经济模型与Matlab应用

第一讲 基础知识

Email:syunl@126.com

课程介绍

- 名称：经济模型与Matlab应用
- 内容：
  - 数学模型——经济模型
    - 数学模型，王文波，武汉大学出版社
    - 经济模型，洪毅，华南理工大学出版社
    - 数学模型，姜启源，高等教育出版社……
  - 数学软件——Matlab
    - Matlab教程
- 重点：
  - 模型建立：**经济模型**
  - 模型求解：力求均用软件——**Matlab**

课程安排

- 学时：36学时
- 上课时间：信息交流
- 实验——3、6、9、12、15周
  - I203 I204
- 通知：下周停课——10月19日

一、数学模型

1、数学

数学 → 难 → 有用？

- 服务性学科
- 强有力的工具
- 与现实的紧密联系
- **David:** 被人如此称颂的高技术本质上就是数学
  - 数学技术
- 美国花旗银行副主席保尔·柯斯林
  - 一个从事银行业务而不懂数学的人，无非只能做些无关紧要的小事”。

2、数学教育

- 历史
  - 中世纪——学院化
- 现状
  - 一方面：数学以及数学的应用在世界的科学、技术、商业和日常生活中所起的作用越来越大
  - 另一方面：一般公众甚至科学界（特别是我国）对数学科学的作用未被充分认识，数学科学作为技术变化以及工业竞争的推动力的及其重要性也未被充分认识
- 未来
  - 现状正在改变
  - “数学除了锻炼敏锐的理解力、发现真理以外，还有另一个训练全面考虑科学系统的头脑的开发功能。” **h.g.grassmann**

3、数学与经济学

- 经济学
  - 关系很特别——不用、不够用
    - 高级宏观、高级微观、高级计量……
- 诺贝尔经济学奖的启示
  - 诺贝尔奖中没有数学奖——却有不解之缘
  - 特别是：1969年设立经济学奖——40
- 诺贝尔经济学奖获奖者
  - 有数学学位：20多人
  - 有理工学位：约10人
  - 其中，大数学家：Kantorovich Nash和Aumann
  - 完全因为数学得奖至少有5人：
    - Debreu、 Nash、Selton, Harsanyi, Aumann

近几年诺贝尔经济学奖获奖者

- **2000**：海克曼**James Heckman**，科罗拉多学院数学学士，麦克费登**Daniel McFadden**明尼苏达大学物理学士
- **2001**：乔治·阿克尔洛夫**George A. Akerlof**，迈克尔·斯宾塞**A. Michael Spence**牛津大学获数学硕士，约瑟夫·斯蒂格利茨**Joseph E. Stiglitz**
- **2002**：丹尼尔·卡纳曼**Daniel Kahneman**，希伯来大学心理学与数学学士，弗农·史密斯**Vernon L. Smith**
- **2003**：克莱夫**-**格兰杰**Clive Granger**，英国第一个经济学数学双学位，统计学博士，罗伯特·恩格尔**Robert F. Engle**
- **2004**：芬恩·基德兰德**Finn E. Kydland**，爱德华·普雷斯科特**Edward C. Prescott**，数学学士学位
- **2005**：托马斯·克罗姆比·谢林**Thomas Crombie Schelling**，罗伯特·约翰·奥曼**Robert John Aumann**，数学学士，数学硕士学位，数学博士。耶路撒冷希伯莱大学数学研究院教授、纽约州立大学斯坦尼分校经济系和决策科学院教授以及以色列数学俱乐部主席、美国经济联合会荣誉会员等

- 2006：埃德蒙·菲尔普斯Edmund S.Phelps
- 2007：三人没有经济学学位，里奥尼德·赫维克兹Leonid Hurwicz，华沙大学取得法学硕士。埃克里·S·马斯金Eric S. Maskin，哈佛大学数学学士、数学硕士和博士，罗杰·B·梅尔森Roger B. Myerson，哈佛大学应用数学硕士和博士
- 2008：保罗-克鲁格曼Paul Krugman
- 2009：埃莉诺·奥斯特罗姆Elinor Ostrom（欧玲），政治学博士，奥利弗·威廉姆森Oliver·E·Williamson，高中喜欢数学，麻省理工学院理学士，斯坦福大学工商管理硕士，卡内基一德梅隆大学经济学哲学博士
- 2010：彼得·戴蒙德 Peter Diamond，耶鲁大学数学学士，23岁获麻省理工学院经济学博士，戴尔·莫滕森Dale T. Mortensen，克里斯托弗·皮萨里季斯 Christopher A. Pissarides
- 2011：托马斯·萨金特THOMAS J. SARGENT，克里斯托弗·西姆斯Christopher A.Sims，哈佛大学数学学士

- **2012**：埃尔文·罗斯**Alvin Roth**，哥伦比亚大学，运筹学学士、硕士、博士，罗伊德·沙普利**Lloyd Shapley**，哈佛数学学士、数学博士

4、数学模型

❖ 从现实对象到数学

我们常见的模型

- 玩具、照片、飞机、火箭模型……　~ 实物模型
- 水箱中的舰艇、风洞中的飞机……　~ 物理模型
- 地图、电路图、分子结构图……　~ 符号模型

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物

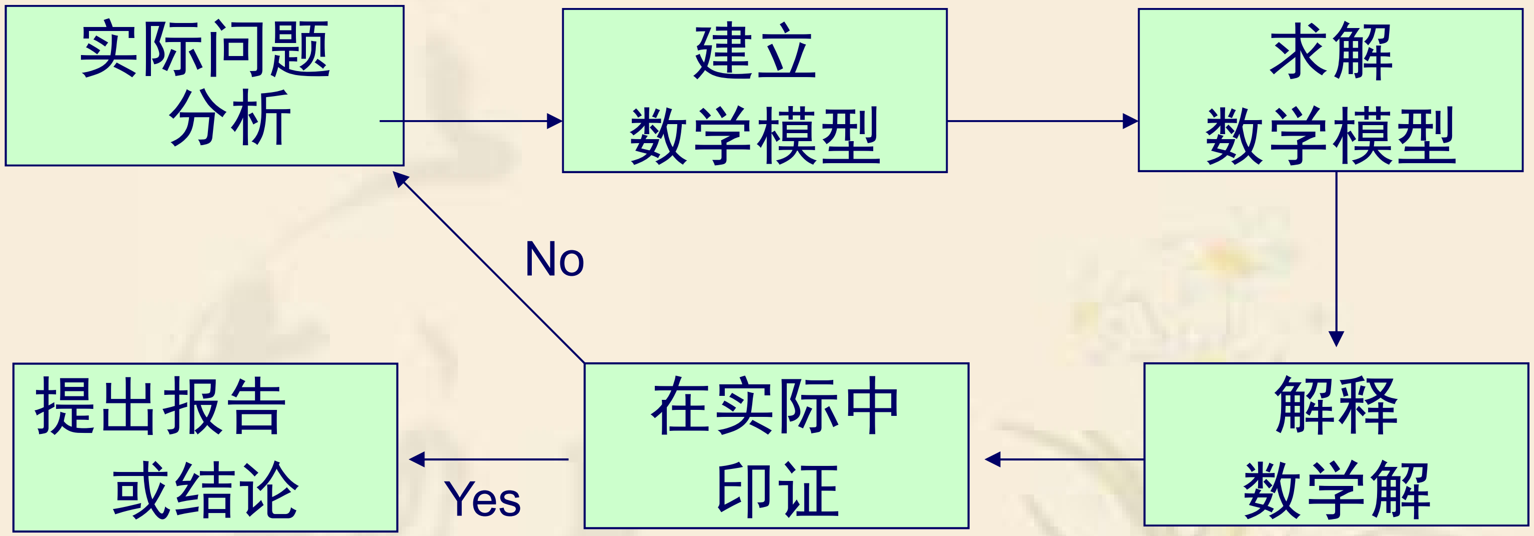
模型集中反映了原型中人们需要的那一部分特征

数学模型和数学建模

- 数学模型
  - 对于一个现实对象，为了一个特定目的，根据其内在规律，作出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构
- 数学建模
  - 建立数学模型的全过程
  - （包括表述、求解、解释、检验等）

Mathematic Modeling

数学建模的流程



二、建模案例

案例1
椅子放稳模型

假设：

- 1 四条腿一样长、连线呈正方形、与地面接触在一点上
- 2 地面高度连续变化
- 3 至少三条腿同时着地

中心问题：

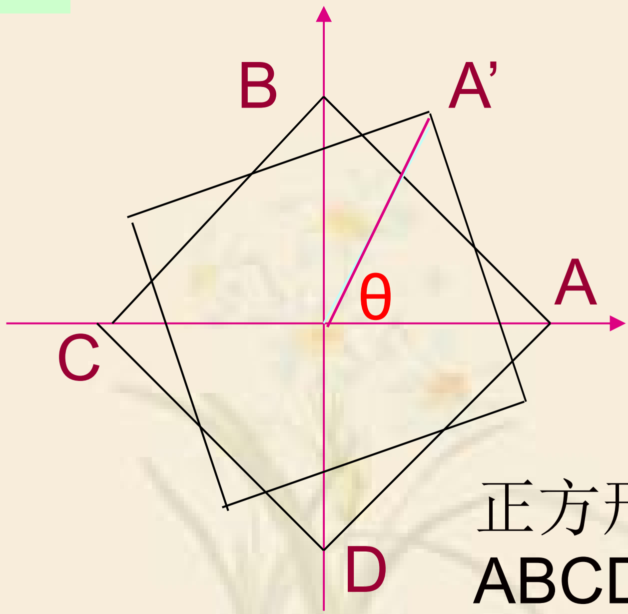
用数学语言将椅腿着地的条件与结论表示出来：

距离

模型求解

四个距离(四只脚) → 正方形对称性 → 两个距离

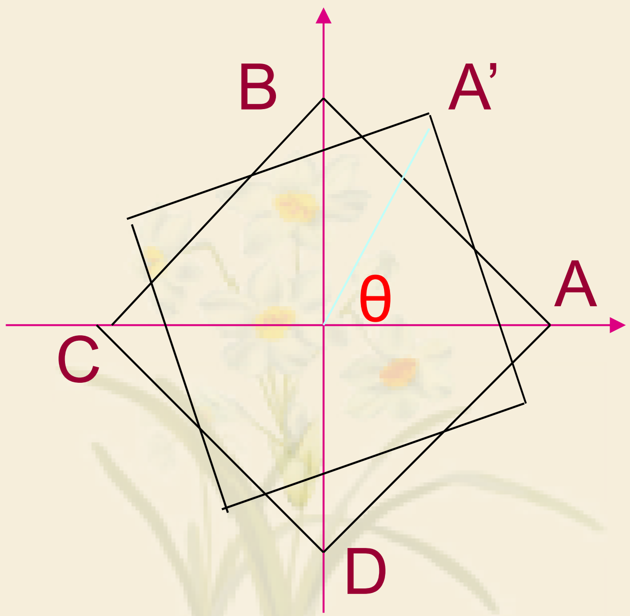
- 令：
- f(θ)表示A C两脚与地面距离之和
- g(θ)表示B D两脚与地面距离之和



正方形ABCD绕O点旋转

- 由假设得：
  - 1 f(θ) 与g(θ)为连续函数
  - 2 f(θ) 与g(θ)应至少有一个为0
- 当θ=0时，不妨设g(θ)=0，

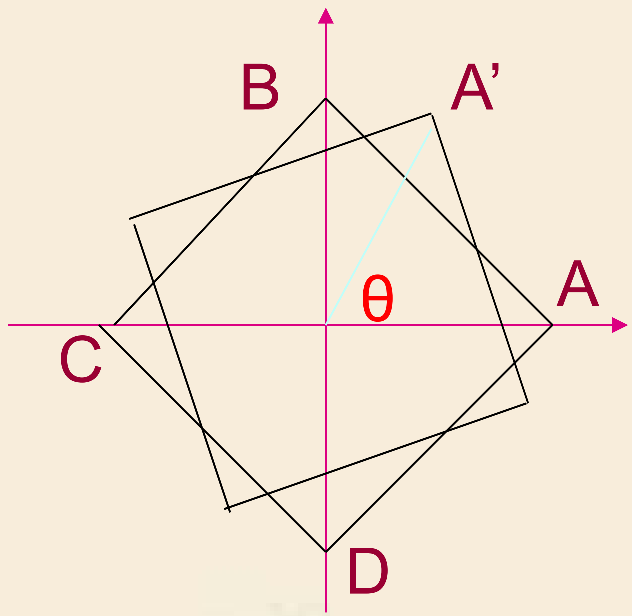
于是问题变为：



存在θ_0点，使

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

模型求解



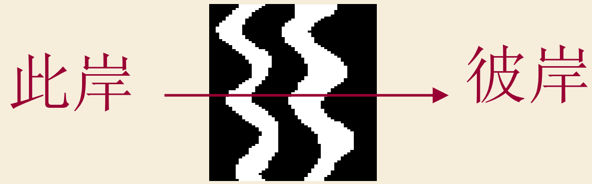
- 设：h (θ) = f(θ) - g(θ)
- 则： θ=0时
- h (0) = f(0) >0
- θ= π/2时？
- h (π/2) = -g (π/2) <0
- 由介值定理，存在θ_0 使得
- h (θ_0) = 0即f (θ_0) =g (θ_0)
- 又 f(θ) 与g(θ)应至少有一个为0
- 则：
- f (θ_0) =g (θ_0)=0

- 即：
- 椅子一定能够放平

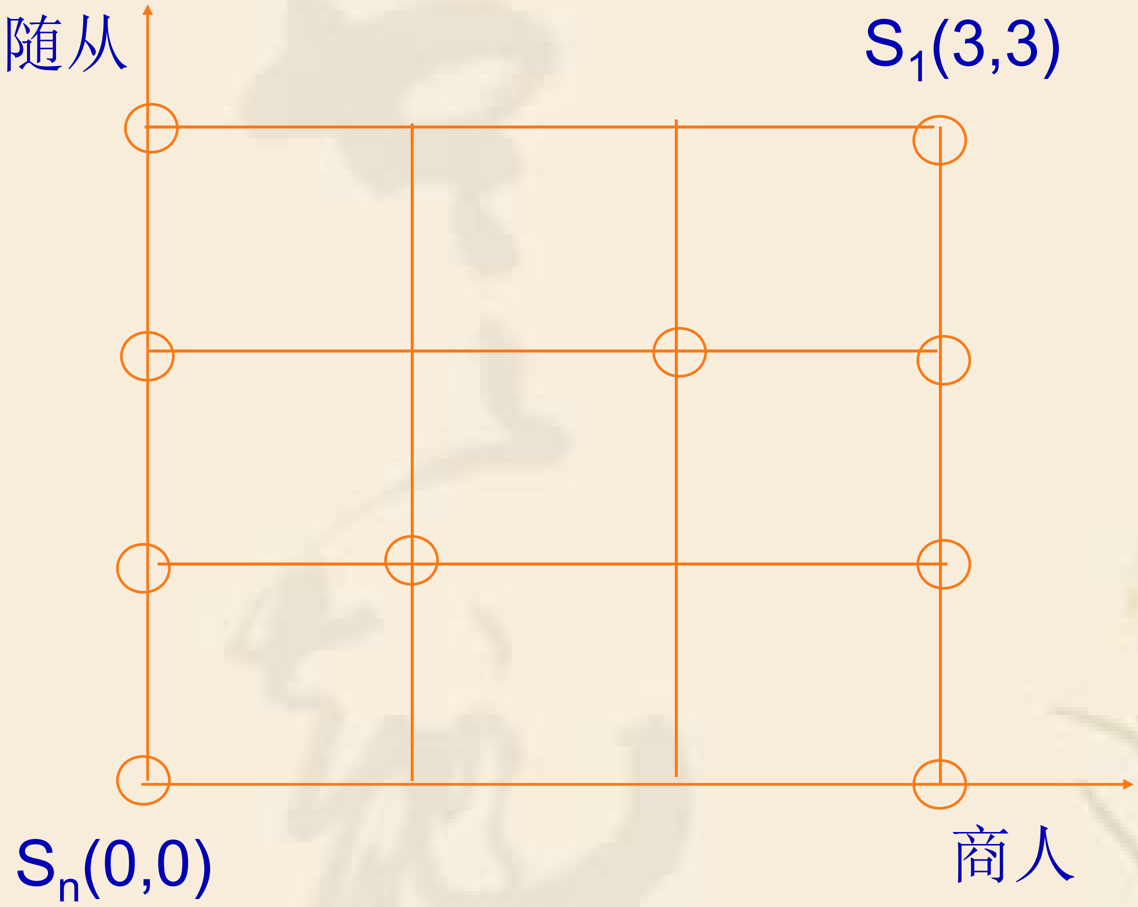
实例二:商人过河

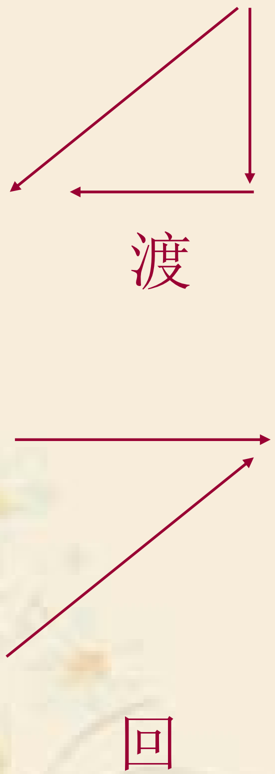
- 三商三从　一起过河
- 河中一船　一船容二
- 商人掌权　从多杀人
- 过河方案?

建立模型



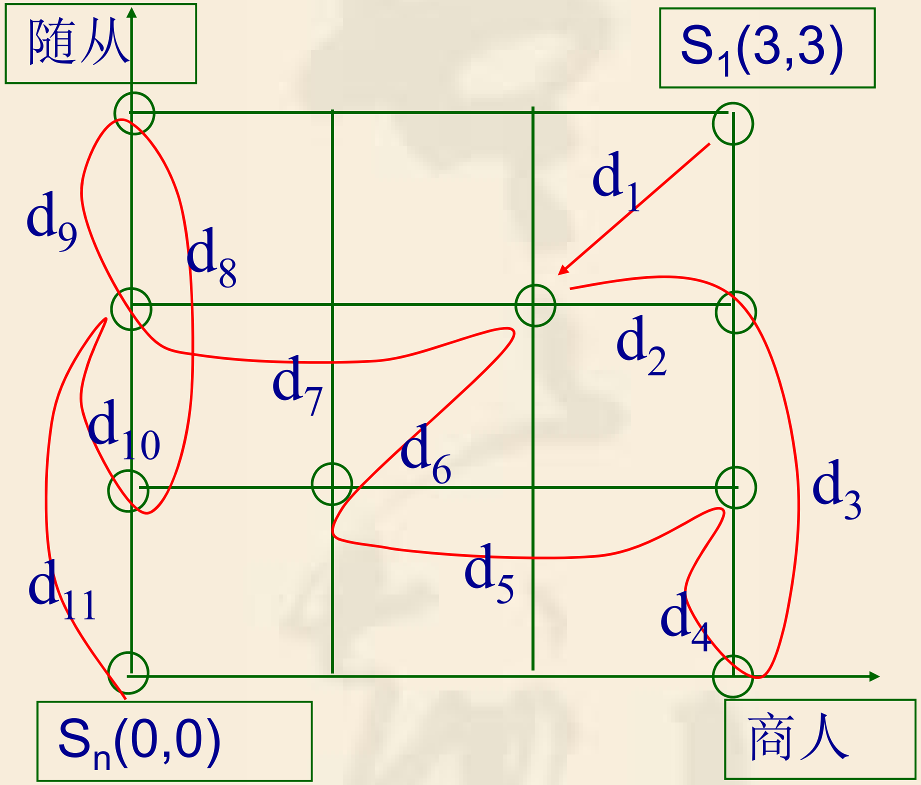
- 引进数学工具：向量
- 记 第 k 次渡河前此岸，商人数 x_k，随从数 y_k
  - 状态 $s_k=(x_k, y_k)$
  - 容许状态集合 $S=\{(x,y)|x=0,y=0,1,2,3;$
    $x=3,y=0,1,2,3;$
    $x=1,y=1;x=2,y=2\}$
  - 决策（每次过河方案） $d_k=(u_k, v_k)$
  - 容许决策集 $D=\{(u,v)|u+v=1,2\}$
  - 状态变化律 $s_{k+1}=s_k+(-1)^k d_k$
  - 求决策 $d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n,$
  - 使 $s_1\ (3,3) \rightarrow s_{n+1}\ (0,0)$

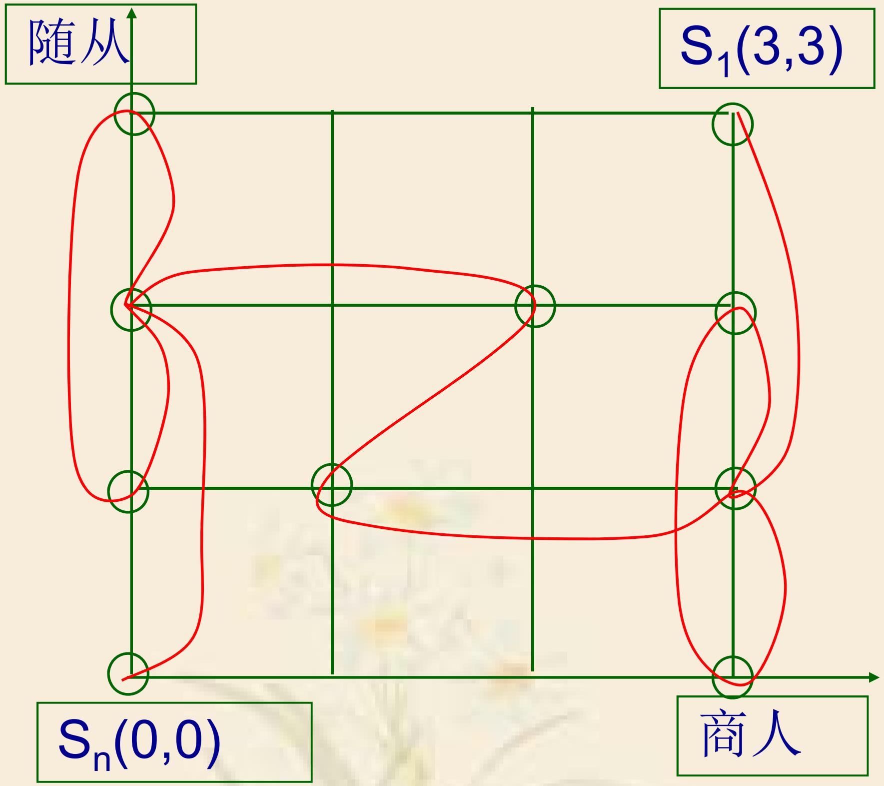




状态　容许状态　决策

答案





文字叙述：略

著名的数学模型

- 自然数
- 欧几里德的几何学
- 微积分
- F=ma
- 经济模型
- …………………

三、数学建模竞赛活动

全国高校规模最大
的基础性学科竞赛

推进素质教育、促进创新人才培养的
重大品牌竞赛项目

数学建模竞赛

- 1986年美国大学生数学建模竞赛
- 1992年全国大学生数学建模竞赛开始由中国工业与应用数学学会举办
- 1994年起由教育部高教司与中国工业与应用数学学会共同举办
- 参赛队年均增长率20%
- 2004年全国研究生数学建模竞赛

