Álgebra Lineal

Primera Práctica Dirigida
Semestre Académico 2025-1

Horario: *14:00-16:00* Duración: 120 minutos

Ejercicio 1 *Sea V un espacio vectorial. Demuestre que*

a) $v+v+v=3v$.

b) $-(-v)=v$.

Ejercicio 2 *¿El conjunto $X=\{(x,y,z):x^3=y^3\}$ es un subespacio vectorial de R^3? En caso afirmativo, halle una base para el subespacio vectorial X.*

Ejercicio 3 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Demuestre que para todo subespacio vectorial $W\subset V$, existe un subespacio $U\subset V$ tal que $V=W\oplus U$*

Ejercicio 4 *Determine la verdad o falsedad de la siguiente proposición Sean X,Y dos subconjuntos de V, entonces*

$$S(X\cap Y)=S(X)\cap S(Y)$$

Ejercicio 5 *Sean $U=\{f:R\to R/f \text{ es par}\}$ y $W=\{f:R\to R: f \text{ es impar}\}$. Si V representa el espacio vectorial de todas las funciones de R en R, demuestre que $V=U\oplus W$.*

Ejercicio 6 *Encuentre un valor para a, de tal manera que el conjunto $\{(3,1,4),(2,-3,5),(5,9,a)\}$ no sea linealmente independiente en R^3.*

Ejercicio 7 *Sea W el subespacio de R^5 definida por*

$$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5):x_1=3x_2,\ x_3=7x_4\}$$

a) *Halle una base para W*

b) *Extienda la base de la parte a), a una base de R^5*

c) *Encuentre un subespacio de R^5 tal que $R^5=U\oplus W$.*

Ejercicio 8 *Sea X un subconjunto de $\mathcal{P}_4$ de 6 elementos. Demuestre que X es linealmente dependiente.*

Ejercicio 9 *Sean U y W dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V tal que $V=U+W$. Demustre que*

a) $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap W)$

b) *Suponga que U y W son subespacios de R^8 tales que $\dim U=3$, $\dim W=5$ y $U+W=R^8$. Demuestre que*

$$R^8=U\oplus W$$

Ejercicio 10 *Sea $T:R^2\to R$ una transformación lineal tal que $T(1,1)=3$ y $T(2,3)=1$, calcule $T(10)$ y $T(0,1)$.*

Ejercicio 11 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que el conjunto $\{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ es linealmente independiente, demuestre que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente.*

Ejercicio 12 *Sea $v \neq 0$ en el espacio vectorial V. Si W es un espacio vectorial cualquiera diferente del $\{0\}$ demuestre que existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $Tv \neq 0$.*

Ejercicio 13 *Sea $X \subset V$ un conjunto de generadores del espacio vectorial V. Si las transformaciones $T, S : V \to W$ son tales que $Tv = Sv$ para todo $v \in X$, demuestre que $T = S$.*

Ejercicio 14 *Sea $W = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(2) = p(5)\}$.*

a) Demuestre que W es un subespacio vectorial

b) Halle una base para W

Ejercicio 15 *Demuestre que el espacio vectorial $R^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}\}$ es de dimensión infinita.*

Ejercicio 16 *Sean V un espacio vectorial y $X \subset V$ un subconjunto finito tal que $S(X) = V$. Demuestre que V es de dimensión finita.*

Ejercicio 17 *Sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Demuestre que $W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de V si y solamente si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.*

Ejercicio 18 *Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de las funciones reales. Cuál de los siguientes subconjuntos de V forman un subespacio vectorial.*

a) Todas las f tales que $f(-1) = 0$

b) Todas las f tales que $f(0) = f(1)$

c) Todas las f tales que $f(3) = 1 + f(-5)$

Ejercicio 19 *Demuestre que todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son $\{\bar{0}\}$, las rectas y planos que pasan por el origen y $\mathbb{R}^3$.*

Ejercicio 20 *Sean $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ cinco polinomios en el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 4 tales que $p_j(2) = 0$ para $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Demuestre que el conjunto de polinomios $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ es linealmente dependiente.*

Ejercicio 21 *Suponga que U y W son dos subespacios de $\mathbb{R}^9$, ambos de dimensión 5. Demuestre que $U \cap W \neq \{0\}$*

Ejercicio 22 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $X \subset V$ un subconjunto con n elementos. Demuestre que*

a) Si X es l.i, entonces X es una base.

b) Si X genera V entonces X es una base.

