# Devoir 3

## Exercice n°9:

Exercice n°9 :

L'interpolée de Shannon s'écrit :

$$v(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{\substack{|p| \le \frac{M}{2} \\ |q| \le \frac{N}{2}}} \varepsilon\left(\frac{p}{M}\right) \varepsilon\left(\frac{q}{N}\right) \hat{u}(p,q)\, e^{i2\pi\left(\frac{px}{M} + \frac{qy}{N}\right)}$$

$$w(x,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{MN} \sum_{\substack{-\frac{M}{2} \le \alpha \le \frac{M}{2} \\ -\frac{N}{2} \le \beta < \frac{N}{2}}} \hat{u}(\alpha,\beta)\, e^{i2\pi\left(\frac{\alpha x}{M} + \frac{\beta y}{N}\right)}\right)$$

Comme $\underbrace{(\alpha,\beta)}_{\text{à } (x,y) \text{ fixé}} \longmapsto e^{i2\pi\left(\frac{\alpha x}{M} + \frac{\beta y}{N}\right)}$ est $(M,N)$-périodique,

on peut ramener le domaine $\left\{-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2}-1\right\} \times \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1\right\}$

à $\Omega = \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\}$. On reconnaît ensuite la

Transformée de Fourier ~~de~~ discrète inverse de $\hat{u}$ si $(x,y)$ est un point entier. Donc $w$ est bien une interpolation exacte.

On part de $v(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{\substack{|\alpha| \le \frac{M}{2} \\ |\beta| \le \frac{N}{2}}} \varepsilon\left(\frac{\alpha}{M}\right) \varepsilon\left(\frac{\beta}{N}\right) \hat{u}(\alpha,\beta)\, e^{i2\pi\left(\frac{\alpha x}{M} + \frac{\beta y}{N}\right)}$

On enlève de la somme les 4 coins du domaine $\left\{-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2}\right\} \times \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}\right\}$, puis les 4 bords (il n'y a plus besoin de laisser les $\varepsilon$) :

$$v(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{\substack{|\alpha| < \frac{M}{2} \\ |\beta| < \frac{N}{2}}} \hat{u}(\alpha,\beta)\, e^{i2\pi\left(\frac{\alpha x}{M} + \frac{\beta y}{N}\right)} + \frac{1}{4MN} \hat{u}\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) \left[e^{i\pi(x+y)} + e^{i\pi(x-y)} + e^{i\pi(y-x)} + e^{i\pi(-x-y)}\right]$$

$$+ \frac{1}{2MN} \left[\sum_{|\alpha| < \frac{M}{2}} \hat{u}\left(\alpha, -\frac{N}{2}\right) e^{i2\pi\left(\frac{\alpha x}{M}\right)} \left[e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}\right] + \sum_{|\beta| < \frac{N}{2}} \hat{u}\left(-\frac{M}{2}, \beta\right) e^{i2\pi\frac{\beta y}{N}} \left[e^{i\pi y} + e^{-i\pi y}\right]\right.$$

En effet, on a utilisé la périodicité de $\hat{u}$ par rapport à chacune de ses variables. On a de plus apairé les bords du domaine 2 à 2.

On ajoute et enlève le coin en $\left(-\frac{M}{2}, -\frac{N}{2}\right)$ qui vaut $\frac{\hat{u}\left(\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right)}{MN} e^{-i\pi(x+y)}$

~~En passe~~

Et on peut remettre les bords dans la somme, qui peut désormais être indexée sur $\left\{-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2}-1\right\} \times \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1\right\}$.

