第一章 引言

在研究连续的非线性微分方程的过程中，单调迭代方法可以起到有效的作用．而通过生成迭代序列的建立，可以去掉对方程右端连续性的要求．首先，本文使用泛函分析的研究方法，对生成迭代序列等概念作出了定义，并在此基础上建立了相关的不动点存在定理．然后，本文结合非线性微分方程的初值问题，给出了最大最小解的存在条件，建立了最大最小解的存在定理，并通过相关定理的证明，说明了IVP的最大最小解的存在性与初值和方程右端之间的依赖关系．在这个过程中，主要应用了前面提到的泛函分析中的相关结论．然后，为了让最大最小解的存在定理得到应用，本文给出了一个引理，说明了解的存在定理的具体应用范围，并在此基础上，给出了四个应用实例，作为对全文的总结．例子运用了前文的研究成果，用相关定理证明了四类右端不连续的微分方程的解的存在性，以及说明了解应具有的形式．另外，在最后的资料翻译部分，还提及了如何利用生成迭代序列解决边值问题的解的存在性的问题，证明了一个引理，提出了一个用来应用存在定理的引理，给出了一个例子．

1.1 对非线性微分方程问题的历史回顾

对非线性常微分方程理论的研究始于二十世纪五十年代．它把泛函分析理论和常微分方程理论联系起来，用泛函分析的方法研究常微分方程的问题．问题的起源是，当时，人们发现很多重要的偏微分方程都可以统一到非线性常微分方程的初值问题（IVP）

$$u' = f(t,u), u(t_0) = u_0 \qquad (1.1)$$

来进行进一步研究．随着研究的进行，人们发现非线性常微分方程理论有着重要的应用[8]．

八十年代初，三部专著的出现标明了对非线性常微分方程已经初步形成了理论体系[9]．1982年，S．W．Du和V．Lakshmikantham应用上、下解方法，证明了IVP（1.1）的最大最小解的一个存在条件．1989年，在我国，著名学者郭大钧教授和孙经先合作，出版了我国在这个领域的第一部专著[8]．1990年，孙经先对[10]中的主要定理作了改进[11]．1994年，H．Xu等用单调迭代方法研究了IVP（1.1）最大最小解的存在性[12]．1996年，S．Schmidt研究了非线性项f被分解成$f = g + h$时解的存在性[13]．随后M．Frigon和D．O’Regan又对[13]中的结果作了改进[14-15]．

1.2 右端不连续的非线性微分方程

在实际生产生活中，大量的自然现象都可以被描述成带有不连续函数的微分方程[16]．研究证明，在对右端连续的非线性微分方程的研究中，单调迭代方法是非常有效的方法[3]，在本文中，我们将用迭代序列[2]来对右端不连续的微分方程作进一步研究，指出一类不连续初值问题广义解的存在条件，并利用相应结论得出某些特定的存在条件．本文主要定理基于S．Heikkila，V．

Lakshmikantham, S．Leela于1987年发表的"Applications of Monotone Techniques to Differential Equations with Discontinuous Right Hand Side" [1]中的部分内容.

1.3 不连续微分方程研究的现状

如前所述，对不连续微分方程还在继续．除了Heikkila等的研究成果，1990年，孙经先对含有间断项的IVP（1.1）进行了研究，得到了新的结论[5]．对于不连续的微分-积分方程，1993年，孙经先和赵增勤讨论了一类一阶不连续Hammerstein型微分-积分方程[6]．进一步，文[17]研究了一阶混合型微分-积分方程的初值问题 $x' = f(t,x,Tx,Sx)$ 最大最小解的存在性．2000年，刘笑颖在[4]中讨论了Banach空间一阶不连续混合型微分-积分方程初值问题最大解和最小解的存在性，推广并改进了[7]的工作．不过，虽然新的成果还在不断出现，但总体说来，到目前为止，对不连续的非线性微分方程和微分-积分方程的研究还不很丰富.

