动态规划优化

Appleblue17

2022年10月3日

前置知识 - 决策单调性

考虑 2D1D 状态转移方程：

$$f_{l,r} = \min_{k=l}^{r-1}\{f_{l,k} + f_{k+1,r}\} + w(l,r)$$

定义

区间包含单调性：$\forall l \le l' \le r' \le r, w(l',r') \le w(l,r)$。

判定：$\forall l \le r, f(l+1,r) \le f(l,r) \le f(l,r-1)$。

定义

四边形不等式：
$\forall l_1 \le l_2 \le r_1 \le r_2, w(l_1,r_1) + w(l_2,r_2) \le w(l_1,r_2) + w(l_2,r_1)$。

判定：$\forall l \le r, f(l,r) + f(l+1,r+1) \le f(l+1,r) + f(l,r+1)$。

前置知识 - 决策单调性

引理

引理：若 $w(l,r)$ 满足区间包含单调性和四边形不等式，则状态 $f_{l,r}$ 满足四边形不等式。

定理

定理：若状态 $f_{l,r}$ 满足四边形不等式，记 $m_{l,r}$ 表示最优决策点中最小的，则有 $\forall r-l>1, m_{l,r-1} \le m_{l,r} \le m_{l+1,r}$。

在分层 DP 的问题中，例如：

$$f_{i,j} = \min_{k \le j}\{f_{i-1,k} + w(k,j)\}$$

如果 $w(l,r)$ 满足单调性和四边形不等式，可以说明 $m_{i,j-1} \le m_{i,j}$，即决策单调。可以通过分治做到单层 $O(n\log n)$。

Problem A

给定长为 n 的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，将其分为恰好 k 个区间。定义区间 $[l, r]$ 的权值为：

$$w(l,r) = \sum_{l \le i < j \le r} [a_i = a_j]$$

求划分出的所有区间权值和最小值。

- $1 \le n \le 10^5, 1 \le k \le \min(n, 20), 1 \le a_i \le n$。

Problem A+

给定长为 n 的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，将其分为恰好 k 个区间。定义区间 $[l, r]$ 的权值为：

$$w(l,r) = \sum_{x \in set(l,r)} (last(x) - first(x))$$

其中 $set(l,r)$ 表示该区间的元素集合，$first(x)$ 与 $last(x)$ 分别表示 x 在该区间中第一次与最后一次出现的位置。

求划分出的所有区间权值和最小值。

- $1 \le n \le 3.5 \times 10^4, 1 \le k \le \min(n, 100), 1 \le a_i \le n$。

Problem A++

给定长为 n 的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，将其分为恰好 k 个区间。定义区间 $[l, r]$ 的权值为：

$$w(l, r) = (r - l + 1) \max_{i=l}^{r} a_i$$

求划分出的所有区间权值和最小值。

- $1 \le n \le 2 \times 10^4, 1 \le k \le \min(n, 100), 1 \le a_i \le 2 \times 10^4$。

Problem B

给定一个初始有 n 个元素的可重集 A，其中每个元素都在 1 到 m 之间。

每次操作可以将 $x \in A$ 从 A 中删除，然后将 p, q 加入 A，其中 $pq = x$ 且 $p, q > 1$。

求任意次操作后 A 中元素极差最小值。

- 多组测试，$1 \le T \le 10^5, \sum n \le 10^6, \sum m \le 5 \times 10^6$。

Problem C

给出一个程序，其只含一个初始为 0 的变量 x 及两种语句：

- `set y v`：令 $x \leftarrow y$。可以花费 v 元钱删除该命令。
- `if y ...  end`（由两行组成），如果 $x = y$，执行 `if ...  end` 中的命令，否则跳过该 `if ...  end`。

  给出 s，求最少的花费，使得整个程序运行中均满足 $x \neq s$。答案对 998244353 取模。
- $1 \leq n, s \leq 2 \times 10^5, 0 \leq y \leq 2 \times 10^5, 1 \leq v \leq 10^9$。

Problem D

给出 n 个点的有向完全图，边 (i,j) 的边每天出现的概率为 $p_{i,j}$。
从 1 号点出发，每天选择一条存在的出边走过去，求最优策略下走到 n 的期望天数。

