

Trabajo de Aplicación 2 - Control Automático III - Ing. Electrónica

Control PID para sistemas con retardo.

Ignacio Nahuel Chantiri, 69869/1

Thomas Jorge Sille, 68373/6

Universidad Nacional De La Plata, Argentina, Noviembre 2025.

Resumen—Este trabajo aborda el diseño e implementación de un controlador PID robusto aplicado a sistemas con retardo, tomando como base los modelos obtenidos en el Trabajo de Aplicación 1. Se busca garantizar un adecuado rechazo a perturbaciones y un seguimiento preciso de referencias

I. DEFINICIÓN DE LOS MODELOS A UTILIZAR

Luego de los ensayos que se llevaron a cabo en el Trabajo de Aplicación 1, se presentan los modelos con los que se va a trabajar en este informe.

Modelo de 6 polos obtenido a partir del ensayo PRBS:

$$G_1(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)(s - p_5)(s - p_6)}$$

Con los polos ubicados en:

$$\begin{aligned} p_1 &= -29.8637 + 0.0000j, \\ p_2 &= -8.3835 + 10.4619j, \\ p_3 &= -8.3835 - 10.4619j, \\ p_4 &= -4.2178 + 3.9557j, \\ p_5 &= -4.2178 - 3.9557j, \\ p_6 &= -3.2177 + 0.0000j. \end{aligned}$$

Modelo FOPDT obtenido a partir del ensayo escalón, aproximado por Padé, necesario para el diseño de un controlador:

$$G_2(s) = \frac{K_p(1 - s\frac{L}{2})}{(\tau s + 1)(1 + s\frac{L}{2})} = \frac{(0.98448)(1 - s(0.1799))}{((0.33053)s + 1)(1 + s(0.1799))}$$

K_p	L	$L/2$	T
0.98448	0.35938	0.1799	0.33053

II. DISEÑO DEL CONTROLADOR PID

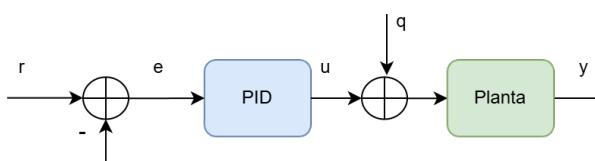


Fig. 1. Esquema de control implementado.

Las especificaciones de diseño del sistema de control con PID son las siguientes:

- Respuesta sin sobre paso en el seguimiento a la referencia.
- Rechazo a las perturbaciones más rápido que la respuesta a lazo abierto.

La planta tiene un retardo muy similar a la constante de tiempo ($L = 0.35938$ seg, $T = 0.33053$ seg), de modo que no existe una forma preferente de sintonizar el PID. Por esta razón, se plantearon distintas sintonizaciones y se terminó seleccionando el **método de asignación de polos**, que fué el que presentó mejores resultados.

Por el método de asignación de polos, se utiliza el controlador para cancelar el polo de la planta y el que introduce el retardo por Padé; y se ubica un polo doble, buscando una respuesta crítica. El controlador toma la siguiente forma:

$$C_1(s) = \frac{k_c(1 + Ts)(1 + T_Ds)}{Ts(1 + 0.5\alpha Ls)}$$

Por otro lado también se requiere un rechazo a las perturbaciones más rápido que la respuesta a lazo abierto. Si se acelera el sistema para cumplir este requerimiento, muy probablemente se perdería la condición de no-sobre paso.

Como solución, se optó por utilizar un **filtro en la referencia**, agregando grados de libertad y permitiendo diseñar el controlador principal C_1 en función del rechazo a perturbaciones, para luego controlar el sobre paso con el filtro. El sistema propuesto es:

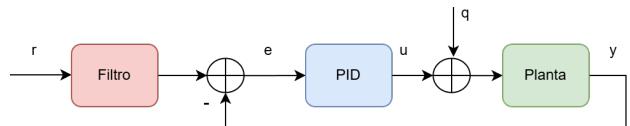


Fig. 2. Esquema del sistema a implementar.

Siendo $F(s)$ el filtro:

$$F(s) = \frac{s^2 T_I T_D c + sb(T_I + T_D) + 1}{s^2 T_I T_D + s(T_I + T_D) + 1}$$

Se descartó utilizar un filtro de orden menor debido a que no lograba cumplir las especificaciones.