1.4 主要研究方法

在对右端连续的非线性微分方程的研究中，单调迭代方法的有效性已经得到了证明[3]．用单调迭代序列方法有助于取消右端连续性的假设[2]．在本文中，对右端不连续的微分方程初值问题解的存在性的研究，主要是通过建立单调迭代序列进行的．关于生成迭代序列的定义将在下一章的第一部分中给出．除此之外，上下解方法也得到了应用．通过对本问题的分析、学习和研究，将对非线性泛函分析理论的应用产生进一步的认识.

在一阶微分方程初值问题

$$u' = f(t,u), u(0) = u_0$$

中，若*v(t)*满足

$$v'(t) \le f(t,v(t)), v(0) \le u_0$$

则称*v(t)*是以上初值问题的一个下解．若w(t)满足

$$w'(t) \ge f(t,w(t)), w(0) \ge u_0$$

则称*w(t)*是以上初值问题的一个上解．显然，根据上下解的定义，在寻找微分方程的解的过程中，使用上下解可以缩小求解的范围．在这个过程中，期待得到某种更好的结果，就是在本文中上下解方法的主要作用．同时，注意上面的自然半序≤、≥ 的引入，是非线性泛函分析中半序空间中的相应概念的特例．有关的泛函分析中的相关理论基础详见下一章.

第二章 预备知识和不动点存在定理

2.1 一些基础概念

设 $P = (P,\le)$ 为一个半序集．对于 $a,b \in P, a \le b$，标记 $[a,b] = \{u \in P \mid a \le u \le b\}$.

如果 $Q:[a,b] \to [a,b]$ 是一个增映射，我们就说 $\operatorname{Im} Q$ 中的一个迭代序列 C 是 Q 生成的 b-迭代序列，如果 Qb 是其中最大的元素，并且 $Qc \in C, Qc < Qb$ 意味着

$$c = \inf_n Q^n v \text{，其中 } v = \inf(Qc \in C \mid Qc < Qu).$$

如果C是一个用“≥”定义的Q生成的a-迭代序列，就说它是一个Q生成的a+迭代序列.

标记K是U中所有Q生成的b-迭代序列，其中

$$U=\{Qu \mid Qu<u,\ \text{且对所有 } w\le Qw \text{ 有 } w\le u\},$$

又标记H是W中所有Q生成的a+迭代序列，其中

$$W=\{Qu \mid u<Qu,\ \text{且对所有 } Qw\le w \text{ 有 } u\le w\}.$$

作为[2]中定理2.1和2.2中的一个推论，我们有

2.2 不动点存在定理

定理2.1 设有增映射$Q:[a,b]\to[a,b]$，且满足

$$\text{对所有 } C\in K, v=\inf C \text{ 以及 } \inf_n Q^n v \text{ 存在}, \qquad \text{(I)}$$

则Q有最大不动点u^*，并且

$$u^*=\max\{w\in[a,b] \mid w\le Qw\}. \qquad (2.1)$$

如果Q满足

$$\text{对所有 } C\in H, v=\sup C \text{ 以及 } \sup_n Q^n v \text{ 存在}, \qquad \text{(S)}$$

则Q有最小不动点u_*，且

$$u_*=\min\{w\in[a,b] \mid Qw\le w\}. \qquad (2.2)$$

在对这些结果的证明过程中，主要的步骤是为了说明，在给定的假设条件下，K和H中存在最大迭代序列C_0和C_1分别符合结论，且具有

$$u^*=\inf_n Q^n v, \text{其中 } v=\inf C_0,$$

以及

$$u_*=\sup_n Q^n v, \text{其中 } v=\sup C_1$$

的性质.

最后，我们还需要序列H和K的如下性质（见[2]）.

