Лекции по предмету "Вычислительная математика"

Тишкин Владимир Федорович

Содержание

Лекция №2: Анализ устойчивости численных схем

Начнем разговор про устойчивость. У нас имеется последовательность, оператор $A_h u_h = f_h$. Тогда разница между точным решением и есть исходное уравнение $Au = f$. Если мы вычтем теперь точное уравнение из исходного, то мы получим условие $A_h(u_h - u_h^T) = r_h$, где u_h^T - сеточная функция, которая соответствует значениям точного решения, $r_h = A_h u_h^T - f_h$. Тогда разница $z_h = u_h - u_h^T$ удовлетворяет уравнению $z_h = A^{-1} r_h$. Это все верно для линейных уравнений (т.к. для нелинейных мы вычитать одно из другого не можем, вернее можем, но получится все по другому). Тогда если норма оператора ограничена $||A_h^{-1}|| \leq M$, то тогда мы получим оценку погрешности приближенного и точного решения через величину невязки r_h.

Определение 1. *Система называется устойчивой, все разностные схемы называются устойчивыми, если у нас исполнено условие:*

$$||A_h^{-1}|| \leq M \tag{1}$$

Если аппроксимация характеризует связь численного метода с исходным дифференциальным уравнением, то устойчивость внутренним свойством вычислительного метода. Оно не связанно с самим уравнением.Оно описывает лишь свойства разностных операторов.

Мы должны оценить норму $||A_h^{-1}||$.

Но прежде чем мы это сделаем поговорим о самосопряженных операторах. Самосопряженный оператор подразумевает, что у нас в пространстве имеется скалярное произведение, то есть содержится пространство кон функций, которые являются Гильбертовыми пространствами. Самосопряженные операторы имеют ортогональные базисы собственных векторов.

Приведем пример того, что такое собственный вектор линейного оператора: Если мы возьмем, например, качели и начнем рукой их раскачивать. Можем качать как угодно. Такие колебания называются **вынужденными**, а если поднимем вверх и отпустим, то такие колебания называются **собственными**. Теперь если посмотреть уравнение динамики, то задача нахождения собственных колебаний связана с задачей вычисления некоторого оператора $Ax = \lambda x$. Вот такие уравнения они позволяют найти собственные колебания. Вектор x ненулевой, называется собственным **вектором** оператора A, λ его собственным значением.

Покажем, что два собственных вектора, которые соответствуют разным собственным значениям ортогональны друг другу.

Теорема 1. *Два собственных вектора, которые соответствуют разным собственным значениям ортогональны друг другу.*

Доказательство. Пусть имеется два вектора x и y, которые являются собственными векторами самосопряженного оператора A_h.

$$A_x = \lambda_1 x \tag{2}$$
$$A_y = \lambda_2 y \tag{3}$$

Если мы теперь скалярно умножим (2) и (3):

$$(A_x, y) = \lambda_1(x, y) \tag{4}$$
$$(A_y, x) = \lambda_2(x, y) \tag{5}$$

Вычтем теперь из (4) (5):

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) \tag{6}$$

Но по условию $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда $(x, y) = 0$.

Используя тот факт, что самосопряженный оператор обладает базисом из собственных векторов, то можно сделать вывод, что любой вектор z, принадлежащий нашему пространству, может быть разложен по элементам этого базиса: $z = \sum\limits_i z_i x_i$, где x_i является собственным вектором матрицы A. Тогда $Az = \sum\limits_i z_i x_i \lambda i$. Тогда:

$$||A_z|| = \sqrt{(A_z, A_z)} \tag{7}$$
$$(A_z, A_z) = \sum_i z_i^2 \lambda_i^2 = \sum_i z_i^2 \lambda_{\min}^2 = \lambda_{\max}^2 ||z||^2 \tag{8}$$

А норма $||z|| = (z, z) = \sum\limits_i z_i^2$. Тогда справедливо утверждение:

$$||A_z|| \leq |\lambda_{\max}|^2 ||z||$$

$\square$

Рассмотрим случай самосопряженного оператора A_h. Пусть $A_h = A_n^*$, тогда норма самосопряженного оператора