Metoda Elementów Skończonych
przykłady

We wszystkich przykładach dziedziną jest przedział $I = [0, 1]$. W treści przykładów N oznacza ilość przedziałów (elementów skończonych) na jakie podzielony jest przedział jednostkowy I. Funkcje bazowe oznaczane są przez e_i, $i = 0, \ldots, N$.

1 Zerowe warunki Dirichleta

Rozwiążemy równanie

$$\begin{cases} u'' - u = 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dla $N = 3$. Rozpoczynamy od stworzenia sformułowania słabego. Z obu stron mamy warunki Dirichleta, więc za przestrzeń funkcji V przyjmujemy te funkcje v, które zerują się na brzegach. Mnożymy równanie przez dowolną funkcję $v \in V$

$$\int_0^1 u''v \, \mathrm{d}x - \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

Pozbywamy się drugiej pochodnej całkując przez części

$$u'v|_0^1 - \int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}x - \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}x - \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

Jako, że $v \in V$, to $v(0) = v(1) = 0$, zatem

$$\underbrace{-\int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}x - \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 v \, \mathrm{d}x}_{L(v)} \tag{5}$$

Skoro mamy na obu brzegach warunek Dirichleta, za przestrzeń w której będziemy rozwiązywać ten problem przyjmujemy $V_h = \langle e_1, e_2 \rangle$ (przestrzeń funkcji generowaną przez e_1 i e_2). Równanie liniowe do którego sprowadza się odnalezienie $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \in V_h$ spełniającego powyższe równanie dla każdego $v \in V_h$ ma zatem postać

$$\begin{cases} u_1 B(e_1, e_1) + u_2 B(e_2, e_1) = L(e_1) \\ u_1 B(e_1, e_2) + u_2 B(e_2, e_2) = L(e_2) \end{cases} \tag{6}$$

Macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Pozostaje obliczyć wartości elementów tych macierzy:

$$\begin{bmatrix} -6 - \frac{2}{9} & 3 - \frac{1}{18} \\ 3 - \frac{1}{18} & -6 - \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Rozwiązujemy (wyniki zazwyczaj wychodzą dość brzydkie, niestety):

$$u_1 = u_2 = -\frac{6}{59} \tag{9}$$

Ostatecznie rozwiązanie wynosi więc

$$u = -\frac{6}{59} e_1 - \frac{6}{59} e_2 \tag{10}$$

2 Niezerowe warunki Dirichleta

Rozwiążemy równanie

$$\begin{cases} u'' + u' = x \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

dla $N = 3$. Z obu stron mamy warunki Dirichleta, więc za przestrzeń funkcji V przyjmujemy te, które zerują się na brzegach. Szukać będziemy rozwiązania postaci $u = w + \tilde{u}$, gdzie $w \in V$, zaś $\tilde{u}$ (tzw. shift) to pewna funkcja spełniająca warunki brzegowe, tzn. $\tilde{u}(0) = 0$, $\tilde{u}(1) = 1$. Możemy przyjąć $\tilde{u} = e_3$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku zerowych warunków brzegowych - tworzymy postać słabą. Mnożymy równanie przez dowolną funkcję $v \in V$

$$\int_0^1 u'' v \, \mathrm{d}x + \int_0^1 u' v \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x v \, \mathrm{d}x \tag{12}$$

i całkujemy przez części, by pozbyć się drugiej pochodnej:

$$u'v|_0^1 - \int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x + \int_0^1 u'v \,\mathrm{d}x = \int_0^1 xv \,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Jako, że $v \in V$, to $v(0) = v(1) = 0$, zatem

$$\underbrace{-\int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x + \int_0^1 u'v \,\mathrm{d}x}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 xv \,\mathrm{d}x}_{L(v)} \tag{14}$$

Pamiętamy, że ze względu na niezerowy warunek Dirichleta z jednej strony przyjęliśmy rozwiązanie postaci $u = w + \tilde{u}$, zatem powyższą równość możemy zapisać jako

$$B(w + \tilde{u}, v) = L(v) \tag{15}$$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu mamy

$$B(w, v) = L(v) - B(\tilde{u}, v) \tag{16}$$

Przyjmując $\tilde{L}(v) = L(v) - B(\tilde{u}, v)$ możemy ostatecznie zapisać

$$B(w, v) = \tilde{L}(v) \tag{17}$$

Skoro mamy na obu brzegach warunek Dirichleta, za przestrzeń w której będziemy rozwiązywać ten problem przyjmujemy $V_h = \langle e_1, e_2 \rangle$ (przestrzeń funkcji generowaną przez e_1 i e_2). Równanie liniowe do którego sprowadza się odnalezienie $w = u_1 e_1 + u_2 e_2 \in V_h$ spełniającego powyższe równanie dla każdego $v \in V_h$ ma zatem postać

$$\begin{cases} u_1 B(e_1, e_1) + u_2 B(e_2, e_1) = L(e_1) - B(\tilde{u}, e_1) \\ u_1 B(e_1, e_2) + u_2 B(e_2, e_2) = L(e_2) - B(\tilde{u}, e_2) \end{cases} \tag{18}$$