引理2.1 如果Qc和Qw是属于H或K的迭代序列C中的元素，则由$Qc<Qw$可知$c<w$. 如果$C\in K$，则

$$Qv_1\le v_1, \text{其中 } v_1=\inf\{Qu\in C \mid Qc<Qu\},$$

而如果$C\in H$，则

$$Qv_2\ge v_2, \text{其中 } v_2=\sup\{Qu\in C \mid Qu<Qw\}.$$

标记$u_n=Q^{n-1}v_1$，其中v_1如引理2.1中定义，我们得到一个单调递减序列$\{u_n\}$. 并且，如果$Qc\in C\in K$，且$Qc<Qb$，则有

$$c=\inf_n u_n=\inf_n Qu_n\text{，但是 } Qc<c.$$

如果c具有上述性质，我们就说Q有一个从(c,Qc)到(c_+,c_+)的c的向右的上跳跃（Jump Up to the Right at c），且标记$w\in JUR(Q)$.

相应地，如果$Qc\in C\in H$且$Qa<Qw$，则Q有一个从(w,Qw)到(w_-,w_-)的w的向左的下跳跃（Jump Down to the Left at w），且标记$w\in JDL(Q)$，如果在$[a,b]$中，存在一个单调递增序列(w_n)，使得

$$w=\sup_n w_n=\sup_n Qw_n\text{，但是 } w<Qw.$$

因此，通过研究H中的迭代序列的最小元素的形式，并标记u_*为Q的可能的最小不动点，我们得到[2]中的结论2.2.

系2.1设有增映射$Q:[a,b]\to[a,b]$，则

a) $u_*={}_1Q(a)=\sup_n Q^n a$，如果其存在，并且不在$JDL(Q)$内.

b) $u_*={}_mQ(a)=\sup_{n_m}(\ldots\sup_{n_1}(Q^{n_1})\ldots)^{n_m}(a)$，如果其右端有定义，并且不在$JDL(Q)$内.

c) $u_*=\sup_m({}_mQ(a))$，如果其存在，并且不在$JDL(Q)$内.

关于Q的最大不动点的存在性的相应结论也存在，见[2]中的结论2.1.

第三章 初值问题的应用

设T是一个给定的正数，定义$J=[0,T]$，且

$$P=C(J,R)=\{u:J\to R\mid u\text{连续}\},$$

且按照如下规则定义P的半序

$$u\le v\text{，当且仅当对任给的 } t\in J,u(t)\le v(t).$$

进一步，我们定义

$$AC(J,R)=\{u:J\to R\mid u\text{绝对连续}\},$$

且

$$L(J,R)=\{u:J\to R\mid u\text{在}J\text{上}Lebesgue\text{可积}\}.$$

在这里，我们考虑如下初值问题（IVP）

$$u'=f(t,u)\text{ 在J上几乎处处成立，}u(0)=u_0, \qquad (3.1)$$

其中，假定函数$f:J\times R\to R$满足

(f1) 存在$\alpha,\beta\in AC(J,R),\alpha\le\beta$，且在J上几乎处处成立
$\alpha'\le f(t,\alpha)$且$\beta'\ge f(t,\beta)$,

(f2) $f(\cdot,u(\cdot))\in L(J,R)$，对所有$u\in[\alpha,\beta]$,

(f3) 存在$h\in L(J,R_+)$，且有
$f(t,u)-f(t,v)\ge -h(t)(u-v)$，对所有$\alpha(t)\le v\le u\le\beta(t),t\in J$.

当提及(3.1)的最小解，最大解，下解，上解的时候，我们指的是在区间$[\alpha,\beta]$上．其中，若*v(t)*满足

$$v'(t)\le f(t,v(t)),v(0)\le u_0$$

在*J*上几乎处处成立，则称*v(t)*是以上初值问题的一个下解．若w(t)满足

$$w'(t)\ge f(t,w(t)),w(0)\ge u_0$$

在*J*上几乎处处成立，则称*w(t)*是以上初值问题的一个上解．而最大解和最小解分别指的是符合(3.1)的所有解中的最大的解和最小的解．

3.1 最大最小解的存在性

作为定理2.1的一个应用，我们将证明

定理3.1 设$f:J\times R\to R$满足条件(f1)-(f3)．则对于每个$u_0\in[\alpha(0),\beta(0)]$，初值问题(3.1)有最大解和最小解．

