

ข้อตกลงและเงื่อนไขการบันทึกวิชา 206112 แคลคูลัส 2

## ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

## ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2567

ແພນເພງປະຈຳກະບວນວິຊາ <https://www.facebook.com/calculus206112/>

เว็บไซต์ประจำกระบวนวิชา <https://www.math.science.cmu.ac.th/206112/>

YouTube Channel: Calculus112

## 1. คำอธิบายลักษณะกระบวนการวิชา

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง ฟังก์ชันหลายตัวแปร ปริพันธ์หลายชั้น อนุกรมอนันต์

2. ผลลัพธ์การเรียนรู้ของกระบวนวิชา (Course Learning Outcomes: CLOs) : นักศึกษาสามารถ

CLO 1 : แก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และประยุกต์เทคนิคกับปัญหาที่เกี่ยวข้อง

CLO 2 : หาอนุพันธ์ y ของฟังก์ชันหลายตัวแปร และประยุกต์ในการประมาณค่าใช้สอยและค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปร

CLO 3 : แปลงระบบพิกัดระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงข้อ และวัดกราฟในพิกัดเชิงข้อ

CLO 4 : วัดกราฟของเพื่อนผู้ในระบบพิกัดฉาก และแปลงระบบพิกัดระหว่างพิกัดฉาก พิกัดทรงกรวยบอก และพิกัดทรงกลม

CLO 5 : คำนวณค่าปริพันธ์หลายชั้นในระบบพิกัดต่าง ๆ และประยุกต์กับการหาพื้นที่และปริมาตร

CLO 6 : ทดสอบการลุ่เข้าของอนุกรมอนันต์ และหาช่วงของการลุ่เข้าของอนุกรมกำลัง

### 3. เนื้อหากระบวนการวิชา

บทเรียน	หัวข้อ/เนื้อหา	ผลลัพธ์การเรียนรู้					
		CLO 1	CLO 2	CLO 3	CLO 4	CLO 5	CLO 6
1. สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น อันดับสอง	1.1 สมการเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 1.2 สมการไม่เอกพันธุ์:- วิธีเทียบสัมประสิทธิ์	✓ ✓	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
2. พังก์ชันหลายตัวแปร	2.1 พังก์ชันหลายตัวแปร 2.2 กราฟของพังก์ชันสองตัวแปร 2.3 ค่อนทั่วไป 2.4 ลิมิตและภาวะต่อเนื่อง	○ ○ ○ ○	✓ ○ ○ ✓	○ ○ ○ ○	○ ✓ ○ ○	○ ✓ ○ ○	○ ○ ○ ○
	2.5 อนุพันธ์ย่อย 2.6 กฎลูกโซ่ 2.7 การทำเป็นเชิงเส้นและผลต่างเชิงอนุพันธ์ 2.8 ค่าสุดขีดและจุดอาณม้า	○ ○ ○ ○	✓ ✓ ✓ ✓	○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
3. ปริพันธ์หลายชั้น	3.1 พิกัดเชิงขั้วและกราฟ	*** ***	*** ***	○ ○	✓ ✓	○ ○	○ ○

## Midterm

1. Second-Order linear equation

↳ Homogeneous

↳ Non Homogeneous

$$\left. \begin{array}{l} Ay'' + By' + Cy = G(x) \\ Ay'' + By' + Cy = 0 \end{array} \right\}$$

## General Solution

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2 \Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{C}, r = a \pm bi \Rightarrow y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

$$y'' - 4y = 0$$

$$\text{Auxiliary} \quad r^2 - 4r = 0$$

$$r^2 = y'', r = y', y = y \quad *4x$$

1.

จงหาค่าต่ำบของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

## \* ปีกที่ 2

\* แปลงเป็นสมการชี้ยันท์

$$1.1 \quad y'' - 4y' + 4y = 0 \quad r^2 = y'', \quad r = y'$$

สมการชี้ย์  $r^2 - 4r + 4 = 0$

\* แก้  $r$  ตามดิลามณฑ์

$$(r-2)^2 = (r-2)(r-2) = 0$$

$$r = 2, 2 \quad **$$

คิตรทั่วไป  $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \#$

หัว 1 หุ่นที่ 5

$$1.2 \quad 9y'' + 4y = 0, \quad b^2 - 4ac \text{ ก็แล้ว}$$

สมการชี้ย์  $9r^2 + 4 = 0$

$$(3r)^2 - (2i)^2 = 0$$

$$r = \pm \frac{2i}{3} = 0 \pm \frac{2i}{3}$$

$$\sim \sim y = e^{0x} (C_1 \cos(\frac{2}{3}x) + C_2 \sin(\frac{2}{3}x)) \#$$

หัว 1 หุ่นที่ 4

1. กำหนดสมการ  $y'' + ky = 0$  เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัวใดๆ

จงหาค่าต่ำบของสมการที่กำหนดให้

1.1 เมื่อ  $k = 0$

1.2 เมื่อ  $k < 0$

สมการชี้ย์  $r^2 + k = 0$

$$1.1 \quad k=0; \quad r^2 = 0, \quad r=0, 0$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} = C_1 + C_2 x \#$$

$$r^2 + k = 0$$

$$r^2 - (-k) = 0$$

$$r^2 - (\sqrt{-k})^2 = 0$$

$$(r - \sqrt{-k})(r + \sqrt{-k}) = 0$$

$$r = \pm \sqrt{k}$$

$$y = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 x e^{-\sqrt{k}x}$$

คิตรทั่วไป

$$k > 0$$

$$\begin{cases} r^2 + k = 0 \\ r^2 - (\sqrt{k}i)^2 = 0 \\ (r - \sqrt{k}i)(r + \sqrt{k}i) = 0 \end{cases}$$

$$r = \pm \sqrt{k}i$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = C_1 \cos(\sqrt{k}x) + C_2 \sin(\sqrt{k}x) \#$$

## General Solution

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \text{BVP } y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \\ \text{IVP } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{array}$$

## Exact Solution

ច្បាស់បែនាំង:

2 equations  
2 Variables

$y_1, y_2, C_1, C_2$

ទី 4

2. ឈើតាតតម្លៃរបស់សមារិលិក ឬ  $6y'' + y' - 2y = 0$  ដើម្បី  $y(0) = 1, y'(0) = -3$

$$6y'' + y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3$$

សេវានរៀប

$$6r^2 + r - 2 = 0$$

$$(3r + 2)(2r - 1) = 0$$

$$r = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, r_1 \neq r_2$$

គិតុបង្ហាញ

$$y = C_1 e^{-\frac{2}{3}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -3$$

$$y(0) = C_1 e^{-\frac{2}{3}(0)} + C_2 e^{\frac{1}{2}(0)}$$

$$1 = C_1 + C_2 \quad \text{---} \quad 1$$

$$y'(x) = -\frac{2}{3}C_1 e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

$$-3 = -\frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 \quad \text{---} \quad 2$$

$$C_1 + C_2 = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$-\frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = -3 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \times 2; \quad -\frac{4}{3}C_1 + C_2 = -6 \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3};$$

$$\frac{7}{3}C_1 = 7$$

$$C_1 = 7 \left( \frac{3}{7} \right) = 3$$

$$C_1 = 3, C_2 = -2$$

គិតផលបំផុត

$$y = C_1 e^{-\frac{2}{3}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

គិតផលបំផុត =

$$y = 3e^{-\frac{2}{3}x} - 2e^{\frac{1}{2}x} \quad \#$$

ၭၦ ၄ ၭၬ ၅

# នាកិចិត្តឈរភាព

$$2y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

శ్రీ మాత్రస్య

$$2r^2 + 5r + 3 = 0$$

$$(2r+3)(r+1) = 0$$

$$r = -\frac{3}{2}, -1$$

គិតសាស្ត្រ

$$y = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-x}$$

卷之三

1

۲

2

$$y(0)=2, y'(0)=1$$

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-x}$$

$$y'(x) = -\frac{3}{2}c_1 e^{-\frac{3}{2}x} - c_2 e^{-x}$$

3

$$2 = C_1 + C_2 \quad \text{--- } ①$$

$$1 = -\frac{3}{2}C_1 - C_2 \quad \textcircled{2}$$

① + ② ;

$$2+1 = C_1 - \frac{3}{2}C_1$$

$$3 = -\frac{1}{2}c_1$$

$$C_1 = -6 \quad ; \quad C_2 = 8$$

• • • • •

4

សំណងក្រោម

$$y = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-x}$$

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

$$y = -6e^{-\frac{3}{2}x} + 8e^{-x} \quad \# \rightarrow 5$$

ទូរការទី ១  $y(x) = x + \ln x$  នឹងរឿងរាយស្ថាម

Non Homogeneous:  $Ay'' + By' + Cy = G(x)$ ;  $G(x) \neq 0$

$y_c$        $y_p$

$$y = y_c + y_p$$

①  $2x^2 + 5x + 4 = Ax^2 + Bx + C$

$$5x = Ax + B$$

$$4x^3 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

②  $e^{ax}$ ;  $Ae^{ax} \Rightarrow 2e^{3x} = Ae^{3x}$

$$5e^{6x} = Be^{6x}$$

③  $\sin x, \cos x = A\cos x + B\sin x$

$$5\sin 2x = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

① . ②;  $e^{-2x}(5x+1) = (Ax+B)e^{-2x}$

① . ③;  $2e^{3x}(\sin 3x) = e^{3x}(A\sin(3x) + B\cos(3x))$

② . ③;  $(2x^2 + 4)\sin(2x) = (Ax^2 + Bx + C)\cos(2x)$   
 $+ (Dx^2 + Ex + F)\sin(2x)$

## ๔

3. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ คำตอบประกอบ  $y_c(x)$  และข้อต่อไปนี้

จะสมมติคำตอบเฉพาะ  $(y_p)$  โดยไม่ต้องคำนวณหาค่าคงตัว

$$3.1 \text{ สมการเชิงอนุพันธ์ } 2y'' - y = 1 - x^3 + 2e^{2x}$$

$$\text{คำตอบประกอบ } y_c(x) = c_1 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + c_2 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{สมมติ } y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + Ee^{2x} \quad \#$$

$$3.2 \text{ สมการเชิงอนุพันธ์ } y'' + y = x \sin 2x - \cos 3x$$

$$\text{คำตอบประกอบ } y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\text{สมมติ } y_p(x) = (Ax+B)\cos(2x) + (Cx+D)\sin(2x) + E\cos(3x) + F\sin(3x)$$

$$3.3 \text{ สมการเชิงอนุพันธ์ } y'' + 2y' + y = 2xe^{-x} + \pi \quad \text{ผิด } (c_1 + c_2 xe^{-x})$$

$$\text{คำตอบประกอบ } y_c(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \quad \checkmark$$

$$\text{สมมติ } y_p(x) = x^2((Ax+B)e^{-x}) + C \\ x(\pi(Axe^{-x} + Be^{-x}))$$

## ๕

2. กำหนดคำตอบประกอบ (complimentary solution)  $y_c$  ของสมการเชิงอนุพันธ์ในแต่ละข้อ  
จะสมมติคำตอบเฉพาะ (particular solution)  $y_p$  โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว

$$2.1) \text{ สมการเชิงอนุพันธ์ } y'' - 9y' = 4x^2 \sin(2x) + 7 \quad \text{คำตอบประกอบ } y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)\sin(2x) + (Dx^2 + Ex + F)\cos(2x) + G \quad \#$$

$$2.2) \text{ สมการเชิงอนุพันธ์ } y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x} + 4e^{-3x} \quad \text{คำตอบประกอบ } y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

$$y_p = x^2 A e^{3x} + B e^{-3x} \quad \#$$

$$2.3) \text{ สมการเชิงอนุพันธ์ } y'' + 16y = \underline{\sin(3x)} - \underline{5x e^{-\frac{x}{2}}} \quad \text{คำตอบประกอบ } y_c = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

$$y_p = A \sin(3x) + B \cos(3x) + (Cx + D) e^{-\frac{x}{2}} \quad \#$$

3.

กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์

$$(Ax^2+Bx)+Ce^{2x}$$

จะได้ว่า  $y_c = c_1 + c_2 e^{\frac{3x}{4}}$  เป็นคำตอบของประภากับ และสมมติคำตอบเฉพาะ  $y_p = (Ax^2 + Bx) + Ce^{2x}$   
จงใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์หาคำตอบเฉพาะ  $y_p$

$$y_p = \underline{(Ax^2 + Bx) + Ce^{2x}}$$

$$\text{ก} y_p' = 2Ax + B + 2Ce^{2x}$$

$$y_p'' = 2A + 4Ce^{2x}$$

\* กจกนหกกร

$$4(2A + 4Ce^{2x}) - 3(2Ax + B + 2Ce^{2x}) = 12x + e^{2x}$$

$$8A + 16Ce^{2x} - \underline{6Ax} - 3B - 6Ce^{2x} = \underline{12x} + e^{2x} + 0$$

$$x ; -6A = 12$$

$$A = -2$$

$$8A - 3B = 0$$

$$8(-2) - 3B = 0$$

$$B = \frac{16}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$16C - 6C = 1$$

$$10C = 1$$

$$C = \frac{1}{10}$$

$$y_p = -2x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{10}e^{2x}$$

โจ 4 ที่ 4

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + 2x + 2e^{-x} - \sin x$$



5. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์  $y'' - 3y' + 2y = 4 + \frac{10}{3}\sin(x)$