Jako, że $\tilde{u} = e_3$, mamy

$$\begin{cases} u_1 B(e_1, e_1) + u_2 B(e_2, e_1) = L(e_1) - B(e_3, e_1) \\ u_1 B(e_1, e_2) + u_2 B(e_2, e_2) = L(e_2) - B(e_3, e_2) \end{cases} \tag{19}$$

Macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) \\ B(e_2, e_2) & B(e_2, 2_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) - B(e_3, e_1) \\ L(e_2) - B(e_3, e_2) \end{bmatrix} \tag{20}$$

Pozostaje obliczyć wartości elementów tych macierzy:

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 + \frac{1}{2} \\ 3 - \frac{1}{2} & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} - 3 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Rozwiązujemy:

$$u_1 = \frac{125}{327}, \quad u_2 = \frac{674}{981} \tag{22}$$

Stąd ostateczne rozwiązanie to

$$u = w + \tilde{u} = \frac{125}{327}\, e_1 + \frac{674}{981}\, e_2 + e_3 \tag{23}$$

3 Warunek Robina i zerowy warunek Dirichleta

Rozwiążemy równanie

$$\begin{cases} -u'' = x \\ u'(0) = 1 \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

dla $N = 3$. Rozpoczynamy od stworzenia sformułowania słabego. Z prawej strony mamy warunek Dirichleta, z lewej nie, więc za przestrzeń funkcji V przyjmujemy te, które zerują się na prawym brzegu (na lewym niekoniecznie). Mnożymy równanie przez dowolną funkcję $v \in V$

$$-\int_0^1 u''v \,\mathrm{d}x = \int_0^1 xv \,\mathrm{d}x \tag{25}$$

Pozbywamy się drugiej pochodnej całkując przez części

$$- \left. u'v \right|_0^1 + \int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x = \int_0^1 xv \,\mathrm{d}x \tag{26}$$

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x = \int_0^1 xv \,\mathrm{d}x \tag{27}$$

Jako, że po prawej stronie mamy warunek Dirichleta, a $v \in V$, mamy $v(1) = 0$. Ponadto, z pierwszego warunku brzegowego $u'(0) = 1$, podstawiając obie te rzeczy do powyższego równania otrzymujemy

$$v(0) + \int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x = \int_0^1 xv \,\mathrm{d}x \tag{28}$$

Sprowadzając równanie do postaci $B(u, v) = L(v)$ chcemy po lewej stronie mieć tylko wyrazy zawierające zarówno u jak i v, zaś z lewej te zawierające samo v (gdyby do $B(u, v)$ włączyć jakiś czynnik zależący tylko od v, stracilibyśmy liniowość względem u).

$$\underbrace{\int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 xv \,\mathrm{d}x - v(0)}_{L(v)} \tag{29}$$

Skoro po prawej mamy warunek Dirichleta a po lewej nie, za przestrzeń w której będziemy rozwiązywać ten problem przyjmujemy $V_h = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$. Równanie liniowe do którego sprowadza się odnalezienie $u = u_0 e_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 \in V_h$ spełniającego powyższe równanie dla każdego $v \in V_h$ ma zatem postać

$$\begin{cases} u_0 B(e_0, e_0) + u_1 B(e_1, e_0) + u_2 B(e_2, e_0) = L(e_0) \\ u_0 B(e_0, e_1) + u_1 B(e_1, e_1) + u_2 B(e_2, e_1) = L(e_1) \\ u_0 B(e_0, e_2) + u_1 B(e_1, e_2) + u_2 B(e_2, e_2) = L(e_2) \end{cases} \tag{30}$$

Macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & B(e_2, e_0) \\ B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) \\ B(e_0, e_2) & B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ L(e_2) \end{bmatrix} \tag{31}$$

Pozostaje obliczyć wartości elementów tych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{54} - 1 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Rozwiązujemy:

$$u_0 = -\frac{5}{6}, \quad u_1 = -\frac{41}{81}, \quad u_1 = -\frac{35}{162} \tag{33}$$