证明：按条件(f1)-(f3)定义设α,β和h．定义

$$a(t)=\alpha(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau},\quad b(t)=\beta(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau},\quad t\in J \qquad (3.2)$$

以及

$$q(t,s)=f(t,se^{-\int_0^t H(\tau)d\tau})e^{\int_0^t H(\tau)d\tau}+h(t)s,t\in J,s\in R. \qquad (3.3)$$

由(f1)，

$$\alpha'\le f(t,\alpha)，几乎处处在，且\exp(\int_0^t h(\tau)d\tau)>0$$

以及

$$a'(t)=\alpha'(t)\exp(\int_0^t h(\tau)d\tau),\quad 且q(t,a)=f(t,\alpha(t))\exp(\int_0^t h(\tau)d\tau)+\alpha(t)h(t)\exp(\int_0^t h(\tau)d\tau)$$

有（b的情形完全类似）：

$$a'\le q(t,a)，和b'\ge q(t,b)在J上几乎处处成立， \qquad (3.4)$$

又由(f3)可知，$q(t,\cdot)$ 对任给的$t\in J$ 在$[\alpha(t),\beta(t)]$ 上是增函数．又由(f2)，引入Eq．

$$Qu(t)=u_0+\int_0^t q(\tau,u(\tau))d,t\in J \qquad (3.5)$$

对每个$u_0\in[\alpha(0),\beta(0)]=[a(0),b(0)]$，都定义一个增算子$Q:[a,b]\to[a,b]$．

为了证明Q有最小不动点，显然要证明Q满足定理2.1中的条件(S)．

设C是集合W中的一个Q迭代生成的a+序列．因为$Qu(t)\in[a(t),b(t)]$，对任给的$t\in J$，以及$Qu\in C$，则

$$v(t)=\sup\{Qu(t)\mid Qu\in C\}$$

对任给的$t\in J$存在．从C中选择一个序列(Qu_n)，使得$(Qu_n(T))$增，且收敛于$v(T)$．通过"$\le$"和C的定义，以及引理2.1，(Qu_n)是属于$[a,b]$的函数的递增序列．因为对*P*中任给的$\xi\ge\eta$，有

$$q(t,\xi)-q(t,\mu)=f(t,\xi e^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}-f(t,\mu e^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}+h(r)(\xi-\mu)$$

$$\geq -e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}(\xi-\mu)h(t)+h(r)(\xi-\mu)=0,$$

在J上几乎处处成立. 故$q(t,\cdot)$是增函数. 由(3.5)，对所有$t\in J$和$0\leq m\leq n$，有

$$0\leq Qu_n(t)-Qu_m(t)\leq Qu_n(T)-Qu_m(T).$$

因此，(Qu_n)在J上一致收敛于一个函数$u\in[a,b]$. 进一步，

$v(t)\leq u(t)$，对任给的$t\in J$，且$v(T)=u(T)$.

为了证明$v=u$，不妨作如下反设：设在J中存在t，使得

$$\varepsilon=v(t)-u(t)>0.$$

由v的定义，在C中存在一个Qw，使得

$$Qw(t)\geq v(t)-\varepsilon/2=u(t)+\varepsilon/2.$$

然后，

$Qw(t)\geq Qu_n(t)+\varepsilon/2$，对任给的$n\in N$.

因为Qw和每个Qu_n都属于C，由(a)，有

$Qw>Qu_n$，对任给的$n\in N$.

由引理2.1，我们

有$w>u_n$，对任给的$n\in N$.

又由$q(t,\cdot)$的单调性，(3.2)和(a)，有

$$Qw(T)=Qw(t)+Qw(T)-Qw(t)$$
$$\geq Qu_n(t)+\varepsilon/2+Qu_n(T)-Qn_n(t)$$
$$=Qu_n(T)+\varepsilon/2$$

对任给的$n\in N$. 当$n\to\infty$时，我们得到

$$Qw(T)\geq u(T)+\varepsilon/2=v(T)+\varepsilon/2,$$

与v 的定义矛盾. 这就证明了v 和u 相等，因此也是连续的. 因此$v=\sup C\in[a,b]$.

