

第一章 引言

在研究连续的非线性微分方程的过程中，单调迭代方法可以起到有效的作用。而通过构造生成迭代序列，可以去掉对方程右端连续性的要求。首先，本文简介文[1]中使用的泛函分析方法，生成迭代序列等概念的定义，以及在此基础上建立的相关不动点存在定理。然后，总结对于非线性微分方程的初值问题，给出的最大最小解的存在条件，最大最小解的存在定理，说明了IVP的最大最小解的存在性与初值和方程右端之间的依赖关系。在这个过程中，主要应用了前面提到的泛函分析中的相关结论。然后，为了让最大最小解的存在定理得到应用，我们还列出了一个引理 ([1])，说明了解的存在定理的具体应用范围，并在此基础上，给出了四个应用实例，作为对全文的总结。例子运用了文[1]的研究成果，用相关定理证明了四类右端不连续的微分方程解的存在性，说明了解应具有的形式。另外，最后我们给出部分英文资料的翻译。

1.1 对非线性微分方程问题的历史回顾

对非线性常微分方程理论的研究始于二十世纪五十年代。它把泛函分析理论和常微分方程理论联系起来，用泛函分析的方法研究常微分方程的问题。问题的起源是，当时，人们发现很多重要的偏微分方程都可以统一到非线性常微分方程的初值问题 (IVP)

$$u' = f(t, u), u(t_0) = u_0 \quad (1.1)$$

来进行进一步研究。随着研究的进行，人们发现非线性常微分方程理论有着重要的应用[8]。

八十年代初，三部专著的出现标明了对非线性常微分方程已经初步形成了理论体系[9]。1982年，S. W. Du和V. Lakshmikantham应用上、下解方法，证明了IVP (1.1) 的最大最小解的一个存在条件。1989年，在我国，著名学者郭大钧教授和孙经先教授合作，出版了我国在这个领域的第一部专著[8]。1990年，孙经先对[10]中的主要定理作了改进[11]。1994年，H. Xu等用单调迭代方法研究了IVP (1.1) 最大最小解的存在性[12]。1996年，S. Schmidt研究了非线性项f被分解成 $f = g + h$ 时解的存在性[13]。随后M. Frigon和D. O'Regan又对[13]中的结果作了改进[14-15]。

1.2 右端不连续的非线性微分方程

在实际生产生活中，大量的自然现象都可以被描述成带有不连续函数的微分方程[16]。研究证明，在对右端连续的非线性微分方程的研究中，单调迭代

方法是非常有效的方法[3]，在本文中，我们将用迭代序列[2]来对右端不连续的微分方程作进一步研究，指出一类不连续初值问题广义解的存在条件，并利用相应结论得出某些特定的存在条件。本文主要定理基于S. Heikkila, V. Lakshmikantham, S. Leela于1987年发表的”Applications of Monotone Techniques to Differential Equations with Discontinuous Right Hand Side” [1]中的部分内容。

1.3 不连续微分方程研究的现状

如前所述，对不连续微分方程还在继续。除了Heikkila等的研究成果，1990年，孙经先对含有间断项的IVP (1.1) 进行了研究，得到了新的结论[5]。对于不连续的微分-积分方程，1993年，孙经先和赵增勤讨论了一类一阶不连续 Hammerstein型微分-积分方程[6]。进一步，文[17]研究了一阶混合型微分-积分方程的初值问题 $x' = f(t, x, Tx, Sx)$ 最大最小解的存在性。2000年，刘笑颖在[4]中讨论了Banach空间一阶不连续混合型微分-积分方程初值问题最大解和最小解的存在性，推广并改进了[7]的工作。不过，虽然新的成果还在不断出现，但总体说来，到目前为止，对不连续的非线性微分方程和微分-积分方程的研究还不很丰富。

1.4 主要研究方法

在对右端连续的非线性微分方程的研究中，单调迭代方法的有效性已经得到了证明[3]。用单调迭代序列方法有助于取消右端连续性的假设[2]。在文[1]中，对右端不连续微分方程初值问题解的存在性的研究，主要是通过建立单调迭代序列进行的。关于生成迭代序列的定义将在下一章的第一部分中给出。除此之外，上下解方法也得到了应用。通过对本问题的分析、学习和研究，将对非线性泛函分析理论的应用产生进一步的认识。