En passant à la partie réelle on fait apparaître $w$ :

$$v(x,y) = w(x,y) + \underbrace{\frac{\hat{u}\left(\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right)}{4MN}\left[e^{i\pi(x-y)} + e^{i\pi(y-x)} + e^{-i\pi(x+y)} + e^{i\pi(x+y)}\right] - \frac{\hat{u}\left(\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right)}{2MN} e^{-i\pi(x+y)}}_{\frac{\hat{u}\left(\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right)}{MN}\left[\underbrace{\frac{\cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x-y))}{2} - \cos(\pi(x+y))}_{\sin \pi x \sin \pi y}\right]}$$

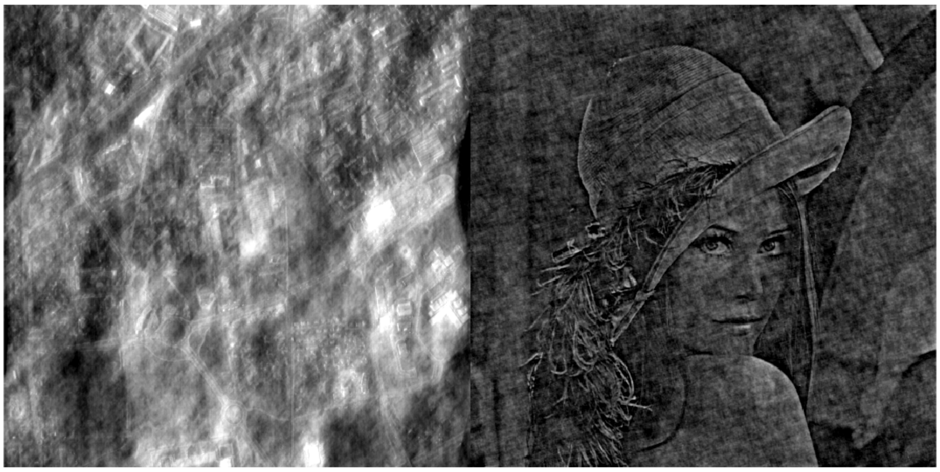
D'où $$\boxed{w(x,y) = v(x,y) - \frac{\hat{u}\left(\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right)}{MN} \sin(\pi x) \sin(\pi y)}$$

# Exercice 10:

Question 1):

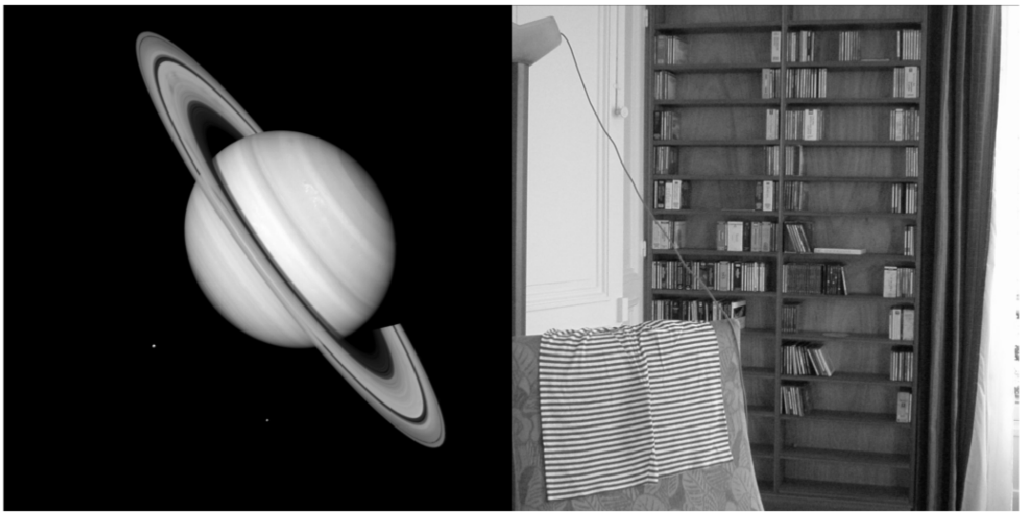
Voici deux paires d'images où l'on a échangé les phases, puis les modules.