由引理2.1，$Qv\geq v$，故$(Q^n v)$是增的. 选择$u_n=Q^{n-1}v$如上，可见$\sup_n Q^n v$存在且属于$[a,b]$. 因此，Q满足定理2.1的条件(S)，故由此，Q有最小不动点u_*.

由Q的定义，u_*是$[a,b]$上的初值问题

$$u'(t)=q(t,u(t))\ \text{几乎处处在}\ J\ \text{上},\quad u(0)=u_0 \tag{3.6}$$

的最小解. 又由(3.3)，计算后易得

$$\underline{u}(t)=u_*(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J \tag{3.7}$$

关于最大解的存在性可以作类似的讨论.

沿用定理3.1中的符号，以及系2.1.a，有

系3.1设 $f:J\times R\to R$ 满足条件(f1)-(f3)．对任给的 $u_0\in[\alpha(0),\beta(0)]$，函数序列

$$v_n(t)=w_n(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J,n\in N,$$

其中

$$w_n(t)=u_0+\int_0^t q(r,w_{n-1}(\tau))d\tau,n=1,2,...,$$

a)在J上增一致收敛于(3.1)的最小解，如果 $w_0=a$，而且对所有 $t\in J$，$f(t,\cdot)$ 在 $[\alpha(0),\beta(0)]$ 上左连续．

b)在J上减一致收敛于(3.1)的最大解，如果 $w_0=b$，而且对所有 $t\in J$，$f(t,\cdot)$ 在 $[\alpha(0),\beta(0)]$ 上右连续．

证明：易见如果假设a成立，由(3.5)可知，给定的算子 Q 没有向左的下跳跃．因此，由系2.1.a，最小不动点由

$$u_*=\sup_n Q^n a=\sup_n w_n$$

得到．通过定理3.1的证明中提及过的原因，可以知道序列 $(Q^n a)$ 是递增的，而且在 J 上一致收敛．因此，(v_n) 是 J 上的递增序列，而且一致收敛于由(3.7)给出的 $\underline{u}$，也就是初值问题(3.1)的最小解．

关于b)的假设和结果与a)的完全类似．

3.2 IVP的最大最小解与初值和方程右端的依赖性

定理2.1的结果(2.1)和(2.2)可以用来研究初值问题(3.1)的最大最小解与初值 u_0 和方程右端 f 的依赖性．

定理3.2设 $f:J\times R\to R$ 满足条件(f1)-(f3)，而且用 $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 标记初值问题(3.1)的最小解和最大解．则 $\underline{u}$ 是IVP(3.1)的最小的上解，而且 $\overline{u}$ 是IVP(3.1)的最大的下解．$\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 对应于 u_0 和 f 都是增的．

证明：设 v 是(3.1)的一个上解，即如，

$$v'\geq f(t,v)\text{ 几乎处处在 }J\text{ 上，}v(0)\geq u_0.$$

标记

$$w(t)=v(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J \qquad \text{(a)}$$

易见 $Qw\leq w$，其中 Q 如(3.5)定义．因此，如果把 Q 的最小不动点标记为 u_*，则由(2.2)，

$$u_*\leq w. \qquad \text{(b)}$$

由(a)，(b)及(3.7)，又 $\underline{u}\leq v$，其中 $\underline{u}$ 是(3.1)的最小解．

如果 $v_0\in[\alpha(0),\beta(0)]$ 且 $v_0\geq u_0$，则

$$v'=f(t,v)\text{ 在J上几乎处处成立，}v(0)=v_0$$

的最小解$\underline{v}$是(3.1)的一个上解，且$u \le v$.

如果f_1满足假设(f1)-(f3)，和f有同样的α, β和h，且如果

$$f(t,s) \le f_1(t,s) \text{ 对 } t \in J, \alpha(t) \le s \le \beta(t)),$$

则

$$v' = v' = f_1(t,v) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上}, \quad v(t) = u_0$$

的最小解$\underline{v}$是(3.1)的一个上解，故$u \le v$.