数学建模竞赛

❖ 竞赛方式	通讯竞赛
❖ 参赛队员	3人
❖ 赛题	2题选1
❖ 时间	3~4天
❖ 地点	本校
❖ 规则	独立完成

Mathematic Modeling

西南财经大学数学建模竞赛获奖情况

年份	获奖情况（队数）											
	本科							研究生			美国MCM	
	队数	人数	国一	国二	省一	省二	省三	一等	二等	三等	一等	二等
2000	5	15			1	1	1					
2001	11	33		1	2	2	2					
2002	12	36		1	3	2	1					
2003	12	36	3	2	1	2	1					
2004	13	39	4	1	3	3						2
2005	16	48		3	3	5	2	2		2		
2006	16	48		2	1	3	3		2	2	1	
2007	18	54	2	1	6	3	5	2	3	1	1	
2008	24	72	3	5	5	3	3		2	2	1	3
2009	29	87	4	5	9	2	2		2	2	2	1
2010	33	99	1	6	13	4	7		1	1	2	3
2011	49	147	5	5	23	8	4		3		3	6
2012	66	198	3	7	28	9	3				4	12

我校数学建模竞赛活动

❖ 校内选修课	每学年第2学期
❖ 校内竞赛	5.1前后
❖ 暑期培训	7、8月---赛前
❖ 全国竞赛	9月某个周末

课程安排

- 学时：36学时
- 上课时间：信息交流
- 实验——3、6、9、12、15周
  - I203 I204
- 通知：下周停课——10月19日

欢迎同学们

涌跃参加数学建模竞赛活动

END

经济模型与Matlab应用

第二讲 Matlab概述

一、初试Matlab

MATLAB界面

菜单栏

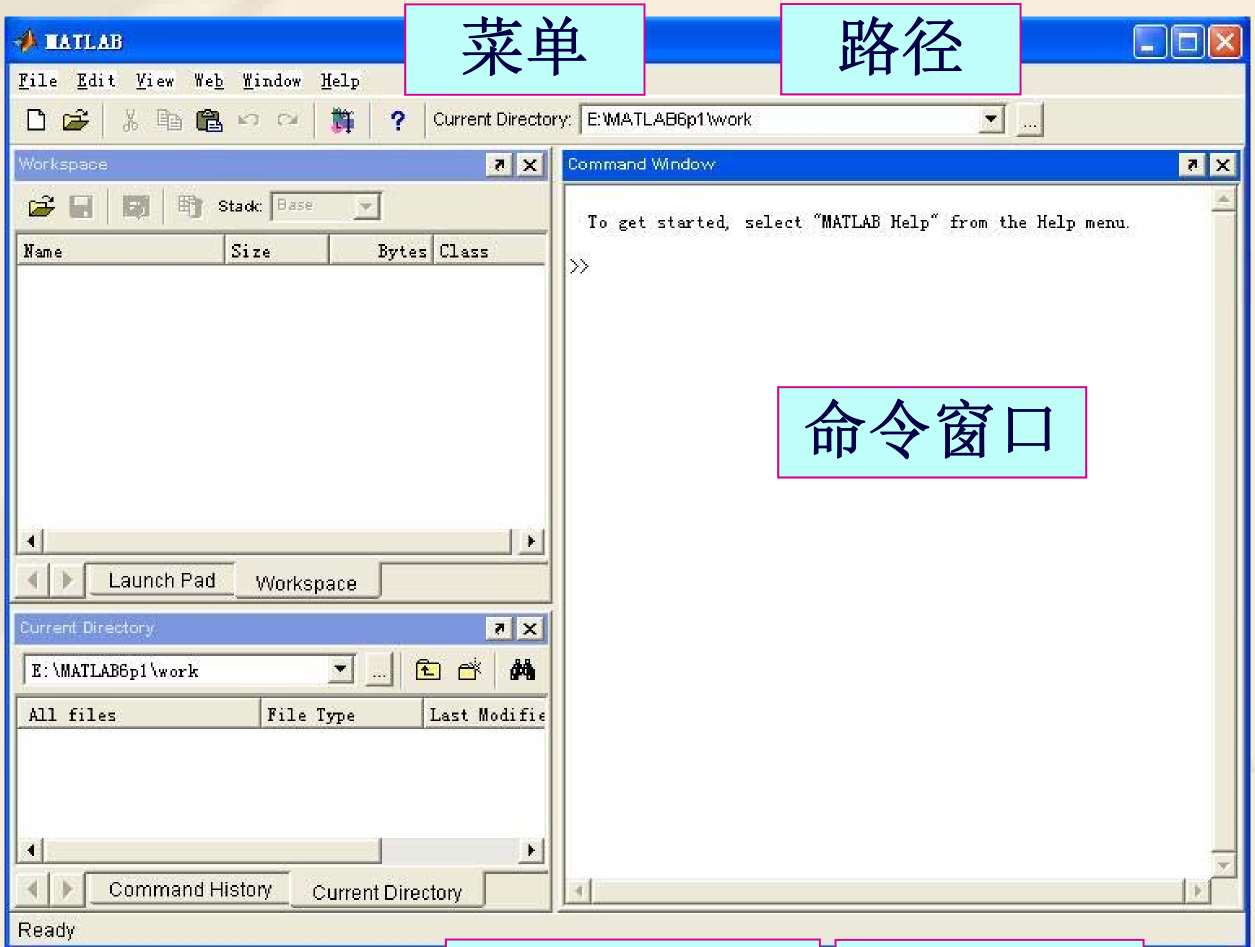
工具栏

起始面板

工作变量

命令历史

当前目录



菜单 路径

命令窗口

M文件窗口 图形窗口

1、基本计算

- 在工作区内计算
  - 在命令窗口可直接输入运算命令进行运算

例:

1+2+3, pi, sin(pi)

- 清屏： clc

l00.m

2、代数运算

例:

- 建立一个随机整数矩阵A
- 求
  - A的转置
  - A的行列式
  - A的逆

A=fix(15*rand(n))
A’
det
inv(A)

3、微积分运算

❖例：求 $y = x^3 - 14x^2 - 9x + 20$

```
x='x' ;
y='x^3-14*x^2-9*x+20' ;
```

◆极限
```
lim(y,x,0)
```

◆导数
```
f1=diff(y)
```

◆积分
```
f2=int('x^3-14*x^2-9*x+20')
f3=int(y,0,2)
```

4、绘图

- 例：画曲线图
  - $Y=x^2$ $x\in[-2,2]$
    - (蓝色实线型绘图 默认)
  - $Y=\sin(x)$ $x\in[-2\pi,2\pi]$
    - (红色虚线型绘图)

```
x=-2:0.1:2;
y=x.^2; plot(x,y),hold on
x= linspace(-2*pi,2*pi,30);
y= sin(x); plot(x,y,'r*'),hold off
```

二、数学软件

1、常用的数学软件

- 目前较流行的数学软件主要有：

Mathematica

Matlab

Maple

MathCAD

符号运算
数值计算
图形显示
高效编程

- 其他：

Spss　Sas　Lindo　Lingo……

2、MATLAB

Matlab 软件

- MATLAB：MATrix LABoratory
  - 通用数学软件
- 版本：Matlab 7.0:2004 → Matlab 2010
- 网址： http://www.mathworks.com
- 特点：
  - 数值计算 编程环境 适应性开放性 工程工具
  - 工具箱
- 安装启动：
  - Matlab6.5的安装程序大约为：500M。完全安装大约需要1000M硬盘空间

工具箱有

- 控制系统工具箱 control
- 小波工具箱 wavelet
- 模糊逻辑工具箱 fuzzy
- 神经网络工具箱 nnet
- 通信工具箱 comm
- 线性矩阵不等式工具箱lmi
- 图像处理工具箱 images
- 优化工具箱 optim
- 偏微分方程工具箱 pde
- 财政金融工具箱 finance
- 模型预测控制工具箱mpc
- 样条工具箱 splines
- 统计工具箱 stats
- 信号处理工具箱 signal images
- …………

三、Matlab m-文件

1、命令文件

- 将要重复输入的所有命令按顺序放到一个扩展名为“.m”的文本文件中
- 运行
  - 命令窗口：输入M文件的文件名
  - M文件窗口：F5

例：画图

l00.m

2、函数文件

- 实现函数功能：运算符
- 定义MATLAB函数
  - function [out1, out2, ...] = myfun(in1, in2, ...)
  - 函数表达式
- 使用MATLAB函数
  - 命令窗口：文件名（……）

输出变量=文件名（输入变量）

例：定义函数 $f(x,y)=100(y-x^2)^2+(1-x)^2$

```
function   f=fun(x,y)

      f=100*(y-x^2)^2+(1-x)^2

f(1,2)
```

fun.m

四、帮助

help命令

- 查询函数用法：help + 函数名
- 打开帮助窗口：helpwin

intro命令

- 简单演示：intro

demo命令

- 浏览例子演示: demo
- 语言示例：在打开的窗口内单击**matlab**之下的**Matrices,**然后选择右下方窗口中的例子**,**双击打开该例程**.**

练习题

1、建立m文件，键入：$1+2-3\times4\div5$

（1）保存，文件名为1，执行此文件

（2）另存为，文件名为a1，执行此文件

问题：

两个文件执行结果是否相同，正确答案为多少？为什么？

2、建立m函数文件，函数为： $y=f(x)=2*e^{x+1}$

并计算 f(1)

提醒

- 上机实验
  - 第3 6 9 12 15周
  - 实验室I203 I204
- 10月19日
  - 补课
  - 时间地点不变
  - 下午H501

END

Matlab
数值运算

经济模型与Matlab应用

Matlab数值运算

一、Matlab基本操作

1、变量

命名规则：

- 变量名必须是不含空格的单个词
- 变量名区分大小写
- 变量名最多不超过19个字符
- 变量名必须以字母打头，之后可以是任意字母、数字或下划线，变量名中不允许使用标点符号

❖ 特殊变量表

特殊变量	取　　值
ans	用于结果的缺省变量名
pi	圆周率
eps	计算机的最小数，当和1相加就产生一个比1大的数
flops	浮点运算数
inf	无穷大，如1/0
NaN	不定量，如0/0
i，j	i=j=(-1)^(1/2)
nargin	所用函数的输入变量数目
nargout	所用函数的输出变量数目
realmin	最小可用正实数
realmax	最大可用正实数

2、运算符及标点

运算符

+	加法运算，适用于两个数或两个同阶矩阵相加
—	减法运算
*	乘法运算
.*	点乘运算
/	除法运算
./	点除运算
^	乘幂运算
.^	点乘幂运算
\	反斜杠表示左除

标点

，或无标点	显示命令的结果
;	不显示结果
%	注释
…	续行
:	间隔

关系操作符

<	>=
<=	~=
>	

逻辑运算符

&	与
|	或
~	非

3、数学函数

函数	名称	函数	名称
sin	正弦	asin	反正弦
cos	余弦	acos	反余弦
tan	正切	atan	反正切
exp	自然指数	log	自然对数
sign	符号函数	log10	常用对数
abs(x)	绝对值	sqrt(x)	开方
max(x)	最大值	min(x)	最小值
fix(x)	取整	sum(x)	总和

4、格式指令

clc	清屏
clear	清除内存变量和函数
vpa(x,n)	显示可变精度计算
format	

- 例：
- a=1/3
- a
- clear
- a
- vpa(a)
- vpa(a,100)
- clc

二、矩阵建立

1、键盘输入

- 直接输入法：
  - [　] 　逗号或空格　　分号或回车
- 例：
  - a= [1 2 3 4 5 6 7 8 9]
  - b= [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
  - c= [1;2;3;4;5;6;7;8;9]
  - d= [1 2 3;4 5 6;7 8 9]
  - e=[1 2 3
    4 5 6
    7 8 9]

l01.m

2、利用已有数据

- 复制粘贴
- 调用M文件
  - 在M文件中创建矩阵
- 外部数据加载
  - load data.txt
  - 保存数据 save data2 data
  - ——.mat
  - load data2

l02.m

data.txt

3、生成向量

- 定步长
  - x= a:b
  - x= a:t:b
- 等分区间[a,b]
  - c=linspace(a,b,n)
- 例：

l01.m

4、函数命令

[ ]	空矩阵	zeros(m,n)	0矩阵
ones(m,n)	1矩阵	eye(m,n)	单位矩阵
rand(m,n)	简单随机阵	randn(m,n)	标准正态随机阵
magic(n)	幻方阵	组合指令	fix(m*rand(n))

例：magic(4)

$$D = \begin{matrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{matrix}$$

例：

零矩阵　壹矩阵

单位阵　随机阵

幻方阵

l03.m

三、矩阵操作

- 基础——定位
  - 元素 A(i,j) 行 A(i,:) 列 A(:,j)
  - 部分行A([i,j], :) 部分列A(:,[i,j])
  - 子块A([i,j],[s,t])
- 操作
  - 取 改 删 增
  - 拉伸A (:)
  - 拼接[A B]

l04.m

❖ 特殊操作

◆ 对角阵 diag(A)

◆ 上三角阵 triu(A)　　下三角阵tril(A)

◆ 关系和逻辑运算　　< > = ~ & |

❖ 例：向量

x=-3:3	$x = -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$
y1=abs(x)>1	$y1 = 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$
y2=x([1 1 1 1])	$y2 = -3 \quad -3 \quad -3 \quad -3$
y3=x(abs(x)>1)	$y3 = -3 \quad -2 \quad 2 \quad 3$
x(abs(x)>1)=[ ]	$x = -1 \quad 0 \quad 1$
(x>0)&(x<2)?	$x = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0?$

l05.m

- 矩阵其他说明
- 内容随意：
  - d1=[exp(3*i);3*4]
  - d2=['abs' 4 56]
  - syms x y
  - d3=[x^2 sin(x)]
- 另
  - d4={1 2 3；4 5 6；7 8 9}
  - d5={1:3 'abs' [56 76]}
  - 调用

l06.m

四、矩阵运算

❖ 基本运算

A±B	加减	A± k	加数
A*B	乘积	k * A	乘数
A\B	左除	B/A	右除
A’	转置		

❖ 对应运算

A.* B　A./ B　A.\ B　A.^B	exp　log　sqrt……

l07.m

❖ 复杂运算

det（A）	行列式	rank(A)	秩
inv(A)或A ^ (-1)		逆	
[V，D]=eig(A)		特征值特征向量	
size(A)	阶数	rref(A)	行阶梯最简式
orth(A)	正交化	trace(A)	迹

❖ 例

l08.m

五、线性方程组：Matlab

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$AX = b:$$

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \qquad b = \left(b_i\right)_{m\times 1}$$

- 恰定方程n=m
- 欠定方程n>m
- 超定方程n<m

1、特解

$AX = b$:

$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad b = (b_i)_{m\times 1}$

- 恰定 欠定 超定
- x=A\b
  - 验证

- 例：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 11 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & -8 \\ 1 & -5 & -4 & 4 \\ 7 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- 注：
  - det(A)
  - A*x==b?

l10.m

2、通解

◆(A b)→初等行变换——行最简形——特解及基础解系

◆操作→det(A)　　B=[A b]

❖ 例　　rref(B):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解　$X = X_0 + kX_1$

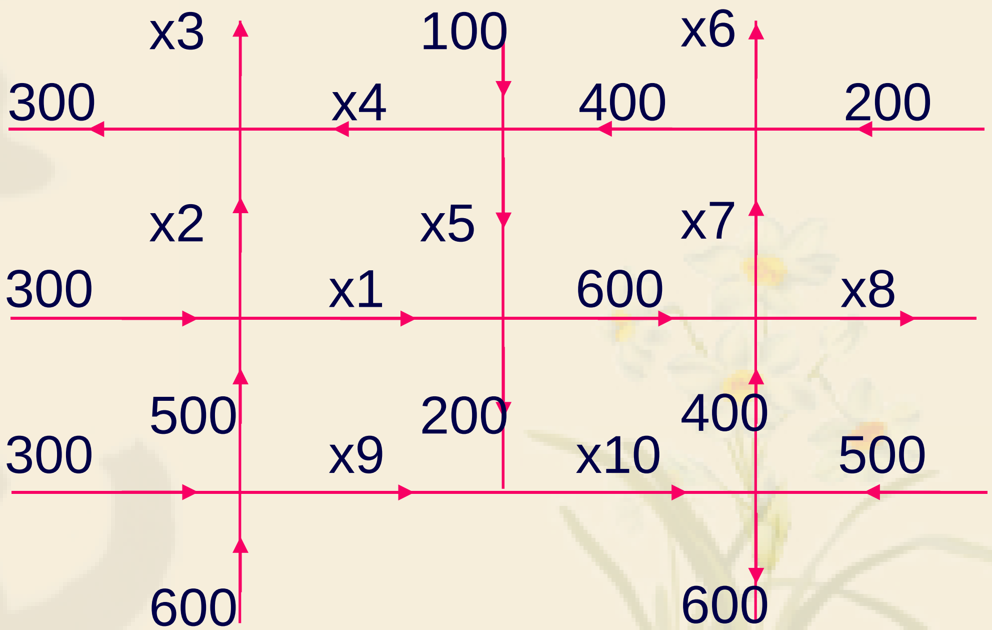
◆null(A,'r')

❖ 另：符号方程

◆solve

3、模型实例：城市交通流量

- 城市部分街道交通流量
  - 监控——具有确定性关系
  - 例：

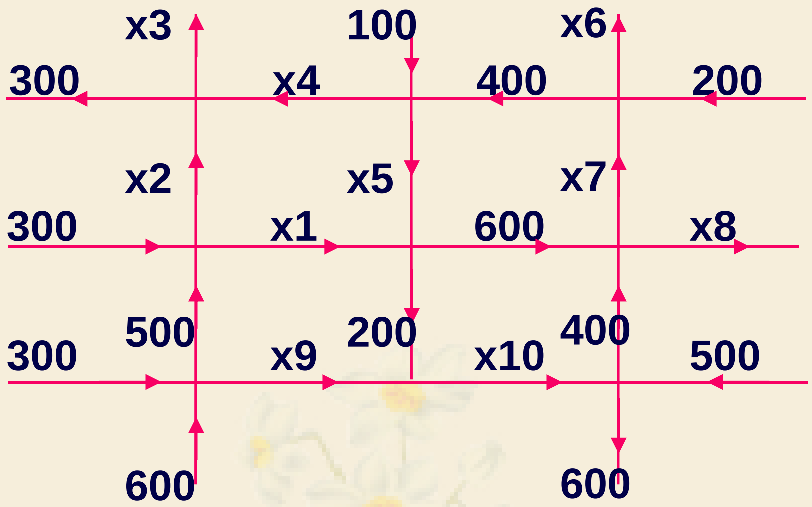


  - 假设
- 确定未知流量

模型

❖线性关系：节点

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 300 \\ x_4 + x_5 = 500 \\ \cdots\cdots \\ x_8 + x_3 + x_6 = 1000 \end{cases}$$



❖另：推广

◆双向

◆欠定

求解

- 求解：线性方程组
  - 特解　x=A\b
    - 效果？怎么办？
    - 验证
  - 通解
    - rref([A b])
    - 初等行变换——行最简形——特解及基础解系
  - 另：
    - solve
    - 注意

l11.m

❖结果

◆通解？

$$[Ab] \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&800 \\ 0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&200 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&500 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&800 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1000 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&400 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&600 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \\ 200 \\ 500 \\ 0 \\ 800 \\ 1000 \\ 0 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix} + k1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

END

经济模型与Matlab应用

第四讲　离散模型

离散模型

- 离散数：可数个
  - 有限数、自然数……
- 概率统计：离散型、连续型
- 模型：差分方程、整数规划、图论、……
- 知识：离散数学
  - 集合、代数、图论、逻辑

一、层次分析法

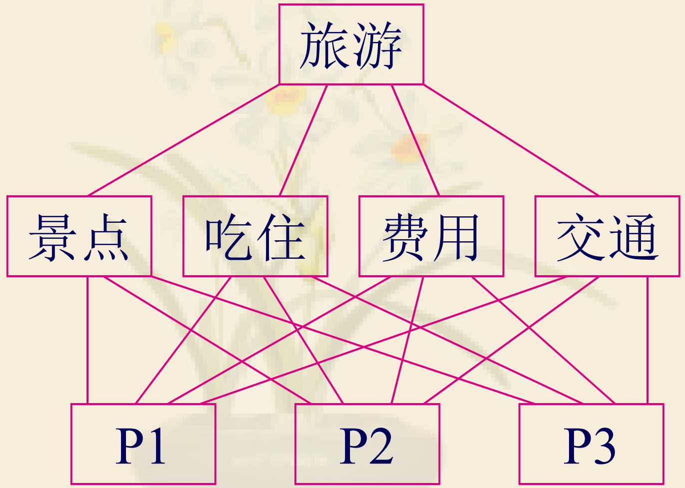
背景

- 日常工作、生活中的决策问题：多种方案进行选择
  - 多个旅游点的选择；毕业生工作选择；产品发展方向的选择；选择科研课题……
- 比较判断时：人的主观选择起相当大的作用
  - 各因素的重要性难以量化
- 美国数学家T.L.Saaty 于1970年代提出层次分析法
  - AHP (Analytic Hierarchy Process)
  - 定性与定量相结合的、系统化、层次化的分析方法

1、模型一：旅游地选择

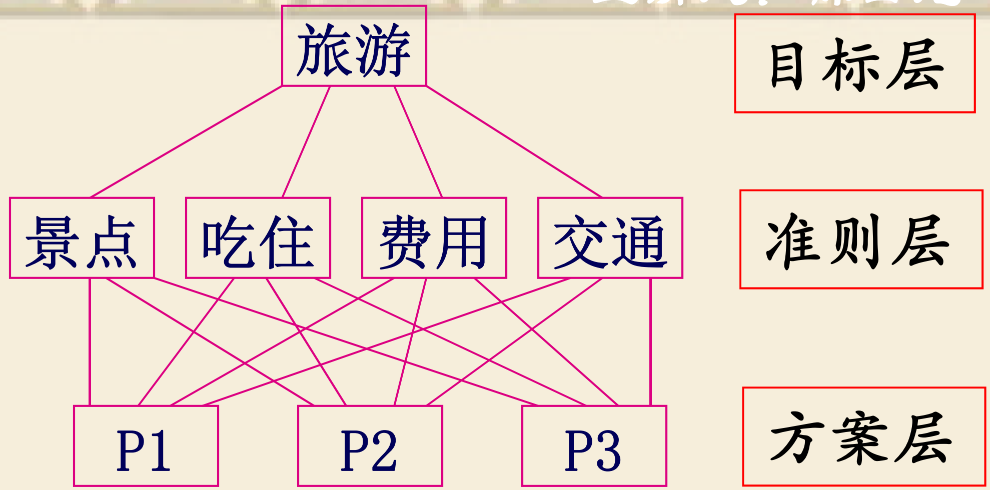
- “五·一”出游：三个旅游点的资料
  - P1 景色优美；但：旅游热点，住宿条件较差, 费用高
  - P2 交通方便，住宿条件好，价钱不贵；但景点一般
  - P3 景点不错，住宿、花费都挺好，但：交通不方便
- 选择哪一个方案?

