1 Laplace 变换

傅里叶变换的定义：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$。绝对可积是充分不必要条件。

拉普拉斯变换的定义：$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$；记号：$F(s)=\mathrm{L}[f(t)], f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(s)]$。

常见函数的拉普拉斯变换：阶跃函数，$f(t)=A, F(s)=\frac{A}{s}$；斜坡函数，$f(t)=At, F(s)=\frac{A}{s^2}$；指数函数，$f(t)=e^{-at}, F(s)=\frac{1}{s+a}$；正弦函数，$f(t)=\sin(\omega t), F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$。

拉普拉斯变换的性质：线性性质，$\mathrm{L}[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$；微分性质，若 $f(0)=f'(0)=\cdots=0$，则 $\mathrm{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$，否则 $\mathrm{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$；积分性质，$\mathrm{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}F(s)$；延迟性质，$\mathrm{L}[f(t-\tau)]=e^{-\tau s}F(s)$；终值定理：$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$；初值定理：$\lim\limits_{t\to 0} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$。

有理函数的分解：对于 $F(s)=\frac{\cdots}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$，1) 均为单实根，令 $F(s)=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}$，则 $c_i=\lim\limits_{s\to s_i}(s-s_i)F(s)$，2) 多重实根，令 $F(s)=\frac{c_n}{(s-s_1)^n}+\frac{c_{n-1}}{(s-s_1)^{n-1}}+\cdots+\frac{c_1}{s-s_1}$，则 $c_n=\lim\limits_{s\to s_1}(s-s_1)^nF(s), c_{n-j}=\frac{1}{j!}\lim s\to s_1\frac{d^j}{ds^j}[(s-s_1)^nF(s)]$。

商的求导法则，$[\frac{u}{v}]'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$，$[\frac{1}{x}]=-\frac{1}{x^2}$。

2 时域分析

2.1 稳定性

定义：系统偏离平衡状态后，在没有外力作用下，其状态能自动地回到平衡状态。令 $y_t(t)$ 为暂态分量，稳定则 $\lim\limits_{t\to\infty} y_t(t)=0$。为什么需要稳定性？由系统内在特性造成的输出响应必须逐渐衰减并最终消失，从而才可能专心地跟踪输入信号或者抑制干扰影响。

稳定性分析：特征方程的根，1) 都在左半平面，则稳定，2) 虚轴上有单根，其他根都在左半平面，则临界稳定，3) 由半平面有根或者虚轴上有重根，则不稳定。

传递函数：零初始条件。$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$，其中 $Y(s)$ 是输出，$R(s)$ 是输入。特征方程的根就是传递函数的极点。

2.2 结构图

闭环传递函数：令 $G(s)$ 是前向传递函数，$H(s)$ 是负反馈传递函数，则闭环传递函数 $\frac{Y(s)}{R(s)}-\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$。

结构图的等效与化简：略。

劳斯判据（根稳定性判别方法）：对于 6 次方程 $F(s)=a_0s^6+a_1s^5+\cdots+a_5s+a_6$，如下列出前两行：

$$\begin{array}{lllll} s^6 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ s^5 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \end{array}$$

然后按照 $a_{ij}=-\frac{1}{a_{i-1,1}}\begin{vmatrix} a_{i-2,1} & a_{i-2,j+1} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,j+1} \end{vmatrix}$，填充其它行。第一列符号改变次数等于右半平面根数。若劳斯判据第一列无符号改变，则根稳定。

劳斯判据第一列为 0：如果某一行第一个元素为 0，其余元素不为 0，将 0 代替为一个小的正数 ϵ；如果某一行第一个元素为 0，其余元素也为 0，则有关于原点对称的根，这时使用辅助多项式，求其微分作为新的一行，例子如下。

$$\begin{array}{lll} s^3 & 6 & 6 \\ s^2 & 4 & 4 \\ s^1 & 0 & 0 \end{array}$$

这时辅助多项式为 $A(s)=4s^2+4$，则 $\frac{dA(s)}{ds}=8s$，故最后的表格如下。

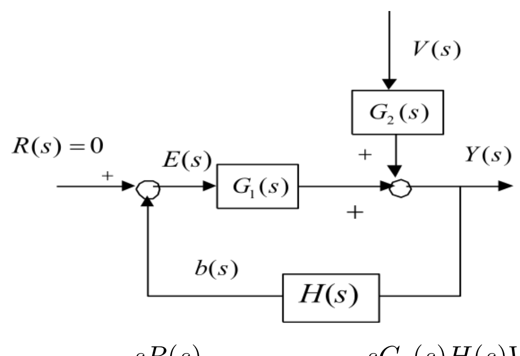
$$\begin{array}{lll} s^3 & 6 & 6 \\ s^2 & 4 & 4 \\ s^1 & 8 & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