Stąd ostateczne rozwiązanie to

$$u = -\frac{5}{6} e_0 - \frac{41}{81} e_1 - \frac{35}{162} e_2 \tag{34}$$

4 Warunek Robina i niezerowy warunek Dirichleta

Rozwiążemy równanie

$$\begin{cases} u'' + u = 1 \\ u(0) = 2 \\ u(1) - u'(1) = 1 \end{cases} \tag{35}$$

dla $N = 3$. Rozpoczynamy od stworzenia sformułowania słabego. Z lewej strony mamy warunek Dirichleta, z prawej nie, więc za przestrzeń funkcji V przyjmujemy te, które zerują się na lewym brzegu. Szukać będziemy rozwiązania postaci $u = w + \tilde{u}$, gdzie $w \in V$, zaś $\tilde{u}$ (tzw. shift) to pewna funkcja spełniająca warunek brzegowy, tzn. $\tilde{u}(0) = 2$. Możemy przyjąć $\tilde{u} = 2e_0$. Mnożymy równanie przez dowolną funkcję $v \in V$

$$\int_0^1 u''v \, \mathrm{d}x + \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \tag{36}$$

Pozbywamy się drugiej pochodnej całkując przez części

$$u'v|_0^1 - \int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}x + \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \tag{37}$$

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}x + \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \tag{38}$$

Skoro $v \in V$, to $v(0) = 0$, ponadto $u'(1) = u(1) - 1$, zatem powyższą równość można przekształcić do

$$(u(1) - 1)v(1) - \int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}x + \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v \, \mathrm{d}x \tag{39}$$

Porządkując wyrazy tak, by na prawą trafiły te z samym v, a po lewej zostały te z u i v dostajemy

$$\underbrace{u(1)v(1) - \int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}x + \int_0^1 uv \, \mathrm{d}x}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 v \, \mathrm{d}x + v(1)}_{L(v)} \tag{40}$$

Pamiętamy, że ze względu na niezerowy warunek Dirichleta z jednej strony przyjęliśmy rozwiązanie postaci $u = w + \tilde{u}$, zatem powyższą równość możemy zapisać jako

$$B(w + \tilde{u}, v) = L(v) \tag{41}$$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu mamy

$$B(w, v) = L(v) - B(\tilde{u}, v) \tag{42}$$

Przyjmując $\tilde{L}(v) = L(v) - B(\tilde{u}, v)$ możemy ostatecznie zapisać

$$B(w, v) = \tilde{L}(v) \tag{43}$$

Równanie liniowe do którego sprowadza się odnalezienie $u = u_1e_1 + u_2e_1 + u_3e_3 \in V_h$ spełniającego powyższe równanie dla każdego $v \in V_h$ ma zatem postać

$$\begin{cases} u_1B(e_1, e_1) + u_2B(e_2, e_1) + u_3B(e_3, e_1) = L(e_1) - B(\tilde{u}, e_1) \\ u_1B(e_1, e_2) + u_2B(e_2, e_2) + u_3B(e_3, e_2) = L(e_2) - B(\tilde{u}, e_2) \\ u_1B(e_1, e_3) + u_2B(e_2, e_3) + u_3B(e_3, e_3) = L(e_3) - B(\tilde{u}, e_3) \end{cases} \tag{44}$$

Macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & B(e_3,e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & B(e_3,e_2) \\ B(e_1,e_3) & B(e_2,e_3) & B(e_3,e_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) - B(\tilde{u},e_1) \\ L(e_2) - B(\tilde{u},e_2) \\ L(e_3) - B(\tilde{u},e_3) \end{bmatrix} \tag{45}$$

Pozostaje obliczyć wartości elementów tych macierzy:

$$\begin{bmatrix} -6+\frac{2}{9} & 3+\frac{1}{18} & 0 \\ 3+\frac{1}{18} & -6+\frac{2}{9} & 3+\frac{1}{18} \\ 0 & 3+\frac{1}{18} & -3+\frac{1}{9}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - 2\left(3+\frac{1}{18}\right) \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}+1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Rozwiązujemy:

$$u_1 = \frac{21601}{49706}, \quad u_2 = -\frac{26572}{24853}, \quad u_3 = -\frac{116669}{49706} \tag{47}$$

Stąd ostateczne rozwiązanie to

$$u = w + \tilde{u} = 2e_0 + \frac{21601}{49706}\,e_1 - \frac{26572}{24853}\,e_2 - \frac{116669}{49706}\,e_3 \tag{48}$$