分析		
	目标	旅游地选择
	标准	景点、交通、费用、条件……
	方案	拉萨、九寨、海南、澳洲……



2、基本原理

旅游地选择



- 将决策问题分为3个层次：
  - 目标层O，准则层C，方案层P；
  - 每层有若干元素， 各层元素用直线相连
- 重要性：用权重表示
  - 两两比较
  - 确定各准则对目标的权重——重要性百分比
  - 各方案对每一准则的权重
- 综合各组权重：确定各方案对目标的权重

基本步骤

（1）确定层次

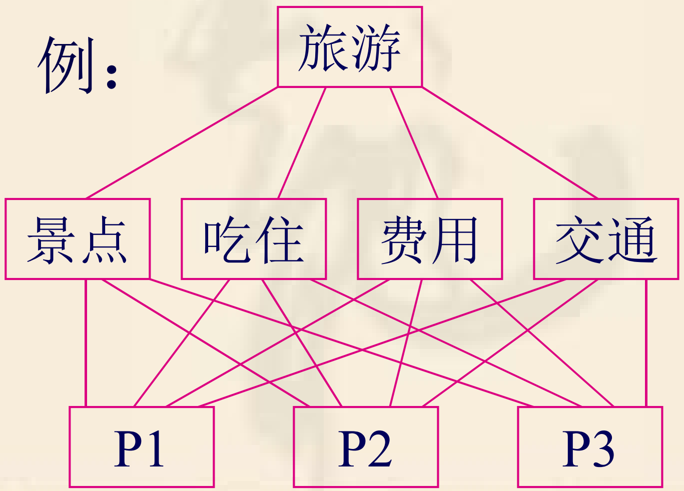
- → 递节层次结构

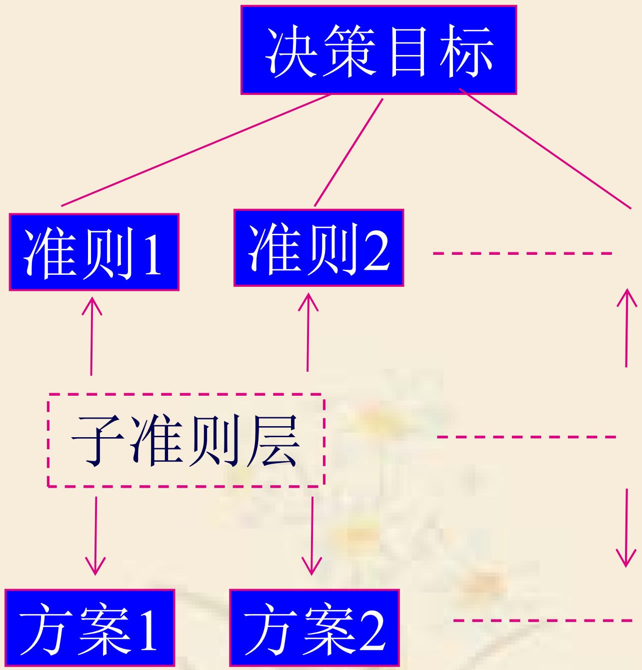
  最上层 —— 目标层

  中间层 —— 准则层

  最下层 —— 方案层

- 例：



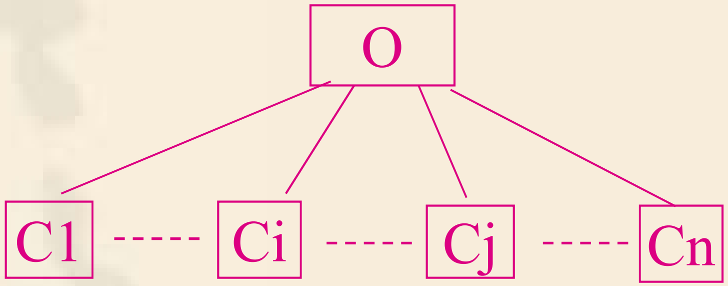


（2）构造两两比较矩阵

- 定性 → 量化: 两两比较

上层元素

某层 n 个元素



比较下层元素对上层元素的影响

取元素 Ci, Cj 比较

→ 量化 a_{ij} → Ci, Cj 对 O 的权重

- 比较尺度: a_{ij}

1 同等 3 稍强 5 强 7 很强 9 绝对强

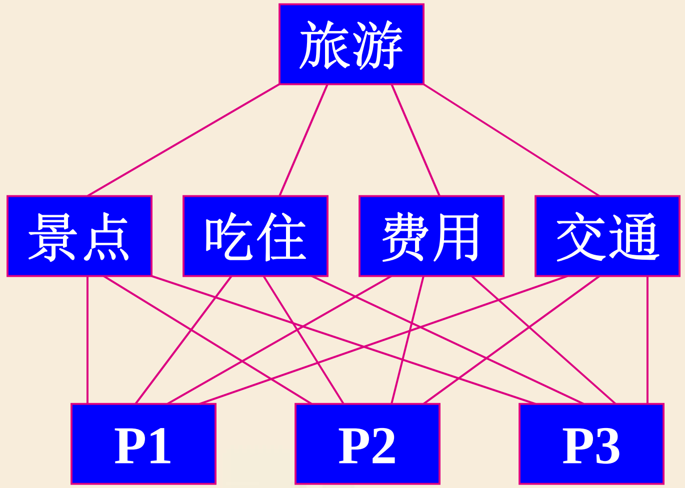
中间值 2 4 6 8 且 $a_{ji}=1/a_{ji}$

两两比较矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n}$$

也称为正互反矩阵。

❖如模型1 建立层次分析模型：



第二层对第一层进行 $C_5^2=10$ 次比较

例：**P1:P2=3**　　**P2:P4=2**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

另：可推得：**P1:P4=6**

但：**P1:P4=5**

说明什么?

这一点称为比较判断矩阵的不一致性

理论分析

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ ：

$$a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$$

- i与j比较
- j与k比较
- i与j比较

$\Rightarrow$ 一致性矩阵

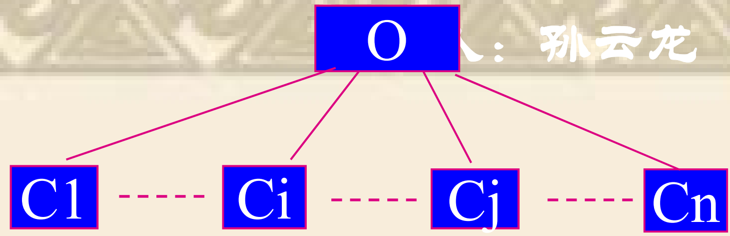
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ 否

一致性指标

--------允许范围

$$a_{ij} \times a_{jk} \approx a_{ik}$$



（3）计算权重向量

- 若元素 C1，C2,……, Cn对 O 的重要性量化比较→权重
- 令其为　(w1, w2, ……, wn)
- 则：比较矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{w1}{w2} & \cdots & \frac{w1}{wn} \\ \frac{w2}{w1} & 1 & \cdots & \frac{w2}{wn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{wn}{w1} & \frac{wn}{w2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

反过来?

- 由判断矩阵

　计算被比较元素对于该准则的相对权重

　进行判断矩阵的一致性检验

$\mathbf{A=(a_{ij})_n}$：

$a_{ij} \times a_{jk} \approx a_{ik}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{(w1, w2, \ldots\ldots, wn)}$

❖ 当$A=(a_{ij})_n$： 一致

权重向量： $W=(w1, w2, \ldots\ldots, wn)^T$

则：近似有

❖特点: 1、$R(A) = 1$, $\lambda = n$

2、$AW = nW$

↓

特征值、向量定义

$$\frac{w1}{w1} \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w1}{w2} & \cdots & \frac{w1}{wn} \\ \frac{w2}{w1} & 1 & \cdots & \frac{w2}{wn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{wn}{w1} & \frac{wn}{w2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ \vdots \\ wn \end{bmatrix}$$

❖ 于是得: 计算权向量方法

计算权向量方法

- 特征根法
  - 求 A 的最大正特征根 λ
  - 求 A 的对应于 λ 的特征向量 (w1, w2, ……, wn)
  - Matlab命令:
    - [V,D]=eig（A） sum
- 模型一

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matlab得:

λ=4.2137

l01.m

W=[0.4969 0.2513 0.1386 0.1132]

景色	吃住	费用	交通

另有

- 近似算法：和法
  - 将 A 的每一列向量归一化 c $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$
    - 将 bij 按行求和得 $c_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$
    - 将 ci 归一化得 $w_i = \dfrac{c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$

W = (w1, w2, ……, wn)

- 最大特征值

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Aw)_i}{w_i}$$

（4）一致性检验

- 当 A’ 不一致时, $\lambda>n$
- 记 $A'=A+\varepsilon$,则由 $A'W=\lambda W$ 或 $AW+\varepsilon W=nW+(\lambda-n)W$
- 即: 当$(\lambda-n)$很小时, A’与A 的不一致误差很小
- 于是有: 一致性指标 $CI=(\lambda-n)/(n-1)$

随机一致性指标 RI 表

N	3	4	5	6	7	8	9
RI	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

一致性比率 $CR=CI/RI$

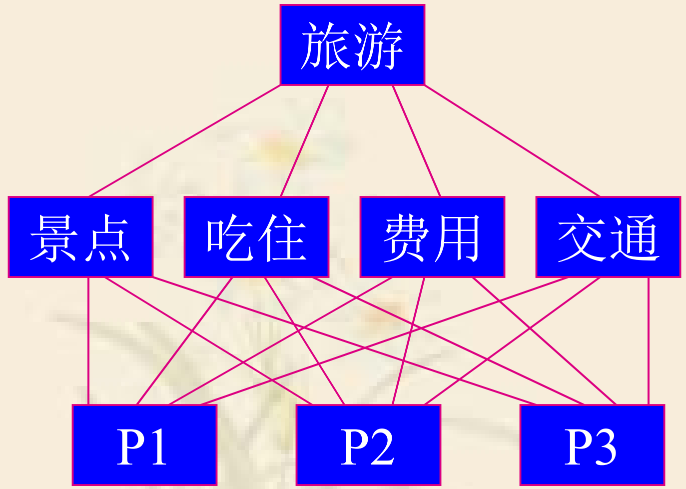
- 当 $CR<0.1$ 时, 通过一致性检验

模型一

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

λ=4.2137

W=[0.4969 0.2513 0.1386 0.1132]^T



- 一致性检验

  CI_A= (λ -n)/(n-1) =0.0712；

  RI_A = 0.9

  CR_A= CI/RI = 0.0791<0.1

  通过一致性检验

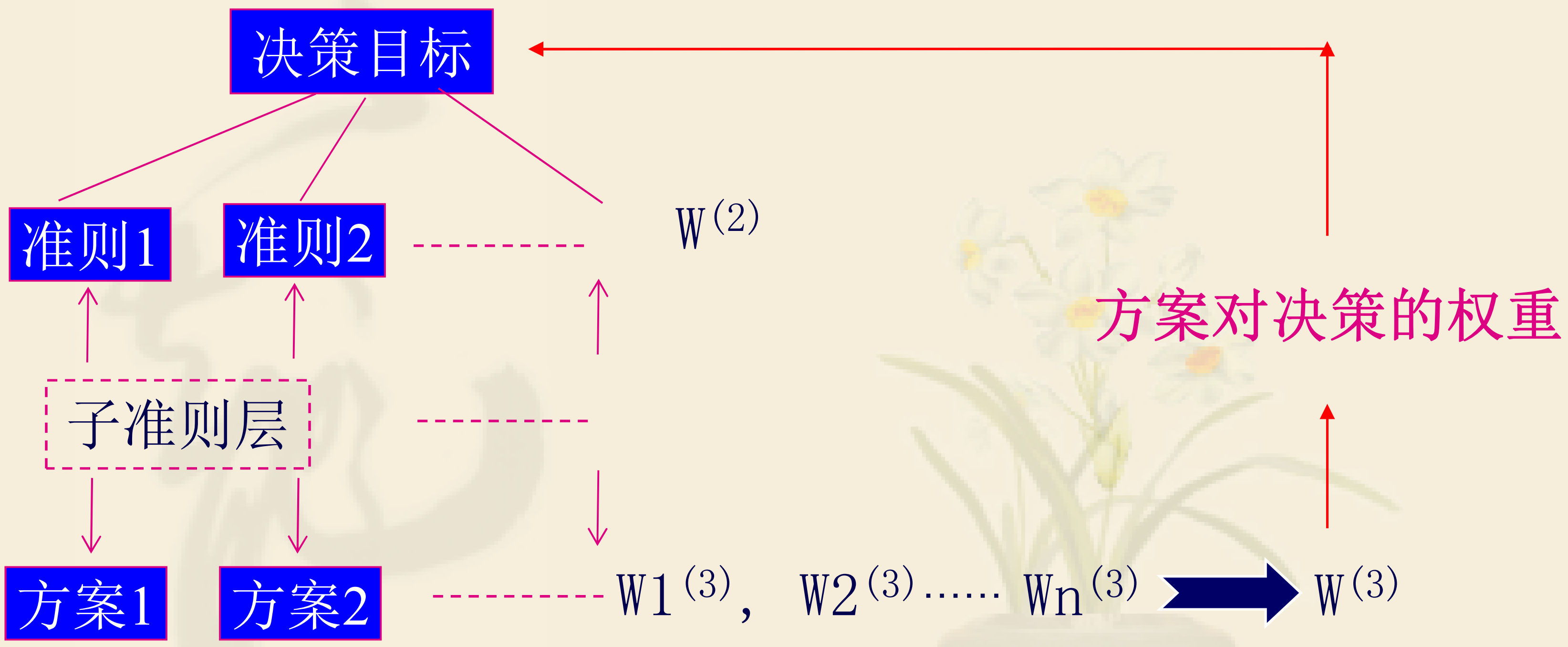
- 即：此家庭对 **景 吃 费 行**

  的权重为 **0.4969 0.2513 0.1386 0.1132**

（5）组合权向量及一致性检验

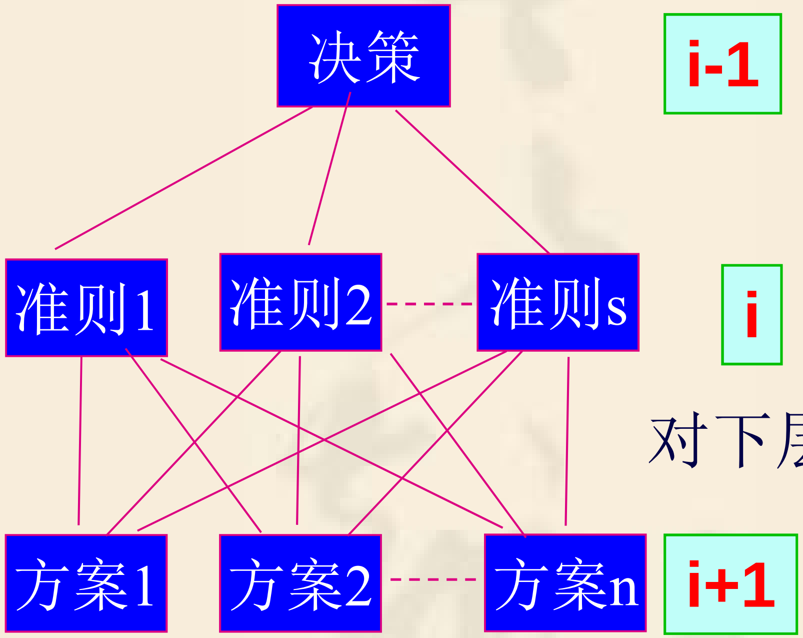
◆计算各层元素对于系统目标的总排序权重,并进行排序

组合权向量：底层 $\xrightarrow{权}$ 顶层



求组合权向量方法

第i+1层对i－1层的组合权向量



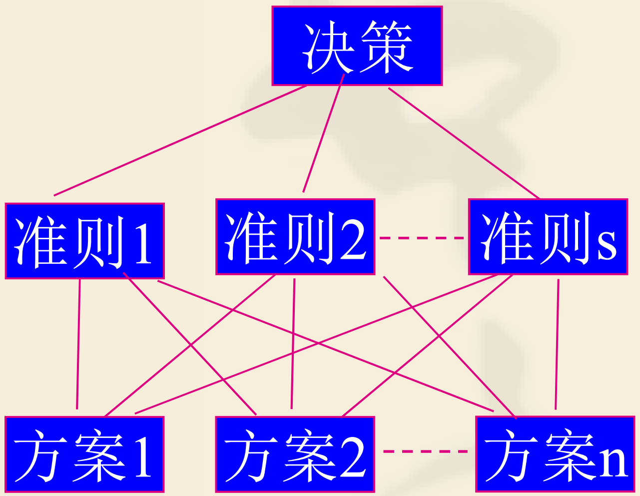
❖用第i层权重向量 $W^{(2)}$

对下层权重向量

$W1^{(3)}$，$W2^{(3)}$…… $Wn^{(3)}$ 加权平均

$W^{(3)}$

求组合权向量方法



- 2层对1层:　$W^{(2)}$ 归一化
- 3层对2层: $W1^{(3)}, W2^{(3)} \cdots\cdots Wn^{(3)}$

  $\rightarrow$ 矩阵 $X^{(3)}$
- 则: 3层对1层组合权向量为

$$W^{(3)} = X^{(3)} W^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} w1^{(3)} \\ w2^{(3)} \\ \vdots \\ wn^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w11 & w12 & \cdots & w1m \\ w21 & w22 & & w2m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ wn1 & wn2 & & wnm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w1^{(2)} \\ w2^{(2)} \\ \vdots \\ wm^{(2)} \end{bmatrix}$$

方案

方案对决策　准则　准则对决策

一致性指标 CI= (λ -n)/(n-1)
随机一致性指标 RI 表
一致性比率 CR=CI/RI

组合一致性检验

- 下层一致性指标

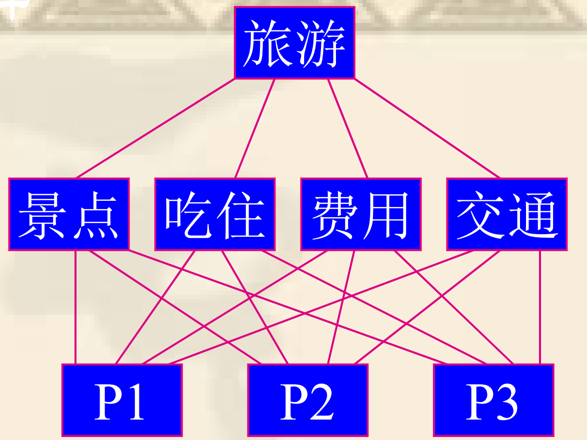
第i层权重向量：加权平均

- 第i+1层对i−1层的一致指标CI_{i+1}和RI_{i+1}
- 组合一致性比率：CR_{i+1}——两层相加
  - 2层对1层: $CR^{(2)} = CI^{(2)}/RI^{(2)}$
  - 3层对2层: $CI1^{(3)}, CI2^{(3)}, \ldots, CIn^{(3)}$;

    $RI1^{(3)}, RI2^{(3)}, \ldots, RIn^{(3)}$
  - 令: $CI^{(3)} = (CI1^{(3)}, CI2^{(3)}, \ldots, CIn^{(3)})\, W^{(2)}$

    $RI^{(3)} = (RI1^{(3)}, RI2^{(3)}, \ldots, RIn^{(3)})\, W^{(2)}$
  - 一致性比率 $CR^{(3)} = CR^{(2)} + (CI^{(3)}/ RI^{(3)})$
  - 一致性检验 $CR^{(3)} < 0.1$

模型一



❖ 两两比较矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1/7 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\quad B_2=\begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/6 \\ 7 & 1 & 1/2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}\quad B_3=\begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/4 \\ 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\quad B_4=\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matlab计算

- 特征值特征向量
  - $\lambda=3.002$，W1=[0.6026 0.0823 0.3150]
  - $\lambda=3.080$，W2=[0.0702 0.3707 0.5590]
  - $\lambda=3.094$，W3=[0.0989 0.3643 0.5368]
  - $\lambda=3.065$，W4=[0.2790 0.6491 0.0719]
  - $\lambda=4.2137$, WA=[0.4969 0.2513 0.1386 0.1132]

- 组合权向量：
  - $W^{(3)} = (W1, W2, W3, W4)$
  - $W = W^{(3)} W^{(2)}$

  $W = [0.3624 \quad 0.2580 \quad 0.3796]^T$

l02.m

- 一致性检验：
- CI_1=0.002/2=0.001; CI_2=0.04; CI_3=0.047; CI_4=0.0325

CR_1=0.001/0.58=0.0017; CR_2=0.069; CR_3=0.081; CR_4=0.056;

CI_A=0.0155/3=0.0712； CR_A= 0.0712 /0.9=0.0792

相对一致性指标均<0.1，通过一致性检验。

- 组合一致性：
- $CI^{(3)} = (CI1^{(3)},CI2^{(3)},\ldots,CIn^{(3)})\, W^{(2)} = 0.0208$

$RI^{(3)} = (RI1^{(3)},RI2^{(3)},\ldots,RIn^{(3)})\, W^{(2)} = 0.0358$

- 一致性比率 $CR^{(3)} = CR^{(2)} + (CI^{(3)}/ RI^{(3)}) = 0.1150 > 0.1$

未通过一致性检验

- 另： A=[1 2 3 4;1/2 1 2 2;1/3 1/2 1 1;1/4 1/2 1 1];

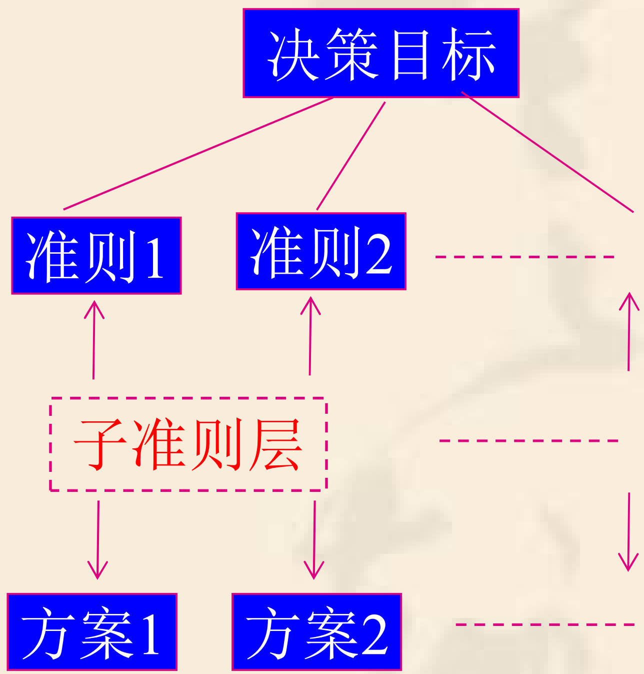
答案

- 组合权向量
- $W^{(3)} = [.3617, .2538, .3845]^T$
- A、B、C三个旅游点相对旅游目标来说
- 综合打分结果是：

P3 点为首选，P1 次之，P2 点应予以淘汰。

Mathematic Modeling

小结:



- 建立层次结构
- 用比例尺度构造对比矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n}$$

- 计算权向量(特征向量法),

λ , (w1, w2, ……, wn)

并做一致性检验

$CI=(\lambda-n)/(n-1)$, RI, $CR=CI/RI<0.1$

- 计算组合权向量,

$W^{(3)}=(W1^{(3)}, W2^{(3)}\ldots\ldots Wn^{(3)})W^{(2)}$

做组合一致性检验

$CR^{(3)}=CR^{(2)}+(CI^{(3)}/RI^{(3)})$

- 决策

3、模型二 足球队实力排序

- 世界杯——6月12日
- 九八：三十二只劲旅逐鹿法兰西
- 球赛的胜败：
  - 实力、运气、发挥……
  - 英格兰与阿根廷的相遇让人惋惜
  - 上届冠军巴西与无冕之王荷兰的比赛被称为提前上演的冠亚军决赛
  - 同为战平的比利时和智利命运却不同
  - …………
- 有人认为：偶然性是足球更具魅力
  - 社会学、心理学 → 不讨论
- 实力水平 → 排序

应用层次分析法

- 建立层次结构：两层 → 只在一层比较
- 构造对比矩阵：64场比赛结果

$$A=(a_{ij})_{32\times 32}$$

aij 为球队 Ti 与球队 Tj 的实力标尺

（i、j=1，2……32分别代表巴西、英格兰……）

则：

aij≥0　　aji=1/ aij　（ aij≠0）

aij=1　　aij=0　（ Ti与Tj成绩残缺）

层次分析法理论

构造?

