Dimensionnement et Évaluation de Performances des Réseaux

Chaînes de Markov

Florence Perronnin

Université de Versailles-St Quentin en Yvelines

May 10, 2016

La Modélisation

Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée.

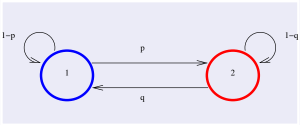
John von Neumann.

Outline

Automate Flip-flop

système ON-OFF

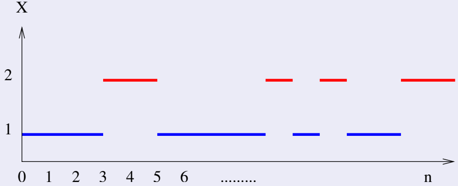
Modèle à deux états :
- ligne de communication
- activité processeur
- ...



Paramètres :
- proportion des transitions : p, q
- Temps de séjour moyen en 1 : $\frac{1}{p}$
- Temps de séjour moyen en 2 : $\frac{1}{q}$

Trajectoire

X_n état de l'automate à l'instant n.



Distribution transitoire

$$\pi_n(1) = \mathbb{P}[X_n = 1]\,;$$

$$\pi_n(2) = \mathbb{P}[X_n = 2]$$

Problème

Estimation de π_n : prévision de l'état

Calcul de $\lim_{n\to\infty} \pi_n$: utilisation de ressource

Modèle Mathématique

Probabilités de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 | X_n = 1] = 1-p; \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 2 | X_n = 1] = p; \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 | X_n = 2] = q; \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 2 | X_n = 2] = 1-q. \end{array}$$

$$\begin{cases} \pi_{n+1}(1) = \pi_n(1)(1-p) + \pi_n(2)q; \\ \pi_{n+1}(2) = \pi_n(1)p + \pi_n(2)(1-q); \end{cases}$$

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

Iterations linéaires

Spectre de P (valeurs propres)

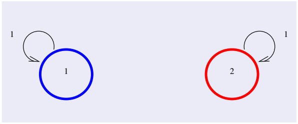
$\mathcal{S}p = \{1, 1-p-q\}$

Résolution du système

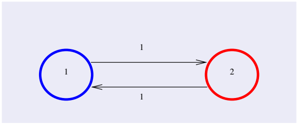
$|1-p-q| < 1$ cas non pathologique

$$\begin{cases} \pi_n(1) = \frac{q}{p+q} + \left(\pi_0(1) - \frac{q}{p+q}\right)(1-p-q)^n; \\ \pi_n(2) = \frac{p}{p+q} + \left(\pi_0(2) - \frac{p}{p+q}\right)(1-p-q)^n; \end{cases}$$

$1-p-q = 1$ $p = q = 0$ Comportement réductible



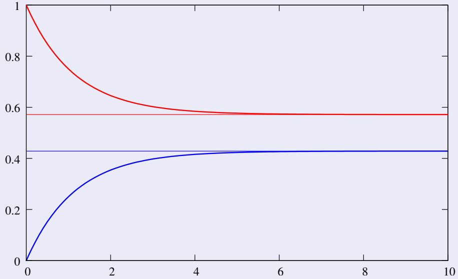
$1-p-q = -1$ $p = q = -1$ Comportement Périodique



Comportement récurrent

Exemple numérique

$p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{3}$



Convergence rapide
(taux exponentiel)

Comportement stationnaire

$$\begin{cases} \pi_\infty(1) = \frac{q}{p+q}; \\ \pi_\infty(2) = \frac{p}{p+q}. \end{cases}$$

π_∞ unique vecteur probabilité solution

$$\pi_\infty = \pi_\infty P.$$

Si $\pi_0 = \pi_\infty$ alors $\pi_n = \pi_\infty$ pour tout n
Comportement stationnaire

Outline

Chaîne de Markov à temps discret

Définition formelle

Espace d'états discret $\mathcal{S} = \{1, 2, \cdots, K\}$
Le processus stochastique $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** si

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

pour tout n, $i_0, \cdots, i_{n-1}, i, j$
Propriété sans mémoire

Interprétation algébrique

la chaîne de Markov est **homogène** si

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = \mathbb{P}[X_1 = j | X_0 = i] = p_{i,j}.$$