จะได้ว่า ค่าตอนบประกอบและค่าตอนบเฉพาะ คือ  $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$  และ  $y_p = 2 + \frac{1}{3}\sin(x) + \cos(x)$

จงหาค่าตอนบของปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) ของสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

ขอบ  $y(0) = \frac{7}{3}, y(\pi) = \frac{8}{3}$

$c_1 =$

$c_2 =$

$$\textcircled{1} \quad y(x) = y_c + y_p$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2 + \frac{1}{3}\sin(x) + \cos(x)$$

$$y(0), y(\pi)$$

$$\frac{7}{3} = c_1 + c_2 + 2 + 1 \quad \textcircled{1}$$

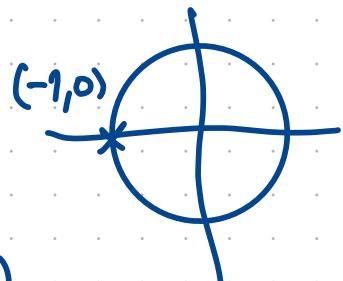
$$\frac{8}{3} = c_1 e^\pi + c_2 e^{2\pi} + 2 + \frac{1}{3}\sin(\pi) + \cos(\pi)$$

$$\frac{8}{3} = c_1 e^\pi + c_2 e^{2\pi} + 2 + 0 - 1 \quad \textcircled{2}$$

Hint  $\textcircled{1} \times e^\pi, e^{2\pi}$

$$c_1 = \frac{-5 - e^{2\pi}}{3(e^{2\pi} - e^\pi)} \quad \#$$

$$c_2 = \frac{5 + 2e^\pi}{3(e^{2\pi} - e^\pi)}$$



# Function of several Variable

អ្នកសិក្សាលោកសំគាល់



គំនួរសម្រាប់  $f$  4 នូវ 2 17-19

ស្ថិត Domain 2 នៅ

$$5. \quad f(x, y) = \frac{\ln(y^2 - x^2 - 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

\* កន្លែងលោក  $\frac{1}{x}$ ;  $x \neq 0$

$\sqrt{x}; x > 0$

$\log(x), \ln(x); x > 0$

3.1 Domain

$$\ln(y^2 - x^2 - 1)$$

$$y^2 - x^2 - 1 > 0$$

$y^2 - x^2 > 1$  hyperbola

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} > 0$$

$$4 - x^2 - y^2 > 0$$

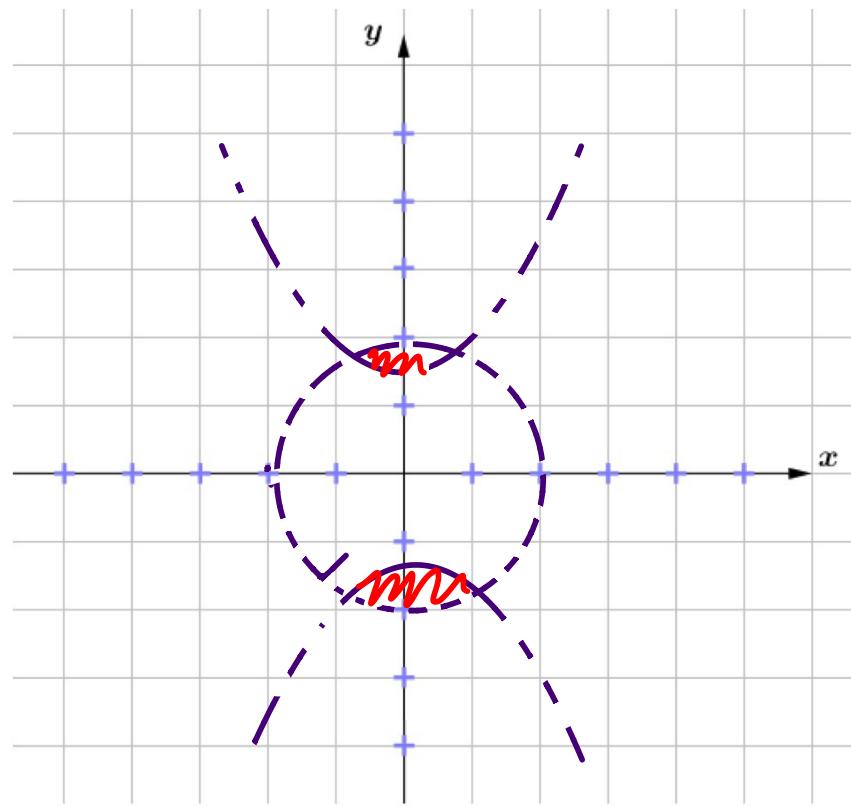
$$x^2 + y^2 < 4$$

$$\text{Domain } \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 4 \text{ និង } y^2 - x^2 > 1\}$$

5.2 វិបាទការរាង  $>$ ,  $\leq$ ,  $=$ ,  $>, <$   
សំគាល់

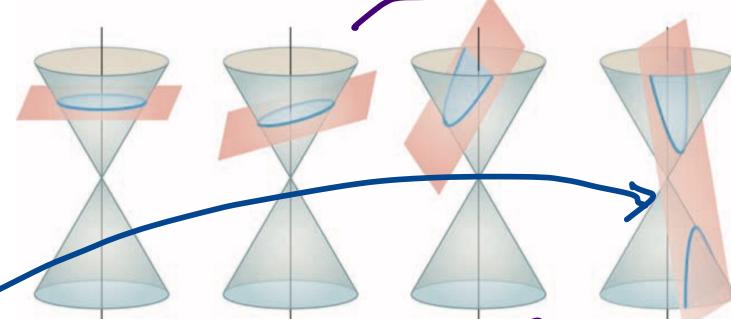
$$x^2 + y^2 < 4 \quad \text{និង} \quad y^2 - x^2 > 1$$

(1n)