Ejercicio 23 *Sea $U \subset V$ un subespacio vectorial, halle $U + U$.*

Ejercicio 24 *Sea V un espacio vectorial real.*

a) *Si $a \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ tal que $av = 0$, demuestre que $a = 0$ o $v = 0$.*

b) *Sean u, v dos vectores de V. Demuestre que existe un vector $w \in V$ tal que*

$$v + 3w = u$$

Ejercicio 25 *Sea V un conjunto en el cual se definen dos operaciones $\oplus : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ tales que satisfacen los siguientes axionas.*

1. $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$, *para todos $u, v, w \in V$.*
2. $\lambda \cdot (u \oplus v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$, *para todo $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$*
3. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$, *para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$*
4. $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$, *para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$*
5. $0 \cdot u = 0 \cdot v$, *para todo $u, v \in V$*
6. $1 \cdot v = v$, *para todo $v \in V$*

Demuestre que $(V, \oplus, \cdot)$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Ejercicio 26 *Sea $A \in M_{n\times n}$. Considere*

$$R_A = \{X \in M_{n\times n} : XA = 0\}, \qquad L_A = \{X \in M_{n\times n} : AX = 0\}$$

a) *Pruebe que R_A y L_A son subespacios vectoriales de $M_{n\times n}$.*

b) *Si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, halle una base de R_S y L_S.*

c) *¿Es cierto que $R_A \cap L_A = \{0\}$?*

Ejercicio 27 *Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2. Considere*

$$W = \{a + bx - (a-b)x^2 : a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}_2.$$

a) *Pruebe que W es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$.*

b) *Halle una base de W.*

c) *Halle un subespacio vectorial W_1 de $\mathcal{P}_2$ tal que $W + W_1 = \mathcal{P}_2$, pero no es suma directa.*

d) *Halle un subespacio vectorial W_2 de $\mathcal{P}_2$ tal que $W \oplus W_2 = \mathcal{P}_2$.*

Ejercicio 28 *Sea V un espacio vectorial y sean $V_0, V_1, V_2 \subset V$ subespacios vectoriales de V. Pruebe que si $V_1 \subset V_0$ o $V_2 \subset V_0$ entonces*

$$V_1 \cap V_0 + V_2 \cap V_0 = (V_1 + V_2) \cap V_0.$$

Ejercicio 29 *Responda verdadero o falso, justificando su respuesta* *a)* *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial, entonces*

$$\dim(U+U) = 2\dim U$$

b) *Sean U_1, U_2 y W tres subespacios vectoriales de V, tales que*

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$$

entonces $U_1 = U_2$.

Ejercicio 30 *Sea V un espacio vectorial. Demuestre que el inverso aditivo es único.*

Ejercicio 31 *Sea $\mathscr{P}_4$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 4. Determine la dimensión y una base para el subespacio*

$$W = \{p(x) \in \mathscr{P}_4 : p(3) = p(2) = p(0) = 0\}$$

Ejercicio 32 *Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de tamaño 2. Sean W_1 el conjunto de las matrices de la forma*

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & x \end{pmatrix}$$

y W_2 el conjunto de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$$

a) *Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.*

b) *Hallar las dimensiones de W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$.*

c) *¿$V = W_1 + W_2$?*

Ejercicio 33 *¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (1,0)$ y $T(2,1,0) = (0,1)$?*

Ejercicio 34 *Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base para el espacio vectorial V. Demuestre que el conjunto*

$$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4\}$$

también es una base para V

Ejercicio 35 *Sean U un subespacio vectorial de V con $U \neq V$ y $S : U \to W$ una transformación lineal no nula. Se define la siguiente aplicación $T : V \to W$*

$$Tv = \begin{cases} Sv, & si\ v \in U; \\ \\ 0, & si\ v \in V\ \ y\ v \notin U. \end{cases}$$

Demuestre que T no es una transformación lineal.

San Miguel, 12 de abril del 2025