天 津 大 学

毕业设计（论文）任务书

题目：单调迭代方法在右端不连续的微分方程中的应用

完成期限：**2003年11月20日至2004年5月20日**

学院 理学院 指导教师 史国良

专业 数学与应用数学 职 称______

学生 刘日天 系 主 任 边馥萍

接受任务日期 **2003 11 20** 批准日期_____

一、原始依据、资料：

[1] S. Heikkila, V. Lakshmikantham, S. Leela, Applications of Monotone Techniques to Differential Equations with Discontinuous Right Hand Side, 1987, Differential and Integral Equations, I(3), 287~297

[2] S. Heikkila, On fixed points through iteratively generated chains with applications to differential equations, J. Math. Anal. Appl., 1987

[3] G.S. Ladde, V. Lakshmikantham & A.S. Vatsala, Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman, 1985
[4] 刘笑颖，不连续算子的不动点与Banach空间若干类不连续微分方程，[博士学位论文]，哈尔滨：哈尔滨工业大学，2000
[5] 孙经先. Banach空间某些新的列紧判别法及其应用. 数学年刊. 1990, I1A(4):407~412
[6] 孙经先. 增算子的不动点定理及其对Banach空间中含间断项的非线性微分方程的应用. 数学学报. 1991, 34(5):665~674
[7] J. Sun, Z. Zhao, Fixed Point Theorems of Increasing Operators and Applications to Nonlinear Integra-Differential Equations with Discontinuous Teams, J. Math. Anal. Appl. 1993, 175(I):33~45
[8] 郭大钧，孙经先. 抽象空间常微分方程. 山东：山东科学技术出版社. 1989, 5~6 37 46~53 177~184 236~237 257~278
[9] 郭大钧，孙经先. Banach空间常微分方程理论的若干问题. 数学进展. 1994, 23(6): 492~503
[10] S.W. Du, V. Lakshmikantham, Monotone Iteration Technique for Differential Equations in a Banach Space, J. Math. Anal. Appl. 1987, 87(2): 454~459
[11] 孙经先，Banach空间常微分方程的解. 数学学报. 1990. 83(3): 374~380
[12] H. Xu, M. Su, X. Lu. The Monotone Iterative Technique for First Order Differential Equations in Banach Spaces, Math. Japon. 1993. 38(4): 667~673
[13] S. Schmidt. Existence Theorems for Ordinary Differential Equations in Banach Spaces, Funkcial Ekvac. 1992, 35(2): 199~222
[14] M. Frigon, D. O'Regan. Existence Results for Initial Value Problems in Banach Spaces. Diff. E. Dyn. Sys. 1994, 2(1):41~48
[15] M. Frigon, D. O'Regan. Nonlinear First Order Initial and Periodic Problems in Banach Spaces. Appl. Math. Lett. 1997, 10(1):41~46
[16] 贺建勋，陈彭年. 不连续微分方程的某些理论与应用. 数学进展. 1987, 16(1):17~32
[17] 赵志. 唯一性函数和Banach空间含间断项的混合型微分-积分方程. 工程数学学报. 1997, 14(1):13~18
[18] 郭大钧，非线性泛函分析，山东：山东科学技术出版社，2001
[19] 郭大钧，孙经先，刘兆理，非线性常微分方程泛函方法，山东：山东科学技术出版社，1995, 1~11, 29~30

二、设计内容和要求：

1、分析、综合目前关于右端不连续的非线性微分方程的研究成果.

2、利用泛函分析方法，阐述并定义生成迭代序列的概念，并给出相关的不动点存在定理.

3、应用前述定理证明了具有右端不连续的微分方程的最大最小解的几个存在条件.

4、为应用前述结论，证明了一个引理.

5、结合引理，解决了一类不连续微分方程的解的存在性问题，提出并证明了三类右端不连续的微分方程的最大最小解的存在性.