$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \text{នៃការរាង}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{និង}$$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$y = ax^2$$

$$y - k = 4c(x - h)^2$$

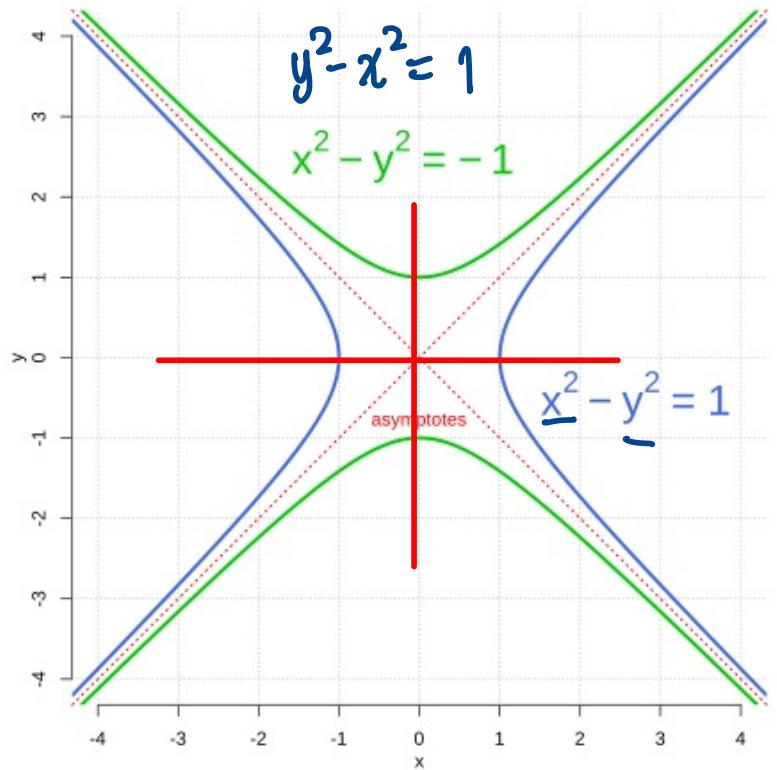
$$\rightarrow y = mx + C$$

$$x^2 + ay^2 = 0$$

$$ax^2 = by^2$$

Figure 10.4.1

A point      A pair of intersecting lines      A single line



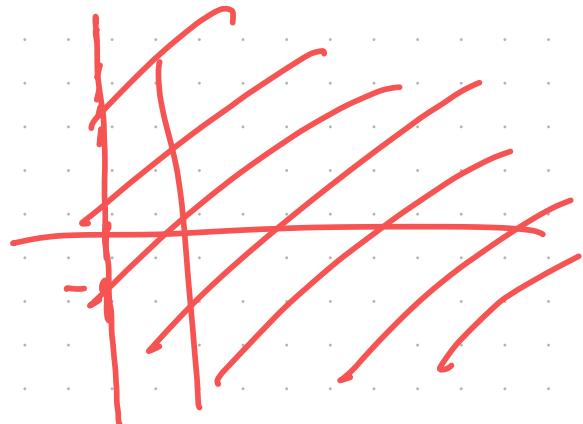
ໜົດ ໜົດ 5 \* ທີ່ໃຫ Domain / ໂຄງນວນ Domain

$$f(x,y) = \sqrt{x+1} + \log_2(1-x^2-y) > 0$$

$x+1 > 0$

$x+1 > 0$

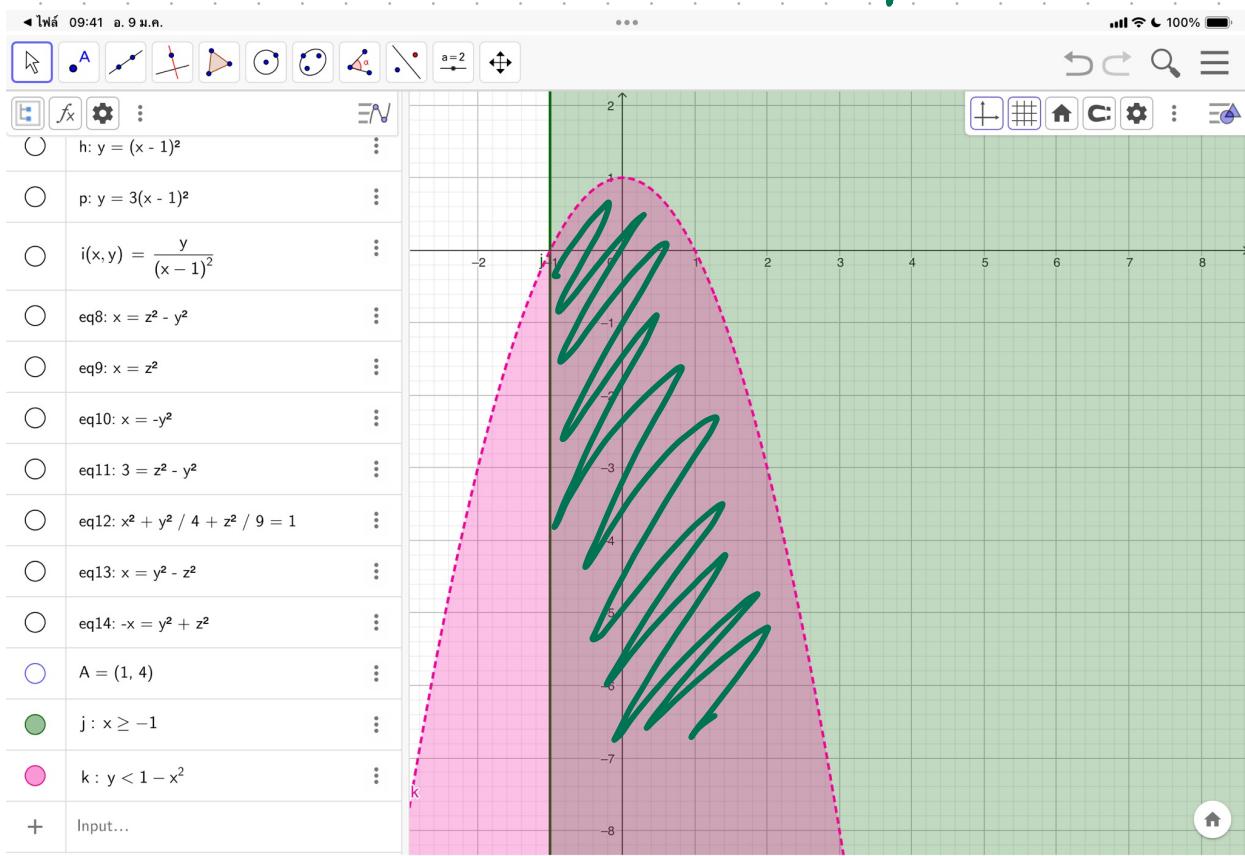
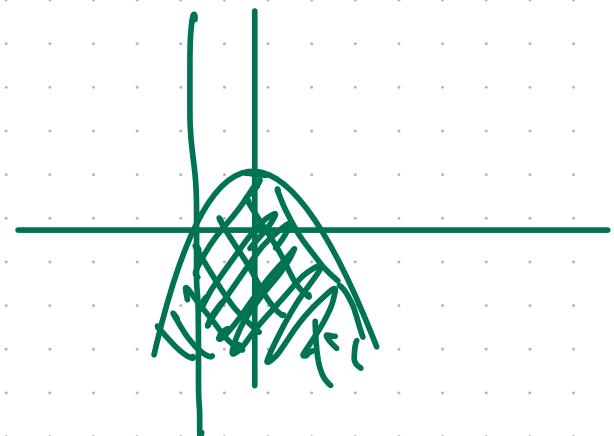
$x > -1$



$$1-x^2-y > 0$$

$$y < 1-x^2$$

$$0 < 1$$



# Contour, Level curve

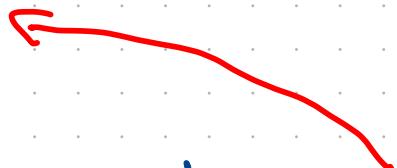
បន្ថែមកំណត់ទីតាំង

- បានរឿងសមារម្បងរួចរាល់ជាបុរាណ (a,b)
- គាររួច (ការរឿងរាល់)

