2022학년도 1학기 컴퓨터언어학

제3강 로지스틱 회귀분석 (1)

박수지

서울대학교 인문대학 언어학과

2022년 3월 14일 월요일

오늘 배울 것

1. 확률적 분류기
2. 로지스틱 분류 함수
3. 교차엔트로피 오차 함수

필요한 것 (가르쳐 줌)

- 벡터의 내적과 행렬의 곱셈
- 로그함수와 지수함수의 특성
- 편미분 및 편도함수

형식화에 익숙해지기

예측 문제

입력 x의 값이 주어졌을 때 출력될 y의 값을 예측하는 함수 f

$$f(x) = y$$

분류 문제

예측 문제에서 입력이 관측(observation)이고 출력이 부류(class)인 경우

자연어처리의 과제들은 대부분 분류 문제를 푸는 것이다!

분류 예시: 단어 예측 $y \in$ Vocabulary

- f(“행렬을 배운 적이”) $=$ “없다”
- f(“집에 갈 수 ”) $=$ “있다”

분류 예시: 감정분석 $y \in \{+, -\}$

- f(“컴퓨터언어학 재밋어요!!!”) $= +$
- f(“컴퓨터언어학 힘들어요···”) $= -$

분류 예시: 자연어추론 $y \in \{\text{entailment}, \text{contradiction}, \text{neutral}\}$

- f(“접시를 깨뜨렸다. 접시가 부서졌다.”) $=$ entailment
- f(“컵을 씻었다. 컵이 더러워졌다.”) $=$ contradiction

그런데 분류 함수 f를 어떻게 얻을 수 있는가?

규칙기반 분류기

주어진 입력 x가 특정 규칙(들)을 만족하면 특정 범주 y로 분류한다.

규칙기반 분류기 예시: 스팸메일 감지

- 규칙1: 제목에 “[광고]”가 포함되어 있으면 스팸으로 분류한다.

확률적 분류기

주어진 입력 x가 범주 y로 분류될 조건부확률 P(y|x)를 계산한다.

통계적 분류기 예시: 감정분석

- P(+|“컴퓨터언어학 재밌어요!!!”) $= 0.89 \Rightarrow +$(긍정)으로 분류
- P(+|“컴퓨터언어학 힘들어요···”) $= 0.24 \Rightarrow -$(부정)으로 분류

기계학습 분류기의 네 가지 요소

1. 특성 표현: 관측된 데이터를 벡터로 표현한다.
   예 "컴퓨터언어학 재밋어요!!!" $\mapsto \vec{x} = [3.1, -0.7, 2.5]$
2. 분류 함수: 관측된 데이터가 속할 부류 y의 추정치 $\hat{y}$를 계산한다.
3. 목적 함수: 훈련 집합에서 오차를 최소화한다.
   - 훈련 집합: 관측(의 특성 표현) $\vec{x}^{(i)}$ 와 정답(실제 부류) $y^{(i)}$ 로 이루어진 집합
4. 최적화 알고리듬: 목적 함수를 최적화한다.

로지스틱 회귀분석이란?

분류 함수가 로지스틱 함수인 분류기

회귀분석 벼락치기

선형 회귀분석 (분류 문제 아님!)

$y = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$

예시 (Pagel et al. 2007)

https://www.doi.org/10.1038/nature06176

자주 쓰이는 단어일수록 형태가 보존된다.

예시(en-fr)
- 저빈도 tail-queue (교체 O)
- 고빈도 two-deux (교체 X)

x 단어 빈도의 로그 값

y 어휘 교체가 일어난 비율의 로그 값

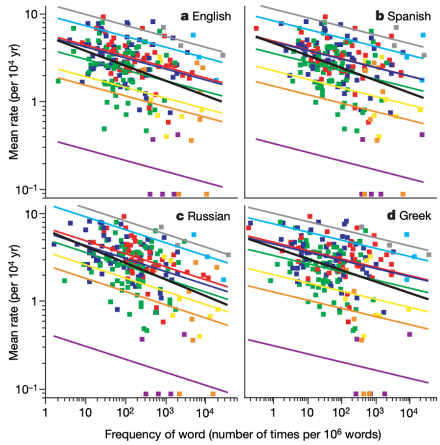


Figure 3 | Frequency of meaning-use plotted against estimated rate of lexical evolution for 200 basic meanings in four Indo-European languages.

