Übungsblatt 5

Abgabe bis 26.05.2011 13:45 Uhr, Erdgeschoss Geb. 48

OPT Optimization Research Group

Vorlesung: Dr. Florentine Bunke, Jun.-Prof. Dr. Stefan Ruzika
Übungen: Michael Helmling, Florian Seipp

Dieses Übungsblatt sowie weitere Informationen zur Übung sind unter `http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/teaching/ss11/prama.html` erhältlich.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$
\text{(LP)}\quad
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \geqslant & 2 \\
 & -\;x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leqslant & -3 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

a) Stellen Sie das zu (LP) duale Problem (DLP) auf. Lösen Sie dieses mit einem Verfahren Ihrer Wahl (grafisch, Tableau, GLPK, Matlab). Benutzen Sie dann den Satz vom komplementären Schlupf, um eine primale Optimallösung für (LP) zu finden.

b) Lösen Sie (LP) mit dem dualen Simplex (mit den Schlupfvariablen als Startbasis).

Hinweis: Wenn Sie richtig rechnen, sollte in beiden Teilaufgaben das selbe Ergebnis herauskommen!

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$. Das *Lemma von Farkas* besagt, dass genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$) besitzt:

$$(1)\!: A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geqslant \underline{0} \qquad (2)\!: \underline{b}^T\underline{y} < 0,\ A^T\underline{y} \geqslant \underline{0}$$

a) Beweisen Sie das Lemma von Farkas, indem Sie ein geeignetes LP aufstellen und den starken Dualitätssatz anwenden.

b) Finden Sie eine geometrische Interpretation des Lemmas. Verwenden Sie dazu folgende Definition: Seien $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k \in \mathbb{R}^n$ gegeben, dann heißt

$$\operatorname{cone}(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k) := \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \underline{a}^i : \lambda_i \geqslant 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\}$$

der von $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ aufgespannte *Kegel*. Skizzieren Sie für $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$ ein Beispiel.
Hinweis: Was bedeuten die beiden Aussagen für die Lage von $\underline{b}$ zu den *Spaltenvektoren* von A?

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Auch wenn der Simplex-Algorithmus in den meisten Fällen sehr schnell ist und deshalb auch in der Praxis eingesetzt wird, ist seine Worst-Case-Laufzeit exponentiell. Auf diesem und dem nächsten Übungsblatt soll dies anhand des sogenannten *Klee-Minty-Würfels* gezeigt werden. Dabei handelt es sich um einen leicht verzerrten Hyperwürfel mit 2^n Eckpunkten, die im ungünstigsten Fall alle vom Simplex durchlaufen werden.

Es sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das LP

$$\max \{x_n \mid \varepsilon x_{i-1} \leqslant x_i \leqslant 1 - \varepsilon x_{i-1} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } \underline{x} \geqslant \underline{0}\},$$

wobei $x_0 = 1$ festgesetzt (keine Variable) ist. Beachten Sie, dass der zulässige Bereich bei $\varepsilon = 0$ genau der Einheitswürfel wäre.

a) Bringen Sie das LP in Standardform, indem Sie für die Ungleichungen auf der linken Seite Schlupfvariablen r_i, für die auf der rechten Seite Schlupfvariablen s_i einführen.

b) Zeigen Sie, dass jede zulässige Basis alle x_i und für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ entweder r_i oder s_i enthält. Ist das Problem degeneriert?
Hinweis: Verwenden Sie, dass eine Variable, die nicht 0 sein kann, in jeder Basis enthalten sein muss, und dass die Basis so viele Elemente wie das LP Zeilen haben muss.

c) Die vorherige Teilaufgabe zeigt, dass in jeder Basislösung x jedes x_i entweder den minimalen $(r_i = 0)$ oder maximalen $(s_i = 0)$ Wert annimmt und dass die Basis dadurch bereits vollständig definiert ist – es existiert also eine 1-zu-1-Beziehung zwischen den Basislösungen und den Teilmengen $L \subseteq N := \{1, \dots, n\}$ durch die Festlegung $i \in L \iff s_i = 0$. Wir erhalten dann für jedes solche L durch

$$J^L := \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{r_i : i \in L\} \cup \{s_i : i \in N \setminus L\}$$

eine zulässige Basis. Sei x^L die zugehörige Basislösung. Zeigen Sie, dass für $L, L' \subseteq N$ mit $n \in L$ und $n \notin L'$ gilt: $x_n^{L'} < x_n^L$, d.h. dass jede Basis, die r_n enthält, einen echt größeren Zielfunktionswert hat als alle Basen, die r_n nicht enthalten. Zeigen Sie weiter, dass für $L' := L \setminus \{n\}$ gilt: $x_n^{L'} = 1 - x_n^L$.

Aufgabe 5.4 – Praktische Aufgabe (4 Punkte)

a) Implementieren Sie eine Matlab-/Octave-Funktion

```
function [A_Ph1, b_Ph1, c_Ph1, B_Ph1 ] = InitPhase1 (A, b, c)
```

die die Eingabedaten eines LP in Standardform so transformiert (also ggf. künstliche Variablen einfügt, die Zielfunktion ersetzt etc.), dass Phase 1 des Simplex direkt angewendet werden kann. Dabei ist `B_Ph1` $\in \mathbb{N}^m$ der Indexvektor der Startbasis für Phase 1.

b) Benutzen Sie Ihre bisherige Programme, um eine Funktion

```
function [EndTab, x_opt, z_opt] = TwoPhaseMethod(A,b,c, rule)
```

zu implementieren, die jedes beliebige LP in Standardform löst. Der Parameter `rule` soll sich so verhalten wie zuvor. Das Verhalten bei unbeschränkten LPs soll dem der Funktion `simplex` auf dem letzten Blatt entsprechen. Ist das LP unzulässig, soll `x_opt = z_opt = []` gelten.
Hinweis: Ändern Sie vorher Ihre Funktion `simplex` so ab, dass auch die optimale Basis `B_opt` ausgegeben wird.