2.3 稳态性能

产生原因：反馈控制系统需要误差信号来产生控制作用。如果稳态时仍然需要控制作用，就必须有非零的误差以维持控制作用（$u=Ke$）。从而产生了稳态误差。

计算稳态误差的前提：系统是稳定的。

输入稳态误差和干扰稳态误差计算如下。



$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_1(s)H(s)}+\lim_{s\to 0}\frac{-sG_2(s)H(s)V(s)}{1+G_1(s)H(s)}$$

阶跃输入下的稳态误差：$e_s=\frac{R}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_1(s)H(s)}=\frac{R}{1+K_p}$，其中 $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_1(s)H(s)$ 为位置品质系数。

斜坡输入下的稳态误差：$e_s = \frac{R}{\lim\limits_{s\to0} sG_1(s)H(s)} = \frac{R}{K_v}$，其中 $K_v = \lim\limits_{s\to0} sG_1(s)H(s)$ 为速度品质系数。

斜坡输入下的稳态误差：$e_s = \frac{R}{\lim\limits_{s\to0} s^2G_1(s)H(s)} = \frac{R}{K_a}$，其中 $K_a = \lim\limits_{s\to0} s^2G_1(s)H(s)$ 为加速度品质系数。

稳态误差总结：令

$$G_1(s)H(s) = \frac{K\prod\limits_{k=1}^{p}(T_ks+1)\prod\limits_{l=1}^{q}(T_l^2s^2+2\xi_lT_ls+1)}{s^r\prod\limits_{i=1}^{m}(T_is+1)\prod\limits_{j=1}^{n}(T_j^2s^2+2\xi_jT_js+1)}$$

	阶跃	斜坡	抛物线
$r=0$	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
$r=1$	0	$\frac{R}{K}$	∞
$r=2$	0	0	$\frac{R}{K}$

$\frac{1}{s}$ 越多，稳态性能越好。

2.4 动态性能

超调量：$\sigma = \frac{y_m - y_s}{y_s}$，其中 y_s 是稳态值不是期望值。

过渡过程时间：t_s 是进入稳态值 5% 范围的时间。

一阶系统定量分析：传递函数为 $\frac{1}{Ts+1}$。单位阶跃响应为 $y(t) = 1 - e^{-t/T}$。$\sigma = 0, t_s \approx 3T$。

二阶系统定量分析：传递函数为 $\frac{\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$。$\xi > 0$ 则稳定。

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \xi \geq 1 \\ e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} & 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

$$t_s \begin{cases} \frac{3.2}{\xi\omega} & 0 < \xi < 0.69 \\ \frac{2.8+6.5(\xi-0.7)}{\omega} & \xi \geq 0.69 \end{cases}$$

高阶系统的近似简化：设传递函数为 $M(s) = \frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$，1) 零极点相消，$|p_k - z_r|$ 很小时对消，结果为 $\bar{M}(s) = \frac{Kz_r}{p_k}\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\k\neq r}}^{m}(s-z_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(s-p_i)}$，右半平面的零、极点不能对消；2) 远极点消除，对于 $\mathrm{Re}(p_k)$ 很小的情况，可消除该极点，结果为 $\bar{M}(s) = \frac{K}{p_k}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(s-p_i)}$。

消除时稳态放大倍数应不变。

3 状态方程

状态方程的一般形式：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

状态方程之间的转换：状态变量的选取不唯一，从而状态方程不唯一（传递函数是唯一的）。如果 $\bar{x}(t) = Px(t)$，则新状态方程的各个参数变为 $\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}, \bar{D} = D$。

状态方程到传递函数的转换：初态必须是 0，即 $x(0) = 0$，此时 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$；否则 $Y(s) = G(s)U(s) + Cx(0)$。

传递函数到状态方程的转换：设 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$。若 $n > m$，则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

若 $n = m$，则 $D = b_0$。

非线性系统的线性化：

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,u) \approx f(x_0,u_0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}(u - u_0)$$

选择工作点 $f(x_0,u_0) = 0$, 令 $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{u} = u - u_0$。步骤：