II-A. Parámetros de sintonización del Controlador principal (PID)

Luego de esta evaluación previa, se procedió con el proceso de calcular y ajustar los parámetros del PID, teniendo como objetivo principal lograr un rechazo a perturbaciones más rápido que la respuesta a lazo abierto.

Para diseñar en base a esta especificación, es necesario conocer primero la velocidad de respuesta a lazo abierto de la planta. Utilizando el modelo de 6 polos obtenido en el ensayo PRBS (G_1), es posible graficar y medir esa respuesta en Matlab:

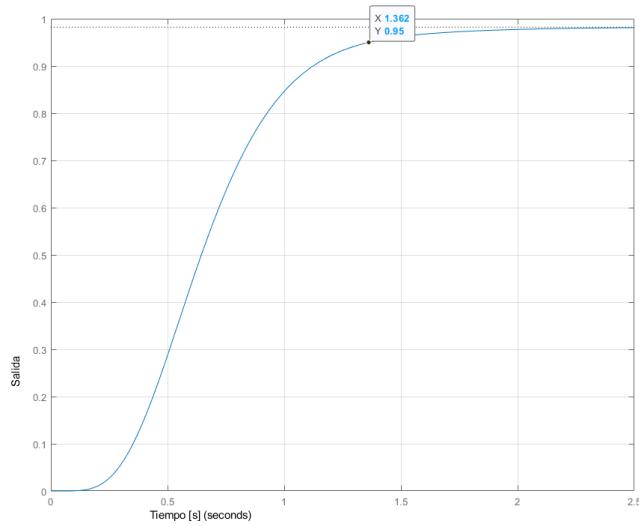


Fig. 3. Respuesta al escalón de la planta G_1 a lazo abierto.

El tiempo de establecimiento al 5 % medido para esta respuesta a lazo abierto fue de $t_{estab} = 1.36$ seg.

Luego, en base a lo estudiado sobre el diseño por asignación de polos, y con los valores de la transferencia FOPDT se definieron los parámetros principales del PID:

Parámetro	formula	valor
T_D	$0.5L$	0.1797
T_I	T	0.3305

TABLA I. Parámetros del controlador PID por asignación de polos.

Quedando libre el parámetro α para ajustar la ubicación del polo introducido por el controlador. A modo de observar su efecto sobre el rechazo a perturbaciones, se grafica a continuación esa respuesta para distintos valores de α :

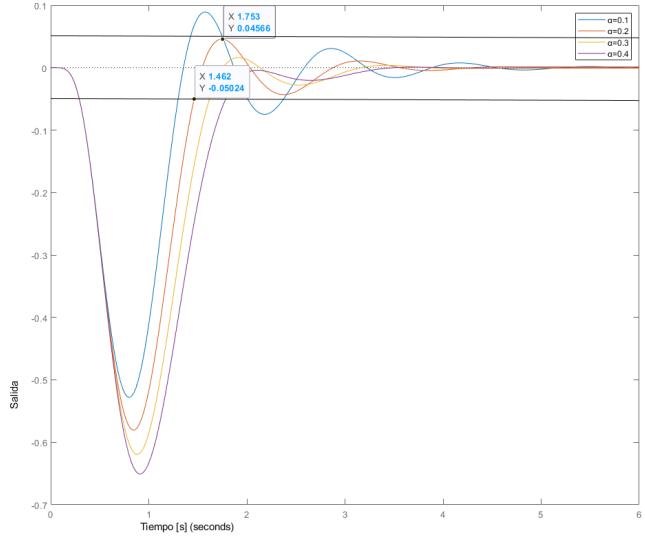


Fig. 4. Respuestas para distintos valores de α a una perturbación de -1V, estando previamente la salida de la planta en su valor estacionario. Las líneas horizontales marcan el 5 % del valor de la perturbación.

Del gráfico anterior se observa que el PID con valor $\alpha = 0.2$ regresa al 5 % de la perturbación en aproximadamente 1.46 segundos, prácticamente igual al tiempo de respuesta de la planta a lazo abierto (una diferencia de 0.1 seg). El valor $\alpha = 0.1$ se descartó debido a que el sobrepico positivo se escapa nuevamente del 5 %, mientras que el PID con $\alpha = 0.3$ no cumple con la especificación de ser más rápido que la planta a lazo abierto.