សម្រាប់ 7 ទីតាំង 5 , 7 6 ទូទៅ 4

4.6

$$f(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2}$$



6.1 បន្ថែមគឺរាល់ទុក f កំណត់ឡាតាំង (3, -1)

$$\frac{-1}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(3-1)^2 &= -1 \\ -\frac{1}{4}(4) &= -1 \\ -1 &= -1 \quad \text{លទ្ធផល} \end{aligned}$$

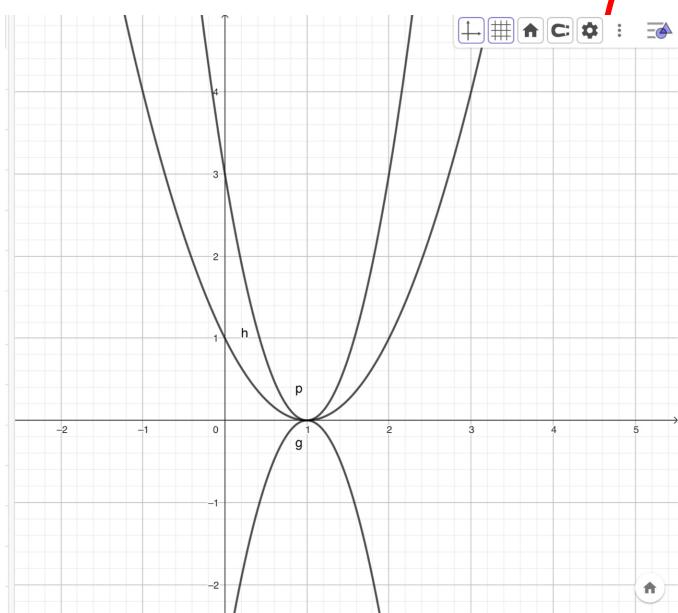
#  $-\frac{1}{4}(x-1)^2 = y \quad \text{ក្នុង } (3, -1)$

6.2 គន្លឹម curve contour  $z=k$ ,  $k=-3, 1, 3$

$$\frac{y}{(x-1)^2} = -3, 1, 3$$

$$y = -3(x-1)^2, \quad y = (x-1)^2, \quad y = 3(x-1)^2$$

ការរួច



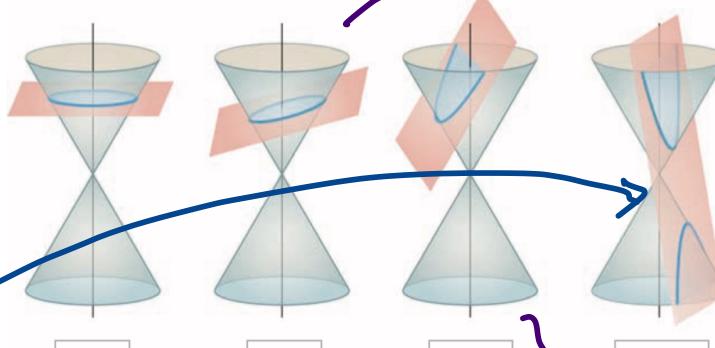
# Quadratic Surface ແພັດທະນາ 27-28

- ຂາງູປ (ຮະບຸ້ນິຕ່ອຫຍູປ) (ກົບປອດໄຈເຍດີ, ດົກ ຕ.ກ.)
- ຈົບຄົງູປ
- ຖຽມຕົວ / ອຸກການໂຄສະຕິ

$$xy, xz, yz$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \text{ ຂົກຂົງ}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ຂົກ}$$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$y = ax^2$$

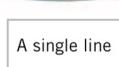
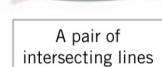
$$y - k = 4c(x-h)^2$$