- $1 \le n \le 10^3, p_{i,i} = 1$。

Problem E

给出一棵 n 个点的树与 m 个路径对 $((a_i, b_i), (c_i, d_i))$，在每个路径对中选择一条路径使得所有选出的路径边不相交。

构造方案或判断无解。

- $2 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 10^4$。
- Bonus：$O(m \log n)$。

前置知识 - 动态规划倒推

将转移视为带权边，则产生一张 DAG。定义路径的权为其中所有边权之积。

设初始状态为 S，终止状态为 T。将 S 的 DP 值设为 1，则 T 的 DP 值可视为 S 到 T 的所有路径权值和。

故将所有边反向，权值不变，将 T 的 DP 值设为 1，倒着转移可在 S 处得到原先终止状态的 DP 值。

Problem F

有若干细菌，其基因为一个字符集为 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的字符串。

所有细菌每分钟就会分裂一次，子代基因与亲代细菌完全一致。每次分裂完成后，所有细菌都会进行一次基因突变：对于基因中的每个字符 i，其有 $P_{i,j}$ 的概率变为 j。

给定 m 个特殊基因序列 $g_1, g_2, \cdots, g_m$。称一个细菌为「目标细菌」，如果每个特殊基因序列作为子串在该细菌基因出现的数目之和为奇数。

定义 $T(X, t)$ 为，初始只有一个基因序列为 X 的细菌，t 分钟后所有细菌中目标细菌的个数期望。

给出一个长度为 n 的数字串 S 和一个整数 t。请对于 S 的每个前缀 $[1, i]$ 分别求出 $T(S[1, i], t) \bmod 10^9 + 7$ 的值。

- $nk \sum |g_i| \leq 10^8, k \leq 100, t \leq 10^{18}$。（有改动）
- Bonus：对于 S 的每个后缀求答案。

Problem G

求满足以下条件的序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 数量：

- $\forall i \in [1, n]$，$1 \leq A_i \leq n$
- $\forall i \in [2, n]$，$A_{i-1} \leq A_i$。
- $\forall S, T \in \{1, 2, \cdots, n\}, |S| < |T|$，$\sum_{x \in S} A_x < \sum_{x \in T} A_x$。

  答案对给定质数 M 取模。
- $2 \leq n \leq 5000, 9 \times 10^8 < M < 10^9$。
- Bonus：$n \leq 10^5, M = 998244353$。

定理

对于 n 阶矩阵 A 及 $n \times 1$ 的列向量 P，列向量数列 $a_k = A^k P$ 是一个不超过 n 阶的齐次线性递推数列。

证明.

求出矩阵 A 的特征多项式 $F(\lambda)$，由 Cayley-Hamilton 定理，$F(A) = O$。

$$\sum_{i=0}^{n} f_i A^i = O, \sum_{i=0}^{n} f_i A^i P = O, a_k = -\sum_{i=1}^{n} f_i a_{k-i}$$

□

可以 $O(n^3)$ 求出特征多项式，即可 $O(n^2 \log k)/O(n \log n \log k)$ 计算 a_k 中的一项。

如果 A 中有 c 个非零元素，可以 $O(nc)$ 算出前 $2n$ 项，再用 Berlekamp–Massey 算法算出化零多项式。

Problem H

给出一个 n 个词的字典 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，求由长度均为 m 的字符串 S 和划分 P, Q 组成的三元组 (S, P, Q) 数量，满足：

- 对于 P 中划分的每一段 $[l, r]$，均满足 $S[l, r]$ 在字典中。
- 对于 Q 中划分的每一段 $[l, r]$，均满足 $S[l, r]$ 在字典中。

  答案对 998244353 取模。
- $1 \le n \le 8, 1 \le m \le 10^9$，$|S_i| \le 5$，$|\sum| = 26$。
- Bonus：$\sum |S_i|^2 \le 2000$。

*Problem I [1]

求将长为 n 的环染成 m 种颜色，使得不存在连续 m 个区域恰好出现所有 m 个颜色的方案数。

旋转翻转同构，答案对 10^9+7 取模。

- $1 \leq n \leq 10^9, 2 \leq m \leq 7$。

[1] 涉及部分超纲内容

*Problem J [2]

在数轴上 $[0, 1]$ 的区间内随机放置 n 个区间，求不存在一个点被超过 k 个区间覆盖的概率。

- $1 \le n \le 2 \times 10^5$。

[2]涉及部分超纲内容