บทที่ 3 เส้นตรงและระนาบในปริภูมิสามมิติ

3.2 ทบทวนเรื่องเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

- เวกเตอร์, ขนาดของเวกเตอร์, มุมแสดงทิศทาง, โคไซน์แสดงทิศทาง
- ผลคูณเชิงสเกลาร์, ผลคูณเชิงเวกเตอร์, ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

- **สมการเส้นตรง** (สมการเวกเตอร์, สมการอิงตัวแปรเสริม, สมการสมมาตร)
- **จุดกับเส้นตรง** (จุดบนเส้นตรง, ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง, จุดตั้งฉาก)
- **เส้นตรงกับเส้นตรง** (การตัดกันของเส้นตรง, มุมระหว่างเส้นตรง, เส้นขนาน, เส้นไขว้ต่างระนาบ, ระยะระหว่างเส้นตรง)

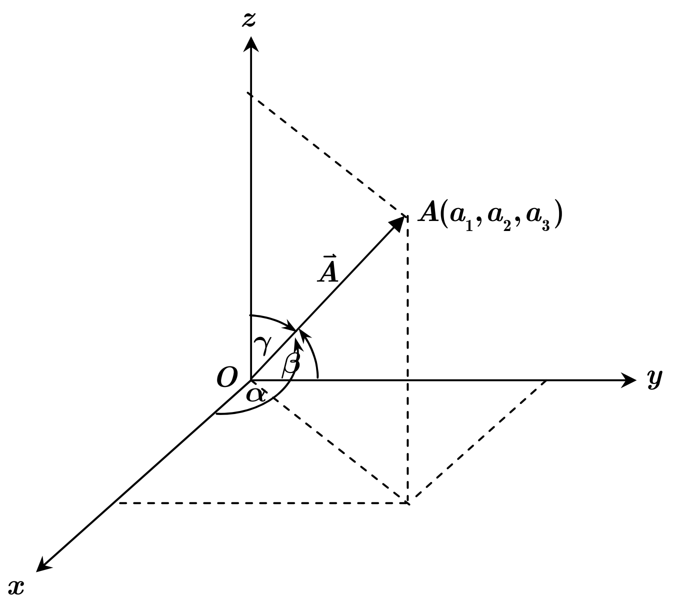
3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

- **สมการระนาบ** (สมการเวกเตอร์, สมการคาร์ทีเซียน)
- **จุดกับระนาบ** (จุดบนระนาบ, ระยะระหว่างจุดกับระนาบ, จุดตั้งฉาก)
- **เส้นตรงกับระนาบ** (เส้นตรงตัดกับระนาบและจุดตัด, เส้นตรงอยู่ในระนาบ, เส้นตรงขนานกับระนาบ)
- **ระนาบกับระนาบ** (ขนานกัน, ตัดกัน, มุมระหว่างระนาบ)

3.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และเส้นโค้ง

- **ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสองและสามมิติ**
- **การเคลื่อนที่ในปริภูมิสองและสามมิติ ความเร็วและความเร่ง**

3.2 ทบทวนเรื่องเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ



เวกเตอร์: $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

ขนาดของเวกเตอร์: $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

มุมแสดงทิศทาง: α, β, γ

โคไซน์แสดงทิศทาง:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\left\|\vec{A}\right\|},\ \ \cos\beta = \frac{a_2}{\left\|\vec{A}\right\|},\ \ \cos\gamma = \frac{a_3}{\left\|\vec{A}\right\|}$$

<u>เวกเตอร์หน่วย (unit vector)</u>

เวกเตอร์หน่วยในทิศของ $\vec{A}$ คือ $\dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

เวกเตอร์หน่วยในทิศตรงข้ามกับ $\vec{A}$ คือ $-\dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

<u>ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product, Dot Product)</u>

$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
2. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos\theta$

มุมระหว่างเวกเตอร์ $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$

ภาพฉายของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ คือ

$$\left(\vec{A} \cdot \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}\right) \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right) \vec{B}$$

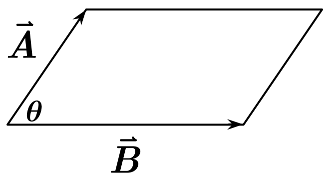
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector Product, Cross Product)

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3), \qquad \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\left\| \vec{A} \times \vec{B} \right\| = \left\| \vec{A} \right\| \left\| \vec{B} \right\| \sin\theta$$