*Paire de base*

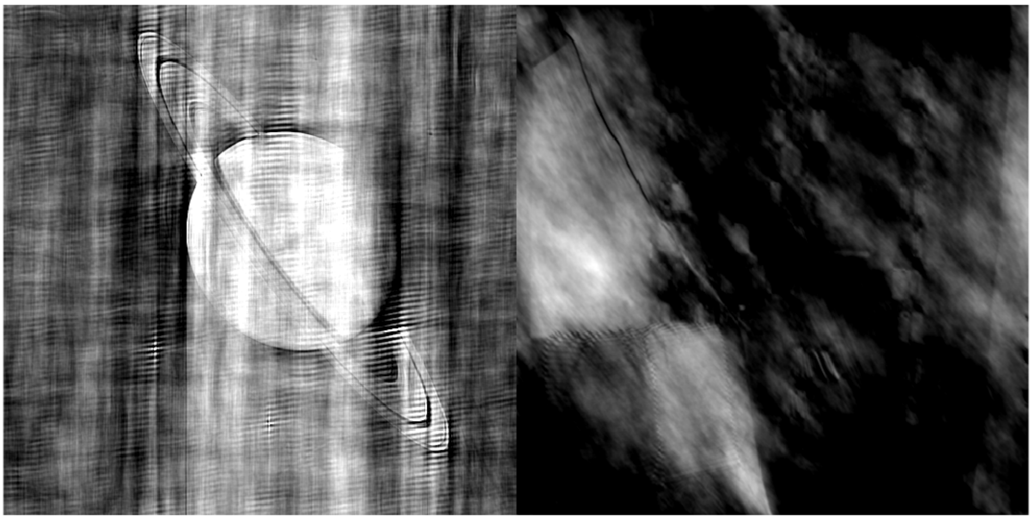


*Echange de phase*

*Echange de module*



*Paire de base*



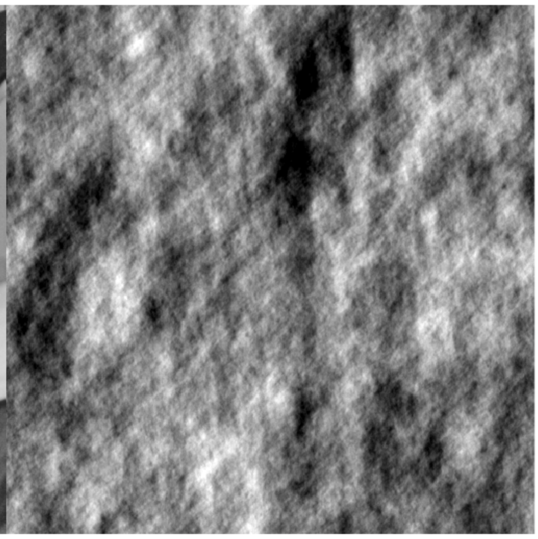
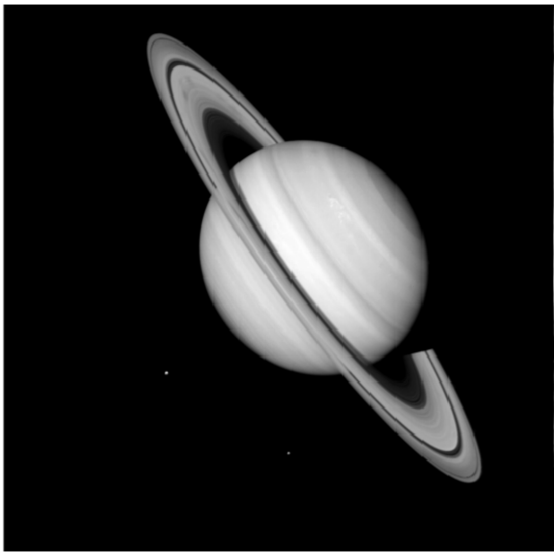
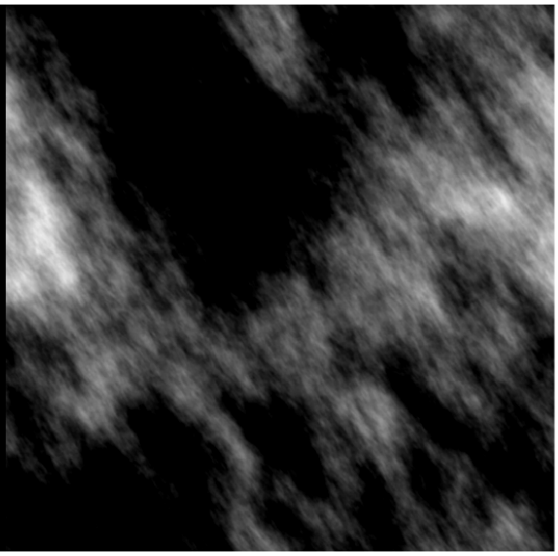
*Echange de phase*