在一阶微分方程初值问题

$$u' = f(t, u), u(0) = u_0$$

中，若 $v(t)$ 满足

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), v(0) \leq u_0$$

则称 $v(t)$ 是以上初值问题的一个下解。若 $w(t)$ 满足

$$w'(t) \geq f(t, w(t)), w(0) \geq u_0$$

则称 $w(t)$ 是以上初值问题的一个上解。显然，根据上下解的定义，在寻找微分方程的解的过程中，使用上下解可以缩小求解的范围。在这个过程中，期待得到某种更好的结果，就是在文[1]中上下解方法的主要作用。同时，注意上面的

自然半序 \leq 、 \geq 的引入，是非线性泛函分析中半序空间中的相应概念的特例。有关的泛函分析中的相关理论基础详见下一章。

第二章 预备知识和不动点存在定理

2.1 一些基础概念

设 $P = (P, \leq)$ 为一个半序集。对于 $a, b \in P, a \leq b$ ，记 $[a, b] = \{u \in P \mid a \leq u \leq b\}$ 。

如果 $Q : [a, b] \rightarrow [a, b]$ 是一个增映射，我们就说 $\text{Im } Q$ 中的一个迭代序列 C 是 Q 生成的 b -迭代序列，如果 Q^b 是其中最大的元素，并且 $Qc \in C, Qc < Qb$ 意味着

$$c = \inf_n Q^n v, \quad v = \inf(Qu \in C \mid Qc < Qu).$$

如果 C 是一个用“ \geq ”定义的 Q 生成的 a -迭代序列，就说它是一个 Q 生成的 $a+$ 迭代序列。

记 K 是 U 中所有 Q 生成的 b -迭代序列，其中

$$U = \{Qu \mid Qu < u, w \leq u, \text{ 其中 } w \leq Qw\},$$

又标记 H 是 W 中所有 Q 生成的 $a+$ 迭代序列，其中

$$W = \{Qu \mid u < Qu, u \leq w, \text{ 其中 } Qw \leq w\}.$$

作为[2]中定理2.1和2.2中的一个推论，有下面结果。

2.2 不动点存在定理

定理2.1 设有增映射 $Q : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ，且满足

$$\text{对所有 } C \in K, v = \inf_n C \text{ 以 } \sup_n Q^n v \text{ 存} ; \quad (\text{I})$$

则 Q 有最大不动点 u^* ，并且

$$u^* = \max \{w \in [a, b] \mid w \leq Qw\}. \quad (2.1)$$

如果 Q 满足

$$\text{对所有 } C \in H, v = \sup_n C \text{ 以 } \inf_n Q^n v \text{ 存} ; \quad (\text{S})$$

则 Q 有最小不动点 u_* ，且

$$u_* = \min \{w \in [a, b] \mid Qw \leq w\}. \quad (2.2)$$

在对这些结果的证明过程中，主要的步骤是为了说明，在给定的假设条件

下, K 和 H 中存在最大迭代序列 C_0 和 C_1 分别符合结论, 且具有

$$u^* = \inf_n Q^n v, \text{ 其 } \vdash \inf C_0$$

以及

$$u_* = \sup_n Q^n v, \text{ 其 } \vdash \sup C_1$$

的性质.

最后, 还需要序列 H 和 K 的如下性质 (见[2]) .

引理2.1 如果 Qc 和 Qw 是属于 H 或 K 的迭代序列 C 中的元素, 则由 $Qc < Qw$ 可知 $c < w$. 如果 $C \in K$, 则

$$Qv_1 \leq v_1, \text{ 其 } \vdash = \inf\{Qu \in C \mid Qc < Qu\},$$

而如果 $C \in H$, 则

$$Qv_2 \geq v_2, \text{ 其 } \vdash = \sup\{Qu \in C \mid Qu < Qw\}.$$

记 $u_n = Q^{n-1}v_1$, 其中 v_1 如引理2.1中定义, 我们得到一个单调递减序列 $\{u_n\}$.