1．综述关于右端不连续的非线性微分方程的部分研究成果．总结在研究右端不
连续的非线性微分方程最大解与最小解中常用的方法，如利用生成迭代序列及
相关的不动点存在定理，获得具有右端不连续的微分方程的最大最小解的存在
条件.

2．翻译并研究了文献[？？？]中的方法和结论.

3．利用文[？？？]中的结论，给出相应的一个具体应用实例，进而得到一类具
体的右端具有不连续项的微分方程最大解与最小解的存在性.

设计（论文）进度计划表

序号	起止日期	计划完成内容	实际完成内容	检查日期 检查人签名
1	2003 11 20 - 2003 11 30	初步阅读 原始资料	完成	
2	2003 12 1 - 2003 12 15	综合资料结果 确定研究问题	完成	
3	2003 12 16 - 2004 1 20	定题目 完成开题报告	完成	
4	2004 1 21 - 2004 3 10	资料翻译，修改	完成	
5	2004 3 11 - 2004 4 17	问题研究，讨论	完成	
6	2004 4 18 - 2004 5 7	提出应用实例 给出相关证明	完成	
7	2004 5 8 - 2004 5 20	整理，交付打印	完成	
指导教师批准日期　　年　月　日　签名				

注：1. 本任务书一式两份，一份院或系留存，一份发给学生，任务完成后附在说明书内.

2. “检查人签名”一栏和“指导教师批准日期”由教师用笔填写，其余各项均要求打印打印字体和字号按照《天津大学关于本科生学位论文统一格式的规定》执行.

天津大学本科生毕业设计（论文）开题报告

课题名称	单调迭代方法在右端不连续的微分方程IVP中的应用		
学院名称	理学院	专业名称	数学与应用数学
学生姓名	刘日天	指导教师	史国良

对非线性常微分方程理论的研究始于二十世纪五十年代. 它把泛函分析理论和常微分方程理论联系起来，用泛函分析的方法研究常微分方程的问题. 问题的起源是，当时，人们发现很多重要的偏微分方程都可以统一到非线性常微分方程的初值问题（IVP）

$$u' = f(t,u), u(t_0) = u_0 \qquad (1.1)$$

来进行进一步研究. 随着研究的进行，人们发现非线性常微分方程理论有着重要的应用. 八十年代初，三部专著的出现标明了对非线性常微分方程已经初步形成了理论体系. 1982年，S. W. Du和V. Lakshmikantham应用上、下解方法，证明了IVP（1.1）的最大最小解的一个存在条件. 而在实际生产生活中，大量的自然现象都可以被描述成带有不连续函数的微分方程. 对不连续微分方程的研究，除了Heikkila等的成果，1990年，孙经先对含有间断项的IVP（1.1）进行了研究，得到了新的结论. 对于不连续的微分-积分方程，1993年，孙经先和赵增勤讨论了一类一阶不连续Hammerstein型微分-积分方程. 进一步，孙经先研究了一阶混合型微分-积分方程的初值问题

$$x' = f(t, x, Tx, Sx)$$

的最大最小解的存在性. 2000年，刘笑颖讨论了Banach空间一阶不连续混合型微分-积分方程初值问题最大解和最小解的存在性，推广并改进了孙经先等的工作.

在研究连续的非线性微分方程的过程中，单调迭代方法可以起到有效的作用. 而通过生成迭代序列的建立，可以去掉对方程右端连续性的要求. 本文将主要通过在泛函分析中建立的生成迭代序列来研究具有不连续右端的非线性微分方程的初值问题最大最小解的存在性，并借助其相关结论来探讨几类不连续微分方程的解的存在性. 除此之外，上下解方法也得到了应用. 在一阶微分方程初值问题

$$u' = f(t,u), u(0) = u_0$$

中，若 $v(t)$ 满足

$$v'(t) \le f(t, v(t)), v(0) \le u_0$$

则称 $v(t)$ 是以上初值问题的一个下解. 若 $w(t)$ 满足

$$w'(t) \geq f(t, w(t)), w(0) \geq u_0$$

则称 $w(t)$ 是以上初值问题的一个上解. 通过对本问题的分析、学习和研究，将对非线性泛函分析理论的应用产生进一步的认识.