❖ 令：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{Ti与Tj 战平}\\ 2 & \text{Ti靠点球大战战胜Tj}\\ 3 & \text{Ti靠金球战胜Tj}\\ k+3 & \text{Ti九十分钟比赛中净胜Tj队k球（1≤k≤6）}\\ 9 & \text{Ti净胜Tj队6球以上}\end{cases}$$

1 同等 3 稍强 5 强 7 很强 9 绝对强

层次分析法理论

- 残缺判断矩阵： $B=(b_{ij})_{32}$

$$b_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & i\neq j\\ m+1 & i\text{行有}m\text{个元素为}0\end{cases}$$

求解：

- 主特征根、主特征向量
  - matlab
- 得：$\lambda = 32.7371$

  $w = (0.3823, 0.0979, \ldots\ldots, 0.1027)$

- 一致性检验
  - 一致性指标

$$CI = \frac{\lambda - n}{n-1} = 0.0238 << 0.1$$

  - 通过检验

结果分析

- 计算结果实力排序：
  - 法国 巴西 挪威 意大利 丹麦 摩洛哥 巴拉圭 尼日利亚 西班牙 克罗地亚 阿根廷 苏格兰 荷兰 智利 南非 保加利亚 沙特 奥地利 喀麦隆 罗马尼亚 比利时 英格兰 牙买加 德国 墨西哥 日本 南斯拉夫 哥伦比亚 韩国 突尼斯 伊朗 美国
- 国际足联的排序
  - 法国 巴西 克罗地亚 荷兰 阿根廷 意大利 德国 丹麦 英格兰 南斯拉夫 罗马尼亚 尼日利亚 墨西哥 巴拉圭 挪威 智利 西班牙 摩洛哥 比利时 伊朗 哥伦比亚 牙买加 奥地利 南非 喀麦隆 突尼斯 苏格兰 沙特 保加利亚 韩国 日本 美国
- 挪威：战胜实力强劲的巴西，与意大利战平
- 伊朗：被认为是表现最好的亚洲队，但

  输给德国、南斯拉夫，以小比分赢美国应对排名影响不大
- 亚洲队？

- 关于中国足球

....

二、公平的席位分配

- 问题提出：分配代表席位
  - 比例加惯例

某校	甲系	乙系	丙系
共200人	100	60	40
20席	10	6	4
调整	103	63	34
人数比例	51.3	31.5	17
20席	10.3	6.3	3.4
实际分配	10	6	4
21席	10.815	6.615	3.57
实际分配	11	7	3

问题:分配不公

- 原因
  - 20个,丙多占0.6
  - 21个,不充分的席位都在增加

某校	甲系	乙系	丙系
共200人	103	63	34
人数比例	51.3	31.5	17
20席	10.3	6.3	3.4
实际分配	10	6	4
21席	10.815	6.615	3.57
实际分配	11	7	3

模型构造

1、衡量公平分配席位的指标←确立

❖ 符号假设

- 两方：甲A 乙B
- 人数：p_1 p_2
- 席位：n_1 n_2
- 每席代表人数：p_1/n_1 ? p_2/n_2

❖ 不公平

$$\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2} \xrightarrow{\text{程度}} \frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2}$$

$\boxed{\text{绝对不公平值}}$

◆ 例： 120:10 100:10→2

◆ 另： 1020:10 1000:10→2

❖ 改进

❖ 改进

◆ 对A相对不公平值

绝对不公平值

$$r_A(n_1, n_2) = \frac{\dfrac{p_1}{n_1} - \dfrac{p_2}{n_2}}{\dfrac{p_2}{n_2}} = \frac{p_1 n_2}{p_2 n_1} - 1$$

基数

◆ 对B

$$r_B(n_1, n_2) = \frac{\dfrac{p_2}{n_2} - \dfrac{p_1}{n_1}}{\dfrac{p_1}{n_1}} = \frac{p_2 n_1}{p_1 n_2} - 1$$

- 例： 120:10 100:10→2 → 0.2
- 另： 1020:10 1000:10→2 →0.02

◆ 目标：r_A, r_B 尽量小

2、确定分配方案

❖ 假设 A,B 占有 n_1,n_2 席 → 加1席

不妨设 $p_1/n_1>p_2/n_2$ ←代表指数

❖ 则

- $p_1/(n_1+1)>p_2/n_2$ --➔A
- $p_1/(n_1+1)<p_2/n_2$

  对B不公平值(相对)

  $$r_B(n_1+1,n_2)=\frac{p_2(n_1+1)}{p_1n_2}-1$$

- $p_1/n_1>p_2/(n_2+1)$

  对A 不公平值(相对)

  $$r_A(n_1,n_2+1)=\frac{p_1(n_2+1)}{p_2n_1}-1$$

- 比较不公平值(相对)
  - 对B　　$r_B(n_1+1,n_2)=\frac{p_2(n_1+1)}{p_1 n_2}-1$　　?小
  - 对A　　$r_A(n_1,n_2+1)=\frac{p_1(n_2+1)}{p_2 n_1}-1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} \;\; ?小 \;\; \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

- 判别法：Q 值法

$$Q_i=\frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)} \quad ?大$$

- 条件1与此式等价→推广

模型求解：

应用 Q 值法 $Q_i = \dfrac{p_i^{\ 2}}{n_i(n_i+1)}$

- 各系人数：甲 103、乙 63、丙 34
  - 分3席：　$n_1=1$　$n_2=1$　$n_3=1$
  - 应用 Q 值法分4、5、……、18席
  - 19席：　$n_1=10$　$n_2=6$　$n_3=3$

?公平

- 第20席：　$Q_1=103^2/(10\times11)=96.4$

  $Q_2=63^2/(6\times7)=94.5$

  $Q_3=34^2/(3\times4)=96.3$

  - 则分配：　$n_1=11$　$n_2=6$　$n_3=3$

$n_1=10$
$n_2=6$
$n_3=4$

- 第21席：　$Q_1=80.4$　$Q_2=94.5$　$Q_3=96.3$
  - 则分配：　$n_1=11$　$n_2=6$　$n_3=4$

进一步的讨论

- Q值方法比“比例加惯例”方法更公平吗？

席位分配的理想化准则

已知: m方人数分别为 $p_1, p_2,\dots, p_m$

总人数 $P= p_1+p_2+\dots+p_m$，待分配的总席位N

理想情况下m方分配的席位分别为

$$n_1,n_2,\dots,n_m \rightarrow n_1+n_2+\dots+n_m=N$$

n_i 应是 N和 $p_1, \dots, p_m$ 的函数

$$n_i = n_i(N, p_1, \dots, p_m)$$

记$q_i=Np_i/P$，$i=1,2,\dots,m$,

若q_i 均为整数，显然应 $n_i=q_i$

$q_i=Np_i/P$不全为整数时？

$p_i \rightarrow n_i \rightarrow q_i$

记 $[q_i]_-=\text{floor}(q_i) \sim$ 向 $\le q_i$方向取整

$[q_i]_+=\text{ceil}(q_i) \sim$ 向 $\ge q_i$方向取整.

❖ n_i 应满足

1) $[q_i]_- \le n_i \le [q_i]_+ \ (i=1,2,\ldots,m)$ 即n_i 必取$[q_i]_-$, $[q_i]_+$之一

2) $n_i(N, p_1, \ldots, p_m) \le n_i(N+1, p_1, \ldots, p_m) \ (i=1,2,\ldots,m)$

即当总席位增加时， n_i不应减少

“比例加惯例” 方法满足 1），但不满足 2）

Q值方法满足 2），但不满足 1）。令人遗憾！

能不能找到一个分配方法既满足1）又满足2）呢？

另

- 总人数 $p=\sum p_i$，总席位 $n=\sum n_i$
- 按人数比例

$$n_i = [\frac{p_i}{p} n]$$

- 则

$$\frac{p_i}{n_i + 1} < \frac{p}{n} \le \frac{p_i}{n}$$

- 则

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i + 1)}$$

几何平均（平方）

END

经济模型与Matlab应用

Matlab程序设计

一、Matlab程序

1、基础

- Matlab m-文件
- 命令文件
  - 运行
    - 命令窗口：输入M文件的文件名
    - M文件窗口：F5
- 函数文件
  - function [out1, out2, ...] = myfun(in1, in2, ...)
  - 函数表达式
  - 使用：命令窗口：文件名（……）

2、条件语句

❖ if -else-end分支结构

<table>
<tr><td>简单条件语句</td><td>多条件条件语句</td></tr>
<tr><td>if (条件式)
语句组
end</td><td rowspan="3">if (条件式1)
语句组1
elseif (条件式2)
语句组2
elseif (条件式3)
语句组3
else
… …
end</td></tr>
<tr><td>多选择条件语句</td></tr>
<tr><td>if (条件式)
语句组 1
else
语句组 2
end</td></tr>
</table>

- 例1

函数 $y=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$ 输入一个x的值,输出符号函数y的值

- 编程1

```
if (x<0)
   y=-1
elseif  (x=0)
   y=0
else
   y=1
end
```

?

另：x?

- 编程2
  函数?

l01.m

3、循环语句

第一类循环语句	第二类循环语句结构
for 循环变量= array 循环体语句组 end	while (条件式) 循环体语句组 end

- array 是一个矩阵：循环列
  - 一般：数组
    - 一般：循环变量=初值:步长:终值
    - 默认：步长=1

- 例3

生成一个6阶矩阵，使其主对角线上元素皆为1，与主对角线相邻元素皆为2，其余皆为0。

- 编程

```
for i=1:6
    for j=1:6
        if i==j
            a(i,j)=1;
        elseif  abs(i-j)==1
            a(i,j)=2;
        else
            a(i,j)=0;
        end
    end
end
a
```

结果：

$$a=\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

l04.m

- 例4 求自然数的前n项和
- 编程

```
n=input('n=')
sum=0; k=1;
while k<=n
   sum=sum+k;
   k=k+1;
end
sum
```

结果：
n=100
Sum=5050

好不好？
怎么改？
1
2
3
4

l05.m

4、程序流控制指令

break	跳出循环 一般和 if结构 结合使用
continue	结束本次循环 继续进行下次循环
return	终止当前指令 返回上一级或等待键盘输入命令
pause	暂停 按任意键继续
input	输入 提示键盘输入

- 指令

- 例6：连续奇数求和

  从1开始

  一直到和达到1000为止

  问：加了多少项

- 程序对不对？

- 编程

```
clear
sum1=0;
for i=1:100
    n=2*i-1;
    if sum1<1000
        sum1=sum1+n;
    else
        break
    end
end
sum1,n
```

l07.m

二、初等模型

1、个人所得税问题

- 工资、薪金所得适用

改革后			
级数	含税级距	税率(%)	速算扣除数
1	0-1500	3%	0
2	1500-4500	10%	105
3	4500-9000	20%	555
4	9000-35000	25%	1005
5	35000-55000	30%	2755
6	55000-80000	35%	5505
7	80000以上	45%	13505
改革前			
级数	含税级距	税率(%)	速算扣除数
1	0-500	5%	0
2	500-2000	10%	25
3	2000-5000	15%	125
4	5000-20000	20%	375
5	20000-40000	25%	1375
6	40000-60000	30%	3375
7	60000-80000	35%	6375
8	80000-100000	40%	10375
9	100000以上	45%	15375

级	年终奖	税率
1	(0,18000)	3
2	(18000,54000)	10
3	(54000,108000)	20
4	(108000,420000)	25
5	(420000,660000)	30
6	(660000,960000)	35
7	$(960000,\infty)$	45

问题

- 1、纳税额计算函数
  - 条件判断

级数	月应纳税所得额（基数3500元）	税率(%)
1	0-1500	3
2	1500-4500	10
3	4500-9000	20
4	9000-35000	25
5	35000-55000	30
6	55000-80000	35
7	80000-	45

程序

t1.m
t2.m

```
function f=t1(x)
t=x-3500;
if t<=0
   f=0;
elseif t<=1500
   f=t*0.03;
elseif t<=4500
     f=45+(t-1500)*0.1;
……
else
     f=29625+(t-80000)*0.45;
end
```

问题

- 2、分配月收入、年奖金
  - 合理避税
  - 为什么
  - 如何分

算法

- 搜索：定步长
  - for-end
  - while -end
- 纪录最优点
  - if-end

程序

```
function [min,k1] =tax3(x)
k=0;
min=t1(x);
k1=0;
while k<=x
    d1=t1(x-k)+(t2(12*k)/12);
    if min>d1
        min=d1;
        k1=k;
    end
    k=k+1;
end
```

t3.m

另：程序有问题？[mint,k1]=t3(5000)

2、现金流计算

- 小李夫妇买房需向银行贷款6万元，按月分期等额偿还房屋抵押贷款，月利率是0.01，贷款期为25年。小李夫妇每月能有900元的结余。
- （1）小李夫妇是否有无能力买房？月供多少？
- （2）有一则广告：本公司能帮您提前三年还清贷款，只要每半月还钱一次，但由于文书工作多了，要求您先付三个月的钱。是否划算？
- （3）小李夫妇若将结余全部用来还贷，多长时间还清房贷？

❖ 规则现金流

❖ 基本公式

$$\overset{\text{现值}}{PV} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\overset{\text{现金流}}{P}}{(1+rate)^t} + \frac{\overset{\text{终值}}{FV}}{(1+\underset{\text{利率}}{rate})^T}$$

$$= \frac{P}{rate}\left(1 - \frac{1}{(1+rate)^T}\right) + \frac{FV}{(1+rate)^T}$$

贷6万 月利率0.01 25年 月结余900元

- 月供？

$$PV=\frac{P}{rate}\left(1-\frac{1}{(1+rate)^T}\right)+\frac{FV}{(1+rate)^T}$$

$$P=\left(PV-\frac{FV}{(1+rate)^T}\right)*\frac{rate}{\left(1-\frac{1}{(1+rate)^T}\right)}$$

  - 631.9345

- 提前三年，半月还钱一次，先付三个月，是否划算？
  - 现值
  - 60550

- 贷款时间
  - 2问题

$$T=\frac{\ln\left(\left(FV-\frac{P}{rate}\right)\Big/\left(PV-\frac{P}{rate}\right)\right)}{\ln(1+rate)}$$

x1.m

END

经济模型与Matlab应用

Matlab符号运算

一、Matlab符号定义

1、感受符号

- 例1：

  y1=x^2

  y2='x^2'

  y3=sym('x^2')

- 例2：

  x=‘x’

  y1=x^2

- 例3：

  x=‘3’

  x+1

- 例4：

  syms x

  y1=x^2

- 符号必须定义
  - 数值运算——赋值
  - 符号运算——定义——符号型、字符串

l01.m

2、定义符号

❖ 定义符号变量

符号型变量	syms x y z	字符串	x =‘x’
清除符号变量	clear		

❖ 定义符号表达式：函数

数字型	f = ……
符号型	syms x， f = … 或 f =sym(’ ……’)
字符串型	f =’……’
运算符	f=inline(‘…’)
M函数文件	

❖ 例

l02.m

- 进一步说明
- 求函数值:
  - 符号 字符串
    x=….   eval(f)
  - 运算符 inline
    f(…)
- 符号表达式
  - 函数
  - 矩阵
  - 方程

l03.m

二、Matlab符号运算

1、初等运算

❖ 符号型

+ - * / ^	复合 compose(f , g)	反函数 finverse(f)

❖ 函数化简

pretty	美化	simplify	简化	collect	合并同类项
factor	分解因式	expand	展开	simple	各种简化

❖ 函数计算器

◆ funtool

l04.m

2、微积分

❖ 极限 $\lim_{x \to a} f(x)$

命令单词

自变量
可缺省：默认**x**或唯一符号变量

limit (f, x, a, ’right’)

选项： **’right’ ’left’**
可缺省

函数
符号型

x取值
可缺省：默认**a=0**

❖ 例

l05.m

❖ 导数与差分

自变量
可缺省：默认**x**或唯一符号变量

命令单词

diff (f, x, n)

函数
符号型

导数阶数
可缺省：默认**n=1**

◆ 导数——偏导

diff(diff(z,x),y)

❖ 例

l06.m

❖ 积分

自变量

命令单词　可缺省：默认x或唯一符号变量

◆ 不定积分　int (f, x)

◆ 定积分　int (f, x, a,b)

函数　上下限

符号型

◆ 重积分——次积分

int(int(f,y,y1(x),y2(x)),x,a,b)

int(int(int(f,z,z1,z2),y,y1,y2),x,a,b)

◆ 另　quad (f,a,b)

l07.m

❖ 例

3、方程

一般方程

符号 字符串

- 符号解

solve (f)

solve (f, x)

solve (f,g,…, x,y,…)

字符串

- 数值解

fsolve (f, x0)

fzero(f, x0)

- 例

$$2x^4 + x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$\tan 2x = \sin x$$

l08.m

微分方程

- 符号解：通解

缺省？

y=dsolve(f)
y=dsolve(f ,'x')
[y1,y2,…]=dsolve(f , g ,…,'x')

字符串

  - 注：导数

Dy D2y Dny

- 特解
  - 初始条件

y=dsolve('…','y(x0)=y0','…')

- 例：

l09.m

- 注：化简

三、人口模型

- 问题提出：人口预测
- 例如：
  - 1998年末：12.5亿，自然增长率：9.53‰
  - 预测2000年末：$12.5\times(1+0.00953)^2 \approx 12.7394$
  - 2000年11月1日全国总人口为126583万人
  - 预测2004年末： $12.5\times(1+0.00953)^6 \approx 13.2320$
  - 2005年1月6日，中国人口总数达到13亿
  - 2011年4月，第六次全国人口普查1,370,536,875人
- 设　基年人口数为 x_0，k 年后为 x_k，年增长率为r

则　人口增长模型为　$x_k=x_0(1+r)^k$

模型一：指数增长模型

Malthus （1766-1834）人口模型

- 基本假设：人口的自然增长率是一个常数，或说单位时间内人口增长量与当时人口数成正比。
- 设 t 时刻人口数为x(t)， t=0时 人口增长率为r，则

$$\frac{\Delta x(t)}{x(t)\Delta t} = r \qquad \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

- 取△t→0 $\quad x'(t) = rx(t)$
- 初值问题 $\begin{cases} x'(t) = rx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- 于是：指数增长模型

$$\begin{cases} x'(t) = rx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- 求解
  - 符号演算
  - Matlab
- 模型解

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

- 离散化
  - er ≈1+r (r<<1)
  - 则有 x(t) ≈ x0 (1 +r)t

l10.m

模型二：阻滞增长模型

Logistic模型

- 模型假设：增长率 r 是人口x(t)的线性函数
- $r(x)=r-sx$，（s、r>0 ）
- 设最大人口容量（自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量）为 x_m
- $r(x_m)=0$
- 有 $$r(t)=r(1-\frac{x}{x_m})$$
- 模型为 $$\begin{cases} x'(t)=r(1-\frac{x}{x_m})x \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

- 于是：阻滞增长模型

Logistic模型

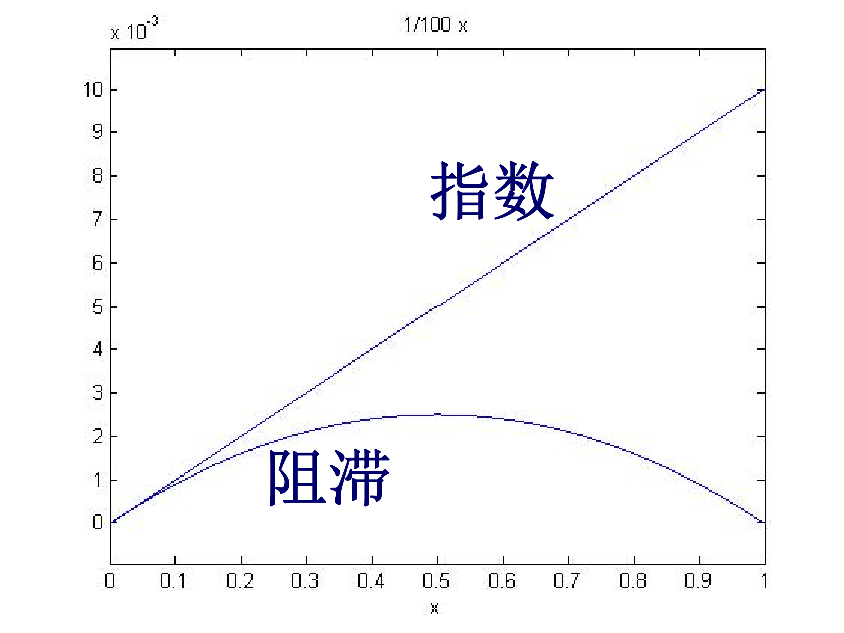
$$\begin{cases} x'(t) = r(1 - \dfrac{x}{x_m})x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