关于最大解的对偶结论的论证和上面的证明完全类似.

第四章 一个引理和具体应用

4.1 一个引理

下面的引理用来辅助应用定理3.1的结论.

引理4.1 $f: J \times R \to R$ 满足条件(f1)-(f3)，当且仅当满足如下形式

$$f(t,r) = q(t, re^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau} - h(t)r, \tag{4.1}$$

其中$h \in L(J, R_+)$且$q: J \times R \to R$满足如下条件:

(q1) 存在$a, b \in AC(J,R), a \le b$, 且

$$a' \le q(t,a) \text{ 且 } b' \ge q(t,b) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上}.$$

(q2) $q(\cdot, u(\cdot)) \in L(J,R)$，对所有$a \le u \le b$，且

(q3) $q(t,\cdot)$在$[a(t), b(t)]$上对任给的$t \in J$都增.

进一步，u是初值问题(3.1)的上、下、最大、最小解，当且仅当

$$u(t) = w(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J$$

其中w是对应IVP

$$w' = q(t,w) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上}, \quad w(0) = u_0 \tag{4.2}$$

的解.

证明： 第一个论断的必要性可以通过定理3.1和3.2的证明得到.

反过来，如果f由(4.1)给定，其中$h \in L(J,R)$且q满足(q1)-(q3)，则(f1)说明α, β由

$$\alpha(t) = a(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, \beta(t) = b(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J \tag{4.3}$$

给定.

在特殊情形中，当(q1)中的a增且$a(0) \ge 0$时，举例来说，如果q将$J \times R_+$映到R_+上，且$a = \theta$（零函数），则$P = C(J,R)$可以被

$$P = \{u \in C(J,R) \mid u\text{单}\} \tag{4.4}$$

取代（见[2]，第五部分第三、四段）. 相应地，当(q1)中的b减且$b(0) \le 0$，并且当

$$q(t,s)s \ge 0 \text{，对任何 } t \in J, s \in R. \qquad (q5)$$

的时候的时候可以作同样的事情.

引理5.1中，条件(q2)可以被如下条件所取代：

$t \in J$，且在t对至少一个 $s \in [a(t), b(t)]$ 右端不连续（以及对应情形：左端不连续）的 $q(\cdot, s)$ 的集合是零测度的. (q2)'

应用以上引理，可以得到以下结论.

4.2 应用实例

例4.1. 给定 $M \ge 0$，以及一个整数 $m \ge 1$. 标记

$$a(n_1,\dots,n_m) = M + 2^{-m} + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-n_k-k-m} + 2^{-n_k-2m+1}, 0 \le n_1 \le \dots \le n_m.$$

易见对每个 n_j 来说，$a(n_1,\dots,n_m)$ 都是递减的. 而且，对每个 $m = 1, 2, \dots$，

$$a(\overset{m}{\infty,\dots,\infty}) = a(\overset{m+1}{0,\dots,0}),$$

并且对每个 $j = 2 \text{到} m-1$，

$$a(n_1,\dots,n_{j-1},n_j,\infty,\dots\infty) = a(n_1,\dots,n_{j-1},n_j+1,\dots,n_j+1).$$

设 $\omega : R_+ \to R_+$ 对

$$c(t) = \int_0^t \omega(\tau)\,d\tau < \infty, \quad \text{对每个 } t > 0$$

是一个几乎处处右连续的函数.

按照下式定义一个函数 $q : R_+ \times R \to R$：

$$q(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{当 } s = 0 \text{ 或 } t = 0, \\ M\omega(t), & \text{当 } 0 < s \le Mc(t), \\ (M+1)\omega(t), & \text{当 } 0 < Mc(t) + c(t) < s, \\ a(n_1,\dots,n_m+1)\omega(t), & \text{当对某些 } m = 1,2,\dots \text{来说} \\ & a(n_1,\dots,n_m+1)c(t) < s \le a(n_1,\dots,n_m)c(t), \\ -q(t,-s), & \text{当 } t > 0 \text{ 且 } s < 0. \end{cases} \qquad (4.5)$$