并且, 如果 $Qc \in C \in K$, 且 $Qc < Qb$, 则有

$$c = \inf_n u_n = \inf_n Qu_n, \text{ 且 } Qc < c.$$

如果 c 具有上述性质, 我们就说 Q 有一个从 (c, Qc) 到 (c^+, c^+) 的 c 向右的上跳跃 (Jump Up to the Right at c), 且标记 $w \in JUR(Q)$.

相应地, 如果 $Qc \in C \in H$ 且 $Qa < Qw$, 那么 Q 有一个从 (w, Qw) 到 (w^-, w^-) 的 w 向左的下跳跃 (Jump Down to the Left at w), 记 $w \in JDL(Q)$. 这意味着在 $[a, b]$ 中, 存在一个单调递增序列 (w_n) , 使得

$$w = \sup_n w_n = \sup_n Qw_n, \text{ 且 } w < Qw.$$

因此, 通过研究 H 中的迭代序列的最小元素的形式, 并记 u^* 为 Q 的可能的最小不动点, 我们得到[2]中的结论2.2.

系2.1 设有增映射 $Q: [a, b] \rightarrow [a, b]$, 则

a) $Q(a) = \sup_n Q^n a$, 如果其存在, 并且不在 $JDL(Q)$ 内.

b) $Q(a) = \sup_{n_m} (\dots \sup_{n_1} (Q^{n_1}) \dots)^{n_m}(a)$, 如果其右端有定义, 并且不在 $JDL(Q)$ 内.

c) $u^* = \sup_m ({}_m Q(a))$, 如果其存在, 并且不在 $JDL(Q)$ 内.

关于 \mathcal{Q} 的最大不动点的存在性的相应结论也存在, 见[2]中的结论2.1.

第三章 初值问题的应用

设 T 是一个给定的正数, 定义 $J = [0, T]$, 且

$$P = C(J, R) = \left\{ u : J \rightarrow R \mid u \text{ 连续} \right\},$$

且按照如下规则定义 P 的半序

$$u \leq v, \text{ 当且仅当对任给的 } t \in J, u(t) \leq v(t).$$

进一步, 我们定义

$$AC(J, R) = \left\{ u : J \rightarrow R \mid u \text{ 绝对连续} \right\},$$

且

$$L(J, R) = \left\{ u : J \rightarrow R \mid u \text{ 在 } J \text{ Lebesgue 可积} \right\}.$$

在这里, 我们考虑如下初值问题 (IVP)

$$u' = f(t, u) \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立, } u(0) = u_0, \quad (3.1)$$

其中, 假定函数 $f : J \times R \rightarrow R$ 满足

(f1) 存在 $\alpha, \beta \in AC(J, R), \alpha \leq \beta$, 且在 J 上几乎处处成立

$$\alpha' \leq f(t, \alpha) \text{ 且 } \beta' \geq f(t, \beta),$$

(f2) $f(\cdot; u(\cdot)) \in L(J, R)$, 对所有 $u \in [\alpha, \beta]$,

(f3) 存在 $h \in L(J, R_+)$, 且有

$$f(t, u) - f(t, v) \geq -h(t)(u - v), \text{ 对所有 } \alpha(t) \leq v \leq u \leq \beta(t), t \in J.$$

当提及(3.1)的最小解, 最大解, 下解, 上解的时候, 我们指的是在区间 $[\alpha, \beta]$ 上. 其中, 若 $v(t)$ 满足

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), v(0) \leq u_0$$

在 J 上几乎处处成立, 则称 $v(t)$ 是以上初值问题的一个下解. 若 $w(t)$ 满足

$$w'(t) \geq f(t, w(t)), w(0) \geq u_0$$

在 J 上几乎处处成立, 则称 $w(t)$ 是以上初值问题的一个上解. 而最大解和最小解分别指的是符合(3.1)的所有解中的最大的解和最小的解.