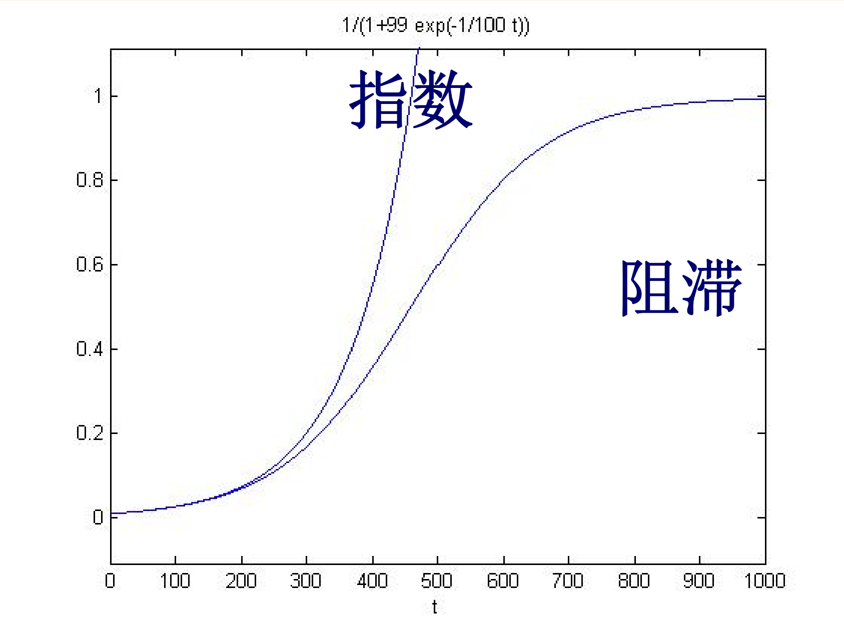
- 求解

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\dfrac{x_m}{x_0} - 1)e^{-rt}}$$

l06.m

- 图示





- 求解

l10.m

- 参数估计
- 统计方法——最小二乘法
  - 参数 r 或 r，x_m
  - Matlab编程
- 例：人口数据（单位~百万）

1961	1962	1963	……	2000	2001	2002
672.78	685.88	700.22	……	1282.5	1292.6	1302.3

- 第六次全国人口普查：2011年4月
  - 1,370,536,875人

l11.m

END

经济模型与Matlab应用

Matlab图形功能

一、平面曲线图形

1、数值绘图

❖ 基本命令：绘制平面曲线图

纵轴

$\boxed{\text{plot(x,y)}}$

横轴

❖例：

y=x sin x

plot(x,y)

t01.m

命令格式

- 定义自变量X的取值向量

```
x=[……]

x=a:t:b

x=linspace(a, b ,n)
```

- 定义函数Y的取值向量

```
y=[……]

y=f( x)
```

- 命令：给出平面曲线图

```
plot(x)

plot(x,y)
```

- 例：

x=-20:0.1:20

y=x sin x

t01.m

2、线型和颜色

plot(x,y, ’option’)

符号	颜色
y	黄色
m	紫红
c	青色
r	红色
g	绿色
b	蓝色
w	白色
k	黑色

符号	线型
-	实线
:	点线
-.	点划线
--	虚线

线型：点

.	°	x	+	*
^	>	<	v	
s	d	p	h	

例：x=linspace(-2*pi,2*pi,30);
y=x sin x   plot(x,y, ’r*’)

t02.m

3、函数绘图

fplot(f,[a,b])

ezplot(f)

ezplot(f,[a,b])

注：符号

选项

隐函数

例：

画幂函数　y=x^k　　k=1, 2 , 3 , 4 的图形

y=sin(x)/x

t03.m

4、标记

xlabel(‘x轴’)	x轴加标志	ylabel(‘y轴’)	y轴加标志
title(‘f曲线图’)	加图名	axis([x1 x2 y1 y2])	数轴范围
gtext(‘s')	放置字符串		

例：

```
x=-20:0.1:20;
y=x.*sin(x);
plot(x,y)
title('平面曲线图')
xlabel('x轴')
ylabel(‘y轴’ )
gtext('x.*sin(x)')
```

t04.m

5、多图形

❖ 同一窗口多次叠绘

w=[f;g];plot(x,w)		plot(x,y,x,z…)	
hold on	保持图形	Hold off	关闭
clf	删除图形	pause	暂停

例：

x=linspace(0,5,30);

y=e^x+20 (蓝色实线)

z=2x^3+3x+1 (红色*线)

w=100cos(x) 紫色+线)

t05.m

❖ 指定图形窗口绘图

figure	图形窗口

❖ 例：

t06.m

二、空间曲线

定义参数向量t;

定义参数方程:

x=x(t);

y=y(t);

z=z(t);

用函数绘图

```
t=……
Plot3(x(t),y(t),z(t))
```

例: 项链

t08.m

三、空间曲面

1、数值绘图

基本指令

surf(x,y,z)	mesh(x,y,z)

例: 旋转抛物面

```
x=-5:0.5:5;
y=-10:1:10;
z=x.^2+y.^2;
surf(x,y,z) ？
```

t09.m

❖命令格式

建立由自变量x 向量和y向量构成的网格点

定义曲面函数： z=z(x,y)

用绘图函数绘制曲面图形

[x,y]=meshgrid(a:t:b)	[x,y]=meshgrid(x,y)
surf(x,y,z)	mesh(x,y,z)

例: 旋转抛物面

```
[x,y]=meshgrid(-5:0.5:5);
z=x.^2+y.^2;
```

❖ 网格点?

[x,y]=meshgrid(a:t:b)　　[x,y]=meshgrid(x,y)

例：[x,y]=meshgrid(0:1:5)

❖ 另

surf(z)	mesh(z)

例:

```
x=[1 2 3 4;1 2 4 8;1 3 6 9]
mesh(x)
y=peaks    %生成一个49阶的高斯分布方阵
surf(y)
```

t10.m

2、修饰

shading interp	去掉网格
axis equal	等轴
axis square	方形
axis off	无刻度
hidden off	透视

- 例

t11.m

3、颜色

控制节点

❖ 例

原理	surf(x,y,z,t)
定义色类	colormap ( )
选项	jet hot cool hsv gray copper pink bone flag lines spring summer autumn winter

t12.m

t13.m

4、函数绘图

ezsurf(z)	ezmesh(z)

❖ 例:

```
z=sqrt(x^2+y^2-1)
ezsurf(z)
```

t16.m

四、程序做图

例: 旋转抛物面　　$z=x^2+y^2$

```
n=30;
for i=0:1/n:1
    k=k+1;
    x(k,:)=linspace(-sqrt(i),sqrt(i),2*n+1);
    y(k,:)=real(sqrt(i-x(k,:).^2));
    z(k,:)=ones(1,2*n+1)*i;
end
x=[x -x];y=[y -y];
z=[z z];
surf(x,y,z)
```

t09_.m

四、特殊图

❖ 例tt :球面

```
sphere(30)
axis  equal
shading intern
```

❖ 例tt1 :极坐标

```
t=0:0.02:2*pi;
polar(t,cos(2*t))
polar(t,2*(1+cos(t)))
```

❖ 例tt2 :旋转面

```
z=0:20;
R=(60*z).^(1/2)
[x,y,z]=cylinder(R,40)
mesh(x,y,z)
```

❖ 例 :teapotdemo

END

经济模型与Matlab应用

第六讲 线性规划模型

一、数学规划模型

1、规划模型的一般形式

- 例1：选址问题
- 某公司有6个建筑工地，位置坐标为(a_i, b_i)（单位：公里），水泥日用量r_i（单位：吨）

i	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
r	3	5	4	7	6	11

- 假设：料场和工地之间有直线道路
- （1）现有2料场，位于A(5, 1), B(2, 7), 记(x_j, y_j), j=1, 2, 日储量q_j各有20吨。
- 目标：制定每天的供应计划，即从A，B两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨公里数最小。

❖ 解:

◆ 设(x_j,y_j) 表示 n 个料场的位置坐标, w_{ij} 表示第 j 料场向第 i 施工点的材料运量

❖ 目标函数

料场到施工点距离

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2}$$

运输吨公里数

约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \ge r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} w_{ij} \le q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ w_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

需求

容量

❖ 决策变量?线性规划模型?

- （2）改建两个新料场，需要确定新料场位置(xj,yj)和运量cij，在其它条件不变下使总吨公里数最小。

- 目标 $$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}$$

约束条件
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\ge r_i \quad (i=1,2,\ldots,m)\\ \sum_{i=1}^{m}w_{ij}\le q_j \quad (j=1,2,\ldots,n)\\ w_{ij}\ge 0\end{cases}$$

- 决策变量? w_{ij}, (x_j,y_j)~16维

- 线性规划模型? 非线性规划模型

Mathematic Modeling

- 规划模型的一般形式
- 决策变量

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- 目标函数

$$\text{Min } Z = f(x)$$

- 约束条件

$$\text{s.t } x \in A \ (\subset R^n)$$

- 约束条件 $x \in A$ 一般用等式或不等式方程表示

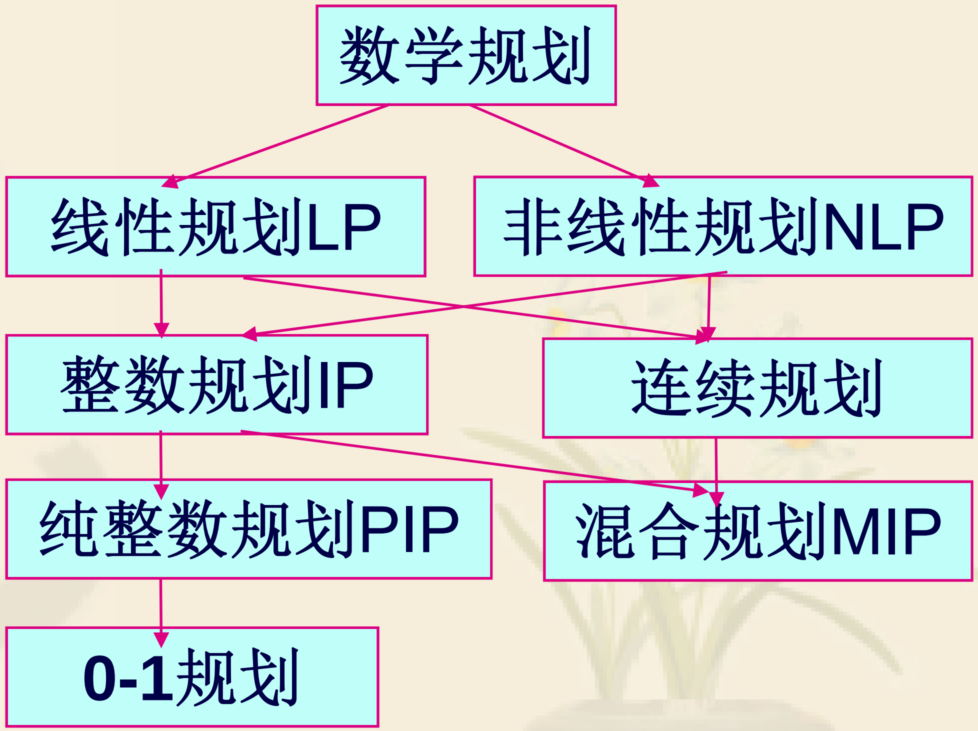
$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l$$

- 无约束条件

2、数学规划类型

- 划分：
  - 表达式
  - 变量取值



❖ 线性规划

◆ 目标函数：决策变量的线性函数 ——代数和数乘

约束条件：决策变量的线性等式或不等式

◆ 线性规划的一般形式

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$st\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0\ ,\ \ \mathrm{i} = 1,2,\cdots,\mathrm{n} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\min F = CX$$

$$st:\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$A = (a_{ij})_{mn}$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

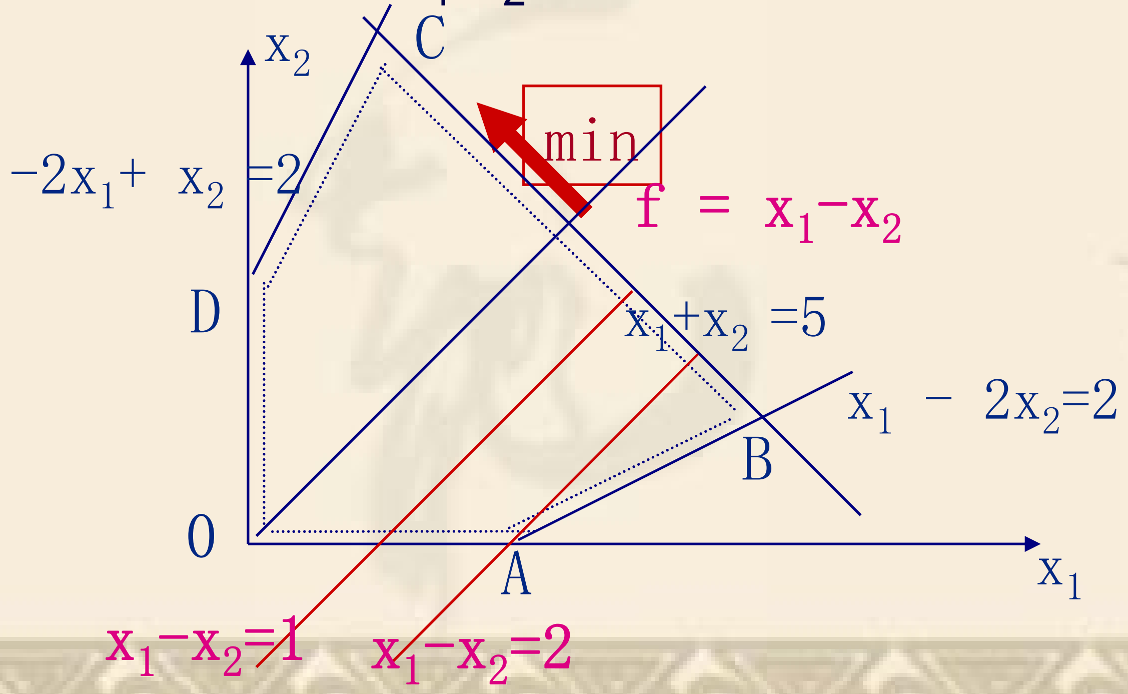
二、线性规划求解方法

- 图解法: 二元
- 单纯形法,灵敏度分析: 20世纪
- 大型优化算法：Lipsol法
- 数学软件
  - Matlab
    - ……
  - Lindo Lingo : 解规划问题的数学软件

1、图解法——二元

例 $\min f = x_1 - x_2$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



- 概念:可行解

  可行基

- 在图中可以看出
- C(1, 4)
- ∴ $\min f = -3$

  $x^* = C = (1, 4)$

- 另: $\min f = x_1 + x_2$

2、线性规划：Matlab求解

❖线性规划

$$\min\ f^T x$$
$$Ax \le b$$

f
x
A
b

❖基本格式

$\boxed{\text{x=linprog(f,A,b)}}$

❖例 $\min f = x_1 - x_2$

s.t: $-2x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 - 2x_2 \le 2$

$x_1 + x_2 \le 5$

```
f=[1 -1];
A=[-2 1
    1 -2
    1 1];
b=[2  2  5];
x=linprog(f,A,b)
```

l01.m

相关命令

❖线性规划

$$\min\ f^T x$$
$$Ax \le b$$
$$Aeq \cdot x = beq$$
$$lb \le x \le ub$$

f	Aeq
x	beq
A	lb
b	ub

❖格式

[x,fval,exitflag,output,lambda]

基本　目标　优化信息　退出条件　拉格朗日乘子

=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)

基本　等式约束　变量上下界　初值　指定优化参数

[x,fval] =linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

❖例

$$\min f = -5x_1 - 4x_2 - 6x_3$$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

```
f=[-5 -4 -6];
A=[1 -1 1
      3 2 4
     3 2 0];
b=[20 42 30];
lb=zeros(3,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,[ ],[ ],lb)
```

l02.m

l03.m
l04.m

❖解例1：选址问题

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\ge r_i \quad (i=1,2,\dots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} w_{ij}\le q_j \quad (j=1,2,\dots,n)\\ w_{ij}\ge 0\end{cases}$$

❖ 其中

i	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
r	3	5	4	7	6	11

j	A	B
x	5	2
y	1	7
q	20	20

❖ 注：wij

三、案例分析

1、费用问题

- 有一园丁需要购买肥料 107公斤,而现在市场上有两种包装的肥料,一种是每袋 35公斤,价格为 14元,另一种是每袋 24公斤,价格为 12元.
- 问:园丁在满足需要的情况下,怎样才能使花费最节约?
- 解:决策变量?
  - 目标?
  - 约束?

- 设:两种包装分别 购买x1,x2 公斤
- Min y =14 x1+12 x2
- s.t 35 x1+24 x2≥107
- x1、x2 ≥0， 整数

整数规划

- 整数：决策变量
- 算法：分支定界法……
- 求解：Lingo……

- 模型

$$\min y = 14x_1 + 12x_2$$
$$st \quad 35x_1 + 24x_2 \geq 107$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$

1→ 35公斤, 14元
2→ 24公斤, 12元
需107公斤

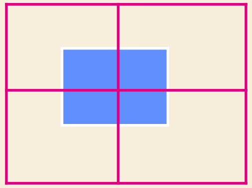
- 求解
  - 3袋+ 1袋？
  - Matlab函数
    - 3.0571
    - 0.0000
  - 程序
    - 循环搜索
    - 1 3

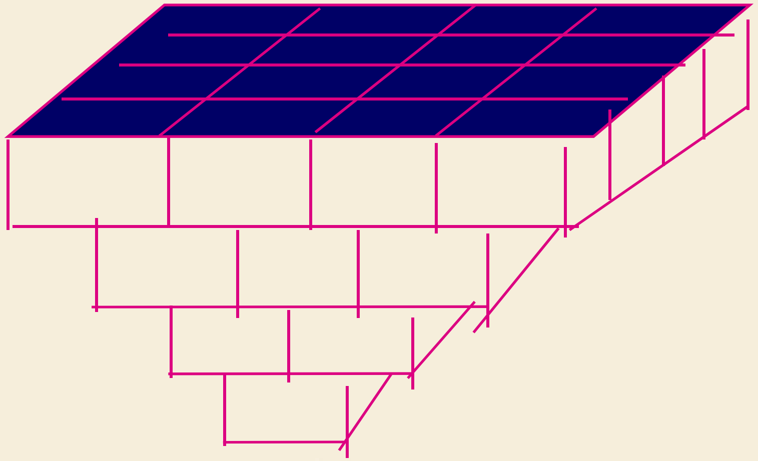
```
smin=1000;
for i=1:4
    for j=1:5
        s=14*i+14*j;
        if 35*i+24*j>=107&smin>s
            smin=s;
            x=[i,j];
        end
    end
end
x， smin
```

l05.m

2、矿井开采

❖ 正方形矿井:四层开采





1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

17	18	19
20	21	22
23	24	25

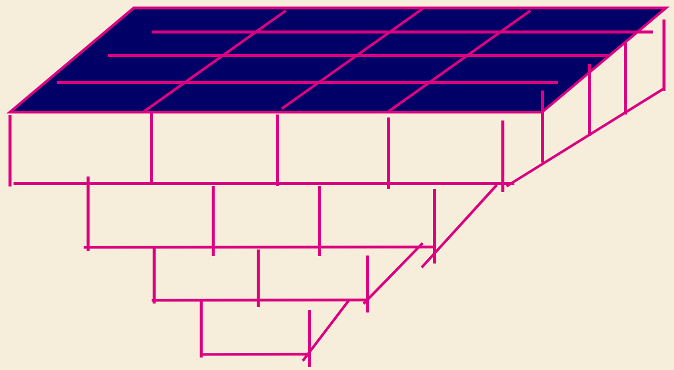
26	27
28	29

30

- 每块的开采价值为 Ci (可能为负)
- 30个矿井,如何开采可获利最大?
- 条件:开下一个,上四个均需开采

❖ 解:

◆ 令: $X_i=\begin{cases}1 & \text{开}\\ 0 & \text{不开}\end{cases}$



■ 则:

$$\max y=\sum_{i=1}^{30} c_i x_i$$

$$st\begin{cases}-x_1+x_{17}\le 0\\ -x_2+x_{17}\le 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -x_{29}+x_{30}\le 0\\ x_1,x_2,\ldots,x_{30}=0,1\end{cases}$$

56个方程

0-1规划

0-1规划： Matlab求解

```
[x,fval] =bintprog(f,A,b,Aeq,beq)
```

$$\min y = \sum_{i=1}^{30} c_i x_i$$

$$st \begin{cases} -x_1 + x_{17} \le 0 \\ -x_2 + x_{17} \le 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_{29} + x_{30} \le 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_{30} = 0,1 \end{cases}$$

- 求解
  - c
  - A
  - bintprog

l06.m

3、合理下料

- 某车间有长度为 180cm 的钢管(数量充分多),今要将其截为三种不同长度,长度分别为 70cm 的管料100根, 而 52cm,35cm 的管料分别不得少于 150根,120根。
  - 问：应如何下料，才能最省？
- 解：所有可能的截法共有 8种，如下表：

截法		一	二	三	四	五	六	七	八	需求量
长度	70	2	1	1	1	0	0	0	0	100
	52	0	2	1	0	3	2	1	0	150
	35	1	0	1	3	0	2	3	5	120
余料		5	6	23	5	23	6	23	5	

- 设：第 i 种下料方式进行 xi 次
- 目标：余料最省？
- 用料最少？

$$\min y = \sum_{i=1}^{8} x_i$$

$$st\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 150 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geq 120 \\ x_1, x_2, \ldots, x_8 \geq 0, 1, \text{int} \end{cases}$$

Matlab求解

- 下料方式
  - 180→ 70 52 35
- 求解
  - linprog
  - 分支定界

- 求解：结果
- x1=0, x2=0, x3=34, x4=0, x5=10 , x6=43, x7=0, x8=0
- fval=87

l07.m

4、生产安排

- 某单位生产的产品由多个部件组成，并且每个部件都需要工人、技术人员协同生产。
- 已知生产每个部件需要的设备、人数时间及其他部件如表
- 在均衡连续生产条件下安排生产。

项目 \ 部件	A1	A2	A3	A4
工人	5	8	10	3
技术员	5	2	1	1
设　备	2	13	4	2
时　间	4	3	5	2
需其它部件数	A2(3)A3(2)	A3(1)A4(5)	A4(4)	

项目 \ 部件	A1	A2	A3	A4
工人	5	8	10	3
技术员	5	2	1	1
设　备	2	13	4	2
时　间	4	3	5	2
需其它部件数	A2(3)A3(2)	A3(1)A4(5)	A4(4)	

分析

- 难点: 目标不明确
  - 部件数？——中间产品
  - 解决——均衡连续生产
- 决策变量
  - 工人数……？
  - 生产各部件资源组数 ni
- 目标：
  - 均衡连续生产的最小生产规模

解

	A1	A2	A3	A4
时　间	4	3	5	2
	A2(3)A3(2)	A3(1)A4(5)	A4(4)	

- 令：

生产各部件资源组数为ni

- 则：

$$\min n_1$$

$$s.t\begin{cases}\frac{1}{2}n_4=\frac{4}{5}n_3+\frac{5}{3}n_2\\ \frac{1}{5}n_3=\frac{1}{3}n_2+\frac{2}{4}n_1\\ \frac{1}{3}n_2=\frac{3}{4}n_1\\ n_1\geq 1,\text{整数}\end{cases}$$