1. 列写原始微分方程
2. 建立状态方程
3. 确定工作点
4. 建立增量的线性化方程

4 频域分析

频域分析的特点：稳定的线性系统不改变输入正弦信号的频率，只改变输入正弦信号的幅值和相位。

与时域响应的关系：将传递函数中的 s 替换为 $j\omega$ 即可得到频率特性。

一阶系统的频率特性：$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T+1}$，故幅频 $A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2+1}}$，相频 $\angle G(j\omega) = -\arctan(\omega T)$。可以看出：1) 低频信号，幅值衰减少，相位偏移少，能够基本复现输入信号；高频信号，幅值衰减很多，相位偏移很大，信号变形很厉害。2) 定义 $\omega_b = \frac{1}{T}$，它是输出下降到 $0.707A$ 处的

频率，ω_b 大则可通过的频率成分越多，惯性小，输出过渡过程也越快；ω_b 小则惯性大。

极坐标图：$G(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$，作出极坐标的参数方程。

Bode 图：横坐标采用 10 倍频程 $\log(\omega)$。上方是幅频图，纵坐标 $L(\omega)=20\log(A(\omega))$。下方是相频图。

一阶系统的 Bode 图：1) $\omega T\ll 1$，则 $A(\omega)\approx 1, L(\omega)\approx 0, \varphi(\omega)\approx 0$；2) $\omega T\gg 1$，则 $A(\omega)\approx \frac{1}{\omega T}, L(\omega)\approx 20\log(\frac{1}{T})-20\log\omega, \varphi(\omega)\approx -90^\circ$，3) $\omega T=1$，则 $A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}, L(\omega)\approx -3, \varphi(\omega)=-45^\circ$。

Bode 图的性质：

1. 采用频率的对数坐标，展宽了视野
2. 作图容易，可利用折线段近似
3. 频率特性乘除对应于幅频特性曲线加减
4. 频率特性的纵向放大、缩小对应于幅频特性曲线的上移和下移
5. 简化了频率特性的倒数关系

基本环节的 Bode 图：1) 比例环节 $G(s)=K$，则 $L(\omega)=20\log(k), \varphi(\omega)=0$；2) 积分环节 $G(s)=\frac{1}{s}$，则 $L(\omega)=-20\log\omega, \varphi(\omega)=-90^\circ$；3) 微分环节 $G(s)=s$，则 $L(\omega)=20\log\omega, \varphi(\omega)=90^\circ$。

二阶震荡环节的 Bode：$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}, 0\le\xi<1$，$G(j\omega)=\frac{1}{1-\omega^2T^2+2\xi\omega Tj}$，则

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\xi\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2T^2}$$

$$L(\omega)=-20\log\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\xi\omega T)^2}$$

1) $\omega\ll\frac{1}{T}$，则 $L(\omega)\approx 0, \varphi(\omega)\approx 0$；2) $\omega\gg\frac{1}{T}$，则 $L(\omega)\approx 20\log\frac{1}{(\omega T)^2}=40\log\frac{1}{T}-40\log\omega, \varphi(\omega)\approx -180^\circ$；3) $\omega=\frac{1}{T}$，则 $L(\omega)=-20\log(2\xi), \varphi(\omega)=-90^\circ$。

一般传递函数的 Bode 图：一般地，$G(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)$，则 $L(\omega)=L_1(\omega)+L_2(\omega)+\cdots+L_n(\omega)$，$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\cdots+\varphi_n(\omega)$。对下方的传递函数：

$$G(s)=\frac{K\prod\limits_{k=1}^{p}(T_ks+1)\prod\limits_{l=1}^{q}(T_l^2s^2+2\xi_lT_ls+1)}{s^r\prod\limits_{i=1}^{m}(T_is+1)\prod\limits_{j=1}^{n}(T_j^2s^2+2\xi_jT_js+1)}$$

幅频特性作图步骤如下：

1. 化标准形
2. 低频部分：找 $\omega=1, L(\omega)=20\log K$ 的点，由该点向左画斜率为 $-20r$ 的斜线
3. 求转折频率 $\omega_i=1/T_i$，并由小到大排序，$\omega_1<\omega_2<\cdots$
4. 从低频渐近线开始自左向右画，碰到 ω_i 就拐弯，分母环节向下弯，分子环节向上弯，一阶环节斜率变 20，二阶环节变 40
5. 修正（圆滑过渡）