3.1 最大最小解的存在性

作为定理2.1的一个应用，文[1]证明了下面结论。

定理3.1 设 $f: J \times R \rightarrow R$ 满足条件(f1)-(f3)。则对于每个 $u_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$ ，初值问题(3.1)有最大解和最小解。

证明：按条件(f1)-(f3)定义设 α, β 和 h 。定义

$$a(t) = \alpha(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}, \quad b(t) = \beta(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}, \quad t \in J \quad (3.2)$$

以及

$$q(t, s) = f(t, se^{-\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{\int_0^t h(\tau)d\tau} + h(t)s, \quad t \in J, s \in R. \quad (3.3)$$

由(f1)得，

$$\alpha' \leq f(t, \alpha), \quad \text{几乎处处在} \quad \text{且} \quad \exp(\int_0^t h(\tau)d\tau) > 0$$

以及

$$a'(t) = \alpha'(t)\exp(\int_0^t h(\tau)d\tau), \quad q(t, a) = f(t, \alpha(t))\exp(\int_0^t h(\tau)d\tau) + \alpha(t)h(t)\exp(\int_0^t h(\tau)d\tau)$$

满足 (b的情形完全类似)：

$$a' \leq q(t, a), \quad \text{和} \quad b' \geq q(t, b) \quad \text{在} J \text{上几乎处处成立,} \quad (3.4)$$

又由(f3)可知， $q(t, \cdot)$ 对任给的 $t \in J$ 在 $[\alpha(t), \beta(t)]$ 上是增函数。又由(f2)，引入 Eq 。

$$Qu(t) = u_0 + \int_0^t q(\tau, u(\tau))d\tau, \quad t \in J \quad (3.5)$$

对每个 $u_0 \in [\alpha(0), \beta(0)] = [a(0), b(0)]$ ，都定义一个增算子 $Q: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 。

为了证明 Q 有最小不动点，显然要证明 Q 满足定理2.1中的条件(S)。

设 C 是集合 W 中的一个 Q 迭代生成的 $a+$ 序列。因为 $Qu(t) \in [a(t), b(t)]$ ，对任给的 $t \in J$ ，以及 $Qu \in C$ ，则

$$v(t) = \sup \{Qu(t) | Qu \in C\}$$

对任给的 $t \in J$ 存在。从 C 中选择一个序列 (Qu_n) ，使得 $(Qu_n(T))$ 增，且收敛于 $v(T)$ 。通过 " \leq " 和 C 的定义，以及引理2.1， (Qu_n) 是属于 $[a, b]$ 的函数的递增序列。因为对 P 中任给的 $\xi \geq \eta$ ，有

$$\begin{aligned} q(t, \xi) - q(t, \mu) &= f(t, \xi e^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{\int_0^t h(\tau)d\tau} - f(t, \mu e^{\int_0^t h(\tau)d\tau})e^{\int_0^t h(\tau)d\tau} + h(r)(\xi - \mu) \\ &\geq -e^{\int_0^t h(\tau)d\tau} e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau} (\xi - \mu)h(t) + h(r)(\xi - \mu) = 0, \end{aligned}$$

在 J 上几乎处处成立. 故 $q(t, \cdot)$ 是增函数. 由(3.5), 对所有 $t \in J$ 和 $0 \leq m \leq n$, 有

$$0 \leq Q u_n(t) - Q u_m(t) \leq Q u_n(T) - Q u_m(T).$$

因此, $(Q u_n)$ 在 J 上一致收敛于一个函数 $u \in [a, b]$. 进一步,

$$v(t) \leq u(t), \text{ 对任给的 } t \in J, \text{ 且 } v(T) = u(T).$$

为了证明 $v = u$, 不妨作如下反设: 设在 J 中存在 t , 使得

$$\varepsilon = v(t) - u(t) > 0.$$

由 v 的定义, 在 C 中存在一个 $Q w$, 使得

$$Q w(t) \geq v(t) - \varepsilon / 2 = u(t) + \varepsilon / 2.$$

然后,

$$Q w(t) \geq Q u_n(t) + \varepsilon / 2, \text{ 对任给的 } n \in N.$$

因为 $Q w$ 和每个 $Q u_n$ 都属于 C , 由(a), 有

$$Q w > Q u_n, \text{ 对任给的 } n \in N.$$

由引理2.1, 我们有

$$w > u_n, \text{ 对任给的 } n \in N.$$

又由 $q(t, \cdot)$ 的单调性, (3.2)和(a), 有

$$\begin{aligned} Q w(T) &= Q w(t) + Q w(T) - Q w(t) \\ &\geq Q u_n(t) + \varepsilon / 2 + Q u_n(T) - Q u_n(t) \\ &= Q u_n(T) + \varepsilon / 2 \end{aligned}$$

对任给的 $n \in N$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 我们得到

$$Q w(T) \geq u(T) + \varepsilon / 2 = v(T) + \varepsilon / 2,$$

与 v 的定义矛盾. 这就证明了 v 和 u 相等, 因此也是连续的. 因此 $v = \sup C \in [a, b]$.