- 求解
- Matlab：

  n1=4，n2=9，n3=25，n4=70

所需生产资源：

工人:4×5+8×9+10×25+3×70=552

技术员:5×4+2×9+25+70=133

设备: 2×4+13×9+4×25+2×70=365

一个生产周期为4，3，5，2的最小公倍数 60小时。

l08.m

END

经济模型与Matlab应用

概 率 模 型

Email:syunl@126.com

概率统计回顾

随机事件 A　　概率 $P(A)$

- 随机变量 ξ 与概率

$$P(\xi = x_i) = p_i \quad \sum_{i=1} p_i = 1$$

$$P(a \le \xi \le b) = \int_a^b f(x) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- 分布函数

$$F(x) = P(\xi \le x) \quad F'(x) = f(x)$$

- 数字特征

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi)^2 - (E\xi)^2$$

常见分布

- 离散型

二项分布　X ~ B (n , p)　$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

泊松分布　$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

- 连续型

均匀分布　X ~ U [a , b]　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

指数分布　$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

正态分布　$X \sim N(\mu,\sigma^2):\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$X \sim N(0,1):\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

数理统计

- 描述统计分析

  均值　方差

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

- 参数估计
- 假设检验
- 非参数估计
- 相关分析
- 方差分析
- 聚类分析
- 时间序列分析
- 回归分析
- 因子分析
- …………

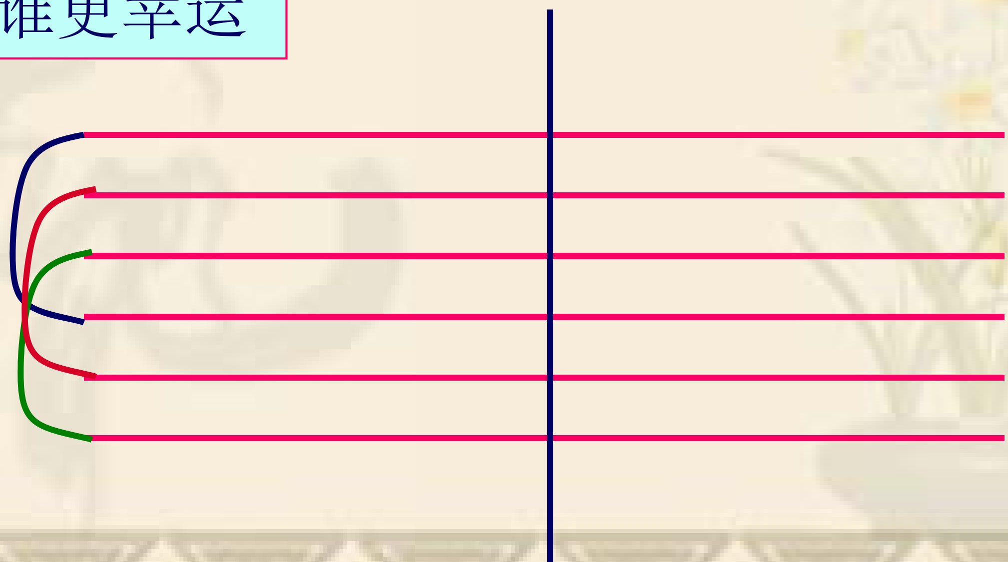
模型1 简单模型

例1：掷骰子

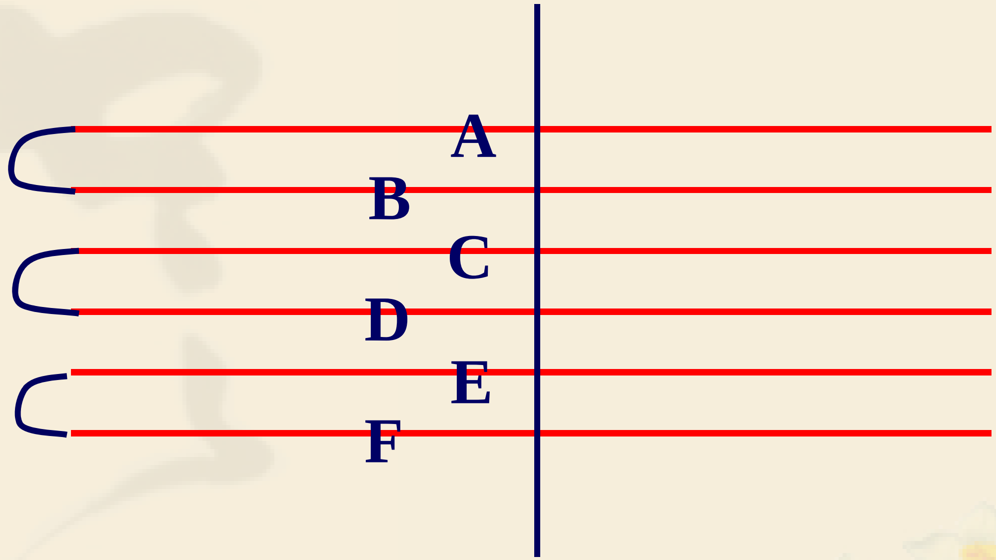
- 某人掷两次， 掷了 10 点
- 另一人再掷两次， 比 10 点大的概率

$$10 \to (5,6), (6,5)\ ,(6,6) \to p = 2\times(\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{12}$$

例2：谁更幸运



谁更幸运



解:

- A → BCDEF → 4 / 5
- C → DEF → 2 / 3
- 概率　p = (4 / 5) ×(2 / 3) ≈ 53 %

模型2 报童的诀窍

问题一：数值运算

- 报童: 100份报纸全卖获利 7 元，买不掉退回， 陪 4 元
- 概率分布为:

售 x (百份)	0	1	2	3	4	5
概率 p(x)	0.05	0.12	0.21	0.25	0.22	0.15

- 问: 订多少份最佳（每日）？

❖卖获利 7 元，买不掉赔 4 元

解:

❖设订Q，需求x

❖则收益函数为

$$y(x)=\begin{cases}\underbrace{7x}_{\text{获利}}+\underbrace{(-4)(Q-x)}_{\text{赔款}} & \underbrace{x}_{\text{需求量}}\le \underbrace{Q}_{\text{购进量}}\\ 7Q & x>Q\end{cases}$$

收入

❖利润期望值为:

$$E(y(x))=\sum_{x=0}^{Q}(11x-4Q)p(x)+7Q\sum_{x=Q+1}^{5}\underbrace{p(x)}_{\text{分布}}$$

❖ 由

售 x (百份)	0	1	2	3	4	5
概率 p(x)	0.05	0.12	0.21	0.25	0.22	0.15

❖ 利润期望值:

$$E(y(x)) = \sum_{x=0}^{Q}(11x - 4Q)\,p(x) + 7Q \sum_{x=Q+1}^{5} p(x)$$

❖ 得:

Q=0 时, E(y(x))=0

Q=1 时, E(y(x))=

(-4×0.05+7×0.12)+7(0.21+0.25+0.22+0.15)=6.45

Q=2 时, E(y(x))=11.58

Q=3 时, E(y(x))=14.4

Q=4 时, E(y(x))=14.47

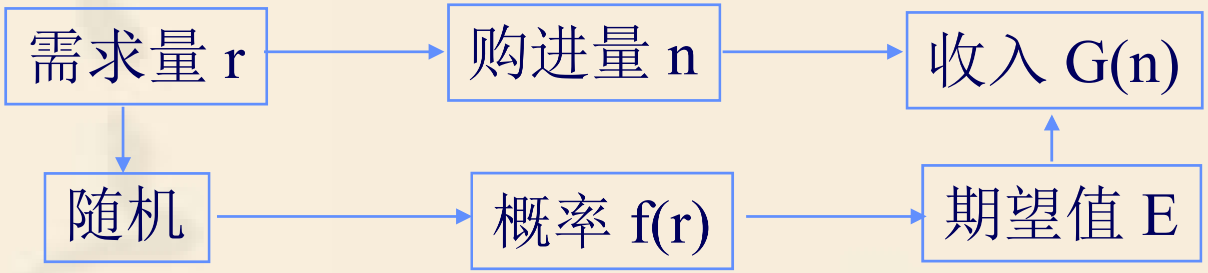
Q=5 时, E(y(x))=12.12

l01.m

❖ 故: 每天订 400 份, 可获利最大

问题二：符号运算

- 报纸： 进价为b， 零售价为a， 退回价为c → a>b>c
- 确定报童销售策略。
- 分析:



- 模型建立:
  - 设 购进 n 份/天 → 目标： 收入最大
  - 需求量为 r (随机变量)，分布为f(r)， 收入为G(n)
  - 则

$$G(n)=\begin{cases}(a-b)n & r\geq n\\(a-b)r-(b-c)(n-r) & r<n\end{cases}$$

收入函数

收入　需求量　购进量

$$G(n)=\begin{cases}(a-b)n & r\ge n\\(a-b)r-(b-c)(n-r) & r<n\end{cases}$$

进价　售价　退回

❖收入期望值：　平均收入

分布

$$EG(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)nf(r)$$

❖r (大) → 连续　→ 概率 f (r) → p (r) 密度

$$EG(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)dr+\int_n^{\infty}(a-b)np(r)dr$$

收入期望值

$$EG(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)dr+\int_n^\infty(a-b)np(r)dr$$
$$=\int_0^n(a-c)rp(r)dr-n\int_0^n(b-c)p(r)dr+n\int_n^\infty(a-b)p(r)dr$$

- 最优化：极值

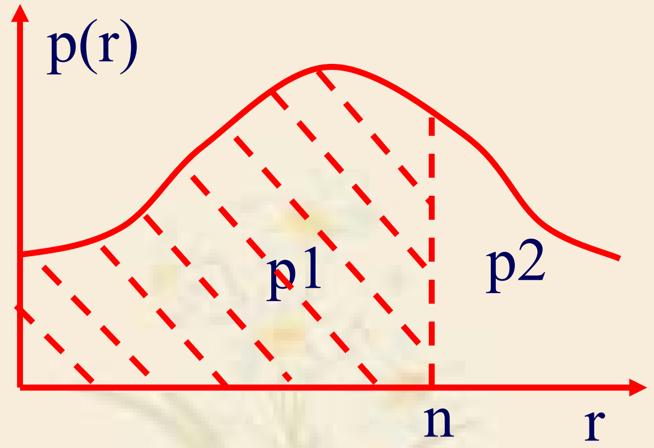
$$\frac{d(EG(n))}{dn}=(a-b)np(n)-\int_0^n(b-c)p(r)dr$$
$$-(a-b)np(n)+\int_n^\infty(a-b)p(r)dr$$
$$=-(b-c)\int_0^n p(r)dr+(a-b)\int_n^\infty p(r)dr$$

- 令: G'(n) = 0 有 $\dfrac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr}=\dfrac{a-b}{b-c}$

$$\frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr} = \frac{a-b}{b-c}$$

$$\because \int_0^\infty p(r)dr = 1 \quad \therefore \int_0^n p(r)dr = \frac{a-b}{a-c} \longrightarrow \text{最优订报量}$$

模型分析



$$p_1 = \int_0^n p(r)dr$$

$$p_2 = \int_n^\infty p(r)dr$$

$$\therefore \frac{p_1}{p_2} = \frac{a-b}{b-c}$$

$a-b$ → 卖出一份赚

$b-c$ → 退回一份赔

$$(a-b)\uparrow \Rightarrow n\uparrow, \quad (b-c)\uparrow \Rightarrow n\downarrow$$

问题三：统计运算

- 若：进价 b =0.3 ，零售价 a =0.5 ，退回价 c =0.05元
- 50天的销售数据：

459, 624, 509, 433, 815, 612, 434, 640, 565, 593,
926, 164, 734, 428, 593, 527, 513, 474, 824, 862,
775, 755, 697, 628, 771, 402, 885, 292, 473, 358,
699, 555, 84, 606, 484, 447, 564, 280, 687, 790,
621, 531, 577, 468, 544, 764, 378, 666, 217, 310

- 确定报童销售策略

Matlab 统计分析

statistics toolbox

1、概率分布

❖ 概率分布函数：概率分布+概率函数(x,a,b)

概率函数

pdf(x,mu,sigma)	概率密度	cdf(x,mu,sigma)	概率分布
inv(p,mu,sigma)	逆概率分布	stat (mu,sigma)	均值与方差
rnd(mu,sigma,m,n)	随机数生成		

概率分布

unif	均匀分布	bino	二项分布	poiss	帕松分布
norm	正态分布	exp	指数分布	t	t分布
chi2	分布	F	F分布		

例：

- 二项分布 $b(k;n,p)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$
  - b(K:10,0.3)
  - x=0:10 binopdf(x,10,0.3)
    binocdf(x,10,0.3) binoinv(0.5,10,0.3)
    [m,s]=binostat(10,0.3) binornd(10,0.3,2,5)

- 正态分布 $N(\mu,\sigma^2):F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$
  - N(0,1)
  - normpdf(x,0,1) normcdf(x,0,1)
    norminv(0.3,0,1) [m,s]=normstat(0,1)
    normrnd(0,1,2,5)

l02.m

2、描述统计

- 数字特征
- 描述集中趋势、离散趋势、分布特征等

mean(x)	均值	median(x)	中位数
var(x)	方差	std(x)	标准差
max(x)	最大	min(x)	最小
range(x)	极差		
kurtosis(x)	峰度	skewness(x)	偏度
corrcoef(x)	相关系数	cov(x)	协方差矩阵

例：

- 生成10x10 个正态随机数
- x=normrnd(0,10,10,10);
- mean(x),median(x)
- var(x),std(x)
- corrcoef(x),cov(x)

l03.m

求解：模型2 —问题3

- 进价 b =0.3， 零售 a =0.5， 退回 c =0.05元
- 50天的销售数据：

459, 624, 509, 433, 815, 612, 434, 640, 565, 593, 926, 164, 734, 428, 593, 527, 513, 474, 824, 862, 775, 755, 697, 628, 771, 402, 885, 292, 473, 358, 699, 555, 84, 606, 484, 447, 564, 280, 687, 790, 621, 531, 577, 468, 544, 764, 378, 666, 217, 310

- 由最优订报时满足

$$\int_0^n p(r)dr = \frac{a-b}{a-c} \longrightarrow n$$

?正态分布

$$\int_0^n p(r)dr = \frac{a-b}{a-c} \longrightarrow \text{n}$$

Matlab程序：l04.m

```
x=[459, ……., 310];
x=x' ;
m=mean(x)
s=std(x)
[h,p]=kstest(x,[x,normcdf(x,m,s)])
norminv((0.5-0.3)/(0.5-0.05),m,s)
```

均值
标准差
K-S检验
分位点

```
MATLAB
m = 560.7400        s = 188.0050
h = 0               p =   0.9920
ans = 534.4738
```

结果：n=535

模型3 轧钢中的浪费

- 轧制钢材两道工序
  - 粗轧(热轧)：胚料
  - 精轧(冷轧)：钢材

随机因素影响

粗轧

⇩

钢材长度正态分布

均值可调整

方差可确定

精轧

⇩

胚料与钢材长度需求可能不同

大于

切掉多余部分

小于

整根报废

问题：如何调整粗轧的均值，使精轧的浪费最小

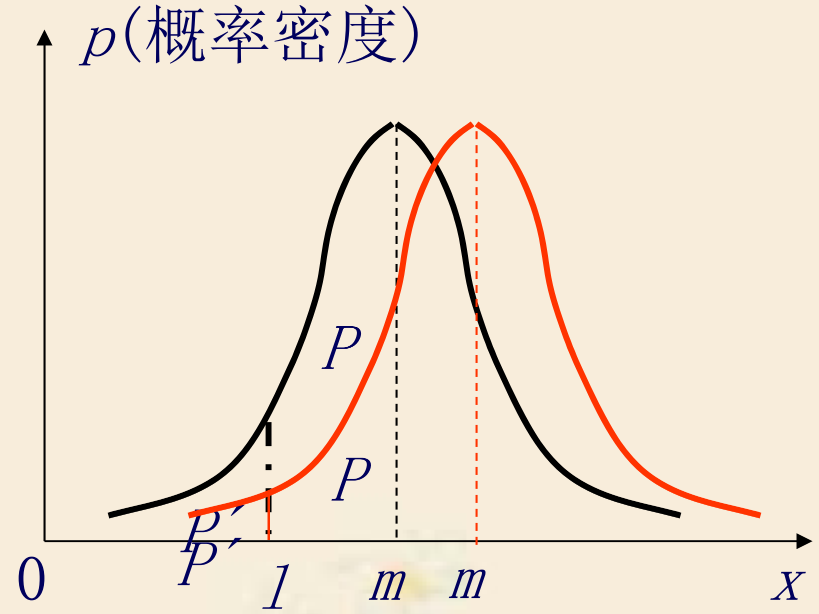
分析

- 钢材：规定长度 l
- 粗轧：胚料长度

均值 方差

$$x \sim N(m, \sigma^2)$$

可调整



- 浪费概率

$$\begin{cases} P = P(x \ge l) & \text{切掉} \\ P' = P(x < l) & \text{报废} \end{cases}$$

$$m \uparrow \Rightarrow P \uparrow, P' \downarrow$$

$$m \downarrow \Rightarrow P \downarrow, P' \uparrow$$

存在最佳的m使总的浪费最小

模型建立

$$\begin{cases} P = P(x \geq l) & \text{切掉} \\ P' = P(x < l) & \text{报废} \end{cases}$$

- 目标函数：浪费

切掉多余部分　　　整根报废

$$W = \int_l^{\infty}(x-l)p(x)dx + \int_{-\infty}^{l} xp(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx - \int_l^{\infty} lp(x)dx$$

规定长

$$= m - lP$$

均值　切掉概率

目标函数：浪费——？

- 一根钢胚平均浪费长度　　$m-lP$　　钢胚？
- 一根钢材平均浪费长度　　粗轧N根得成品材 PN根

$$\frac{mN-lPN}{PN}=\frac{m}{P}-l$$

- 于是得

优化模型

目标　$\min J(m)=\dfrac{m}{P(m)}$　　决策变量　m

其中　$P(m)=\int_l^{\infty}p(x)dx,\ p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$　（1,σ已知）

求解

❖ 模型 $J(m)=\dfrac{m}{P(m)}$

$$P(m)=\int_l^{\infty} p(x)dx$$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \longrightarrow P(m)=\int_{l-m}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz$$

❖ 求极小值 $\dfrac{dJ}{dm}=0$

$$\frac{dJ}{dm}=\frac{P(m)+mP'(m)}{P^2(m)} \longleftarrow P'(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{l-m^2}{2\sigma^2}}$$

求m? ⟶ 难

软件求解

$$\boxed{J(m)=\frac{m}{P(m)}}$$

$$P(m)=\int_l^{\infty}p(x)dx \qquad p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

❖ 例　设 l=2(米), σ=20(厘米)，求 **m** 使浪费最小。

❖ 目标函数

jm.m

```
function f=jm(l,m,sigma)
f=m/(1-normcdf(l,m,sigma)+eps)
```

❖ 画图

l05.m

```
l=2,sigma=0.20
for i=1:100
    m=1.5+i*0.02;   %0,1
    m1(i)=m; f(i)=jm(l,m,sigma);
end
plot(m1,f,'r')
```

软件求解3

❖ 定步长搜索最优解：

l06.m

```
L=2,sigma=0.20,
m0=L/2;
m1=jm(L,m0,sigma);
for m=1:0.0001:4
    if m1>jm(L,m,sigma)
        m1=jm(L,m,sigma);
        m0=m;
    end
end
m0
```

最优解
2.3562

END

数学建模 与 数学实验

统计模型

Email:sunyl@swufe.edu.cn

模型一 牙膏的销售量

- 确定关系：
  - 牙膏销售量——价格、广告投入
- 内部规律复杂——→数据统计分析
  - 常用模型——→回归模型—×→数学原理——→软件
- 30个销售周期数据：
  - 销售量、价格、广告费用、同类产品均价

销售周期	公司价 (元)	它厂价 (元)	广告(百万元)	价差(元)	销售量(百万支)
1	3.85	3.80	5.50	-0.05	7.38
2	3.75	4.00	6.75	0.25	8.51
…	…	…	…	…	…
29	3.80	3.85	5.80	0.05	7.93
30	3.70	4.25	6.80	0.55	9.26

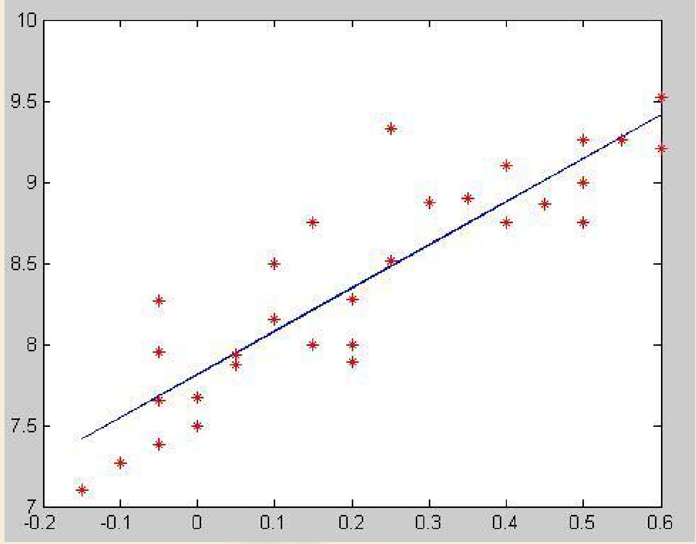
分析

- y ~公司牙膏销售量　　被解释变量（因变量）
- x1~其它厂家与本公司价格差
- x2~公司广告费用

解释变量

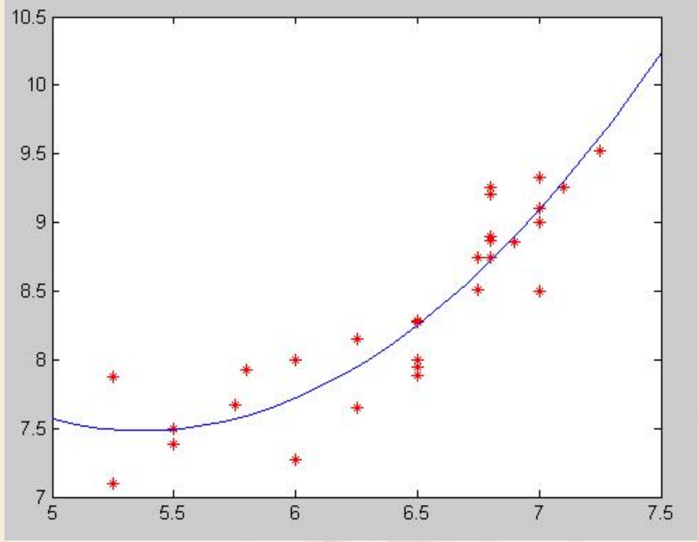
(回归变量, 自变量)

y与x1



$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

y与 x2



$$y = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 + \varepsilon$$

t1.m

t2.m

t5.m

Matlab 统计分析

statistics toolbox

3、回归分析

回归系数

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \varepsilon$$

随机误差：正态分布均值为零

系数估计值　置信区间　残差　置信区间　被解释变量：列　解释变量：矩阵

[b , bint , r , rint , stats] = regress(y , X , alpha)