*Echange de module*

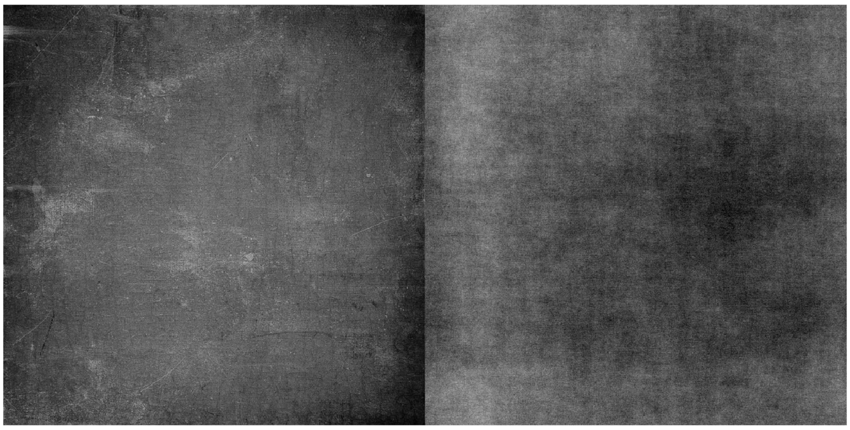
Avec ces échanges on peut voir que la phase de la transformée de Fourier contient plutôt une information de texture tandis que le module contient l'information sur la forme des objets qui constituent l'image.

Question n°2):

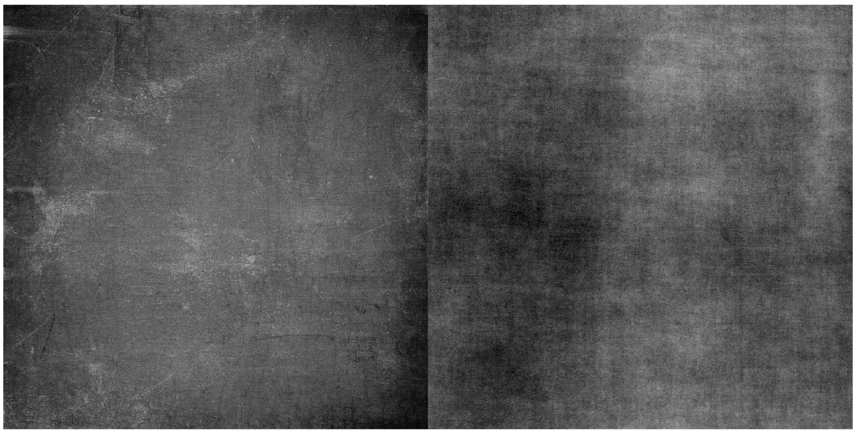
Sur des images quelconques:

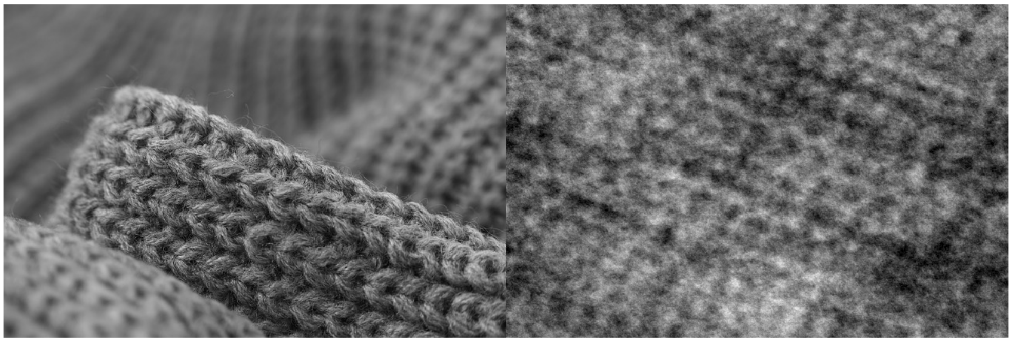
Sur des images de texture : (d'abord en prenant la composante périodique puis sans prendre la composante périodique)