设 $J = [0, T], T > 0$ 给定. 易见有

$$b(t) = (M+1)c(t), t \in J, a = -b$$

满足(q1). 且条件(q2)',(q3)和(q5)满足. 进一步，如果P由(4.4)给定且 $Q : P \to P$ 由

$$Qu(t) = \int_0^t q(r, u(r))\,dr, t > 0, u \in P$$

定义，易见Q将形如

$$u(t) = a(n_1,\dots,n_{m-1},n_m)c(t), t \in J$$

的函数映射到

$$Qu(t) = a(n_1,\dots,n_{m-1},n_m+1)c(t), t \in J.$$

由以上可知，Q的最小不动点和最大不动点，也就是有$u(0)=0$的IVP(4.2) 的最小解u_*和最大解u^*分别是：

$$u_*(t)=\sup_m(\sup_{n_m}(\ldots(\sup_{n_1}Q)^{n_1}\ldots)^{n_m}(a)(t))=-Mc(t),t\in J$$

和

$$u^*(t)=\inf_m(\inf_{n_m}(\ldots(\inf_{n_1}Q)^{n_1}\ldots)^{n_m}(b)(t))=Mc(t),t\in J$$.

因此，如果q由(4.5)给定，那么对每个$h\in L(J,R_+)$，有由(4.1)给定的$u_0=0$和f的初值问题有最小解$\underline{u}$和最大解$\overline{u}$，且

$$\underline{u}(t)=-Mc(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau},\overline{u}(t)=Mc(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J$$.

例4.2．IVP

$$f(t,r)=q(t,re^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}-h(t)r,r(0)=r_0$$

的解（上、下、最大、最小解）

$$r(t)=u(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J$$

其中u是

$$u(0)=r_0u'=q(t,u),\text{在}J\text{上几乎处处成立}u(0)=r_0$$.

的解，如果q满足：

1. $|q(t,u)|\le t^\alpha u^\beta$,在$J$上几乎处处成立$\beta<1$
2. $q(\cdot,u(\cdot))\in L(J,R)$,在$a\le u\le b$
3. $q(t,\cdot)$对$\forall t\in J$在$[a,b]$上增

证明：由引理4.1，后两个条件显然．下证第一个条件与（q1）等价．由题，取

$$a=\left(\frac{\beta-1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}t^{\frac{1+\alpha}{1-\beta}},\quad b=\left(\frac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}t^{\frac{1+\alpha}{1-\beta}},$$

由$\beta<1$，易见$a,b\in AC(J,\mathrm{R})$,且$a\le b$．又，

$$a'=-\left(\frac{\beta-1}{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}},\quad b'=\left(\frac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}.$$

而

$$q(t,a)\ge -t^\alpha a^\beta=-t^\alpha\left(\left(\frac{\beta-1}{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}t^{\frac{\beta+\alpha\beta}{1-\beta}}\right)=-\left(\frac{\beta-1}{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}$$

，在J上几乎处处成立，

又

$$q(t,b)\le t^\alpha b^\beta=t^\alpha\left(\left(\frac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}t^{\frac{\beta+\alpha\beta}{1-\beta}}\right)=\left(\frac{1-\beta}{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}$$

，在J上几乎处处成立．

故

$$a' \le q(t,a)\text{且}b' \ge q(t,b)$$，在J上几乎处处成立.

故只要取a,b如上，即可满足条件（q1）．进一步，可以得到

例4.3．IVP

$$f(t,r) = q(t, re^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau} - h(t)r, r(0) = r_0$$

的解（上、下、最大、最小解）

$$r(t) = u(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J$$

其中u是

$$u' = q(t,u),\text{在}J\text{上几乎处处成立}, u(0) = r_0 .$$

的解，如果q满足：

1．$|q(t,u)| \le p(t)u^{\beta}$，在$J$上几乎处处成立，$\beta < 1$，$p(0)=0$，且$a = (\beta-1)^{\frac{1}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{1}{1-\beta}}$，在$a \le u \le b$

