#### 2017 年数学建模国赛 A 题解析 数模国赛临门一脚冲刺课程

周吕文

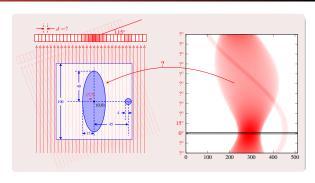
超级数学建模大俱乐部

2018年9月8日



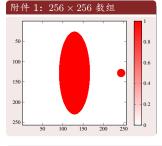


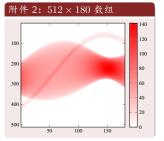
#### 2017 CUMCM A 题: CT 系统参数标定及成像



由模板及接收信息,确定旋转中心、探测器间距及射线方向 由未知介质的接收信息,确定其位置、形状和吸收率等信息 分析参数标定的精度和稳定性, 在此基础上自行设计新模板

#### 附件1&2

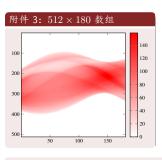


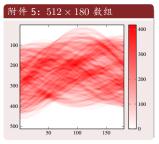


确定 CT 旋转中心、探测器单元间距及该 X 射线的 180 个方向。

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 题解析

#### 附件3&5





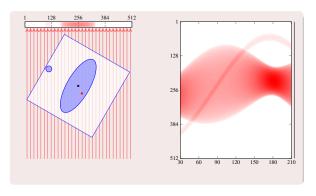
确定介质在托盘中的位置、几何形状和指定点的吸收率。

	 	 ,	 	-

Notes			
. 10105			
Votes			
votes			
M .			
Votes			

Notes			

CT 成像系统原理: 投影过程



周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 題解析

CT 成像系统原理: Radon 变换

沿线积分

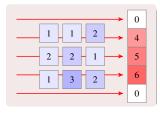
$$R(L) = \int_{L} f(\mathbf{x}) |d\mathbf{x}|$$

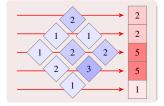
$$x = z\sin\alpha + s\cos\alpha$$
$$y = -z\cos\alpha + s\sin\alpha$$

Radon 变换

$$R(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z\sin\alpha + s\cos\alpha, -z\cos\alpha + s\sin\alpha) dz$$

### CT 成像系统原理: Radon 变换



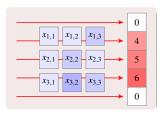


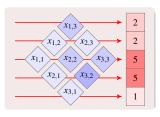
#### Radon 变换的相关参考

Radon transform — Wikipedia, The Free Encyclopedia CT (Computed Tomography) Scans - A Level Physics

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 题解析

CT 成像系统原理: 反 Radon 变换





反 Radon 变换

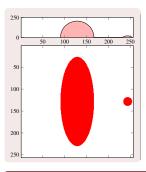
已经投影, 反推 x

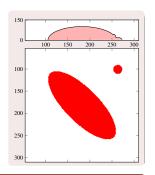
Notes

Notes

Notes

### CT 成像系统原理: Radon 变换



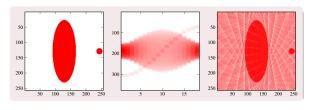


#### 图的旋转变换

01 p0 = load('1.dat'); plot(sum(p0)) 02 p1 = imrotate(p,45); plot(sum(p1))



## CT 成像系统原理: Radon 变换与反变换



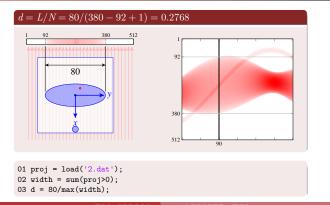
#### radon & iradon

01 subplot(1,3,1); P = load('1.dat'); imagesc(P); 02 subplot(1,3,2); R = radon(P, 0:10:179); imagesc(R); 03 subplot(1,3,3); I = iradon(R, 0:10:179); imagesc(I);

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 題解析

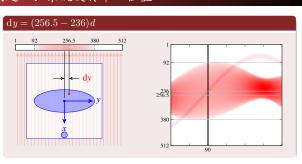
### 赛題与分析 **模型和代码**

### 问题一:探测器单元间距



赛題与分析 **模型和代码** 

#### 问题一:系统旋转中心位置



01 [wmax, imax] = max(width);
02 idx = find(proj(:,imax)>0); 03 yc =  $(256.5 - (\max(idx) + \min(idx))/2) * d;$ 

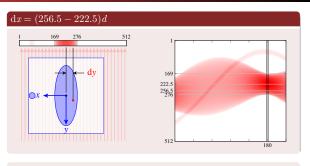
Ν	ote	S

Notes

Notes

#### 赛題与分析 模型和代码 总结

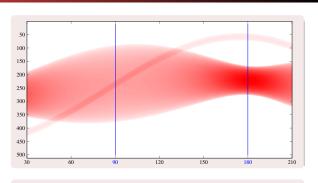
问题一:系统旋转中心位置



01 [wmin, imin] = min(width); 02 idx = find(proj(:,imin)>0); idx = idx(idx>100); 03 xc = - ( 256.5 - (max(idx)+min(idx))/2 ) \* d;