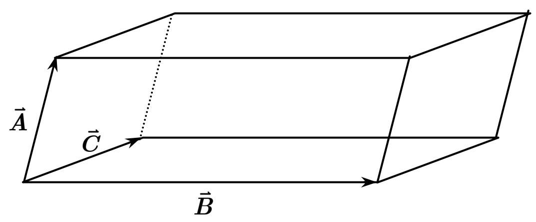
$=$ **พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน**



<u>ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์</u>

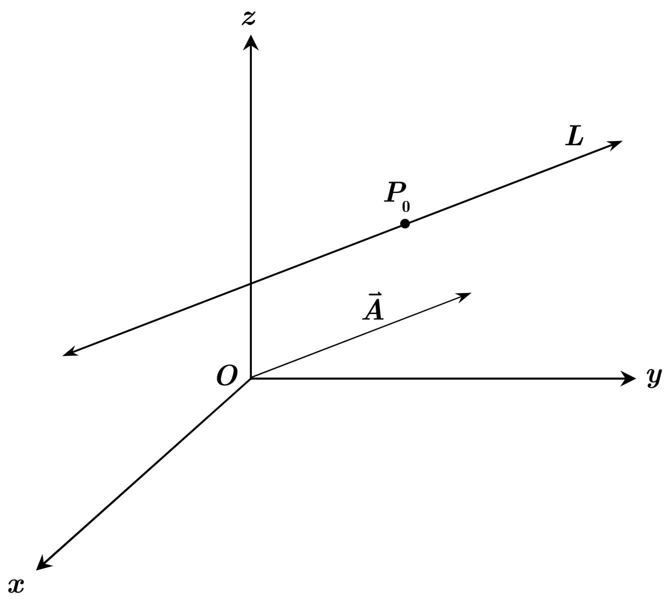
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) =$ ปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน (parallelepiped)



$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ



เรียก $\vec{A} = (a, b, c)$ ว่า <u>เวกเตอร์แสดงทิศทาง</u>

1. <u>สมการเวกเตอร์</u> $\vec{P} = \vec{P} + t\vec{A}$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

2. <u>สมการอิงตัวแปรเสริม</u> $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$

3. <u>สมการสมมาตร</u> (เมื่อ $a, b, c \neq 0$)

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,3)$ และขนานกับเวกเตอร์ $(4,5,6)$

2. เส้นตรง $x=2-3t,\ y=t-7,\ z=5t$

3. เส้นตรง $2x+1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{4}$

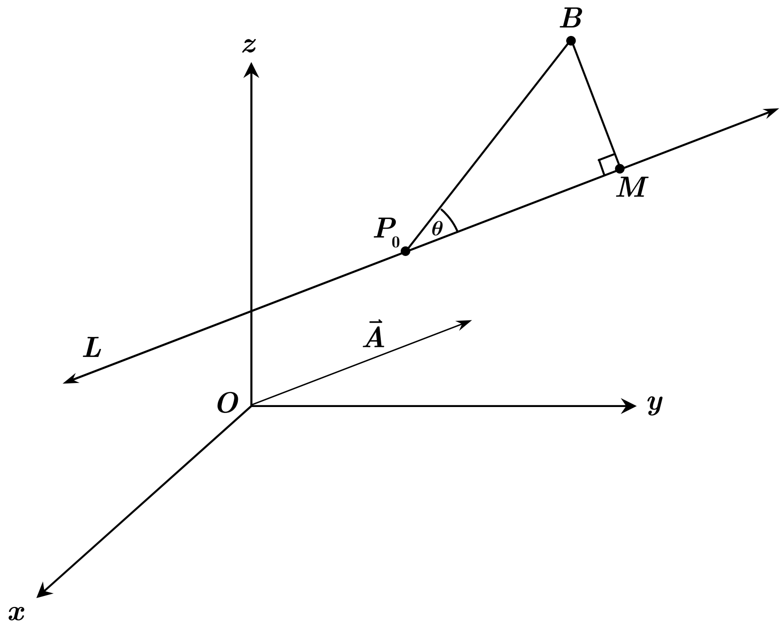
จุดกับเส้นตรง

จุด (x, y, z) อยู่บนเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อ (x, y, z) สอดคล้องสมการเส้นตรง L

ตัวอย่าง จุด $(2, 0, 3)$, $(8, 1, 2)$, $(-1, -1, 4)$ อยู่บนเส้นตรง $\dfrac{x-2}{3} = 2y = 3 - z$ หรือไม่

ตัวอย่าง จุด $(0, 2, 2)$, $(-1, 3, 5)$, $(1, 0, -1)$ อยู่บนเส้นตรง $x = 1 - t$, $y = 2t$, $z = 3t - 1$ หรือไม่