由引理2.1, $Q v \geq v$, 故 $(Q^n v)$ 是增的. 选择 $u_n = Q^{n-1} v$ 如上, 可见 $\sup_n Q^n v$ 存在且属于 $[a, b]$. 因此, Q 满足定理2.1的条件(S), 故由此, Q 有最小不动点 u_* .

由 Q 的定义, u_* 是 $[a, b]$ 上的初值问题

$$u'(t) = q(t, u(t)) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上, } u(0) = u_0 \quad (3.6)$$

的最小解. 又由(3.3), 计算后易得

$$\underline{u}(t) = u_*(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J \quad (3.7)$$

关于最大解的存在性可以作类似的讨论.

沿用定理3.1中的符号, 以及系2.1.a, 有

系3.1 设 $f: J \times R \rightarrow R$ 满足条件(f1)-(f3). 对任给的 $u_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$, 函数序列

$$v_n(t) = w_n(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J, n \in N,$$

其中

$$w_n(t) = u_0 + \int_0^t q(r, w_{n-1}(\tau))d\tau, n = 1, 2, \dots,$$

a) 在 J 上递增一致收敛于(3.1)的最小解, 如果 $w_0 = a$, 而且对所有 $t \in J$, $f(t, \cdot)$ 在 $[\alpha(0), \beta(0)]$ 上左连续.

b) 在 J 上递减一致收敛于(3.1)的最大解, 如果 $w_0 = b$, 而且对所有 $t \in J$, $f(t, \cdot)$ 在 $[\alpha(0), \beta(0)]$ 上右连续.

证明: 易见如果假设a成立, 由(3.5)可知, 给定的算子 Q 没有向左的下跳跃. 因此, 由系2.1.a, 最小不动点由

$$u_* = \sup_n Q^n a = \sup_n w_n$$

得到. 通过定理3.1的证明中提及过的原因, 可以知道序列 $(Q^n a)$ 是递增的, 而且在 J 上一致收敛. 因此, (v_n) 是 J 上的递增序列, 而且一致收敛于由(3.7)给出的 \underline{u} , 也就是初值问题(3.1)的最小解.

关于b)的假设和结果与a)的完全类似.

3.2 IVP的最大最小解与初值和方程右端的依赖性

定理2.1的结果(2.1)和(2.2)可以用来研究初值问题(3.1)的最大最小解与初值 u_0 和方程右端 f 的依赖性.

定理3.2 设 $f: J \times R \rightarrow R$ 满足条件(f1)-(f3), 而且用 \underline{u} 和 \bar{u} 标记初值问题(3.1)的最小解和最大解. 则 \underline{u} 是IVP(3.1)的最小的上解, 而且 \bar{u} 是IVP(3.1)的最大的下解. \underline{u} 和 \bar{u} 对应于 u_0 和 f 都是增的.

证明: 设 v 是(3.1)的一个上解, 即如,

$$v' \geq f(t, v) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上, } v(0) \geq u_0.$$

标记

$$w(t) = v(t)e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J \quad (a)$$

易见 $Q^{w \leq w}$, 其中 Q 如(3.5)定义. 因此, 如果把 Q 的最小不动点标记为 u^* , 则由(2.2),

$$u_* \leq w. \quad (b)$$

由(a), (b)及(3.7), 又 $u \leq v$, 其中 u 是(3.1)的最小解.

如果 $v_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$ 且 $v_0 \geq u_0$, 则

$$v' = f(t, v) \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立, } v(0) = v_0$$

的最小解 v 是(3.1)的一个上解, 且 $u \leq v$.

如果 f_1 满足假设(f1)-(f3), 和 f 有同样的 α, β 和 h , 且如果

$$f(t, s) \leq f_1(t, s) \text{ 对 } t \in J, \alpha(t) \leq s \leq \beta(t),$$

则

$$v' = v' = f_1(t, v) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上, } v(t) = u_0$$

的最小解 v 是(3.1)的一个上解, 故 $u \leq v$.