$P = ((p_{i,j}))$ est une matrice stochastique

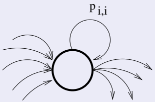
$$p_{i,j} \geq 0;$$

et

$$\sum_j p_{i,j} = 1.$$

Temps de séjour

T_i temps de séjour dans l'état i :



Distribution géométrique $p_{i,i}$

$$\mathbb{P}[T_i = k] = (1 - p_{i,i}) p_{i,i}^{k-1};$$

$$\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{1 - p_{i,i}}.$$

Chaîne de Markov à temps discret

Equation de Chapman-Kolmogorov

Interprétation trajectorielle

$$\mathbb{P}[X_{m+n} = j | X_0 = i] = \sum_k \mathbb{P}[X_{m+n} = j | X_m = k] . \mathbb{P}[X_m = k | X_0 = i]$$

$$= \sum_k \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = k] . \mathbb{P}[X_m = k | X_0 = i] .$$

Proabilité de trajectoire

$$\mathbb{P}[X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_0 = i_0]\, p_{i_0, i_1} . p_{i_0, i_1} \ldots p_{i_{n-1}, i_n}$$

transition en n étapes

$$\mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] = p_{i,j}^{(n)} .$$

Itération $\Longrightarrow$ produit matriciel

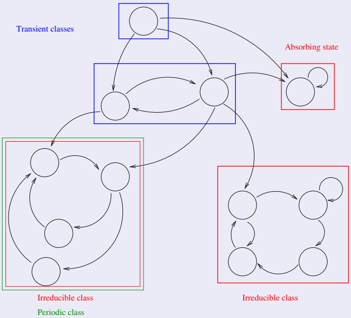
$$((p_{i,j}^{(n)})) = P^n$$

Calcul de P^n : diagonalisation (Jordanisation)
Valeurs propres de P (spectre)

Outline

Classification des états

Analyse de Graphe



Classe irréductible

Composantes connexes
i et j sont dans la même composante (communiquent) s'il existe un chemin de i vers j et un chemin de j vers i avec une probabilité positive.
Les états des classes irréductibles sont appelés **récurrent**

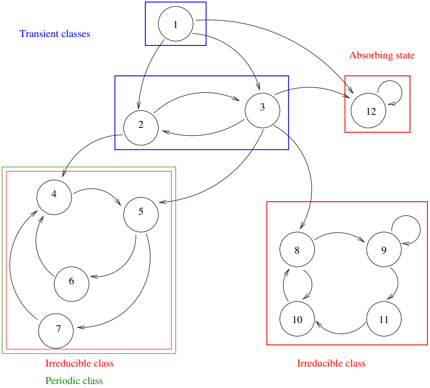
Les autres états sont appelés **transient**

Périodicité

Une classe irréductible est apériodique ssi le PGCD de la longueur de tous ses cycles est 1

Une chaîne de Markov est irréductible s'il existe une unique classe irréductible.
Tout état est donc atteignable depuis tout autre par un chemin de probabilité positive.

Classification d'états: forme matricielle



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		*	*									*
2			*	*								
3					*			*				*
4					*							
5						*	*					
6				*								
7				*								
8									*	*		
9									*		*	
10								*				
11										*		
12												1

Théorème de Convergence

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov **homogène irréductible** et **aperiodique** de matrice de transition P

Loi de convergence (théorème)

Convergence

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] \stackrel{def}{=} \pi(j),$$

les limites existent et π est un vecteur de probabilités.

Forme algébrique

π est l'**unique** vecteur de probabilités solution du système linéaire

$$\pi = \pi \ P, \ \ \pi(j) = \sum_i \pi(i) p_{i,j}$$

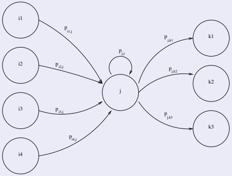
Vitesse de Convergence

$$||\pi - \pi_n|| \leq C.\alpha_1^n,$$

α_1 deuxième valeur propre de P et constante C

Interprétation

Équation d'équilibre



Prob d'entrer dans j = prob de quitter j
"balance equation"

$\pi \stackrel{def}{=}$ état stationnaire.
Si $\pi_0 = \pi$ le processus est stationnaire $(\pi_n = \pi)$

Ergodicité

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov **homogène irréductible** et **apériodique** de matrice de transition P