具体工作将分四步展开. 首先，本文将使用泛函分析的研究方法，对生成迭代序列等概念作出定义，并在此基础上建立相关的不动点存在定理. 然后，本文将结合非线性微分方程的初值问题，给出最大最小解的存在条件，建立最大最小解的存在定理，并通过相关定理的证明，说明IVP的最大最小解的存在性与初值和方程右端之间的依赖关系. 在这个过程中，主要应用了前面提到的泛函分析中的相关结论. 然后，为了让最大最小解的存在定理得到应用，本文将给出一个引理，说明了解的存在定理的具体应用范围. 最后，在此基础上，将给出四个应用实例. 例子运用前文的研究成果，用相关定理证明四类右端不连续的微分方程的解的存在性，以及说明解应具有的形式.

参考书目：

[1] S. Heikkila, V. Lakshmikantham, S. Leela, Applications of Monotone Techniques to Differential Equations with Discontinuous Right Hand Side, 1987, Differential and Integral Equations, I(3), 287~297

[2] S. Heikkila, On fixed points through iteratively generated chains with applications to differential equations, J. Math. Anal. Appl., 1987

[3] G.S. Ladde, V. Lakshmikantham & A.S. Vatsala, Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman, 1985

[4] 刘笑颖，不连续算子的不动点与Banach空间若干类不连续微分方程，[博士学位论文]，哈尔滨：哈尔滨工业大学，2000

[5] 郭大钧，非线性泛函分析，山东：山东科学技术出版社，2001

[6] 郭大钧，孙经先，刘兆理，非线性常微分方程泛函方法，山东：山东科学技术出版社，1995

等.

摘 要

在研究连续的非线性微分方程的过程中，单调迭代方法可以起到有效的作用. 而通过生成迭代序列的建立，可以去掉对方程右端连续性的要求. 首先，本文使用泛函分析的研究方法，对生成迭代序列等概念作出了定义，并在此基础上建立了相关的不动点存在定理. 然后，本文结合非线性微分方程的初值问题，给出了最大最小解的存在条件，建立了最大最小解的存在定理，并通过相关定理的证明，说明了IVP的最大最小解的存在性与初值和方程右端之间的依赖关系. 在这个过程中，主要应用了前面提到的泛函分析中的相关结论. 然后，为了让最大最小解的存在定理得到应用，本文给出了一个引理，说明了解的存在定理的具体应用范围，并在此基础上，给出了一个应用实例，作为对全文的总结. 除此之外，另外三个例子运用前文的研究成果，用相关定理证明了三类右端不连续的微分方程的解的存在性，以及说明了解应具有的形式.

关键词:

非线性微分方程; 右端不连续; 初值问题; 单调迭代方法; 生成迭代序列; 最大最小解

ABSTRACT

Monotone iterative techniques have been proved to be effective in the study of nonlinear differential equations with continuous right hand side. Further more, we shall generalize those techniques by replacing iterations with iteratively generated chains. This helps us drop continuity hypotheses from the right hand side of the equations, which means can be used in the study of differential equations with discontinuous right hand side. In the first step, we shall define some kinds of iteratively generated chains by using knowledge of functional analysis, and discuss the existence of both maximal and minimal fixed points. Then as an application to previous theorems we shall prove the existence of minimal solution and maximal solution of an Initial Value Problem (IVP), and set up our theorems to study the dependence on the initial value and on the right hand side. At last in order to apply formal results we shall prove a lemma, and then as applications we shall show our three examples. The examples discuss the existences of both minimal and maximal solutions of four very kinds of differential equations with discontinuous right hand sides by using previous proved results, and show the form of minimal solution and maximal solution.