关于最大解的对偶结论的论证和上面的证明完全类似.

第四章 一个引理和具体应用

4.1 一个引理

下面的引理是定理3.1的一个具体形式.

引理4.1 $f : J \times R \rightarrow R$ 满足条件(f1)-(f3), 当且仅当满足如下形式

$$f(t, r) = q(t, r e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}) e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau} - h(t)r, \quad (4.1)$$

其中 $h \in L(J, R_+)$ 且 $q : J \times R \rightarrow R$ 满足如下条件:

(q1) 存在 $a, b \in AC(J, R)$, $a \leq b$, 且

$$a' \leq q(t, a) \text{ 且 } b' \geq q(t, b) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上.}$$

(q2) $q(\cdot, u(\cdot)) \in L(J, R)$, 对所有 $a \leq u \leq b$, 且

(q3) $q(t, \cdot)$ 在 $[a(t), b(t)]$ 上对任给的 $t \in J$ 都增.

进一步, u 是初值问题(3.1)的上、下、最大、最小解, 当且仅当

$$u(t) = w(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J$$

其中 w 是对应IVP

$$w' = q(t, w) \text{ 几乎处处在 } J \text{ 上, } w(0) = u_0 \quad (4.2)$$

的解.

证明: 第一个论断的必要性可以通过定理3.1和3.2的证明得到.

反过来, 如果 f 由(4.1)给定, 其中 $h \in L(J, R)$ 且 q 满足(q1)-(q3), 则(f1)说明 α, β 由

$$\alpha(t) = a(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, \beta(t) = b(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J \quad (4.3)$$

给定.

在特殊情形中, 当(q1)中的 a 增且 $a(0) \geq 0$ 时, 举例来说, 如果 q 将 $J \times R_+$ 映到 R_+ 上, 且 $a = \theta$ (零函数), 则 $P = C(J, R)$ 可以被

$$P = \{u \in C(J, R) \mid u \text{ 单 } \} \quad (4.4)$$

取代 (见[2], 第五部分第三、四段). 相应地, 当(q1)中的 b 减且 $b(0) \leq 0$, 并且当

$$q(t, s)s \geq 0, \text{ 对任何 } t \in J, s \in R. \quad (q5)$$

的时候的时候可以作同样的事情.

引理5.1中, 条件(q2)可以被如下条件所取代:

$t \in J$, 且在 t 对至少一个 $s \in [a(t), b(t)]$ 右端不连续 (以及对应情形: 左端不连续) 的 $q(\cdot, s)$ 的集合是零测度的. $(q2)'$

应用以上引理, 可以得到以下结论.

4.2 应用实例

例4.1. 给定 $M \geq 0$, 以及一个整数 $m \geq 1$. 标记

$$a(n_1, \dots, n_m) = M + 2^{-m} + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-n_k - k - m} + 2^{-n_k - 2m + 1}, 0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_m.$$

易见对每个 n_j 来说, $a(n_1, \dots, n_m)$ 都是递减的. 而且, 对每个 $m = 1, 2, \dots$,

$$a(\infty, \dots, \infty) = a(0, \dots, 0),$$

并且对每个 $j = 2$ 到 $m-1$,

$$a(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j, \infty, \dots, \infty) = a(n_1, \dots, n_{j-1}, n_j + 1, \dots, n_j + 1).$$

设 $\omega: R_+ \rightarrow R_+$ 对

$$c(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau < \infty, \quad \text{对每 } t > 0$$

是一个几乎处处右连续的函数.

按照下式定义一个函数 $q: R_+ \times R \rightarrow R$:

$$q(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{当 } s = 0 \text{ 且 } 0, \\ M\omega(t), & \text{当 } 0 < s \leq Mc(t), \\ (M+1)\omega(t), & \text{当 } 0 < Mc(t) + c(t) < s, \\ a(n_1, \dots, n_m + 1)\omega(t), & \text{当 对 } m=1, \dots, \text{来 说} \\ & a(n_1, \dots, n_m + 1)c(t) < s \leq a(n_1, \dots, n_m)c(t), \\ -q(t, -s), & \text{当 } t > 0 \text{ 且 } 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