$$\rightarrow y = mx + C$$

$$x^2 + ay^2 = 0$$

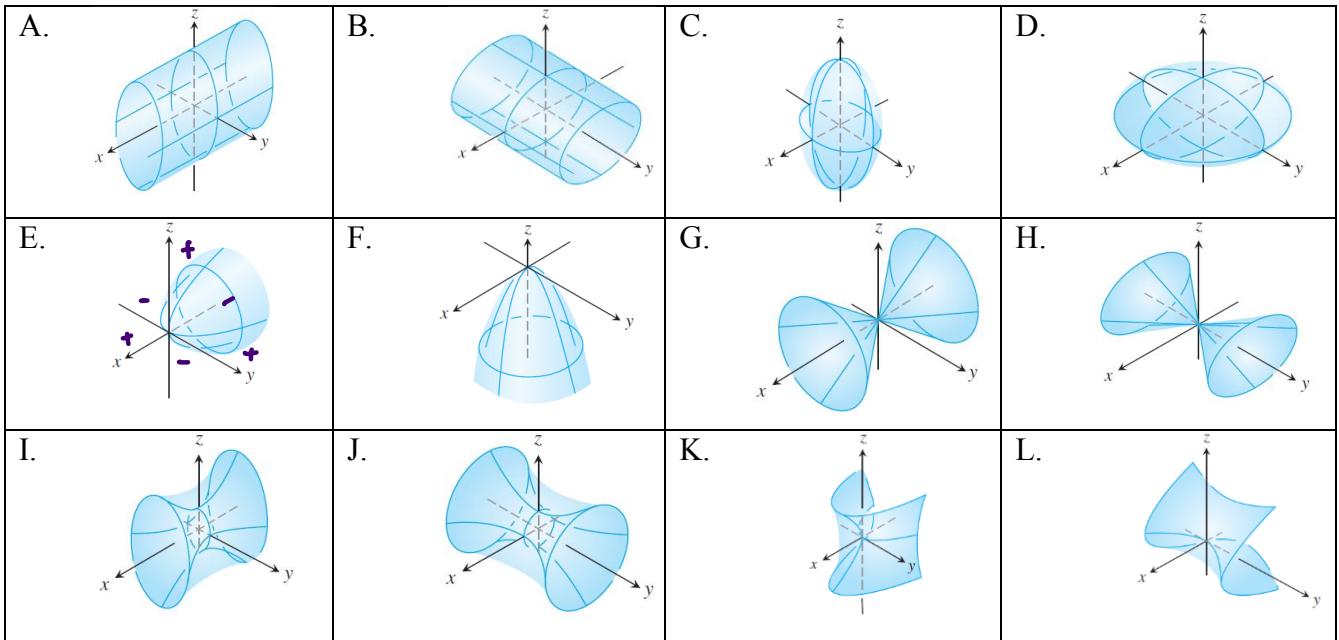
$$ax^2 = by^2$$

▲ Figure 10.4.1



7. จงจับคู่กราฟต่อไปนี้

**กิ่งฟงบน&ลง**

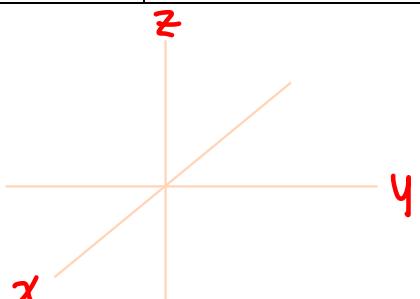


7.1  $x = z^2 - y^2$  คู่กับกราฟ ..... **K**

7.2  $y^2 + z^2 = 0$  คู่กับกราฟ ..... **G**

(7.3)  $x^2 + 4z^2 = 16$  คู่กับกราฟ ..... **B**

8. ให้  $x = y^2 + z^2$   $\chi = y^2 + z^2$



8.1 สมการของรอยตัดบนระนาบ  $XY$  คือ .....  $\chi = y^2$  ..... มีกราฟเป็นรูป **parabola**

8.2 สมการของรอยตัดบนระนาบ  $XZ$  คือ .....  $\chi = z^2$  ..... มีกราฟเป็นรูป **parabola**

8.3 สมการของรอยตัดบนระนาบ  $x = 4$  คือ .....  $4 = y^2 + z^2$  ..... มีกราฟเป็นรูป **วงกลม**

8.4 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน  $f$  โดยระบุจุดตัดให้ชัดเจน

9. กำหนดให้  $f(x, y) = \frac{3xy^2}{5x^2 + y^4}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \frac{3t^4}{5t^4 + t^4}$$

9.1 จงหา  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$   
ตามเส้น  $x = y^2$

$$= \frac{3t^4}{6t^4} + \frac{1}{2}$$

9.2 จงอธิบายว่า  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  หาก้าได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

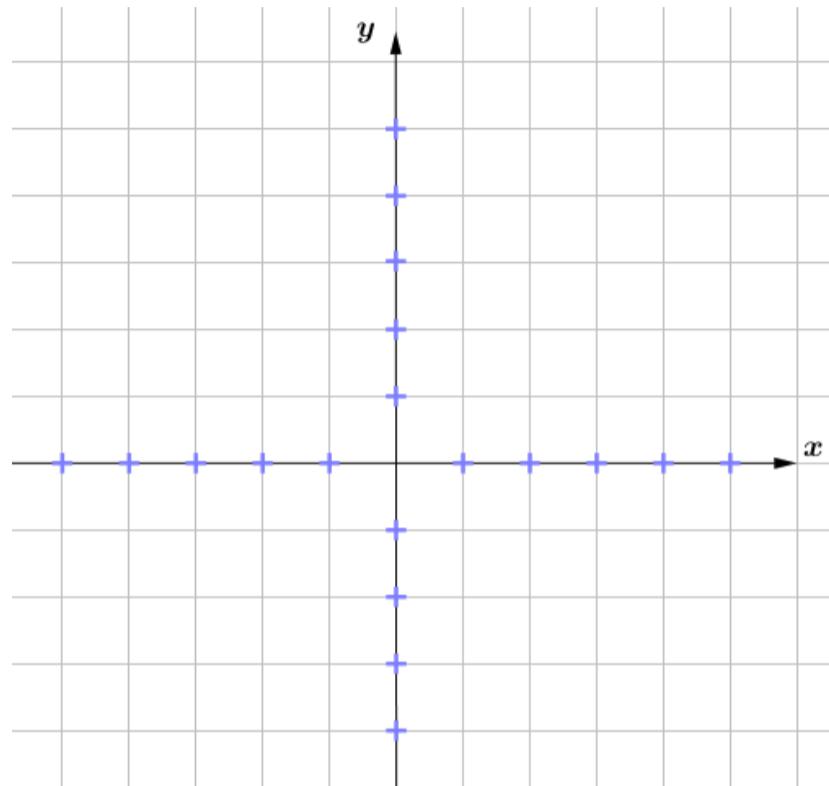
ไม่ได้

$$\begin{matrix} x = 2y^2 \\ \uparrow 0 \quad \downarrow 0 \end{matrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

6. ให้  $f(x, y) = \sqrt{x+1} + \log_2(1-x^2-y)$

6.1) โดเมนของ  $f$  คือ .....

6.2) จงหาดกราฟของโดเมนของ  $f$

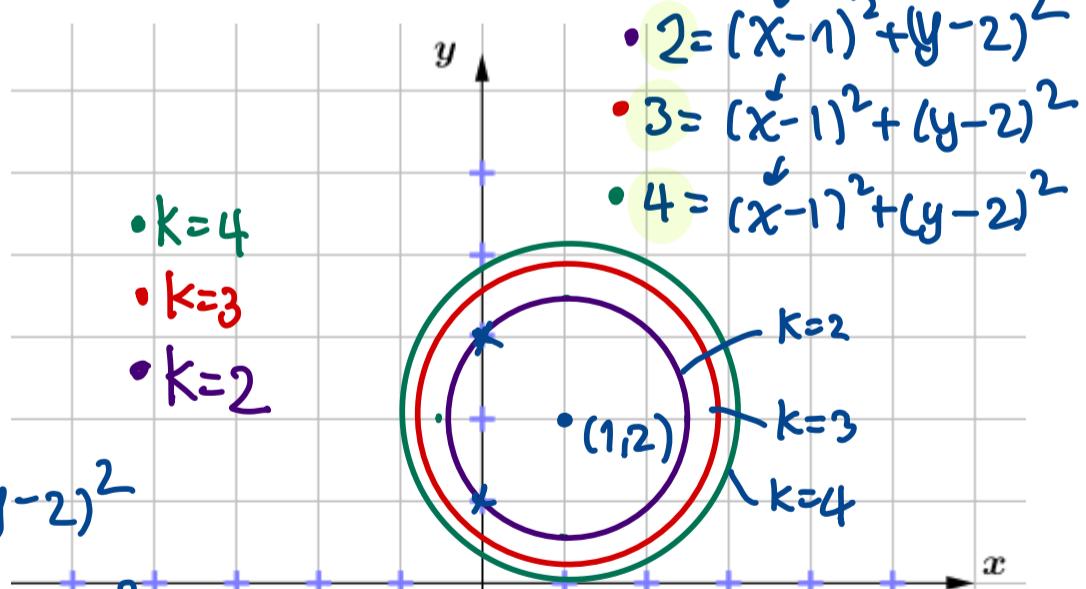


$$(h, k) \Rightarrow r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

7. จงหาดเส้นโค้งระดับ (level curve)  $z = k$  ของ  $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$  สำหรับ  $k = 2, 3, 4$  พิริยมทั้งระบุค่าของ  $k$  ที่สอดคล้องกับแต่ละเส้น จุดตัดแกน  $Y$  ของเส้นโค้งระดับแต่ละเส้นให้ครบ