ระยะทางตั้งฉาก และ จุดตั้งฉาก



$$\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_0B}\right\|\sin\theta = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0B}\right\|\left\|\vec{A}\right\|\sin\theta}{\left\|\vec{A}\right\|}$$

$$\therefore \text{ ระยะทางตั้งฉาก } \left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\right\|}{\left\|\vec{A}\right\|}$$

$$\vec{M} = \vec{P_0} + \overrightarrow{P_0M}$$

$$\therefore \text{ จุดตั้งฉาก } \vec{M} = \vec{P_0} + \left(\frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\left\|\vec{A}\right\|^2}\right)\vec{A}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะตั้งฉากและจุดตั้งฉากจากจุด $(1,2,3)$ ไปยังเส้นตรง $x+1=2y-3=4z$

<u>เส้นตรงสองเส้น</u>

1. ตัดกัน

2. ไม่ตัดกัน มีสองแบบย่อย $\begin{cases} \text{ขนานกัน} \\ \text{ไขว้ต่างระนาบ} \end{cases}$

หาจุดตัดโดยการแก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเส้นตรงทั้งสองเส้น กล่าวคือ หา (x, y, z) ที่สอดคล้องทั้งสองสมการพร้อม ๆ กัน

ตรวจสอบการขนาน ให้ดูที่เวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองว่าขนานกันหรือไม่

ถ้าไม่ตัด และ ไม่ขนาน แสดงว่า เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ

<u>ตัวอย่าง</u>

$$L_1 : x = 1 + s,\ \ y = 2 - s,\ \ z = 2s$$
$$L_2 : x = 2 - t,\ \ y = 2t + 1,\ \ z = 3 - 3t$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$L_1 : x = 1 + s,\ \ y = 2 - s,\ \ z = 2s$$
$$L_2 : x = 2 - t,\ \ y = 2t + 1,\ \ z = 2 - 3t$$

มุมระหว่างเส้นตรง

หาได้จากมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทาง

ถ้า L_1 และ L_2 มีเวกเตอร์แสดงทิศทางเป็น $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$

จะได้ว่า $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{\left\|\vec{A}_1\right\|\left\|\vec{A}_2\right\|}$ โดยที่ $0 \le \theta \le 180^\circ$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง
แล้ว $180^\circ - \theta$ จะเป็นมุมระหว่างเส้นตรงด้วย

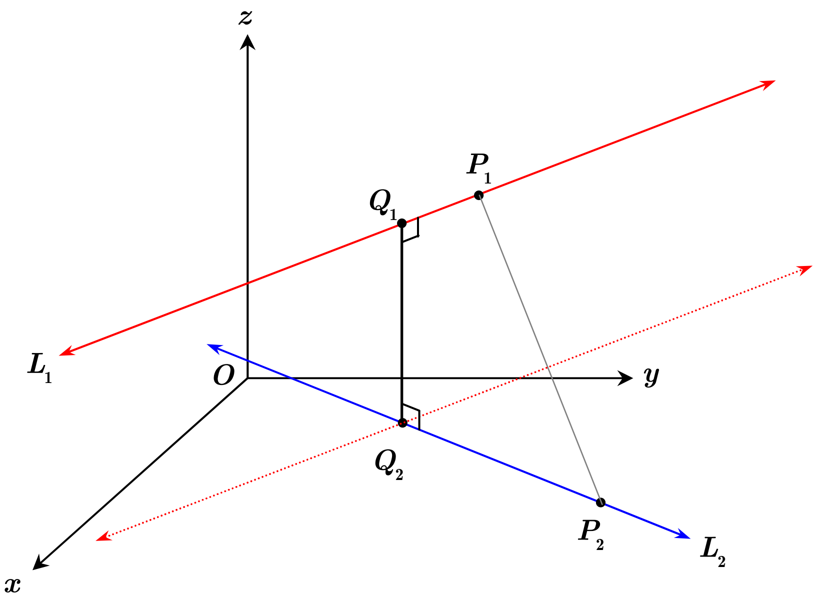
ตัวอย่าง มุมระหว่างเส้นตรง $x = 1 + t, 2 - t, 3 + 2t$

กับเส้นตรง $\dfrac{x-1}{2} = y = 2z$

ระยะทางระหว่างเส้นตรง

ถ้า $L_1 \parallel L_2$ ให้เลือกจุด P_1 ใด ๆ บน L_1
แล้วหาระยะทางจากจุด P_1 ไปยัง L_2

ถ้า L_1 ไขว้ต่างระนาบกับ L_2



ทิศทางของ $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ คือ $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$