设 $J = [0, T], T > 0$ 给定. 易见有

$$b(t) = (M+1)c(t), t \in J, a = -b$$

满足(q1). 且条件(q2)',(q3)和(q5)满足. 进一步, 如果 P 由(4.4)给定且 $Q: P \rightarrow P$ 由

$$Qu(t) = \int_0^t q(r, u(r)) dr, t > 0, u \in P$$

定义, 易见 Q 将形如

$$u(t) = a(n_1, \dots, n_{m-1}, n_m)c(t), t \in J$$

的函数映射到

$$Qu(t) = a(n_1, \dots, n_{m-1}, n_m + 1)c(t), t \in J.$$

由以上可知, Q 的最小不动点和最大不动点, 也就是有 $u(0) = 0$ 的IVP(4.2) 的最小解 u^* 和最大解 u^* 分别是:

$$u^*(t) = \sup_m (\sup_{n_m} (\dots (\sup_{n_1} Q)^{n_1} \dots)^{n_m} (a)(t)) = -Mc(t), t \in J$$

和

$$u^*(t) = \inf_m (\inf_{n_m} (\dots (\inf_{n_1} Q)^{n_1} \dots)^{n_m} (b)(t)) = Mc(t), t \in J.$$

因此, 如果 q 由(4.5)给定, 那么对每个 $h \in L(J, R_+)$, 有由(4.1)给定的 $u_0 = 0$ 和的初值问题有最小解 \underline{u} 和最大解 \bar{u} , 且

$$\underline{u}(t) = -Mc(t)e^{\int_0^t h(\tau) d\tau}, \bar{u}(t) = Mc(t)e^{\int_0^t h(\tau) d\tau}, t \in J.$$

例4.2. 若IVP中的非线性项

$$f(t, r) = q(t, r e^{\int_0^t h(\tau) d\tau}) e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau} - h(t)r, r(0) = r_0$$

则IVP的解（上、下、最大、最小解）

$$r(t) = u(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J$$

其中 u 是

$$u' = q(t, u), \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立} \quad r(0) = r_0.$$

的解，这里 q 满足：

1. $|q(t, u)| \leq t^\alpha u^\beta$, 在 J 上几乎处处成立 $\beta < 1$

2. $q(\cdot, u(\cdot)) \in L(J, R)$, 在 $a \leq u \leq b$

3. $q(t, \cdot)$ 对 $\forall t \in J$ 在 $[b,]$ 上增

证明：由引理4.1，后两个条件显然。下证第一个条件与 (q1) 等价。由题，取

$$a = \left(\frac{\beta - 1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} t^{\frac{1+\alpha}{1-\beta}}, \quad b = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} t^{\frac{1+\alpha}{1-\beta}},$$

由 $\beta < 1$ ，易见 $a, b \in AC(J, R)$, 且 $a \leq b$ 。又，

$$a' = - \left(\frac{\beta - 1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}, \quad b' = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}.$$

而

$$q(t, a) \geq -t^\alpha a^\beta = -t^\alpha \left(\left(\frac{\beta - 1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} t^{\frac{\beta+\alpha\beta}{1-\beta}} \right) = - \left(\frac{\beta - 1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}, \quad \text{在 } J \text{ 上几乎处处成立,}$$

又

$$q(t, b) \leq t^\alpha b^\beta = t^\alpha \left(\left(\frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} t^{\frac{\beta+\alpha\beta}{1-\beta}} \right) = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} t^{\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}}, \quad \text{在 } J \text{ 上几乎处处成立.}$$

故

$$a' \leq q(t, a) \text{ 且 } b' \geq q(t, b), \quad \text{在 } J \text{ 上几乎处处成立.}$$

故只要取 a, b 如上，即可满足条件 (q1)。进一步，可以得到

例4.3. 若IVP中的非线性项

$$f(t, r) = q(t, r e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}) e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau} - h(t)r, r(0) = r_0$$

则IVP的解（上、下、最大、最小解）

$$r(t) = u(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J$$

其中 u 是

$$u' = q(t, u), \text{ 在 } J \text{ 上 几乎处处成立} \quad u(0) = r_0.$$

的解，这里 q 满足：

1

$$|q(t, u)| \leq p(t)u^\beta, \text{ 在 } J \text{ 上 几乎处处成立} \quad \text{且} \quad (\beta, -1)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad \text{在 } u \leq b$$