선형 회귀분석 (회귀 문제 $y \in \mathbb{R}$)

$$\hat{y} = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$$
$$= w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_f x_f + b$$

관측의 특성값 $\vec{x} = [x_1, x_2, \cdots x_f]$

가중치 $\vec{w} = [w_1, w_2, \cdots w_f]$

편향(절편) b

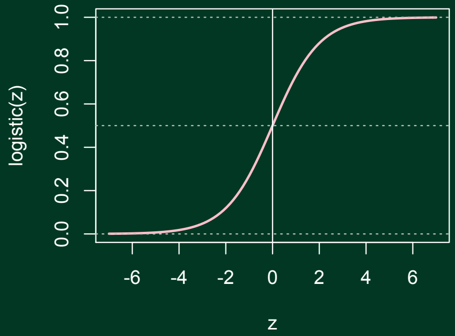
로지스틱 회귀분석 (분류 문제임!)

$$z = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$$
$$\hat{y} = P(y = 1|\vec{x}) = \sigma(z) = \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)$$

실제 부류 $y \in \{0, 1\}$

로지스틱 함수(시그모이드)

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$$



exp 함수를 처음 보는 사람들을 위해

$e^a = b$가 성립할 때(자연상수 $e \approx 2.71828$)

로그함수 $a = \log(b)$

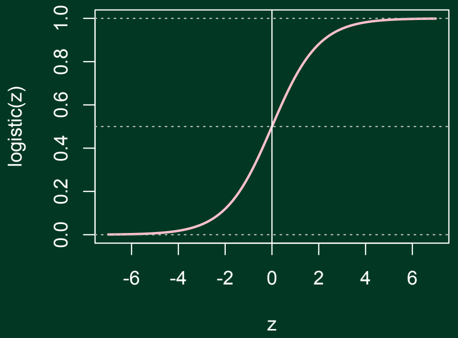
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(\exp(x)) = x$
- $\log(1) = 0$
- 양의 실수 $x > 0$에 대해서만 $\log(x)$ 정의 가능
- $\lim_{x \to \infty} \log(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} \log(x) = -\infty$

지수함수 $b = \exp(a)$

- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(\log(x)) = x$
- $\exp(0) = 1$
- 모든 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $\exp(x) > 0$ 성립
- $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

로지스틱 함수

$$\sigma(z) = \frac{1}{1+\exp(-z)}$$



- $\sigma(0) = \dfrac{1}{1+\exp(0)} = \dfrac{1}{1+1} = 0.5$
- $\lim_{z \to +\infty} \sigma(z) = 1$
- $\lim_{z \to -\infty} \sigma(z) = 0$
- 모든 $z \in \mathbb{R}$에 대해 $0 < \sigma(z) < 1$ 성립

로지스틱 함수를 사용하는 목적

확률의 조건을 충족하는 값을 얻기 위해

로지스틱 회귀분석

문서의 표현: 특성값의 벡터 $\vec{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_f] \in \mathbb{R}^f$

긍정적일 확률 $P(y = 1|\vec{x}) = \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x} + b) = \dfrac{1}{1 + \exp\left(-(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)\right)}$

부정적일 확률 $P(y = 0|\vec{x}) = 1 - P(y = 1|\vec{x}) = \cdots = \dfrac{\exp\left(-(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)\right)}{1 + \exp\left(-(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)\right)}$

주의 $y \in \{0, 1\}$이므로 $P(y = 1|\vec{x}) + P(y = 0|\vec{x}) = 1$이 성립해야 한다(이항 분류).

각 부류의 확률을 구하고 나면 더 높은 확률을 가지는 부류를 예측값으로 선택하면 된다.

결정 경계

$$\mathrm{decision}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } P(y = 1|\vec{x}) > 0.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

로지스틱 회귀분석 분류 예시: 영화평 감정 분류

특성 설정

Var	Definition	Value in Fig. 5.2
x_1	count(positive lexicon words $\in$ doc)	3
x_2	count(negative lexicon words $\in$ doc)	2
x_3	$\begin{cases} 1 & \text{if “no”} \in \text{doc} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	1
x_4	count(1st and 2nd pronouns $\in$ doc)	3
x_5	$\begin{cases} 1 & \text{if “!”} \in \text{doc} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	0
x_6	$\log(\text{word count of doc})$	$\ln(66) = 4.19$