$T_n(i)$: temps passé dans l'état i pour la trajectoire $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$

$$T_n(i) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[X_k = i]}$$

Théorème Ergodique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T_n(i) = \pi(i).$$

Pour toute fonction de gain f

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \mathbb{E}_\pi f(X).$$

Gain moyen par unité de temps

Outline

Transmission avec erreurs

Un routeur reçoit des paquets de taille identique arrivant dans les intervalles de temps disjoints. Hypothèses:

- maximum 1 paquet par unité de temps $]t(n), t(n+1)[$
- arrivées **i.i.d**
- buffer infini
- erreur de transmission avec proba $(1-p)$ (occurrences **i.i.d**), indépendamment des arrivées
- durée de transmission: 1 unité de temps
- début à l'instant t(n) si au moins 1 paquet en attente

Modélisation

- $A(n) \in \{0,1\}$ nombre d'arrivées dans $]t(n), t(n+1)[$: $\sim \mathcal{B}(a)$
- $D(n)$ nombre de transmissions réussies dans $]t(n), t(n+1)[$: $D(n) \sim \mathcal{B}(p)$
- $X(n)$ nombre de paquets dans le routeur

équations d'évolution:

$$X(n) = \begin{cases} A(n) & \text{si } X(n) = 0 \\ X(n) + A(n) - D(n) & \text{si } X(n) > 0 \end{cases}$$

Caractérisation de la CMTD

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & \dots \\ (1-a)p & ap+(1-a)(1-p) & a(1-p) & 0\dots \\ 0 & (1-a)p & ap+(1-a)(1-p) & a(1-p)\dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Outline

Processus de Poisson

définition 1

Processus de comptage

Soit $N(t)$ le nombre d'événements dans l'intervalle $[0, t)$. $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \tag{1}$$

(Loi de Poisson)

Processus de Poisson
définition 2

Définition infinitésimale

On considère un processus stochastique à temps discret et à espace d'états continus $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ dénotant les instants d'occurrence d'événements. Les 4 conditions suivantes doivent être remplies simultanément :

1. $\mathbb{P}[\text{1 seul év. dans intervalle de durée h}] = \lambda h + o(h)$
2. $\mathbb{P}[\text{plusieurs év. dans intervalle de durée h}] = +o(h)$
3. Le nombre d'événements dans des intervalles disjoints sont des variables aléatoires indépendantes.

Processus de Poisson

définition 3

Interarrivées

L'intervalle de temps $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ entre 2 événements consécutifs est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ. De plus $\forall n, m / n \neq m$, les variables τ_n et τ_m sont indépendantes.

Origine des Processus de Poisson

Origine des Processus de Poisson

Problème de Siméon Denis Poisson

Trouver la loi du nombre de criminels par région.

Modèle: chaque individu est un criminel potentiel avec proba p. Donc sur une population de n individus,

$$P(k \text{ criminels}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2}$$

En supposant constante la criminalité moyenne $\mathbb{E}[N] = np = \lambda$ on obtient $p = \lambda/n$ ce qui permet de faire le calcul asymptotique suivant pour $n \to \infty$

$$P(k \text{ criminels}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \tag{3}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!(n-\lambda!)^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \tag{4}$$

$$\sim 1 \times \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda} \tag{5}$$

Modélisation par des processus de Poisson

Limite asymptotique de la loi binomiale : superposition d'un grand nombre de comportement indépendants.

- accidents dus aux coups de pied de cheval dans les armées
- appels arrivant à un central téléphonique
- arrivées de requêtes HTML sur un serveur Web
- défauts de crédit
- désintégration radioactive

Propriétés sympathiques des processus de Poisson

Nombre moyen d'événements

On considère un processus de Poisson de paramètre λ. Le nombre moyen d'événements dans un intervalle de durée t est :

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \lambda t.$$

Superposition

Soient 2 processus de Poisson de paramètres ressectifs λ_1 et λ_2. La superposition de ces deux processus est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Outline

Chaînes de Markov à temps continu

$\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ processus à temps continu: transitions à instants quelconques (non dénombrables)

Propriété de Markov

$$\mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = j_{n+1} | X_{t_n} = j_n, \ldots, X_{t_0} = j_0] = \mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = j_{n+1} | X_{t_n} = j_n]$$

Probabilités de transition: $\mathbb{P}[X_t = j | X_s = i] = P_{t-s}(i,j)$ (**homogène**) La matrice de transition P_t dépend donc du temps t (comme à temps discret elle dépend du nombre de slots $P^{(n)} = p^n$) Sauf qu'ici, la notion de slot n'existe plus. Pour $t = 0$, c'est l'identité!

