Clase 11
viernes, 29 de abril de 2022 15:20

1. Sistema de ecuaciones
2. Producto interno

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Implementación de la teoría

Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots a_{1j} & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [A \vdots b] \\ \begin{array}{ccc} Te_1 & Te_j & Te_n \end{array} \end{array}$$

1) $\bar{b} \notin \mathrm{Im}\, T_A$.

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{ran}(A) < \mathrm{ran}[A \vdots b]$

$(\text{Si } r = \mathrm{ran}(A) \Rightarrow \mathrm{ran}([A; b]) = r + 1$

2) $\exists$ solución $\Leftrightarrow b \in \mathrm{Im}\, T_A$.

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{ran}(A) = \mathrm{ran}[A \vdots b]$

2.1) solución única

T_A es 1-1 $\Leftrightarrow \mathrm{Nu}(T_A) = \{0\}$.

$\Leftrightarrow \quad n = \dim(\mathrm{Im}\, T_A)$

$\Leftrightarrow \quad n = \mathrm{ran}(A)$.

$\Leftrightarrow \text{ran}(A) = \#$ de variables.

2.2) Infinitas soluciones.

T_A no es 1-1 $\Leftrightarrow Nu(T_A) \neq \{0\}$.

$\Leftrightarrow n = \dim Nu(T_A) + \text{ran}(A)$

$\Leftrightarrow \text{ran}(A) = n - \dim(Nu(T_A)) < n$

En la práctica:

2) $\text{ran}([A]) = \text{ran}([A;b])$

Se escalona la matriz $[A;b]$ mediante op. elementales de filas.

$$\left[\begin{bmatrix} * & \cdots & & \\ & & * & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; b\right]$$

ojo:

Las soluciones del sistema original = soluciones del sistema escalonado.

Ej) $\begin{cases} x + y + w = 0 \\ x + 2y + z + w = 1 \\ 3x + 3y + z + 2w = -1 \\ y + 3z - w = 3 \end{cases}$

$$[A:b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$\text{ran}([A]) = 4 = \text{ran}([A:b])$

$\exists$ solución única, pues

$\text{ran}([A]) = 4 = \#$ de variables.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad w = 4, \quad z = 3, \quad y = -2$

$x = -2$.