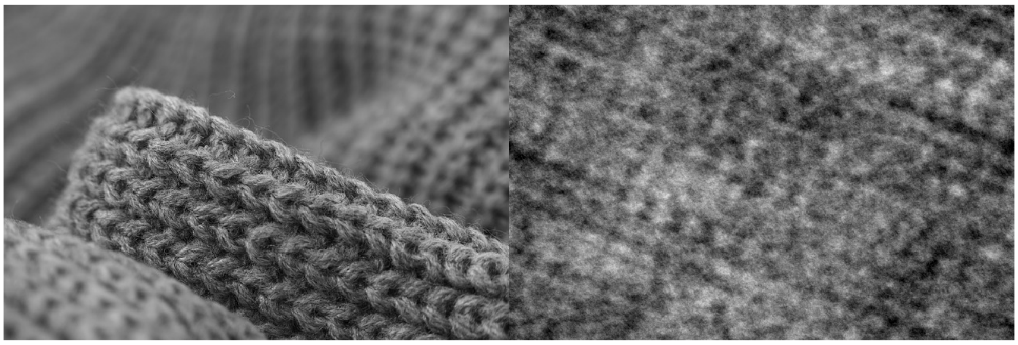
*Avec la composante périodique*



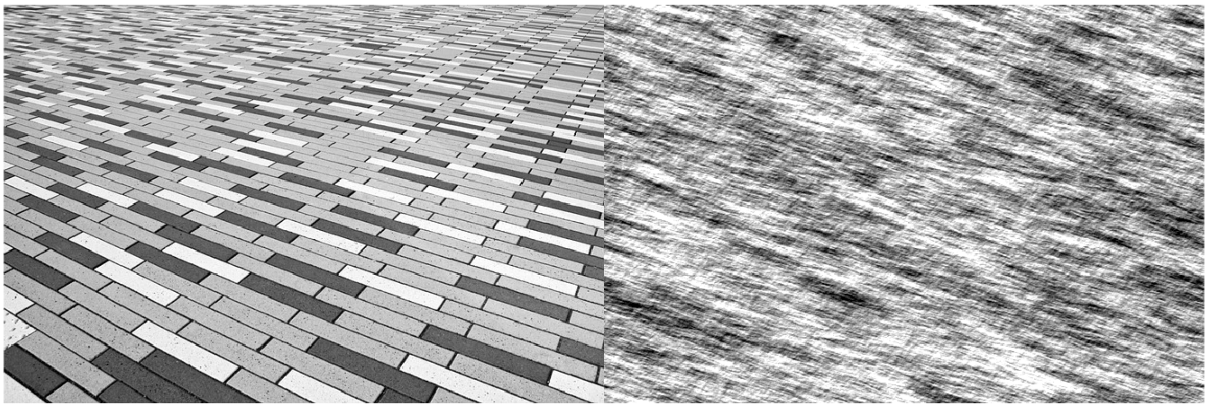
*Sans la composante périodique*



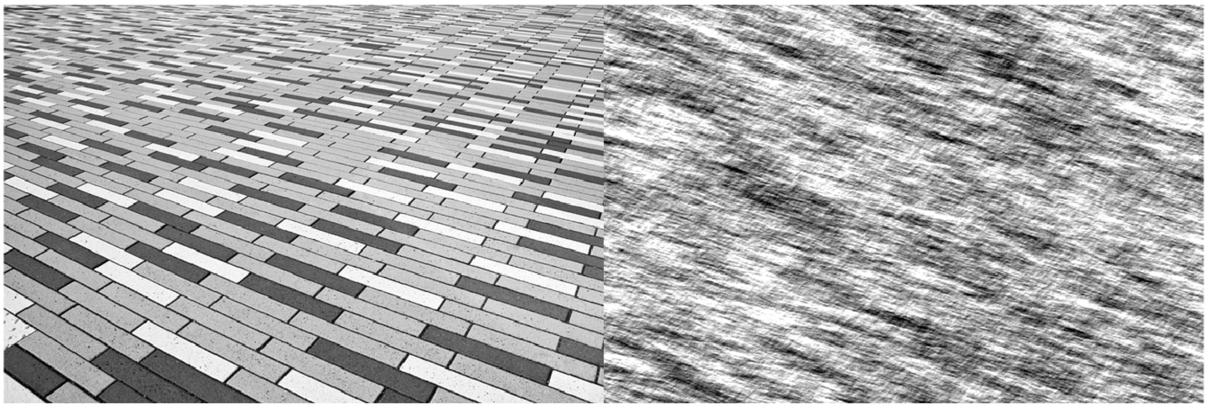
*Avec la composante périodique*



*Sans la composante périodique*



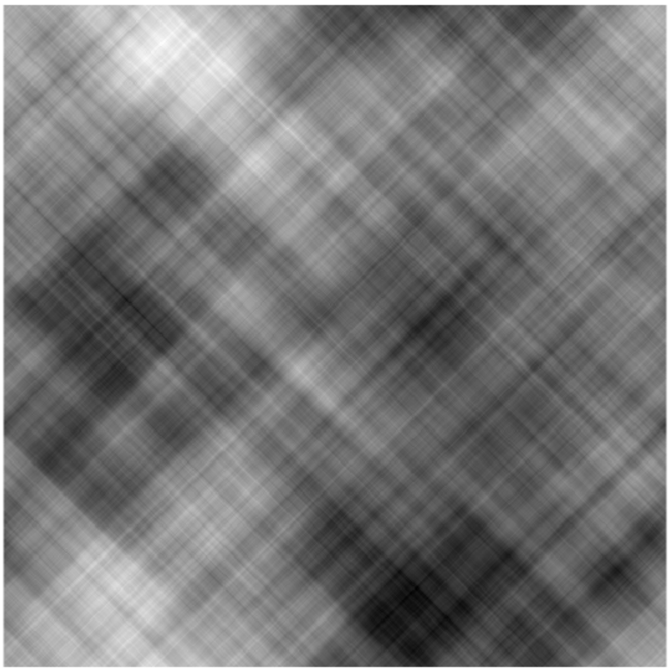
*Avec la composante périodique*



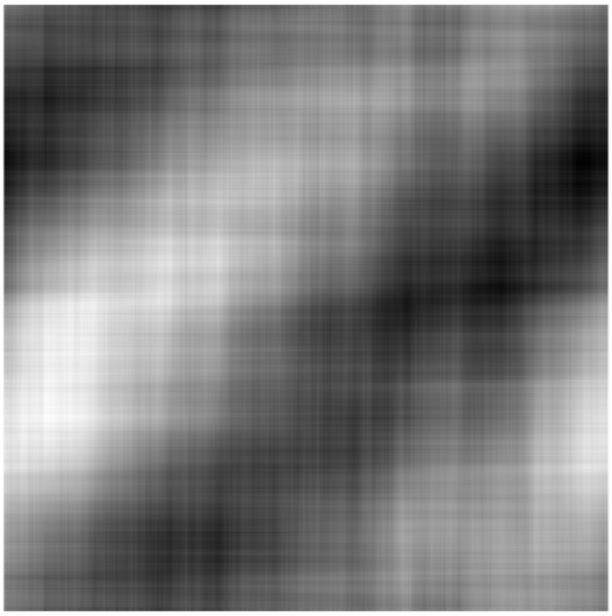
*Sans la composante périodique*

Question n°3):