2．$q(\cdot, u(\cdot)) \in L(J,R)$，在$a \le u \le b$

3．$q(t,\cdot)$对$\forall t \in J$，在$[a, b]$上增

证明：和例4.1类似，讨论条件1．首先，由条件2，$p(t) \in L(J,R)$．然后，取

$$a = (\beta-1)^{\frac{1}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad b = (1-\beta)^{\frac{1}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

由$\beta < 1$，如果$\int_0^t p(\tau)d\tau$>0，易见$a,b \in AC(J,\mathrm{R})$，且$a \le b$．若$\int_0^t p(\tau)d\tau$<0，不妨将a、b交换，以保证$a \le u \le b$．又，

$$a' = -(\beta-1)^{\frac{\beta}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{\beta}{1-\beta}}p(t), \quad b' = (1-\beta)^{\frac{\beta}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{\beta}{1-\beta}}p(t).$$

而

$$q(t,a) \ge -p(t)a^{\beta} = -p(t)\left((\beta-1)^{\frac{1}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta} = -p(t)\left((\beta-1)^{\frac{\beta}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)$$

，在J上几乎处处成立，

又

$$q(t,b) \le p(t)a^{\beta} = p(t)\left((1-\beta)^{\frac{1}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta} = p(t)\left((1-\beta)^{\frac{\beta}{1-\beta}}(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)$$

，在J上几乎处处成立.

故

$$a' \le q(t,a)\text{且}b' \ge q(t,b)$$，在J上几乎处处成立.

故只要如上取a,b，即可满足条件（q1）．相似地，讨论

例4.4．IVP

$$f(t,r)=q(t,re^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}-h(t)r,r(0)=r_0$$

的解（上、下、最大、最小解）

$$r(t)=u(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J$$

其中u是

$$u'=q(t,u),\text{在}J\text{上几乎处处成立}, u(0)=r_0 .$$

的解，如果q满足：

1. $0\le q(t,u)\le p(t)e^u$,在J上几乎处处成立，$\int_0^t p(\tau)d\tau<0$，$p(0)=0$
2. $q(\cdot,u(\cdot))\in L(J,R)$,在$a\le u\le b$
3. $q(t,\cdot)$对$\forall t\in J$，在$[a,b]$上增

证明：分情况讨论．对于$-e\le\int_0^t p(\tau)d\tau<0$，讨论条件1．取

$$a=0,\quad b=-\ln(-\int_0^t p(\tau)d\tau),$$

由$b>0$，易见$a,b\in AC(J,\mathrm{R})$,且$a\le b$．又，

$$a'=0,\quad b'=-\frac{-p(t)}{-\int_0^t p(\tau)d\tau}=-\frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau}.$$

而

$$q(t,b)\le p(t)e^b=p(t)(-\int_0^t p(\tau)d\tau)^{-1}=-\frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau}$$，在J上几乎处处成立，

又

$$q(t,a)\ge 0$$，在J上几乎处处成立

是显然的，故

$$a'\le q(t,a)\text{且}b'\ge q(t,b)$$，在J上几乎处处成立．

满足．故只要如上取a,b，即可满足条件（q1）．而对于$\int_0^t p(\tau)d\tau<0$，同样讨论条件1．取

$$a=0,\quad b=\ln(-\int_0^t p(\tau)d\tau),$$

由$b>0$，易见$a,b\in AC(J,\mathrm{R})$,且$a\le b$满足．又，

$$a'=0,\quad b'=\frac{-p(t)}{-\int_0^t p(\tau)d\tau}=\frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau}.$$

而

$$q(t,b)\le p(t)e^b=p(t)(\int_0^t p(\tau)d\tau)^{-1}=\frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau}$$，在J上几乎处处成立，

又

$$q(t,a) \geq 0，在J上几乎处处成立$$

是显然的，故

$$a' \leq q(t,a)且b' \geq q(t,b)，在J上几乎处处成立.$$

满足．故只要如上取a,b，即可满足条件（q1）.