De esta forma, queda definido el valor de $\alpha = 0.2$

El controlador resultante que cumple la especificación de rechazo a perturbaciones es:

$$PID(s) = \frac{k_c(1 + Ts)(1 + T_Ds)}{Ts(1 + 0.5\alpha Ls)}$$

Con los parámetros:

Parámetro	Fórmula	Valor
α	-	0.2
T_D	$0.5L$	0.1797
T_I	T	0.3305
T_0	$[(\alpha^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} + \alpha] \frac{L}{2}$	0.1240
k_c	$\frac{2T}{(L + 4T_0)K_p}$	0.7851

TABLA II. Parámetros del controlador PID por asignación de polos.

II-B. Parámetros de sintonización del filtro

Resta ahora compensar el sobrepaso con un filtro de referencia. Para el α determinado en la sección anterior, se tiene la siguiente respuesta al escalón en la referencia (graficada en naranja):

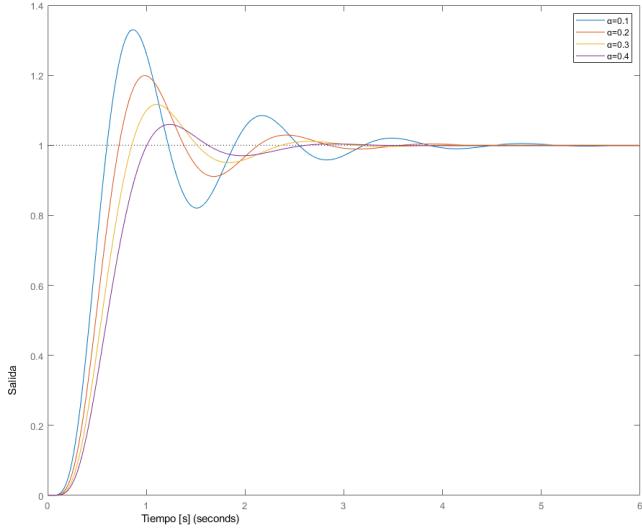


Fig. 5. Respuesta al escalón en la referencia con el mismo PID sintonizado para distintos valores de α . Simulación en Matlab para la transferencia de 6 polos.

Observando la respuesta correspondiente a $\alpha = 0.2$ existe un sobreceso evidente de casi el 20 %. Se procede entonces a definir los parámetros del filtro:

$$F(s) = \frac{s^2 T_I T_D c + sb(T_I + T_D) + 1}{s^2 T_I T_D + s(T_I + T_D) + 1}$$

Se busca que los polos del filtro sean los mismos que los del modelo FOPDT aproximado por Padé, mientras que se ajustaron los ceros variando los coeficientes b y c manualmente hasta conseguir una respuesta sin sobreceso:

Parámetro	Valor
T_d	0.1797
T_i	0.3305
c	1
b	0.3

TABLA III. Parámetros del filtro.

Se simuló la respuesta del sistema de orden 6 (G_1) con y sin filtro en la referencia. Se realizó un cambio de referencia de 0 a 3V, y una vez en estado estacionario, se lo sometió a una perturbación de -1V a la entrada de la planta. Los resultados se grafican a continuación:

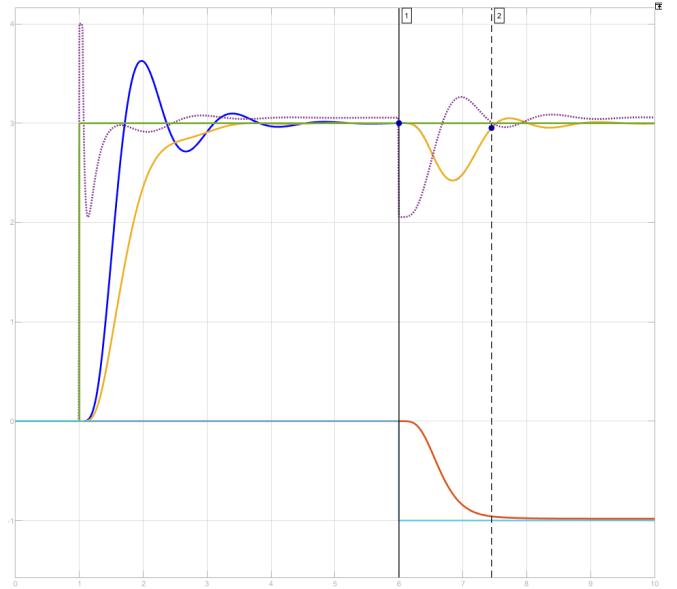


Fig. 6. Respuesta al escalón en la referencia, y respuesta a la perturbación. En azul: sistema con PID sin filtro en referencia. En amarillo: sistema con PID y filtro en referencia. En rojo: Respuesta a la perturbación del sistema a lazo abierto. En violeta: Acción de control. Simulación en Simulink, sobre el modelo de 6 polos (G_1) de la planta.