ทุกจุด



$\bullet 2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$

$$2 = (0-1)^2 + (y-2)^2$$

$$2 = 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y-3)(y-1) = 0$$

$$y = 3, 1$$

$y^2 - 4y + 2 = 0$  ; จุดตัดแกน  $Y$

$$(0, 1), (0, 3)$$

$k=4$   $(0, 2-\sqrt{3}), (0, 2+\sqrt{3})$

$$y^2 - 4y + 1 = 0$$

↓ ↓  
รากบันค์กีญา .....

8. จงจับคู่กราฟต่อไปนี้

$-z = xy, yz$

$-z = x^2$

$$y = x^2$$

$$x = y^2$$

8.1)

$$-z = x^2 + y^2$$

$xy = \text{หมุน}$  คู่กับกราฟ

F

8.2)

$$x = y^2 - z^2$$

$xz = \text{หมุน}$  คู่กับกราฟ

L

8.3)

$$x + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

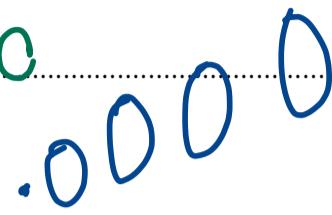
$xy$   
 $xz$   
 $yz$

คู่กับกราฟ

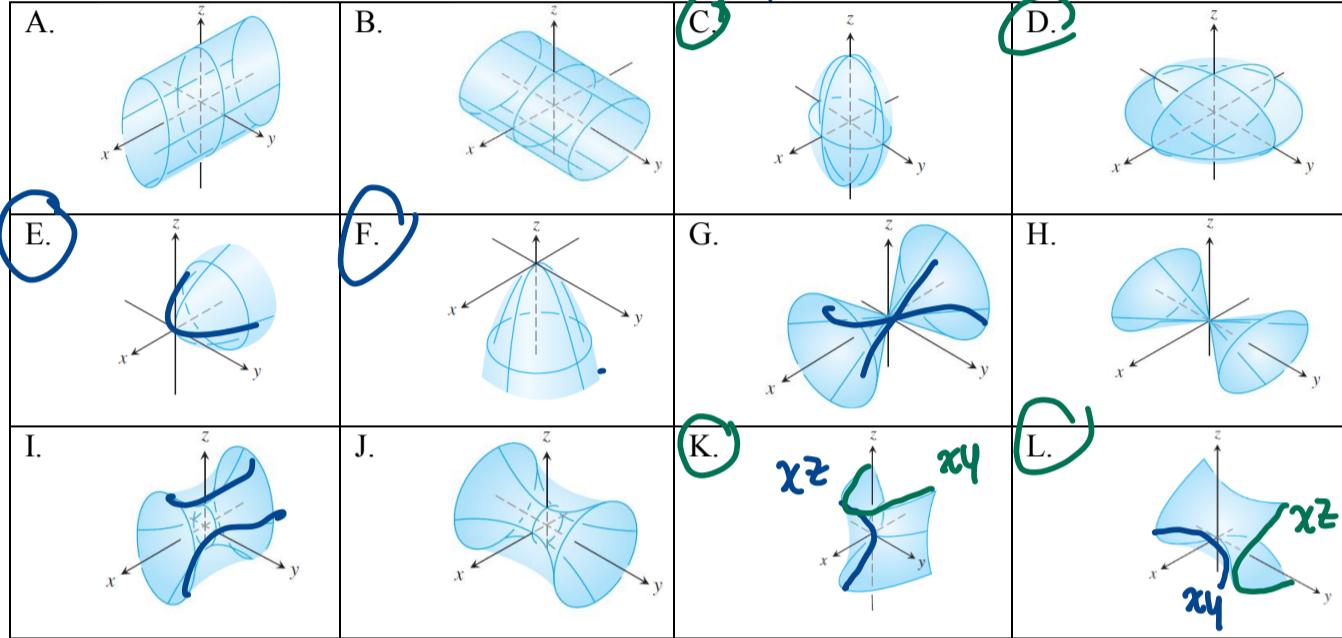
C

หมุน  $xz$

$xy = \text{วง}$ ,  $yz = \text{วง}$



$yz \Rightarrow -z = y^2$  หมุน บาน



หมุนบาน  $\pm$   
ทิศทาง

$z = -x^2$

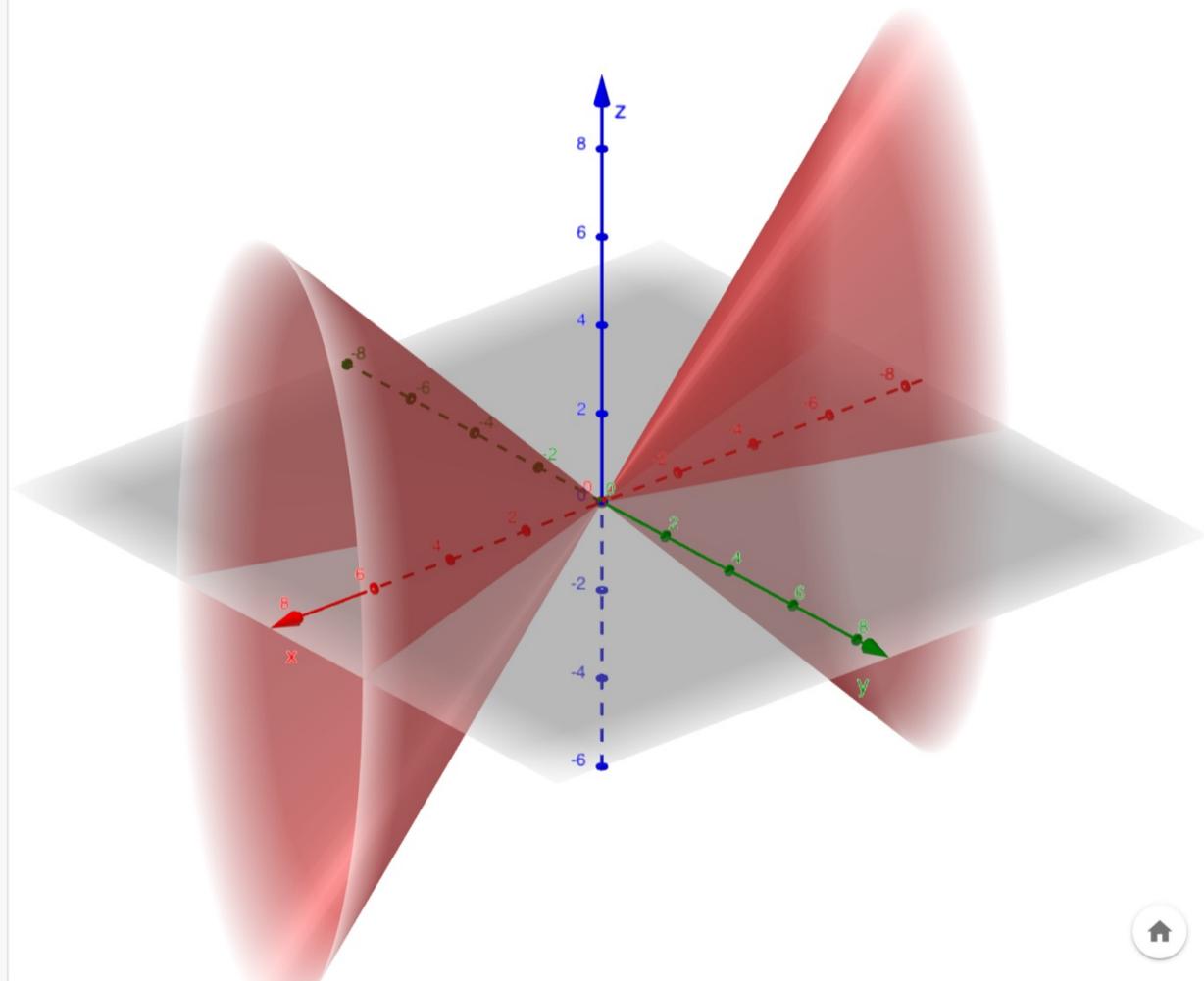
9. ให้  $x^2 = z^2 + 9y^2$

- 9.1) สมการของรอยตัดของกราฟนี้กับระนาบ  $XY$  คือ .....  $x^2 = 9y^2$  มีกราฟเป็นรูป ..... เส้น  $2$  เส้น  $2$
- 9.2) สมการของรอยตัดของกราฟนี้กับระนาบ  $YZ$  คือ .....  $z^2 + 9y^2 = 0$  มีกราฟเป็นรูป .....  $\text{วงกลม } (0,0)$
- 9.3) สมการของรอยตัดของกราฟนี้กับระนาบ  $XZ$  คือ .....  $x^2 = z^2$  มีกราฟเป็นรูป ..... เส้น  $2$  เส้น  $2$
- 9.4) สมการของรอยตัดของกราฟนี้กับระนาบ  $x=6$  คือ .....  $36 = z^2 + 9y^2$  มีกราฟเป็นรูป ..... วงรี

9.5) จงหาดกราฟ  $x^2 = z^2 + 9y^2$

$$\frac{z^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\frac{z^2}{6^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$



# Limit & continuity } និគរិក. វិគីមិត្រ

1-2 ទីលេង  $f(x,y)$  តួចបែង / និគមិត្រ

និគមិត្រស្តី  $x=y$

$x=t, y=t$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t)$$

បើផែកា  $f(x,y)$  អាចរួចទៅ

$$\begin{matrix} 1 - (-1) \neq 0 \\ 2 \neq 0 \end{matrix}$$

10. ឲ្យ  $f(x,y) = \frac{x^2y + \cos(2xy)}{x^2 - y}$  ជូនា

10.1 ចំណាំទីលេង  $f(x,y)$  គឺ

10.2 ឲ្យដឹងថាអ្នកអាចរួចទៅ  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y) = f(1,-1)$

$(1,-1)$  តួចបែង

①

1.  $f(1,-1)$  អាចរួចទៅ

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y)$  អាចរួចទៅ

$(1,-1)$

3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y) = f(1,-1)$

ព័ត៌មាន  $(1,-1)$  តួចបែង

លាមុន

$$\frac{-1 + \cos(-2)}{1 - (-1)}$$

$$\frac{-1 + \cos(2)}{2}$$