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 題解析

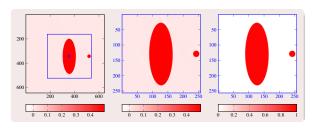
# 问题一: X 射线的 180 个方向



01 phi = 180 - imin; % 90 - imax

2017 年数学建模国赛 A 题解析

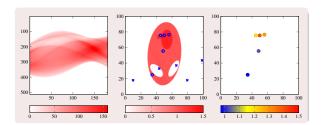
#### 问题一:验正



01 proj = [zeros(200,180); proj; zeros(200,180)];
02 img = iradon(proj, [0:179]+phi, 'Hann'); imagesc(img);
03 nhalf = size(img,1)/2;
04 xidx = ceil(-xc/d) + nhalf + [ceil(-50/d):ceil(50/d)];
05 yidx = ceil( yc/d) + nhalf + [ceil(-50/d):ceil(50/d)];
06 img = img(yidx,xidx);
07 img = imresize(img, [256, 256])\*prod(size(img))/256^2;
08 img(img<1e-1) = 0;
imagesc(img);</pre>

賽題与分析 **模型和代码** 总结

#### 问题二



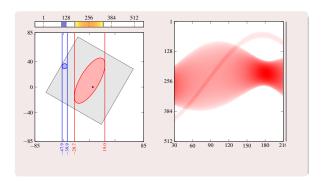
Notes

Notes

Notes

赛題与分析 **模型和代码** 

### 椭圆的投影



周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 题解析

赛題与分析 模型和代码

#### 椭圆的投影

#### 椭圆方程

$$\frac{(x\cos\theta - y\sin\theta)^2}{x^2} + \frac{(x\sin\theta + y\cos\theta)^2}{x^2} = 1$$

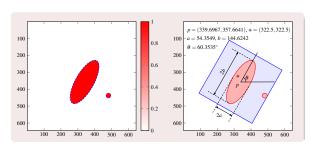
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a^2x\sin^\theta + y(a^-b^2)\sin\theta\cos\theta + b^2x\cos^2\theta}{a^2y\cos^\theta + x(a^-b^2)\sin\theta\cos\theta + b^2y\sin^2\theta}$$

#### 椭圆投影边界

$$x = \pm \sqrt{a^2 \cos^\theta + b^2 \sin^2 \theta},$$

 $y = \pm \sqrt{a^2 \sin^\theta + b^2 \cos^2 \theta}$ 

### 椭圆的拟合



```
O1 proj = [zeros(200,180); load('2.dat'); zeros(200,180)];
O2 img = iradon(proj,[0:179]); bw = im2bw(img,0.2); imagesc(bw);
O3 obj = regionprops(bw, 'Centroid', 'Drientation',...
O4 'MajorAxisLength', 'MinorAxisLength');
O5 p = obj(1).Centroid; theta = obj(1).Orientation;
O6 a = obj(1).MinorAxisLength/2; b = obj(1).MajorAxisLength/2;
```

Notes

Notes

Notes

```
赛题与分析 模型和代码
```

#### 主程序 & 计算参数

```
main.m
01 [phi, d, xc, yc] = getparm;
03 proj = load('3.dat'); % proj = load('5.dat');
04 [xyrate, img] = proj2img(proj, phi, d, xc, yc);
01 function [phi, d, xc, yc] = getparm
02 phantom = load('data/1.dat'); proj = load('data/2.dat');
03 width = sum(proj>0);
04 [wmax, imax] = max(width); [wmin, imin] = min(width);
05 phi = 180-imin; d = 80/wmax;
06 idy = find(proj(:,imax)>0);
07 yc = (256.5-(max(idy)+min(idy))/2 )*d;
08 idx = find(proj(:,imin)>0); idx = idx(idx>100);
09 xc = -(256.5-(\max(idx)+\min(idx))/2)*d;
```

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 題解析

#### 投影恢复为图像

```
proj2img.m
01 function [xyrate, img] = proj2img(proj, phi, d, xc, yc)
02 proj = [zeros(200,180); proj; zeros(200,180)];
03 img = iradon(proj,[0:179]+phi, 'Hann');
04 xidx = ceil(-xc/d) + size(img,1)/2 + [ceil(-50/d):ceil(50/d)];
05 yidx = ceil( yc/d) + size(img,1)/2 + [ceil(-50/d):ceil(50/d)];
 06 img = imrescale(img(yidx,xidx), [256,256]);
08 imgud = flipud(img); xy = load('4.dat'); d = 100/256;

09 ic = ceil(xy(:,1)/d); ir = ceil(xy(:,2)/d);

10 idx = sub2ind(size(imgud), ir, ic); xyrate = [xy imgud(idx)];
 12 imagesc([0,100],[0,100],imgud); colorbar; hold on;
13 plot(xy(imgud(idx)==0,1), xy(imgud(idx)==0,2), 'wx')
14 plot(xy(imgud(idx)==0,1), xy(imgud(idx)==0,2), 'r+')
 15 set(gca,'ydir','normal');
 17 function new = imrescale(old, newsize)
18 scale = prod(size(old)) / prod(newsize);
19 new = imresize(old, newsize) * scale; new(new<1e-1) = 0;
```

评审

略

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 題解析

知识要点

检索英文关键词,图片搜索,可加入"matlab"等关键词 例: "CT reconstruction matlab", "Radon transform matlab"

封闭二维几何曲线在坐标轴上投影 了解 CT 成像原理, 及其背后的数学原理和模型

坐标系旋转变换 简单图像处理、图像中的椭圆拟合 radon 和 iradon 变换

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 題解

Notes			
Votes			
Votes			
Votes			

利用椭圆拟合的方法, 重新求解第一问 求任意椭圆在 y=x 直线上的投影长度 找一张照片,用 radon 变换为投影,再用 iradon 将投影还原

周吕文 超级数学建模 2017 年数学建模国赛 A 题解析

Notes

# Thank You!!!

Notes	
Notes	
Notes	