Key words:

Nonlinear Differential Equation; Discontinuous Right Hand Side; Initial Value Problem; Monotone Iterative Technique; Iteratively Generated Chain; Minimal and Maximal Solutions

目　录

中文翻译

以下是原文中关于边值问题（PBVP）的相关定理．文中的编号和原文是一致的．

4．边值问题．通过引用前文的记号和定义，我们将要证明

定理4.1.设 $f: J\times R \to R$ 满足条件(f1)-(f3)，其中

$$\alpha(0)\le\alpha(T),\beta(0)\ge\beta(T),\text{且}\int_0^T h(\tau)d\tau>0, \qquad \text{(f4)}$$

则边值问题（PBVP）

$$\text{在}J\text{上几乎处处成立}\ u'=f(t,u),u(0)=u(T) \qquad (4.1)$$

有最小解和最大解．

证明：设 α,β和h 满足(f1)，(f3)和(f4)，且设 a,b和q 由(3.2)和(3.3)定义．由于 $q(t,\cdot)$ 在 $[a(t),b(t)]$ 上单调递增，故方程

$$Qu(t)=(e^{\int_0^T h(\tau)d\tau}-1)^{-1}\int_0^T q(\tau,u(\tau))d\tau+\int_0^t q(\tau,u(\tau))d\tau \qquad (4.2)$$

定义了一个 $[a,b]$ 上的增映射．进一步，由(3.2)，(3.4)，(f4)以及(4.2)，对每个 $t\in J$，

$$Qa(t)\ge\left(e^{\int_0^T h(\tau)d\tau}-1\right)^{-1}\left(\alpha(T)e^{\int_0^T h(\tau)d\tau}-\alpha(0)\right)+a(t)-a(0)$$

$$\ge\alpha(0)+a(t)-a(0)=a(t).$$

相似的原因表明了 $Qb\le b$，也就是 Q 将 $[a,b]$ 映射到自身．

Q 的最小不动点 u_* 的存在性可以由定理3.1的证明中的相似讨论证明．类似地，我们知道 $u=u_*$ 满足(3.6)．由 $u_*=Qu_*$ 以及(4.2)，我们知道

$$u_*(T)=u_*(0)e\int_0^T h(\tau)d\tau$$

因此，方程(3.7)定义了PBVP(4.1)的一个解 $\underline{u}$．如果 u_1 是(4.1)（在 $[\alpha,\beta]$ 中）的任一解，则方程

$$u(t)=u_1(t)e^{\int_0^T h(\tau)d\tau},t\in J$$

定义了 Q 的一个不动点，且因此 $u_*\le u$．但是这等价于 $\underline{u}\le u_1$，故 $\underline{u}$ 是(4.1)的最小解．

作为对应的结果，我们可以得到(4.1)的最大解的存在性．

系3.1的证明中所用的相似讨论说明

系4.1. 设 $f: J\times R\to R$ 满足(f1)-(f4)．则函数序列

$$u_n(t)=w_n(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J,n\in N$$

其中

$$w_n(t)=\left(e^{\int_0^T h(\tau)d\tau}-1\right)^{-1}\int_0^T q(\tau,w_{n-1}(\tau))d\tau+\int_0^t q(\tau,w_{n-1}(\tau))d\tau,n=1,2,...$$
,

a) 在J上增一致收敛于(4.1)的最小解，如果 $v_0=\alpha$ ，且 $f(t,\cdot)$ 对所有 $t\in J$ ，在 $[\alpha(t),\beta(t)]$ 上左连续.

b) 在J上减一致收敛于(4.1)的最大解，如果 $v_0=\beta$ ，且 $f(t,\cdot)$ 对所有 $t\in J$ ，在 $[\alpha(t),\beta(t)]$ 上右连续.

当说到PBVP(4.1)的一个下解的时候，我们指的是

$$\text{在}J\text{上几乎处处成立}\le f(t,v),v(0)\le v(T)$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的所有解. 上解的定义和下解完全类似.

和定理3.2的证明中相似的原因可以说明:

定理4.2. 如果 f 满足(f1)-(f4)，则(4.1)的最小解 $\underline{u}$ 是所有上解中的最小的一个，且(4.1)的最大解 $\overline{u}$ 是所有下解中最大的一个. $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 对应f都是递增的.