로지스틱 회귀분석 분류 예시: 영화평 감정 분류

특성값 계산

$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = [3, 2, 1, 3, 0, 4.19]$

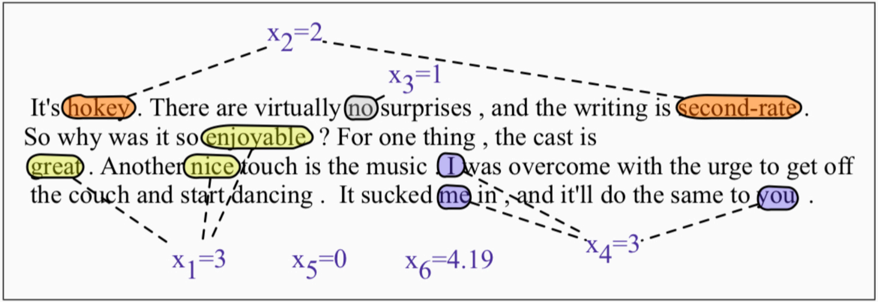


Figure 5.2 A sample mini test document showing the extracted features in the vector *x*.

로지스틱 회귀분석 분류 예시: 영화평 감정 분류

확률 계산

설정: $[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6] = [2.5, -5.0, -1.2, 0.5, 2.0, 0.7]$, $b = 0.1$

$$
\begin{aligned}
p(+|x) = P(y=1|x) &= \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) \\
&= \sigma([2.5, -5.0, -1.2, 0.5, 2.0, 0.7] \cdot [3, 2, 1, 3, 0, 4.19] + 0.1) \\
&= \sigma(.833) \\
&= 0.70 \qquad (5.7) \\
p(-|x) = P(y=0|x) &= 1 - \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) \\
&= 0.30
\end{aligned}
$$

다량의 데이터 처리하기

실제의 시험 집합은 여러 개의 데이터로 이루어져 있다.

$$\hat{y}^{(i)} = \sigma\left(\vec{w} \cdot \vec{x}^{(i)} + b\right) = \sigma\left(\left[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_f^{(i)}\right] \cdot [w_1, w_2, \ldots, w_f] + b\right)$$

시험 집합에 관측이 m 개, 특성값이 f 가지 있을 때: 입력값을 $(m \times f)$ 행렬로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{y}^{(1)} \\ \hat{y}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(m)} \end{bmatrix} = \sigma\left(\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_f^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_f^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \cdots & x_f^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}\right)$$

로지스틱 회귀분석 모형을 학습시킨다는 것

모형 매개변수(가중치 벡터 $\vec{w}$와 편향 b)를 학습시키는 것

모형 매개변수를 어떻게 학습하는가?

- 분류기가 예측한 $\hat{y}$와 정답 y 사이의 거리를 표현하는 손실(비용) 함수 L을 정의한다.
  - 평균제곱오차(Mean Squared Error) — 선형 회귀분석
  - 교차엔트로피오차(Cross Entropy Error) — 로지스틱 회귀분석
- 손실 함수의 값을 최소화하는 알고리듬을 실행한다.
  - (확률적) 경사하강법((Stochastic) Gradient Descent)

손실 함수

$\hat{y}$ 예측 결과
y 실제 정답

$\hat{y}$와 y가 얼마나 떨어져 있는가?

예시: 선형 회귀분석

- 예측값 추정 $\hat{y} = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$
- 손실 함수 $L_{MSE}(\hat{y}, y) = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cost}(\vec{w}, b) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L_{MSE}\left(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\left(\vec{w} \cdot \vec{x}^{(i)} + b - y^{(i)}\right)^2 \end{aligned}$$

$\vec{w}, b$에 대해 미분하여 최솟값을 구할 수 있다.

로지스틱 회귀분석의 문제

평균제곱오차 손실 함수를 사용하면 최적화하기 어렵다.

교차엔트로피 손실 함수의 목표

조건부최대가능도 추정법(Conditional maximum likelihood estimation)
훈련 집합의 관측 $\vec{x}$에 대한 정답 y의 확률을 최대로 만드는 매개변수 $\vec{w}$와 b를 선택한다.

$$\begin{aligned} p(y|\vec{x}) \text{ 의 값을 최대로 만든다} &= \log p(y|\vec{x}) \text{ 의 값을 최대로 만든다} \\ &= -\log p(y|\vec{x}) \text{ 의 값을 최소로 만든다} \end{aligned}$$

똑같이 $y = 1$을 맞히더라도 $\hat{y} = 0.9$의 확률로 맞히는 것이 $\hat{y} = 0.6$보다 좋다!