$\left\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right\|$ = ขนาดของภาพฉายของ $\overrightarrow{P_1P_2}$ บน $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$

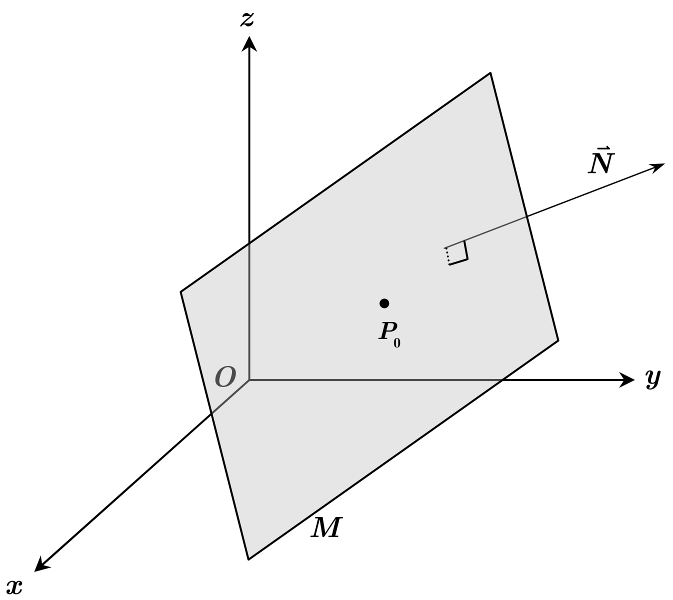
$$\therefore \quad \left\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)\right|}{\left\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\right\|}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะทางระหว่าง

เส้นตรง $x-1=2y-2=3z-3$

กับเส้นตรง $x=2-t,\ y=3+t, z=2t$

3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ



ระนาบ M กำหนดด้วยเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (a, b, c)$ และจุดผ่าน $P_0(x_0, y_0, z_0)$

จุด $P(x, y, z)$ อยู่บนระนาบ M ก็ต่อเมื่อ $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N}$

<u>สมการเวกเตอร์</u>

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$$
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

<u>สมการคาร์ทีเซียน</u>

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. ระนาบที่ผ่านจุด $(1,2,3)$
และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $(4,5,6)$

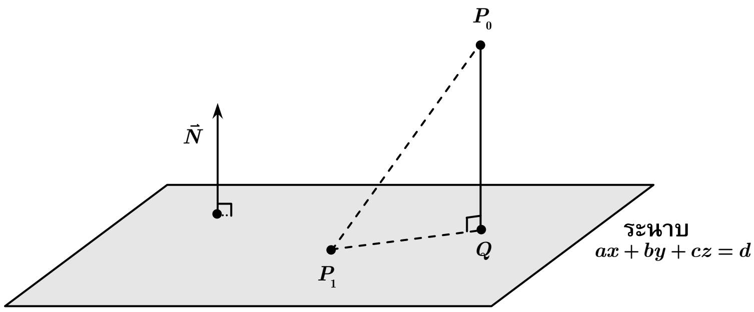
2. ระนาบที่ผ่านจุด $(-1,-2,-3)$
และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $(4,5,6)$

3. ระนาบที่ผ่านจุด $(1,2,3)$
และตั้งฉากกับเส้นตรง $x+1=2y+2=3y+3$

จุดกับระนาบ

จุดอยู่บนระนาบก็ต่อเมื่อพิกัดของจุดนั้นสอดคล้องสมการระนาบ

ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ



$$
\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{P_0Q}\right\| &= \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{N}\right|}{\left\|\vec{N}\right\|} \\
&= \frac{\left|(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)\cdot(a,b,c)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\
&= \frac{\left|(ax_1+by_1+cz_1)-(ax_0+by_0+cz_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\left\|\overrightarrow{P_0Q}\right\| = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}
$$

การหาจุดตั้งฉาก Q

<u>วิธีที่ 1</u>: หาสมการเส้นตรง L ที่ผ่านจุด P_0 และมี $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทาง จากนั้นหาจุดตัดของ L กับระนาบ

<u>วิธีที่ 2</u>:

$$\vec{Q} = \vec{P}_0 + \left(\frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{N}}{\left\| \vec{N} \right\|^2} \right) \vec{N}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะระหว่างจุด $(1,2,3)$ กับระนาบ $2x + y = 3 + 2z$ พร้อมทั้งหาจุดตั้งฉาก

