## dp 杂题选讲

Booksnow

xndxfz

2022.10.12

## A

给定一个包含 n 个元素的数组 a, 你可以进行如下操作:

- 选择两个不同的元素  $a_i, a_j (1 \le i, j \le n, i \ge j)$ 。
- 将 aj 的值加上 ai, 并删除 a 中的第 i 个元素。

求使a数组严格递增所需的最少操作数,要求输出方案。

$$1 \le n \le 15, 1 \le a_i \le 10^6$$

你准备购买 n 块土地, 第 i 块土地宽为 wi, 长为 li。

你可以一并购买若干块土地, 代价为这些土地中长的最大值乘上宽的最大值, 求买下 n 块土地的最小代价。

$$1 \le n \le 5 \times 10^4, 1 \le w_i, l_i \le 10^6$$

给一个长度为 n 的 0/1 串 s, 进行 k 次操作,每次操作选择两个位置  $i,j(1 \le i < j \le n)$ ,交换 i,j 上的数,求 k 次操作后,该 0/1 串变成非降序列的概率,答案对  $10^9+7$  取模。

 $n \le 100, k \le 10^9$ 

给定参数 n, k, m, 你需要求出有多少个大小为 k 的序列 a 满足:

- 任意两个元素全部不同。
- 任意 a<sub>i</sub> ∈ [1, n]。
- 对于任意 i ∈ [2, k], 有 a<sub>i</sub> ≤ a<sub>i-1</sub> + m。

Subtask1:  $1 \le n \le 10^5, 1 \le k \le \min(n, 12), 1 \le m \le 4$ 

Subtask2:  $1 \le n \le 10^9, 1 \le k \le \min(n, 12), 1 \le m \le 4$ 

某大学要举办两场晚会,一共有n个活动,第i个活动开始时间为 $S_i$ ,持续时间为 $T_i$ ,接下来你要把这些活动分别分配到两场晚会中。

如果两场晚会中某个时刻存在同时进行的活动,则参与人员会纠结,为 了避免这种情况,要求不能有两个活动在两场晚会中同时进行(不包含 开始或结束的瞬间)。

同时, 我们希望活动相对较少的晚会中活动尽可能的多。

此外,有一些活动特别有意义,我们还希望知道,当第 i 个活动必须举办时,活动相对较少的晚会活动数量的最大值。

 $1 \le n \le 200, 0 \le S_i \le 10^9, 1 \le T_i \le 10^9$ 

你将和m个人依次作战,每场战斗将持续n天,第i天,你会受到 $a_i$ 点伤害,若此时你的体力仍然大于等于0,你可以选择一下操作之一执行:

- 令当前和你作战的人体力减 1。
- 若当前是第 i 天,令自身体力回复  $w_i$ ,任意时刻,你的体力拥有上限 mc。
- 令自身等级 L 加 1。
- 令自身攻击力 F 乘上 L。
- 发动攻击,对敌人造成 F 点伤害,并清空 L,降低 F 到 1,最多使用两次。

每场战斗前,你的体力恢复至上限 mc, L 初始化为 0, F 初始化为 1, 给定第 i 个人的体力  $C_i$ , 定义战胜它为在自身体力小于 0 前能够使其体力刚好清空(不能打成负数),第 n+1 天你会被秒杀。

 $1 \le n, mc \le 100, 1 \le m \le 20, 1 \le a_i, w_i \le mc, 1 \le C_i \le 10^8$ 

4D > 4B > 4B > 4B > 900

给定 n, K, 有一棵以 1 为根的 n 个点的有根树, i 的父亲是  $f_i$ 。你要在每个点上写一个正整数  $a_i$ ,使得:

- $\forall 2 \leq i \leq n \ a_{f_i} \ mod \ a_i = 0$
- $\prod a_i \leq K$

求填写正整数的方案数取模 998244353。

$$n \le 10^3 \ \text{K} \le 10^{12}$$

给你一个包含n个不同数的集合S,集合里从小到大第i个数是 $S_i$ ,现在你需要将这个集合划分为两个集合X和Y,使得:

- 集合 X 中任意两个元素之差的绝对值不小于 A。
- 集合 Y 中任意两个元素之差的绝对值不小于 B。

问有多少种集合划分的方法,输出答案对 109+7 取模的值。

注:集合 X 或 Y 可以是空集。

 $1 \le n \le 10^5, 1 \le A, B \le 10^{18}, 0 \le s_i \le 10^{18}$ 

你正在玩一款游戏, 现在要捕捉 n 只精灵。

你有 A 和 B 两种不同的精灵球,其中 A 类精灵球 a 个,B 类精灵球 b 个,A 类精灵球抓住第 i 只精灵的概率为  $p_i$ ,B 类精灵球抓住第 i 只精灵的概率为  $q_i$ ,对每只精灵最多只能使用 A 类精灵球与 B 类精灵球各一次。

求期望抓住精灵的最大个数。

$$n \le 2000 \ 0 \le a, b \le n$$

J

体育课上, n 个小朋友排成一行, 老师想把他们分成若干组, 每一组都包含编号连续的一段小朋友, 每个小朋友属于且仅属于一个组。

第i个小朋友希望它所在的组的人数不多于d[i],不少于c[i],否则他就会不满意。

在所有小朋友都满意的前提下,求可以分成的组的数目的最大值,以及 有多少种分组方案能达到最大值。

$$1 \le n \le 10^6, 1 \le c_i \le d_i \le n$$

## K

给出 n 个数字  $a_1, a_2, ..., a_n$ ,每次操作可以给其中一个数字加上 2 的整数次幂。

求使得这n个数字相等的最少操作次数。

$$1 \le n \le 10^5, 0 \le a_i \le 10^{17}$$

给定 x, y, 求  $\{1, 2, 3, ..., n\}$  的最大子集 S, 满足不存在  $a, b \in S$ , 使得  $|a - b| \in \{x, y\}$ 。

 $\textit{Subtask}1: 1 \leq \textit{n} \leq 50, 1 \leq \textit{x}, \textit{y} \leq 22$ 

Subtask2 :  $1 \le n \le 10^9, 1 \le x, y \le 22$