로지스틱 회귀분석 분류기의 확률 표현 및 로그 값

$$
\begin{aligned}
p(y|x) &= \begin{cases} \hat{y}, & y = 1 \\ 1 - \hat{y}, & y = 0 \end{cases} \\
&= \hat{y}^{y} (1 - \hat{y})^{1-y} \qquad (\hat{y}\text{는 } y\text{가 } 1\text{일 확률})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log p(y|x) &= \log \left[\hat{y}^{y} (1 - \hat{y})^{1-y}\right] \\
&= y \log \hat{y} + (1 - y) \log (1 - \hat{y})
\end{aligned}
$$

교차엔트로피 손실 함수

$$
\begin{aligned}
L_{CE}(\hat{y}, y) &= -\log p(y|x) \\
&= -\left[y \log \hat{y} + (1-y)\log(1-\hat{y})\right] \\
&= -\left[y \log \sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}+b) + (1-y)\log(1-\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}+b))\right]
\end{aligned}
$$

모형의 “비용”

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cost}(\vec{w}, b) &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L_{CE}\left(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}\right) \\
&= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[y^{(i)}\log\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(i)}+b) + (1-y^{(i)})\log\left(1-\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(i)}+b)\right)\right]
\end{aligned}
$$

개괄

통계적 분류기 일반 $P(\mathrm{class}|\mathrm{observation})$

로지스틱 회귀분석 $P(Y = 1|X = \vec{x}) = \sigma\left(\vec{w} \cdot \vec{x} + b\right) = \dfrac{1}{1 + \exp\left(-(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)\right)}$

$\hat{y}$ 관측의 특성값 x가 주어졌을 때 분류기가 y를 1로 예측할 확률 $(0 < \hat{y} < 1)$

y x에 해당하는 관측이 실제로 속하는 부류(정답) $(y \in \{0, 1\})$

목표

$y = 1$일 때 $\hat{y}$를 1에 가깝게, $y = 0$일 때 $\hat{y}$를 0에 가깝게 만들기

$\Rightarrow$ 교차엔트로피 함수 $L_{CE} = -\left[y \log \hat{y} + (1 - y) \log\left(1 - \hat{y}\right)\right]$ 의 값을 최소로 만들기

$\Rightarrow$ 방정식 $\dfrac{\partial}{\partial w_1} L_{CE} = 0, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial w_f} L_{CE} = 0, \dfrac{\partial}{\partial b} L_{CE} = 0$을 만족하는 $\vec{w}$, b의 값을 구하기

문제

$\frac{\partial}{\partial w_j} L_{CE} = 0$을 만족하는 w_j의 값을 한번에 계산해 낼 수 없다.

해결

확률적 경사 하강법(Stochastic Gradient Descent) 알고리듬으로 해를 찾는다.

그런데 $\frac{\partial}{\partial w_j} L_{CE}$라는 기호가 무슨 뜻인가?

편도함수 벼락치기

정의

다변수함수를 하나의 변수에 대하여 (나머지 변수를 상수로 놓고) 미분하여 얻은 도함수

예시

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3^2$일 때 x_j에 대한 편도함수는 아래와 같다.

- $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = x_2$
- $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x) = x_1$
- $\frac{\partial}{\partial x_3} f(x) = 2x_3$

통계적 분류기로서 로지스틱 회귀분석의 작동 과정

1. 훈련 집합의 각 문서를 특성값들의 벡터 $\vec{x}$로 나타낸다.
2. 분류기가 $\vec{x}$를 1로 분류할 확률 $\hat{y} = P(y = 1|\vec{x})$를 $\sigma(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)$로 나타낸다.
3. 확률 추정값 $\hat{y}$과 실제 정답 y 사이의 “거리”를 교차엔트로피 손실 함수로 정의한다.
4. 교차엔트로피 손실 함수의 값을 최소로 만들기 위해 편도함수의 값이 0이 될 때의 모형 매개변수 $\vec{w}$, b의 값을 계산한다.

남은 문제

1. 텍스트를 어떻게 수치화된 벡터 $\vec{x}$로 나타내는가? — Feature Engineering
2. 부류가 0, 1 이외에 세 개 이상 존재하는 경우 확률을 어떻게 추정하는가? — Multinomial logistic regression
3. 교차엔트로피 손실 함수의 편도함수가 0이 되는 지점을 어떻게 찾는가? — Gradient Descent