注释4.1. 得自第三部分和本部分的结论显示了标记符号意义的明显修正. 当 J 是所有实的闭区间，以及 J 只有左边是闭的的时候，在这种情形下，T可以是 ∞. 在后面的情形中，它在第三部分满足(f2)中的函数 $f(\cdot,u(\cdot))$ 和(f3)中的函数h在J的每一个闭子区间Lebesgue可积的假定.

类似的结果也可以由微分体系得出，通过假设问题中的假定部分成立，且在 $C(J,R^n)$ 中由

$$u\le v\text{当且仅当}u\in C(J,R_+^n)$$

定义一个次数.

作为一个特殊情形，我们可以得到n阶微分方程（$n>1$）的结果.

5．例子．为了引用前面的结果，我们将要建立

引理5.2. $f:J\times R\to R$ 满足条件(f4)，如果它由(5.1)给出，其中q满足(q1)，有

$$a(0)\le a(T)e^{-\int_0^T h(\tau)d\tau},b(0)\ge b(T)e^{-\int_0^T h(\tau)d\tau} \qquad (5.6)$$

且如果

$$\int_0^T h(\tau)d\tau>0.$$

函数 $u\in AC(J,R)$ 是PBVP(4.1)的上，下，最小，最大解，当且仅当

$$u(t)=w(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau},t\in J$$

其中w是PBVP

$$\text{在}J\text{上几乎处处成立}=q(t,w),w(0)=w(T)e^{-\int_0^T h(\tau)d\tau} \qquad (5.7)$$

的对应解.

例5.2. 设 $q:R_+\times R\to R$ 由(5.5)定义，其中 $c(1)>0$. 如果我们选定 $J=[1,T],T>0,\text{且}h\in L(J,R_+)$ ，使得

$$\int_1^T h(\tau)d\tau > \log c(T) - \log c(1), \tag{5.8}$$

而且，函数a和b由

$$b(t) = (M+1)c(t), t \in J, a = -b$$

给定，且满足

$$a(1) \le a(T)e^{-\int_1^T h(\tau)d\tau}, b(1) \ge b(T)e^{-\int_1^T h(\tau)d\tau},$$

因此，由例5.1，引理5.1，引理5.2，定理4.1和注释4.1，边值问题

在J上几乎处处成立 $= f(t,u), u(1) = u(T),$

其中f由(5.1)定义．它同时具有最小解$\underline{u}$和最大解$\overline{u}$．和例5.1相似的原因说明了

$$\overline{u}(t) = Me^{-\int_1^t h(\tau)d\tau}\left\{\left(e^{\int_1^T h(\tau)d\tau} - 1\right)^{-1}(c(T) - c(1)) + c(t) - c(1)\right\},$$

且$\underline{u} = -\overline{u}$．

致 谢

大学生活即将结束，这篇论文可以说既对这四年所学的知识进行了总结，又升华了我学习、研究新知识、新问题的能力．在这篇论文的结尾，请允许我对我的导师史国良老师致以最诚挚的感谢．无论是论文的选题、寻找资料，还是具体的写作和修改，史老师都对我进行了作为一个导师所能作的最全心全力的指导和帮助．不仅如此，史老师还充分结合我的具体进度进行了指导，布置每一个阶段学习、研究的项目，以及在阶段工作完成后进行细致的检查和批评，既教授了我研究具体问题的手段和步骤，又培养了我自己学习、研究问题的能力．我相信，这番尽心教导的结果，将并不止是这篇论文本身，它在我今后的学习、生活中也必将起到难以估量的作用．因此，我要再次对史老师致以衷心的致谢，感谢他对我的悉心教导．

除此之外，我也要向这四年之内教导过我的所有老师致以我最诚恳的感谢．我学习到的知识伴将伴随我今后的成长，我永远不会忘记教授我的这些的老师们．