<u>เส้นตรงกับระนาบ</u>

1. ตัดกันจุดเดียว $\Rightarrow$ หาจุดตัด

2. ตัดกันมากกว่าหนึ่งจุด $\Rightarrow$ เส้นตรงอยู่บนระนาบ

3. ไม่ตัดกัน $\Rightarrow$ เส้นตรงขนานกับระนาบ $\Rightarrow$ หาระยะห่าง

<u>ตัวอย่าง</u> ระนาบ $x + 2y + 3z = 6$

1. เส้นตรง $3x + 1 = 2y + 2 = z + 3$

2. เส้นตรง $x - 2 = -2y + 4 = z + 4$

3. เส้นตรง $3x + 1 = -3y + 6 = z$

การหามุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

ให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}$ ของเส้นตรงกับเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}$ ของระนาบ

มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบคือ $\left|90^\circ - \theta\right|$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหามุมระหว่างระนาบ $x + 2y + 2z = 6$

กับเส้นตรง $x + 1 = 2y + 2 = z + 3$

ระนาบกับระนาบ

1. ระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แนวฉากขนานกัน

$\Rightarrow$ **หาระยะห่างระหว่างระนาบ**

ระนาบ $ax + by + cz = d_1$ **กับ** $ax + by + cz = d_2$

มีระยะห่างเป็น $D = \dfrac{\left|d_1 - d_2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

2. ระนาบตัดกัน $\Rightarrow$ **หาเส้นตรงที่เป็นรอยตัด**

วิธีที่ 1: แก้สมการหาความสัมพันธ์ระหว่าง x, y, z

วิธีที่ 2: เวกเตอร์แสดงทิศทางของรอยตัดคือ $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$
แล้วหาจุดผ่านสักหนึ่งจุด

ตัวอย่าง **จงหารอยตัดของระนาบ** $x + y + z = 3$
กับระนาบ $2x - 2y + z = 4$

มุมระหว่างระนาบสองระนาบ

มุมระหว่างระนาบหาได้จากมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉาก

ตัวอย่าง จงหามุมระหว่างระนาบ $x + y + z = 3$
กับระนาบ $2x - 2y + z = 4$

3.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และเส้นโค้ง

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน 2 มิติ: $\vec{F}(t) = \big(f(t), g(t)\big)$

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน 3 มิติ: $\vec{F}(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$

<u>พีชคณิตพื้นฐาน</u>

1. $(\vec{F} + \vec{G})(t) = \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$

2. $(u\vec{F})(t) = u(t)\vec{F}(t)$

3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$

4. $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

<u>ลิมิต</u>

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t) \right)$$

<u>ความต่อเนื่อง</u> $\vec{F}$ **ต่อเนื่องที่** t_0 **ก็ต่อเมื่อ** $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = F(t_0)$

(นั่นคือ แต่ละส่วนประกอบต่อเนื่องที่ t_0**)**

อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\vec{F}'(t) = \left(f'(t), g'(t), h'(t)\right)$$

สูตรพื้นฐาน

1. $(\vec{F} + \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$

2. $(u\vec{F})'(t) = (u'\vec{F})(t) + (u\vec{F}')(t)$

3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = (\vec{F}' \cdot \vec{G})(t) + (\vec{F} \cdot \vec{G}')(t)$

4. $(\vec{F} \times \vec{G})'(t) = (\vec{F}' \times \vec{G})(t) + (\vec{F} \times \vec{G}')(t)$

ทฤษฎีบท

1. $\dfrac{d}{dt}\left\|\vec{F}(t)\right\|^2 = 2\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t)$

2. ถ้า $\vec{F}(t)$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว แล้ว $\vec{F}(t) \perp \vec{F}'(t)$

อินทิกรัลของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\int_a^b \vec{F}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt,\ \int_a^b g(t)\,dt,\ \int_a^b h(t)\,dt\right)$$

ทฤษฎีบท

1. ถ้า $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์คงตัว แล้ว

$$\int_a^b \vec{C}\cdot\vec{F}(t)\,dt = \vec{C}\cdot\int_a^b \vec{F}(t)\,dt$$

2. $\left|\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\right| \le \int_a^b \left|\vec{F}(t)\right| dt$

<u>การเคลื่อนที่</u>

กำหนดเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$

เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{V}(t)=\vec{r}'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$

และอัตราเร็ว $v(t)=\left\|\vec{V}(t)\right\|=\left\|\vec{r}'(t)\right\|$

เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{A}(t)=\vec{r}''(t)=\big(x''(t),y''(t),z''(t)\big)$

และอัตราเร่ง $\vec{a}(t)=\left\|\vec{A}(t)\right\|=\left\|\vec{r}''(t)\right\|$