Générateur infinitésimal

Définition

$$Q = \lim_{t \to 0} \frac{P_t - I}{t}$$

Ce générateur $Q = q_{ij}$ vérifie également :

$$bPX_{t+dt} = j | X_t = i = q_{ij} dt + o(dt)$$

Interprétation

$Q = (q_{ij})$ taux de transition de i vers j avec $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

Interprétation de q_{ij}

- temps de séjour en i: variable aléatoire de loi $Exp(-q_{ii})$
- puis saut instantané vers j avec probabilité $\frac{-q_{ij}}{q_{ii}}$

Autre construction équivalente

à l'instant t où le processus X_t entre dans l'état i:

- on tire pour chaque état $j \neq i$ une durée aléatoire T_{ij} de loi $Exp(q_{ij})$
- Si le minimum des T_{ij} est réalisé pour un état donné k, le processus restera en i un temps T_{ik} puis sautera directement dans l'état k.

Comportement asymptotique

Théorème

si

- X_t est irréductible
- et si le système $\pi Q = 0$ admet une solution strictement positive π^* telle que $\sum_i \pi^*(i) = 1$ (vecteur de probabilités)

alors la distribution π^* est la distribution limite

$$\lim_{t \to +\infty} p_t(i) = \pi^*(i)$$

- Conservation des flux:
  On cherche $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots)$ un vecteur de probabilités tel que:
  (Équations d'équilibre) $\pi Q = 0 \Leftrightarrow \forall i, \; \sum_{j \neq i} q_{ij}\pi_i = \sum_{k \neq i} \pi_k q_{ki}$

  $\sum_{j \neq i} q_{ij}\pi_i$: flux sortant de l'état i
  $\sum_{k \neq i} \pi_k q_{ki}$: flux entrant dans l'état i
- Équation de normalisation: $\sum_i \pi_i^* = 1$

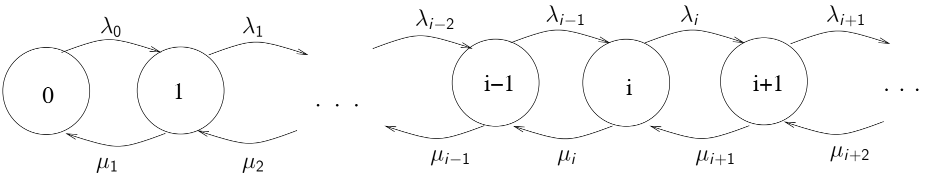
Outline

Processus de Naissance et de Mort

Definition

Un processus de naissance et de mort est une CMTC dont le générateur infinitésimal $\mathrm{Q} = (q_{ij})$ est une matrice tridiagonale: $\forall i \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lambda_i \\ q_{i,i-1} &= \mu_i \\ q_{i,j} &= 0 \qquad \text{if } j \notin \{i-1, i, i+1\} \end{aligned} \tag{6}$$



Lorsque le processus $X(t)$ est dans un état i, il ne peut aller que vers ses voisins immédiats $i+1$ et $i-1$

Générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Processus de Naissance et de Mort

Equations d'équilibre

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$$

$$(\lambda_i + \mu_i)\pi_i = \lambda_{i-1}\pi_{i-1} + \mu_{i+1}\pi_{i+1}$$

Distribution stationnaire

Par réduction des équations d'équilibre:

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \pi(0)$$

$\rightarrow$ Exercice :vérifier que cette solution satisfait les équations d'équilibre.

La constante de normalisation donne ensuite :

$$\pi(0) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}}$$

Théorème pour les processus de naissance et de mort

Si la série $C_n = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} + \ldots$ converge vers une limite $C < \infty$, alors le processus de naissance et de mort admet pour distribution limite

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \pi(0)$$

où $\pi(0) = \frac{1}{C}$.

