基为 $\beta_1 + \beta_2 = (5, -1, 5, 2)^\mathsf{T}$.

4 4 月 11 日作业

题目 4.1. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 为 V_1 的一组基, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为 V_2 的一组基, 证明 $\{\alpha_i \otimes_{\mathbb{F}} \beta_j\}_{i,j=1}^{m,n}$ 为 $V_1 \otimes_{\mathbb{F}} V_2$ 的一组基.

证明. 显然 $V \otimes W$ 的元素均可由 $\{\alpha_i \otimes_{\mathbb{F}} \beta_j\}_{i,j=1}^{m,n}$ 线性表出, 下证 $V \otimes W$ 的维数为 mn. 构造双射

$$\begin{aligned} (V \otimes W)^* &\to \operatorname{Hom}(V, W^*) \\ \phi &\mapsto (\alpha \mapsto (\beta \mapsto \phi(\alpha \otimes \beta))) \\ ((\alpha \otimes \beta) \mapsto \psi(\alpha)(\beta)) &\leftarrow\!\shortmid \psi \end{aligned}$$

故

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V \otimes W)^* = \dim \operatorname{Hom}(V, W^*) = \dim V \dim W^* = \dim V \dim W = mn.$$

□

P91: 14, 16
P95: 3, 5, 6
P101: 2