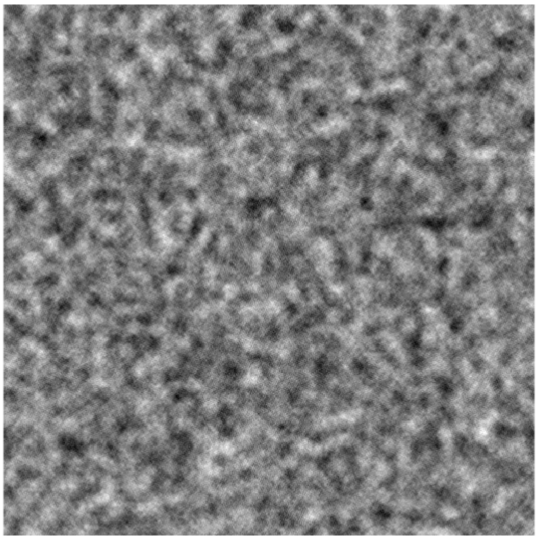
Voici les textures obtenues à partir de quelques formes géométriques::

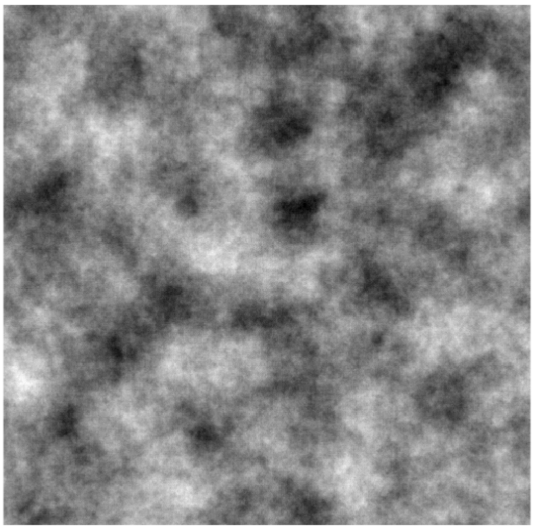


*Losange*



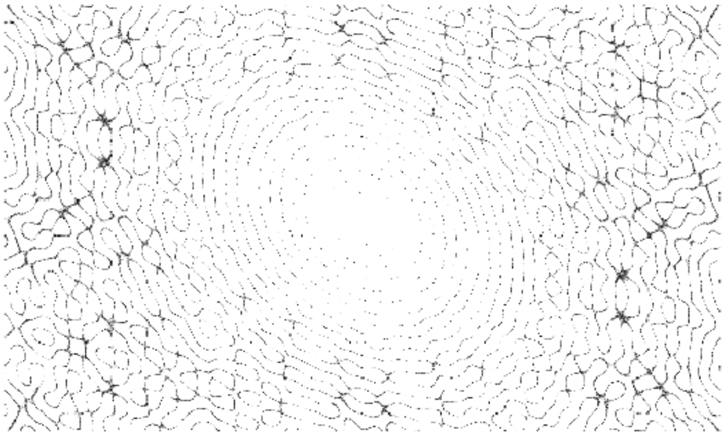
*Rayures diagonales*





*Petit cercle* *Plus grand cercle*

En prenant la transformée de Fourier de la texture:



En faisant le même procédé avec d’autres ellipses on peut voir que l’ellipse est tournée de 90° ( axes X et Y changés) et que la taille de l’ellipse est proportionnelle à la tâche centrale sur la transformée (délimitée par les premières ellipses concentriques).