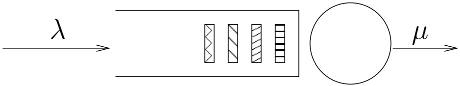
Synthèse: modélisation

Methodologie

1. Identifier les états du système
2. Estimer les paramètres de transition, construire la chaîne de Markov et sa matrice
3. vérifier les propriétés (classification)
4. Calcul de la distribution stationnaire et des performances asymptotiques
5. Analyse des performances en fonction des paramètres d'entrée

Outline

M/M/1 (Rappel)



file M/M/1

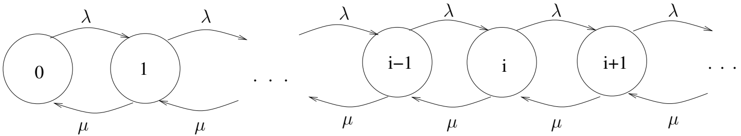
- capacité infinie
- arrivées Poisson(λ)
- temps de service Exp(μ)
- discipline FIFO

Definition

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ est l'intensité de trafic de la file d'attente.

M/M/1 (Rappel)

Soit $X(t)$ le nombre de clients à l'instant t. $X(t)$ est un processus de naissance et de mort.

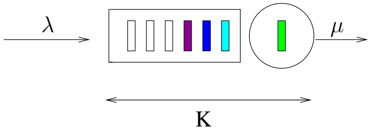


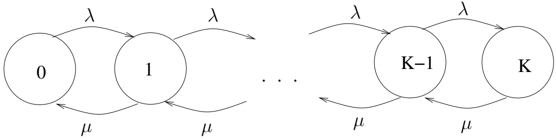
Resultats pour la M/M/1

1. Stable ssi $\rho < 1$
2. Clients suivent une distribution géometrique $\forall i \in \mathbb{N}$, $\pi_i = (1-\rho)\rho^i$
3. Nb moyen de clients $\mathbb{E}[X] = \frac{\rho}{(1-\rho)}$
4. Temps de réponse moyen $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu - \lambda}$

M/M/1/K (Rappel)

En réalité les buffers sont finis! M/M/1/K est une file d'attente à blocage.



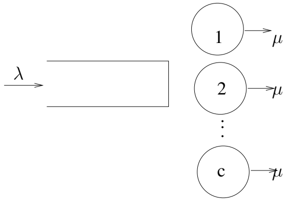


Resultats M/M/1/K

Distribution Géometrique à espace d'états finis:

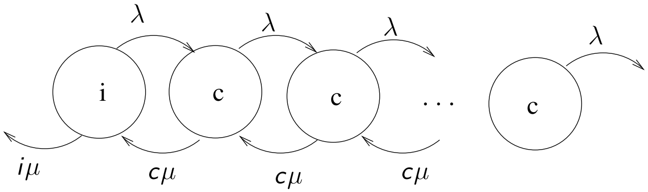
$$\pi(i) = \frac{(1-\rho)\rho_i}{1-\rho^{K+1}}$$

file M/M/c



- capacité infinie
- $\lambda_i = \lambda$
- $\mu_i = min(i, c)\mu$

$$\pi(i) = \begin{cases} \pi(0)\frac{\rho^i}{i!} & 0 \leq i \leq c \\ \pi(0)\frac{\rho^i c^{c-i}}{c!} & i \geq c \end{cases}$$



M/M/c (2)

$$\mathbb{P}[attente] = \mathbb{P}[X(t) \geq c] = \sum_{i=c}^{\infty} \pi(i)$$

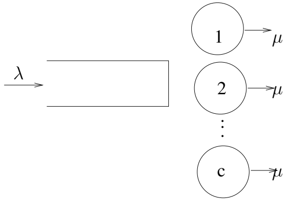
Formule d'Erlang C

Probabilité que les c ressources soient occupées:

$$\mathbb{P}[attente] = \frac{\frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c}}{\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c}}$$

Une autre formule d'Erlang

Même file mais avec blocage: M/M/c/c (ex: téléphone)



Pas d'attente: clients servis ou perdus.

- états finis
- $\lambda = 0$ si $X(t) \geq c$

On obtient: $\pi(i) = \pi(0)\frac{\rho^i}{i!}$ et $\pi(0) = \left(\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}\right)^{-1}$

Formule de perte d'Erlang (1917)

$$\mathbb{P}[blocage] = \pi(c) = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}}$$

Cette formule présente en outre la propriété essentielle d'être valide quelle que soit la distribution de service.