② ក្នុង 10.1 ក្នុងវា  $(1,-1) \in \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y \neq 0\}$   
លើស្ថា ព័ត៌មាន  $(1,-1)$  នឹងរួចទៅ

10. ให้  $f(x,y) = \frac{x + \sin y}{(x+2)^2 - y^2 - 4} = 0$  ไม่ถูก  $\sqrt{y}, \ln, \log$   
 $\neq 0, > 0, > 0$

10.1) เชตของจุดทั้งหมดที่  $f(x,y)$  ไม่ต่อเนื่อง คือ  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | (x+2)^2 - y^2 - 4 = 0\}$

10.2) จงหา  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{along } y=x}} f(x,y)$   $\text{ถ้า } \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | (x+2)^2 - y^2 - 4 \neq 0\}$

$$x=t, y=t \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + \sin t}{(t+2)^2 - t^2 - 4}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + \sin t}{t^2 + 4t + 4 - t^2 - 4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + \sin t}{4t} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{t}{4t} + \frac{\sin t}{4t} \right)$$

10.3) จงแสดงว่า  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  หาก้าไม่ได้  $t \rightarrow 0$

- Continuous ที่จุด  $(0,0)$  ไหม?

①  $f(0,0)$  มาก่อน

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{4t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{4t}$$

$$\textcircled{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ มาก่อน}$$

$$\frac{1}{4} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{4}$$

$$\textcircled{3} f(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \#$$

- คุณนำไปส์บีบ ( $\lim$  ตามนิยม)

11. ให้  $f(x,y) = 2^x + x^2 e^{xy}$  จงหา

11.1)  $f_x = \dots$

11.2)  $f_y = \dots$

11.3)  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dots$

11.4)  $\frac{\partial^{112} f}{\partial y^{112}} = \dots$

11.5) ความชันของเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว  $f(x,y)$  กับระนาบ  $x=2$  ที่จุด

$(2, 0, 8)$  เท่ากับ  $\dots$

ເຮັດວຽກ ບົນຊາກົບ ກົມປ່ອຍ

ທີ່ມາ  $(0,0)$

$$10.3 \quad y = -x$$

$$\text{ກົມ} \quad x=t, y=-t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, -t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + \sin(-t)}{(t+2)^2 - t^2 - 4} \quad \begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin(t)}{4t}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sin(0)}{4 \cdot 0}$$

$$= \frac{1}{4} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t)}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

ມາຈະສິ່ງ  $x=y$