# 第四章数值积分实验总结

樊建琦

October 2024

## 1 Introduction

对于复杂原函数的情况，我们希望跳过回溯原函数这一步骤，利用插值函数拟合，但这同样回到了第三章遇到的问题，我们不能很好的处理大区间的拟合性，于是我们转战低段低次数值积分。类似第三章小区间线段拟合的思想，可以把总区间 [a,b] 等分 n 小份，每个小区间当作矩形，有公式

$$T_n = \frac{h}{2} * \left[ f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

考察余项 $R(x)$ 会发现此时的误差阶是 $O(h^2)$

$$R([f]) = \frac{(b-a) * h^2}{12} \cdot f''(\eta), \quad \eta \in (a, b)$$

如若采用经验科学中的阻尼法，让余项与步长减半后的余项线性组合，会得到误差阶为 $O(h^4)$ 的公式

$$S(x) = \frac{4 \cdot T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3}$$

同理可以得到误差阶为 $O(h^6)$ 的公式

$$C(x) = \frac{16 \cdot T(\frac{h}{2}) - T(h)}{15}$$

误差阶为 $O(h^8)$ 的公式

$$R(x) = \frac{64 \cdot T(\frac{h}{2}) - T(h)}{63}$$

自上而下线性组合两种步长呈二倍关系的公式可以向外推导出误差阶降至一半的公式，即 Richardson Extrapolation。本次实验将利用这两种算法进行数值积分。

## 2 Result

利用给定精度，算出传统复合梯形公式所需区间数 n，累积出积分数值；构造 T 表，同书上的表 4-4，构造下三角 T 表，行号 $i = m + k$. 列号 $j = m$。精度对比后可得到结论：龙贝格算法以少划分，大步长，高精度的优势略胜复合梯形公式一筹。

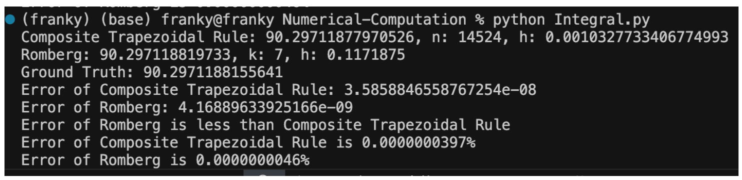


图 1: 两种算法结果对比

以下是更直观的结果展示：

1. **复合梯形法**：

- 积分结果：90.29711877970526
- 区间划分数 $n$：14524
- 步长 $h$：0.0010327733406774993
- 绝对误差：$3.5858846558767254 \times 10^{-8}$
- 相对误差：0.0000000397%

2. **龙贝格方法**：

- 积分结果：90.297118819733
- 二分次数 $k$：7（对应区间划分数 $2^7 = 128$）
- 步长 $h$：0.1171875
- 绝对误差：$4.16889633925166 \times 10^{-9}$
- 相对误差：0.0000000046%

# 3 Analysis

从实验结果可以得出以下结论，并分析为什么 Romberg 方法在这种情况下比传统的复合梯形法更优。

## 3.1 Contrast

- **precision**：龙贝格方法的误差明显小于复合梯形法。具体来说，复合梯形法的误差为 $3.59 \times 10^{-8}$，而龙贝格的误差仅为 $4.17 \times 10^{-9}$。虽然这两个方法的误差都非常小，但龙贝格的误差要小得多，精度更高。
- **segments**：复合梯形法使用了 14524 个区间，而龙贝格方法仅使用了 $2^7 = 128$ 个区间，但龙贝格方法却能达到更高的精度，说明龙贝格方法在区间划分数量上更加高效。
- **step size** $h$：复合梯形法的步长 $h$ 非常小，为 0.00103，而龙贝格方法的步长为 0.11718，明显更大。但即便步长较大，龙贝格方法依然能够得到更好的结果。这说明龙贝格方法在提高精度上不仅仅依赖于更细的划分，而是通过 Richardson 外推进行精度的改进。

## 3.2 Why Romberg's better

1. **Limitations of the Composite Trapezoidal** ：

- 复合梯形法的基本思想是通过等距划分区间并对每个小区间应用梯形法进行积分。它的精度随着划分的增多而提高，但精度的提高比较缓慢，需要非常多的区间才能达到较高的精度，这会导致计算成本较高。
- 复合梯形法的误差收敛速度是 $O(h^2)$，也就是说步长减小一倍，误差减少 4 倍。虽然有效，但提升精度的速度相对较慢。

2. **Romberg's Advantages**：

- Romberg 方法基于梯形法的递推公式，但它通过 **Richardson Extrapolation**，结合不同步长下的结果，对积分值进行精度修正。通过这种递推公式，Romberg 方法可以达到比单纯的梯形法更高的精度。
- Romberg 的误差收敛速度是 $O(h^{2k})$，其中 $k$ 是递推的次数。因此，Romberg 方法可以在使用较少的划分数时，迅速提高积分的精度。这

在你的实验中得到了验证，虽然龙贝格方法只进行了 7 次二分，使用了 128 个区间，但它的精度远远优于划分 14524 个区间的复合梯形法。

### 3.3 Conclusion

复合梯形法需要非常多的区间划分才能达到较高的精度，因此计算效率较低。而 Romberg 方法通过 Richardson 外推显著提高了计算精度，即使使用较少的区间划分，也能获得比复合梯形法更好的结果。实验结果表明，龙贝格方法在精度和计算效率上优于传统的复合梯形法，是处理数值积分问题时一个更高效的选择。