2. $q(\cdot, u(\cdot)) \in L(J, R)$, 在 $a \leq u \leq b$

3. $q(t, \cdot)$ 对 $\forall t \in J$, $[a, b]$ 上增

证明：和例4.1类似，讨论条件1. 首先，由条件2, $p(t) \in L(J, R)$. 然后，取

$$a = (\beta - 1)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad b = (1 - \beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

由 $\beta < 1$, 如果 $\int_0^t p(\tau) d\tau > 0$, 易见 $a, b \in AC(J, R)$, 且 $a \leq b$. 若 $\int_0^t p(\tau) d\tau < 0$, 不妨将 a, b 交换，以保证 $a \leq u \leq b$. 又，

$$a' = -(\beta - 1)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} p(t), \quad b' = (1 - \beta)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} p(t).$$

而

$$q(t, a) \geq -p(t)a^\beta = -p(t) \left((\beta - 1)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^\beta = -p(t) \left((\beta - 1)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \right)$$

， 在 J 上几乎处处成立，

又

$$q(t, b) \leq p(t)b^\beta = p(t) \left((1 - \beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^\beta = p(t) \left((1 - \beta)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \right)$$

， 在 J 上几乎处处成立.

故

$$a' \leq q(t, a) \text{ 且 } b' \geq q(t, b), \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立.}$$

故只要如上取 a, b ，即可满足条件 (q1). 相似地，讨论

例4.4. 若IVP中的非线性项

$$f(t, r) = q(t, r e^{\int_0^t h(\tau) d\tau}) e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau} - h(t)r, r(0) = r_0$$

则IVP的解（上、下、最大、最小解）

$$r(t) = u(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}, t \in J$$

其中 u 是

$$u' = q(t, u), \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立} \quad q(0) = r_0$$

的解，这里 q 满足：

$$1. \quad 0 \leq q(t, u) \leq p(t)e^u, \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立} \quad \int_0^t p(\tau)d\tau < 0 \quad p(0) = 0$$

$$2. \quad q(\cdot, u(\cdot)) \in L(J, R), \text{ 在 } a \leq u \leq b$$

$$3. \quad q(t, \cdot) \text{ 对 } \forall t \in J, [a, b] \text{ 上增}$$

证明：分情况讨论。对于 $-e \leq \int_0^t p(\tau)d\tau < 0$ ，讨论条件1。取

$$a = 0, \quad b = -\ln(-\int_0^t p(\tau)d\tau),$$

由 $b > 0$ ，易见 $a, b \in AC(J, R)$ ，且 $a \leq b$ 。又，

$$\begin{aligned} b' &= -\frac{-p(t)}{-\int_0^t p(\tau)d\tau} = -\frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau} \\ a' &= 0, \end{aligned}$$

而

$$q(t, b) \leq p(t)e^b = p(t)(-\int_0^t p(\tau)d\tau)^{-1} = -\frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau}, \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立，}$$

又

$$q(t, a) \geq 0, \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立}$$

是显然的，故

$$a' \leq q(t, a) \text{ 且 } b' \geq q(t, b), \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立.}$$

满足。故只要如上取 a, b ，即可满足条件 (q1)。而对于 $\int_0^t p(\tau)d\tau < 0$ ，同样讨论条件1。取

$$a = 0, \quad b = \ln(-\int_0^t p(\tau)d\tau),$$

由 $b > 0$ ，易见 $a, b \in AC(J, R)$ ，且 $a \leq b$ 满足。又，

$$\begin{aligned} b' &= \frac{-p(t)}{-\int_0^t p(\tau)d\tau} = \frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau} \\ a' &= 0, \end{aligned}$$

而

$$q(t, b) \leq p(t)e^b = p(t)\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right)^{-1} = \frac{p(t)}{\int_0^t p(\tau)d\tau}, \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立,}$$

又

$$q(t, a) \geq 0, \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立}$$

是显然的, 故

$$a' \leq q(t, a) \text{ 且 } b' \geq q(t, b), \text{ 在 } J \text{ 上几乎处处成立.}$$

满足. 故只要如上取 a, b , 即可满足条件 (q1).