检验统计量：R^2,F,p　显著性水平：0.05

rcoplot(r,rint)　残差及其置信区间作图

- MATLAB7.0版本 s增加一个统计量: 剩余方差s^2

于是

- 考察
  - y与x1 $$y=\beta_0+\beta_1x_1+\varepsilon$$
  - y与 x2 $$y=\beta_0+\beta_1x_2+\beta_2x_2^2+\varepsilon$$
- 有

  t4.m

- 结果

模型

❖ 多元回归模型

$$\boxed{y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon}$$

$$\to \beta_0,\ \ \beta_1,\ \ \beta_2,\ \ \beta_3$$

程序

```
t1
x=[ones(size(x1)),x1,x2,x2.^2];
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,x)
```

MATLAB

t3.m

结果分析

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
R^2=0.9054 F=82.9409 p=0.0000		

- 即： $\hat{y} = 17.32 + 1.31x_1 - 3.70x_2 + 0.35x_2^2$
- 显著性 ： 整体显著
  - y的90.54%可由模型确定、 F远超过F检验的临界值、 p远小于α=0.05
- x_2 ： β_2置信区间包含零点——不显著；β_3 显著

销售量预测

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2$$

价差x_1=它厂价x_3-公司价x_4

控制x1

估计x_3，调整x_4

预测y

- 控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=650万元

lin.m

- 得：$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 = 8.2933$ (百万支)

销售量预测区间为 [7.8230，8.7636]（置信度95%）？

上限用作库存管理的目标值

- 若估计x3=3.9，设定x4=3.7

可以95%的把握知道销售额在 7.8320×3.7≈ 29（百万元）以上

模型改进

- x_1和x_2对y的影响有交互作用 交互项

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_2^2+\beta_4x_1x_2+\varepsilon$$

t6.m

参数	估计值	置信区间	估计值	置信区间
β_0	17.3244	5.7282 28.9206	29.1133	13.7013 44.5252
β_1	1.3070	0.6829 1.9311	11.1342	1.9778 20.2906
β_2	-3.6956	-7.4989 0.1077	-7.6080	-12.6932 -2.5228
β_3	0.3486	0.0379 0.6594	0.6712	0.2538 1.0887
β_4			-1.4777	-2.8518 -0.1037
R^2=0.9054 F=82.9409 p=0.0000			R^2=0.9209 F=72.7771 p=0.0000	

比较：置信区间、R^2

比较：销售量预测

- 控制价格差x1=0.2元，投入广告费x2=6.5百万元

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2$$

$\hat{y} = 8.2933$ (百万支)　区间 [7.8230，8.7636]

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 + \hat{\beta}_4 x_1 x_2$$

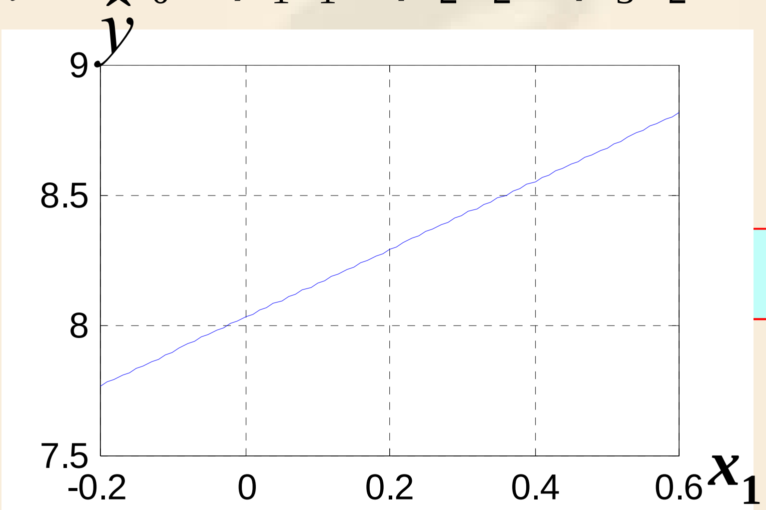
$\hat{y} = 8.3272$ (百万支)　区间 [7.8953，8.7592]

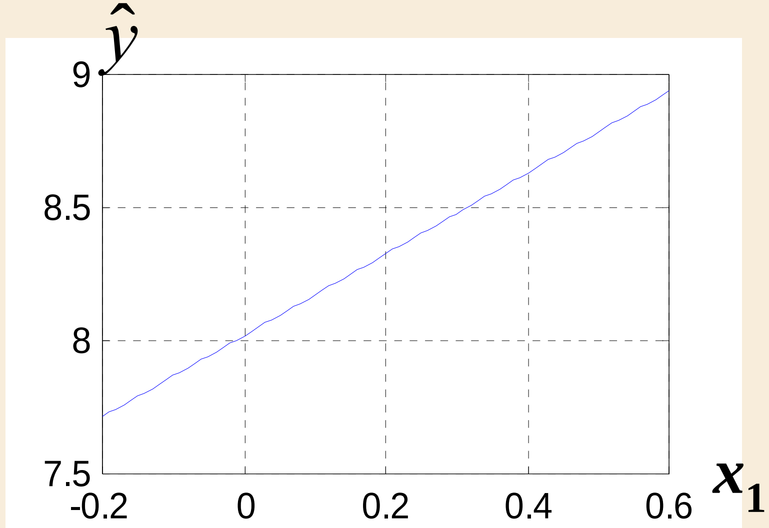
$\hat{y}$ 略有增加　　预测区间长度更短

比较：两模型y与x1,x2关系

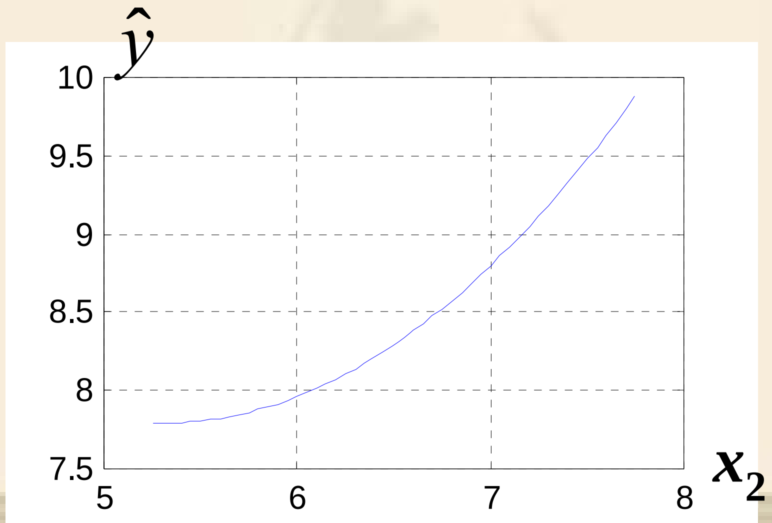
$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2$$

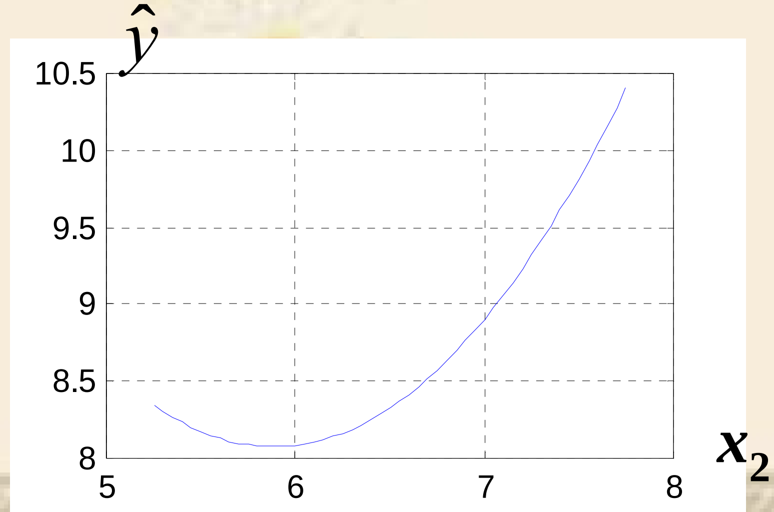
$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$





x_2=6.5





x_1=0.2

讨论：交互作用影响

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$

- 价格差 x1=0.1 $\quad \hat{y}\big|_{x_1=0.1}=30.2267-7.7558x_2+0.6712x_2^2$
- 价格差 x1=0.3 $\quad \hat{y}\big|_{x_1=0.3}=32.4535-8.0513x_2+0.6712x_2^2$

x1 $\quad x_2<7.5357 \Rightarrow \hat{y}\big|_{x_1=0.3}>\hat{y}\big|_{x_1=0.1}$

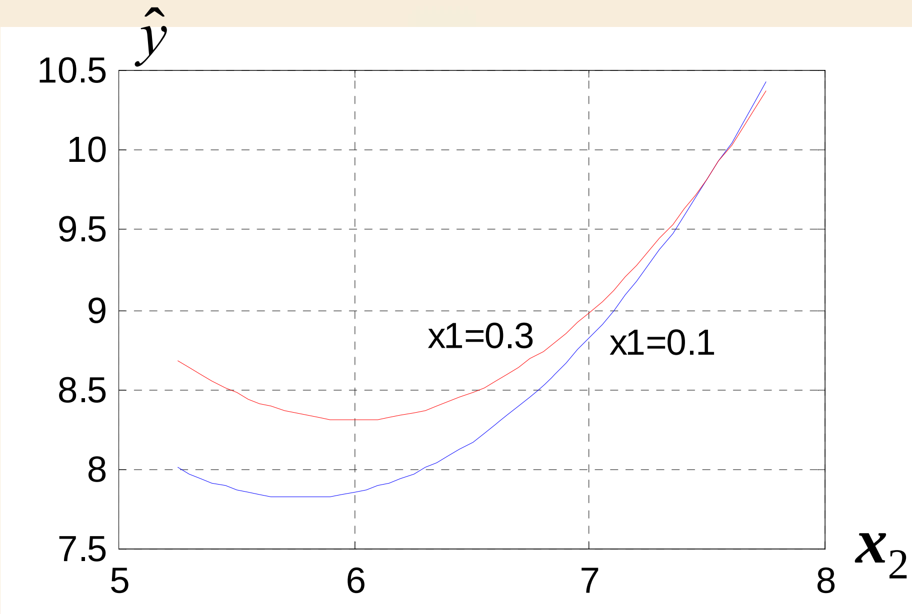
价格优势→y↑

x2 $\quad$ 广告投入→y↑

（x_2大于6百万元）

价格差较小时
增加的速率更大

价格差较小→广告作用大



完全二次多项式模型

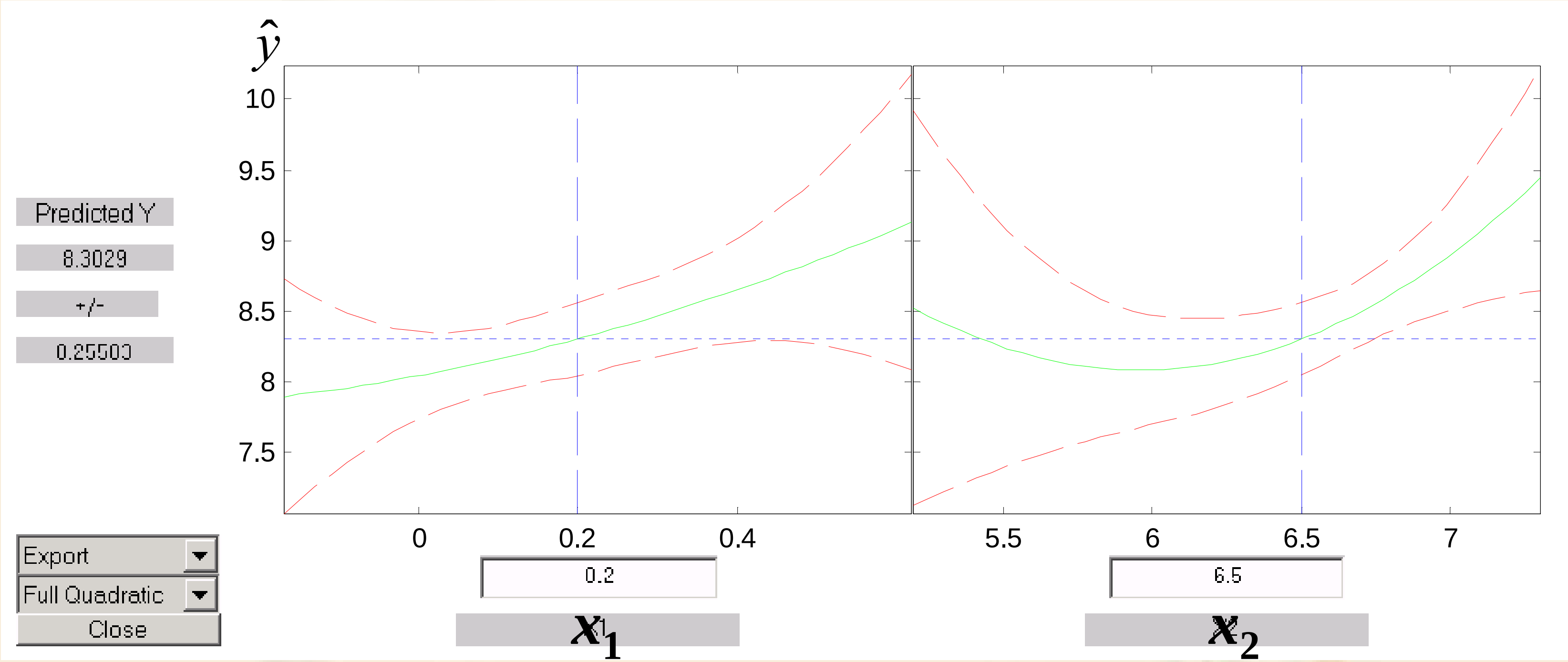
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \varepsilon$$

- **MATLAB**
  - 相应面分析

```
Rstool(x,y,'model',alpha,'xname','yname')
```

linear	线性项
interaction	常数项、线性项、交叉项
quadratic	交叉项、平方项
purequadratic	常数项、线性项、平方项

❖相应面分析 rstool(x(:,2:3),y)



❖all: beta rmse residuals

❖ 系数 均方差 残差

Export： $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5)$

评注

- 回归模型
  - 数据、经验、图形
  - ——→回归变量、函数形式
- Matlab求解
  - 统计分析： R^2、F、p
  - 回归系数置信区间包含0点——→改进
  - 添加二次项、交叉项……

模型二 软件开发人员的薪金

- 薪金——资历、岗位、学历
- 建立模型：分析人事策略的合理性，作为新聘用人员薪金的参考

46名软件开发人员的档案资料

编号	薪金	资历	管理	教育
01	13876	1	1	1
02	11608	1	0	3
…	…	…	…	…
45	19207	17	0	2
46	19346	20	0	1

资历~ 从事专业工作的年数；管理~ 1=管理人员，0=非管理人员；教育~ 1=中学，2=大学，3=更高程度

模型假设

- 假设： y~ 薪金，x1 ~资历（年）
  x2 = 1~ 管理人员，0~ 非管理人员

教育= 1 ~中学 2 ~大学 3 ~更高？

$$x_3 = \begin{cases} 1, & \text{中学} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$x_4 = \begin{cases} 1, & \text{大学} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

中学：x3=1, x4=0 ；
大学：x3=0, x4=1；
更高：x3=0, x4=0

- 假设： 资历每加一年薪金的增长是常数；
  管理、教育、资历之间无交互作用

模型：线性回归

$$\boxed{y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \varepsilon}$$

回归系数 随机误差

模型求解

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \varepsilon$$

- x_1~资历(年)
- x_2 = 1~ 管理，0~ 非管理
- 中学：x_3=1, x_4=0;大学：x_3=0, x_4=1; 更高：x_3=0, x_4=0

Matlab程序: xinjindata.m xinjin.m

- xinjindata.m：

  序号、工资y、资历x_1、管理x_2、学历、x_3、x_4、*xx*

- xinjin.m ：

```
M=dlmread('xinjindata.m');
x1=M(:,3);x2=M(:,4);x3=M(:,6);x4=M(:,7);y=M(:,2);
x=[ones(size(x1)) x1 x2 x3 x4 ]
[b,bi,r,ri,s]=regress(y,x)
```

结果

参数	估计值	置信区间
a_0	11032	[10258 11807]
a_1	546	[484 608]
a_2	6883	[6248 7517]
a_3	-2994	[-3826 -2162]
a_4	148	[-636 931]
R^2=0.957 F=226 p=0.000		

- R^2,F, p → 模型整体上可用
  - 资历增加1年薪金增长546
  - 管理人员薪金多6883
  - 中学程度薪金比更高的少2994
  - 大学程度薪金比更高的多148
- a_4置信区间包含零点 →解释不可靠!

结果分析

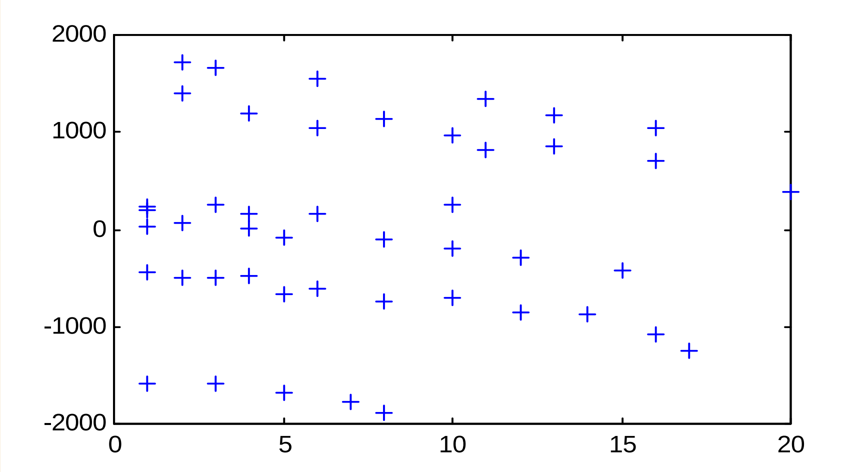
❖ 残差分析法

Matlab: xinjin2.m

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3 + \hat{a}_4 x_4$$

残差 $\varepsilon = y - \hat{y}$

❖ ε 与资历x_1的关系



残差大概分成3个水平

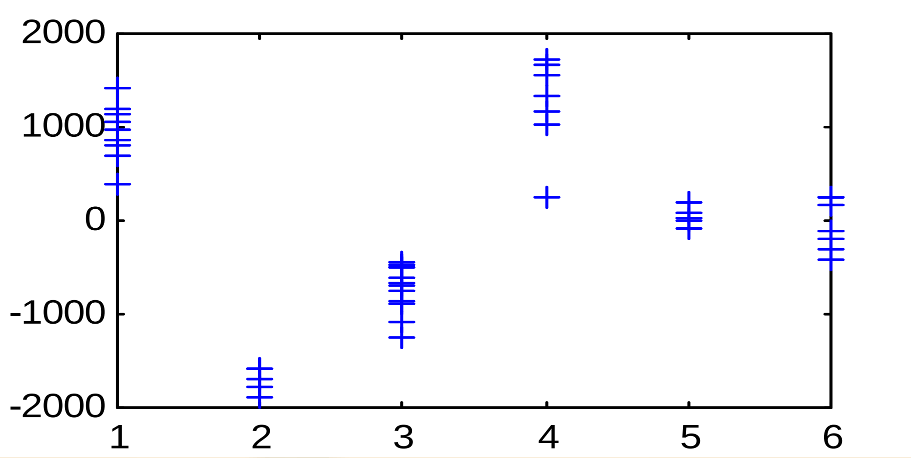
6种管理—教育组合混在一起，未正确反映

残差分析

❖ ε 与管理x_2—教育x_3、x_4的关系

管理与教育的组合

组合	1	2	3	4	5	6
管理	0	1	0	1	0	1
教育	1	1	2	2	3	3



残差全为正，或全为负，管理—教育组合处理不当

应在模型中增加管理x_2与教育x_3, x_4的交互项

模型改进

- 增加管理x_2与教育x_3, x_4的交互项

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_2x_3 + a_6x_2x_4 + \varepsilon$$

参数	估计值	置信区间
a_0	11204	[11044 11363]
a_1	497	[486 508]
a_2	7048	[6841 7255]
a_3	-1727	[-1939 -1514]
a_4	-348	[-545 –152]
a_5	-3071	[-3372 -2769]
a_6	1836	[1571 2101]
R^2=0.999 F=554 p=0.000		

Matlab:

xinjin3.m

R^2,F有改进

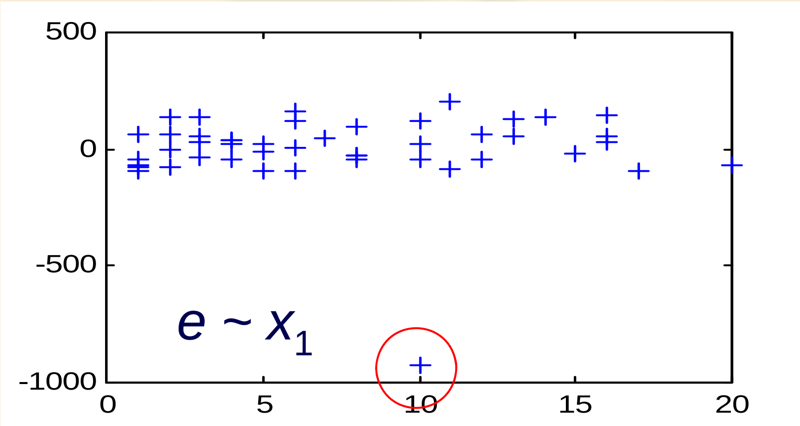
回归系数置信区间
→不含零点

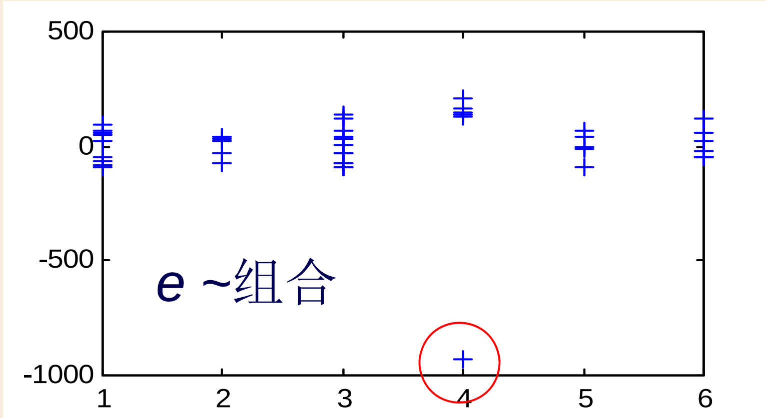
模型可用

残差分析

Matlab:

xinjin4.m





- 消除了不正常现象
- 异常数据(33号)⟶去掉

模型改进

❖ 去掉异常数据后的结果

xinjindata2.m

xinjin1.m

参数	估计值	置信区间
a_0	11200	[11139 11261]
a_1	498	[494 503]
a_2	7041	[6962 7120]
a_3	-1737	[-1818 -1656]
a_4	-356	[-431 –281]
a_5	-3056	[-3171 –2942]
a_6	1997	[1894 2100]
R^2= 0.9998 F=36701 p=0.0000		