相频特性作图步骤如下：

1. 画 $-90^\circ\times r$ 水平线
2. 算出转折点 $\varphi(\omega)$
3. 粗画相频特性 $\varphi(\omega)$

稳定裕量：令 ω_c 为剪切频率，即 $L(\omega)=0$ 时 ω 的值，则稳定裕量为 $\gamma=\varphi(\omega_c)-(-180^\circ)$。一般而言，$30^\circ\le\gamma\le 70^\circ$ 是可接受的范围。γ 太小，稳定裕量小，超调大，振荡多；γ 太大，稳定裕量大，动态响应慢，过渡过程时间长。

5 采样控制系统

5.1 概念

采样控制系统的特性：采样周期越小，采样信号越接近原始信号。香农定律：为了完美地重构信号，需要按照不小于 2 倍带宽采样率对信号进行采样。数学描述：$e^*(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT)$。

系统分类：

- 连续控制系统：连续信号
- 离散控制系统：离散信号
- 采样控制系统：连续、离散信号
- 数字控制系统：连续、离散信号，量化效应

采样系统的数学模型：

$$\begin{cases}x(k+1)=Fx(k)+Gu(k)\\ y(k)=Cx(k)+Du(k)\end{cases}$$

5.2 Z 变换

Z 变换：$R(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}r(k)z^{-k}$。

常见 Z 变换：1) 对于 $r(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$，有 $R(z)=1$；2) 对于 $r(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$，有 $R(z)=\frac{z}{z-1}$。

Z 变换性质：1) 线性性质，$Z[ar_1(t)+br_2(t)]=aR_1(z)+bR_2(z)$；2) 延迟性质，$Z[r(k-1)]=z^{-1}R(z)$；3) 超前性质，$Z[r(k+1)]=z(R(z)-r(0))$；4) 初值定理，$\lim\limits_{k\to 0}r(k)=\lim\limits_{z\to\infty}R(z)$；5) 终值定理，$\lim\limits_{k\to\infty}r(k)=\lim\limits_{z\to 1}(1-z^{-1})R(z)$。

5.3 离散与连续之间的转换

连续系统对应的离散化模型：

$$F=e^{AT},G=\left(\int_0^T e^{AT}dt\right)B$$

连续传递函数到离散传递函数的转换：

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$

离散状态方程到传递函数的转换：与连续类似。

$$G(z)=C(zI-F)^{-1}G+D$$

离散传递函数到状态方程的转换：与连续类似。

5.4 稳定性

离散系统稳定性条件：特征方程的根均在单位圆内。先作替换 $z=\frac{\omega+1}{\omega-1}$，再用劳斯判据。

5.5 稳态性能

阶跃输入下的稳态误差：输入 $R(z)=R\frac{z}{z-1}$，$e_s=\frac{R}{1+\lim\limits_{z\to 1}D(z)G(z)}=\frac{R}{1+K_p}$，其中 $K_p=\lim\limits_{z\to 1}D(z)G(z)$ 为位置品质系数。

斜坡输入下的稳态误差：输入 $R(z)=R\frac{Tz}{(z-1)^2}$，$e_s=\frac{R}{\lim\limits_{s\to 1}\frac{z-1}{T}D(z)G(z)}=\frac{R}{K_v}$，其中 $K_v=\lim\limits_{z\to 1}\frac{z-1}{T}D(z)G(z)$ 为速度品质系数。

斜坡输入下的稳态误差：输入 $R(z)=R\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$，$e_s=\frac{R}{\lim\limits_{z\to 1}(\frac{z-1}{T})^2D(z)G(z)}=\frac{R}{K_a}$，其中 $K_a=\lim\limits_{z\to 1}(\frac{z-1}{T})^2D(z)G(z)$ 为加速度品质系数。

总结：

$\frac{1}{(z-1)^r}$	阶跃	斜坡	抛物线
$r=0$	$\frac{R}{1+K_p}$	∞	∞
$r=1$	0	$\frac{R}{K_v}$	∞
$r=2$	0	0	$\frac{R}{K_a}$

5.6 动态性能

近似等效法

$$z=e^{sT}\approx\frac{1+sT/2}{1-sT/2}$$

6 现代控制理论

极点配置：设 $u(t)=-Lx(t)$，要适当选取 L，通过改变 $x(t)$ 的运动规律，间接改变了输出 $y(t)$ 的运动规律。设期望的极点为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则可求解 $|sI-(A-BL)|=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)$ 得到 L。

能控性：$S=\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$ 满秩则能控。