R^2： 0.957

$\rightarrow$ 0.999

$\rightarrow$ 0.9998

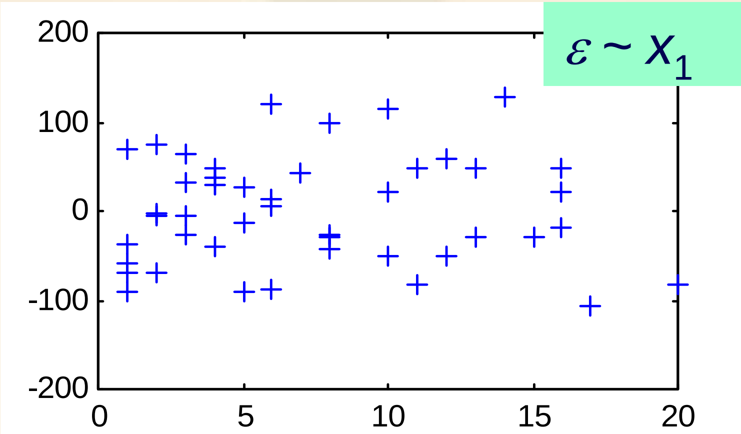
F： 226

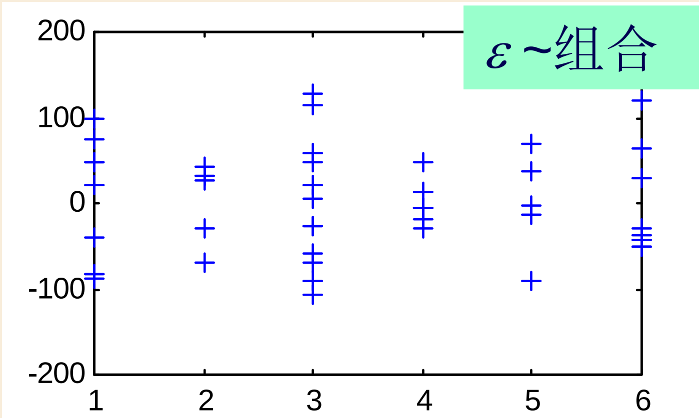
$\rightarrow$ 554

$\rightarrow$ 36701

置信区间长度更短

残差分析





- 残差图正常
- 模型的结果⟶可以应用

xinjin2.m

模型应用

$$\hat{y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1x_1+\hat{a}_2x_2+\hat{a}_3x_3+\hat{a}_4x_4+\hat{a}_5x_2x_3+\hat{a}_6x_2x_4$$

- 制订基础薪金
  - 资历为0： $x_1=0$
  - 管理—教育组合：6种

教育
1中学： $x_3=1, x_4=0$
2大学： $x_3=0, x_4=1$
3更高： $x_3=0, x_4=0$

组合	管理	教育		系数	基础薪金
1	0	1	非管理+中学	a_0+a_3	9463
2	1	1	管理+中学	$a_0+a_2+a_3+a_5$	13448
3	0	2	非管理+大学	a_0+a_4	**10844**
4	1	2	管理+大学	$a_0+a_2+a_4+a_6$	**19882**
5	0	3	非管理+更高	a_0	**11200**
6	1	3	管理+更高	a_0+a_2	**18241**

大学程度管理人员比更高程度管理人员的薪金高

大学程度非管理人员比更高程度非管理人员的薪金略低

评注

- 对定性因素：如管理、教育
  - 可以引入0-1变量处理
  - 0-1变量的个数应比定性因素的水平少1
- 残差分析：可以发现模型的缺陷
  - 引入交互作用项常常能够改善模型
- 剔除：异常数据
  - 有助于得到更好的结果
- 另：
  - 可以直接对6种管理—教育组合引入5个0-1变量

模型三 酶促反应

- 酶促反应
  - 由酶作为催化剂催化进行的化学反应
  - 生物体内的化学反应绝大多数属于酶促反应
  - 酶促反应中酶作为高效催化剂使得反应以极快的速度（10^3~10^{17}倍）或在一般情况下无法反应的条件下进行
  - 酶是生物体内进行各种化学反应最重要的因素
- 酶促反应动力学
- 问题：
  - 研究酶促反应中——嘌呤霉素——对反应速度与底物（反应物）浓度之间关系的影响

方案

- 建立数学模型，反映该酶促反应的速度与底物浓度以及经嘌呤霉素处理与否之间的关系
- 设计了两个实验
  - 酶经过嘌呤霉素处理
  - 酶未经嘌呤霉素处理
- 实验数据:

底物浓度(ppm)		0.02		0.06		0.11	
反应速度	处理	76	47	97	107	123	139
	未处理	67	51	84	86	98	115
底物浓度(ppm)		0.22		0.56		1.10	
反应速度	处理	159	152	191	201	207	200
	未处理	131	124	144	158	160	/

分析

❖ 酶促反应的基本性质

◆底物浓度较小时，反应速度大致与浓度成正比；

◆底物浓度很大、渐进饱和时，反应速度趋于固定值

基本模型 Michaelis-Menten模型

酶促反应的速度

待定系数 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$

$$y=f(x,\beta)=\frac{\beta_1 x}{\beta_2+x}$$

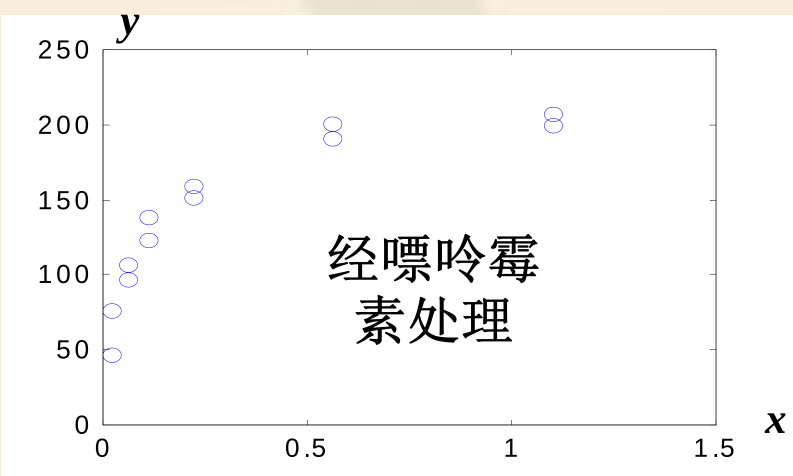
底物浓度

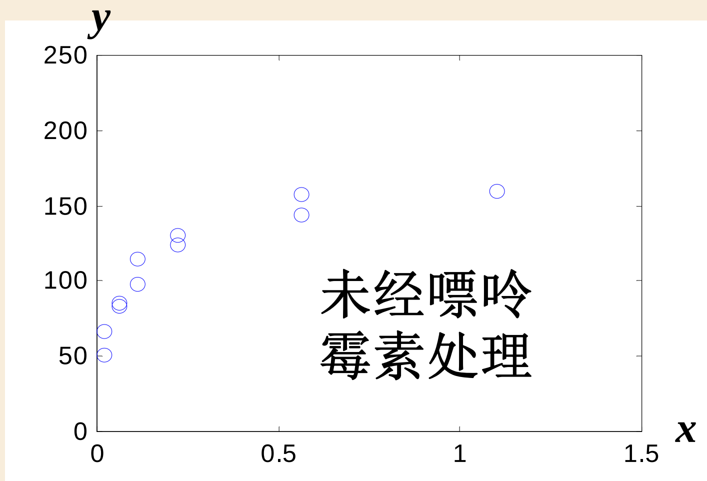
数据分析

y ~酶促反应速度

x ~底物浓度

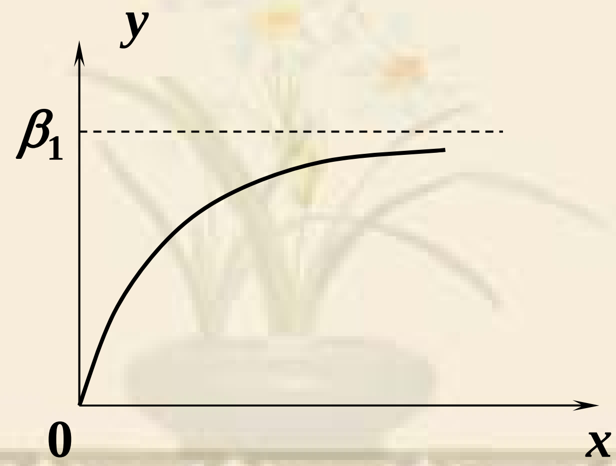
❖ 实验数据：散点图





❖ 模型

$$y = f(x, \beta) = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$



mei.m
mei1.m

线性化模型

$$y=\frac{\beta_1 x}{\beta_2+x} \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{1}{x}=\theta_1+\theta_2\frac{1}{x}$$

对β_1，β_2非线性 $\Rightarrow$ 对θ_1, θ_2线性

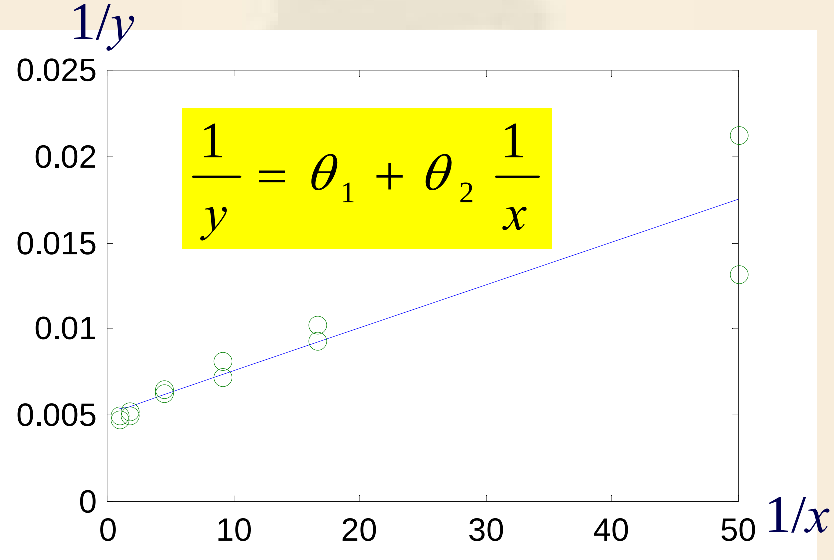
- 经嘌呤霉素处理后实验数据的估计结果

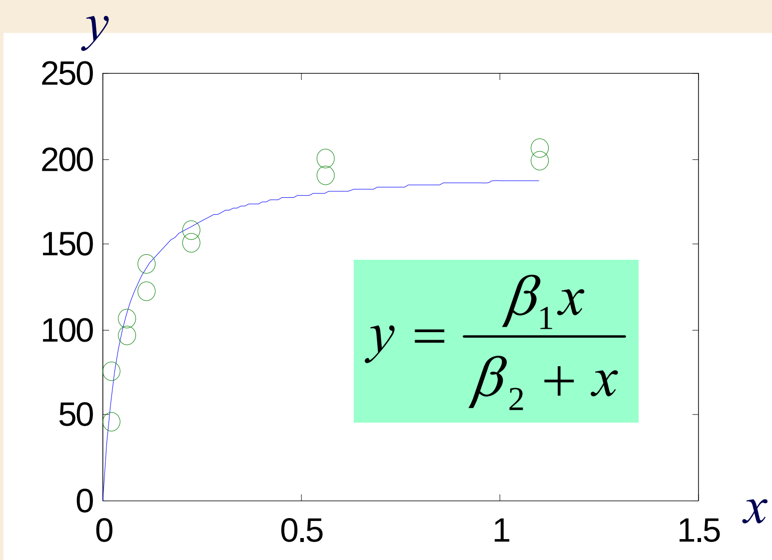
mei3.m

参数	估计值（×10^{-3}）	置信区间（×10^{-3}）	参数	估计值
θ_1	5.107	[3.539 6.676]	$\beta_1=1/\theta_1$	195.8027
θ_2	0.247	[0.176 0.319]	$\beta_2=\theta_2/\theta_1$	0.04841
R^2=0.8557　F=59.2975　p=0.0000				

结果分析

mei4.m





$1/x$较小时有很好的线性趋势，$1/x$较大时出现很大的起落

x较大时，y有较大偏差

- 线性化：参数估计时

  x较小（$1/x$很大）的数据控制了回归参数的确定

- 改进：非线性模型

Matlab 统计分析

statistics toolbox

3、回归分析：非线性

参数估计值　残差　解释变量：矩阵　被解释变量：列　参数初值

[beta , R , J] = nlinfit (x,y, 'model' , beta0)

预测误差的Jacobi矩阵　模型函数

❖ beta的置信区间

betaci =nlparci(beta,R,J)

Matlab 程序

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$

f1.m

```
function  y=f1(beta, x)
y=beta(1)*x./(beta(2)+x);
```

mei5.m

```
x=………… ; y=…………;
beta0=[195.8027  0.04841];
[beta,R,J]=nlinfit(x,y,'f1',beta0);
betaci=nlparci(beta,R,J);
beta, betaci
```

212.6819	[197.2029 228.1609]
0.0641	[0.0457 0.0826]

结果分析

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$

参数	估计值	置信区间
β_1	212.6819	[197.2029 228.1609]
β_2	0.0641	[0.0457 0.0826]

- 最终反应速度为

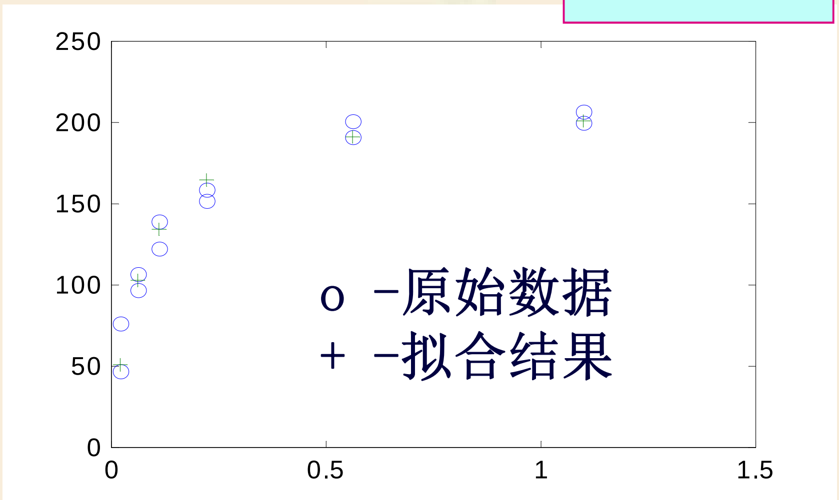
$$\hat{\beta}_1 = 212.6831$$

- 半速度点(达到最终速度一半时的x值)为

$$\hat{\beta}_2 = 0.0641$$

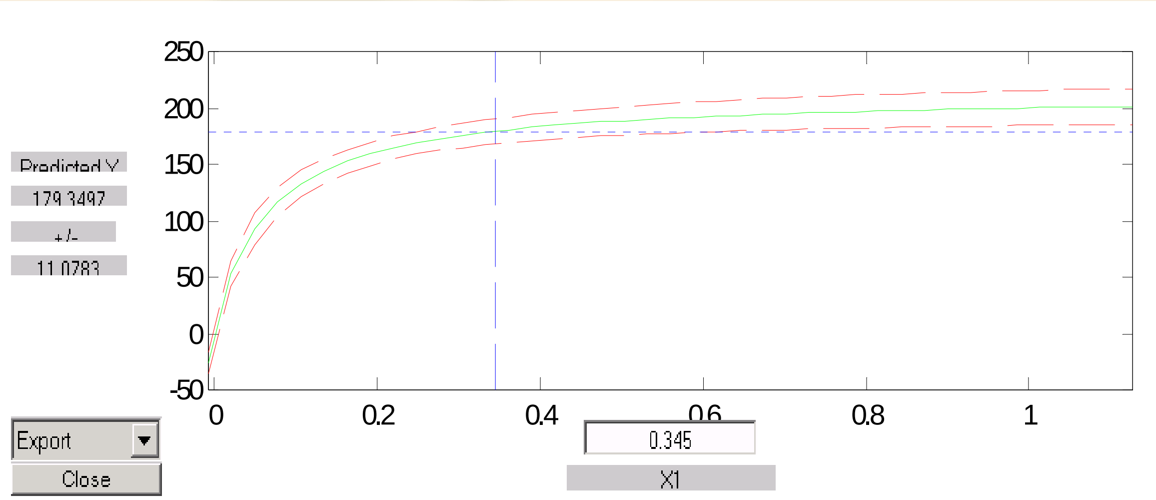
- 效果

mei6.m



其它输出

nlintool (x,y,'model',beta)



- 给出交互画面
- 拖动画面的十字线，得**y**的预测值和预测区间
- 画面左下方的**Export** 输出其它统计结果。
- 剩余标准差***s*= 10.9337**

mei7.m

混合反应模型

❖ 在同一模型中考虑嘌呤霉素处理的影响

未经处理的最终反应速度

经处理后最终反应速度增长值

示性变量

底物浓度

$$y=\frac{\beta_1 x}{\beta_2+x} \Rightarrow y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1}$$

未经处理的反应的半速度点

经处理后反应的半速度点增长值

x_2示性变量：**x_2=1**表示经过处理，**x_2=0**表示未经处理

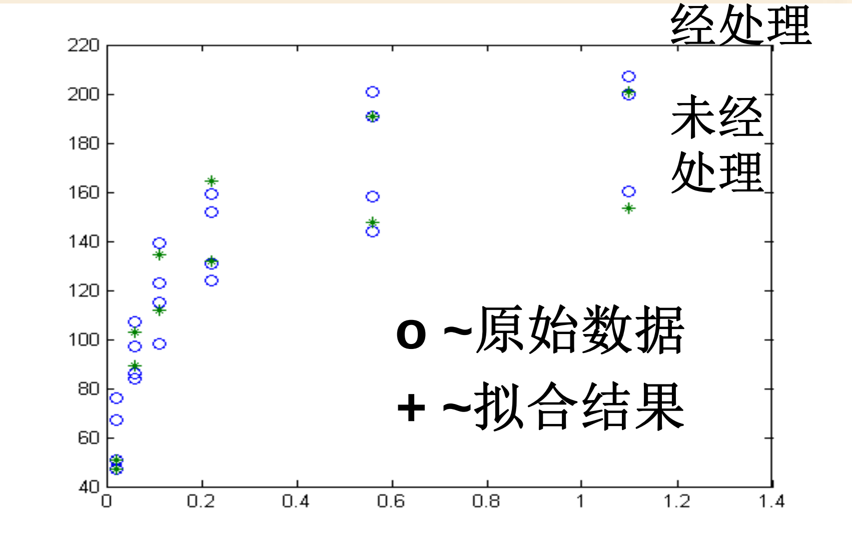
Matlab 程序

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1}$$

- 用nlinfit 和 nlintool命令
- 参数初值：基于对数据的分析 $\beta_1^0=170,\ \gamma_1^0=60,\ \beta_2^0=0.05,\ \gamma_2^0=0.01$

估计结果和预测

参数	估计值	置信区间
β_1	**160.2802**	**[145.8466 174.7137]**
β_2	**0.0477**	**[0.0304 0.0650]**
γ_1	**52.4035**	**[32.4130 72.3941]**
γ_2	**0.0164**	**[-0.0075 0.0403]**



置信区间包含零点，对因变量影响不显著

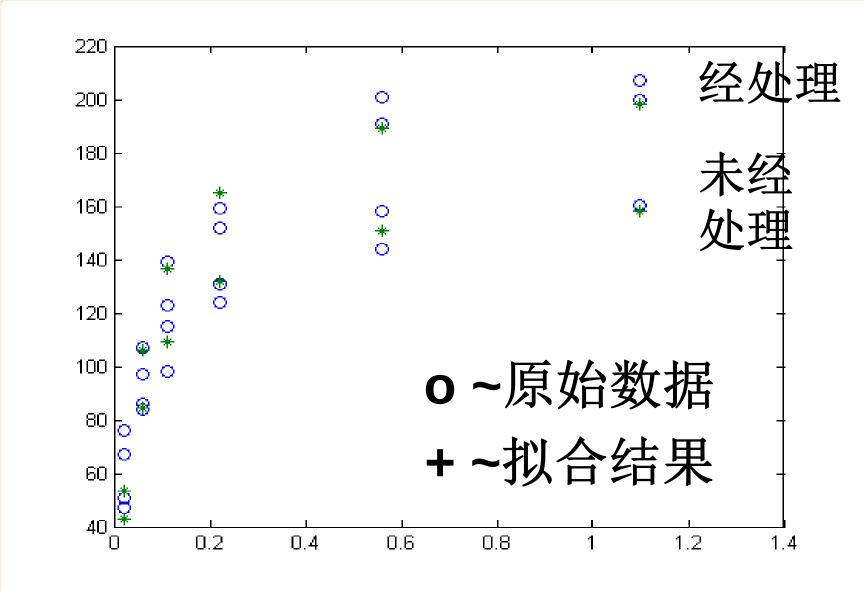
经嘌呤霉素处理的作用不影响半速度点参数

简化混合模型

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1} \Rightarrow y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{\beta_2+x_1}$$

❖ 估计结果和预测

参数	估计值	置信区间
β_1	166.6025	[154.4886 178.7164]
β_2	0.0580	[0.0456 0.0703]
γ_1	42.0252	[28.9419 55.1085]



❖ 简化的混合模型形式简单

❖ 参数置信区间不含零点

❖ 剩余标准差 s = 10.5851，比一般混合模型略大

结果分析

❖ 一般混合模型与简化混合模型预测比较

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1} \qquad y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{\beta_2+x_1}$$

实际值	一般	±Δ	简化	±Δ
67	47.3443	9.2078	42.7358	5.4446
51	47.3443	9.2078	42.7358	5.4446
84	89.2856	9.5710	84.7356	7.0478
…	…	…	…	…
191	190.8329	9.1484	189.0574	8.8438
201	190.8329	9.1484	189.0574	8.8438
207	200.9688	11.0447	198.1837	10.1812
200	200.9688	11.0447	198.1837	10.1812

❖ 简化混合模型的预测区间较短，更为实用、有效

评注

- 酶促反应
- 反应速度与底物浓度的关系 ⇨(机理分析) 非线性关系
- 求解线性模型 ⇨(发现问题，得参数初值) 求解非线性模型
- 嘌呤霉素处理对反应速度与底物浓度关系的影响

⇨(引入0-1变量) 混合模型 ⇨(检查参数置信区间是否包含零点) 简化模型

注：非线性模型拟合程度的评价无法直接利用线性模型的方法，但R^2与s仍然有效。

END