Del gráfico anterior se puede concluir:

- Ambos sistemas responden de igual manera a las perturbaciones.
- Para el sistema con filtro, se logra cumplir perfectamente la especificación de no-sobreceso en la respuesta al cambio de referencia.
- Para la velocidad de respuesta a la perturbación, no se logra una mejoría pero si se obtiene una respuesta igual de rápida que a lazo abierto, siendo 1.44 seg la de LC, y 1.36 seg la de LA.
- El controlador funciona perfectamente con la señal de control limitada a los valores que permite la implementación en el microcontrolador.

III. ROBUSTEZ DEL CONTROLADOR

Por simplicidad se utilizó el modelo ideal como planta nominal G_n . Para definir la familia de planta, y que incluye la planta real, la variable τ puede variar un 20 % para cada polo (entre 0.08 y 0.12 del valor nominal 0.1):

$$G_n = \frac{1}{(1 + s0.1)^6}$$

$$G(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^6 (1 + s\tau_i)}$$

Donde $0.08 \leq \tau_i \leq 0.12$.

El modelo de incertidumbre utilizado fue el de incerteza multiplicativa, debiéndose cumplir:

$$|W(s)| > \left| \frac{G}{G_n} - 1 \right| \quad (1)$$

Eligiendo mediante un proceso iterativo:

$$|W(s)| = \frac{1.6}{(1 + s10)^6}$$

Con el siguiente diagrama de Bode se verifica la condición de la ecuación 1 para $W(s)$:

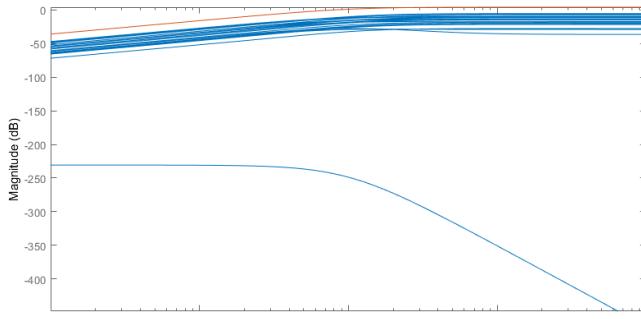


Fig. 7. Diagrama de Bode (solo módulo) para $W(s)$. La familia de plantas cumple módulo menor al de $W(s)$.

Y mediante otro diagrama de Bode se verifica la condición de estabilidad para la familia de plantas:

$$|T_n(s)W(s)| < 1 = 0dB$$

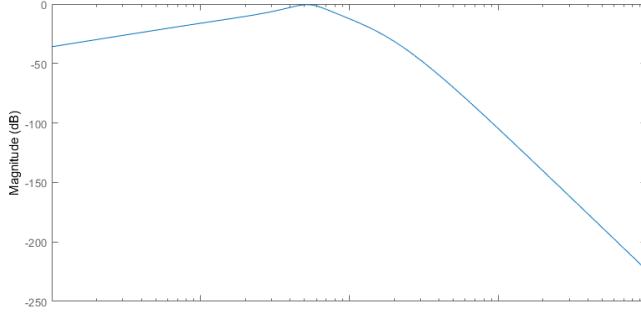


Fig. 8. Diagrama de Bode (solo módulo) de $T_n(s)W(s)$.

IV. CONTROLADOR FINAL Y SU ECUACIÓN EN DIFERENCIAS

El controlador PID sintetizado en II-A es el que se discretizará e implementará como ecuación en diferencias en el microcontrolador.

Se discretizó por el método 'zoh' en Matlab y se obtuvo la siguiente transferencia en el plano Z:

$$G_d(z) = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}$$

En este punto fué necesario definir el período de muestreo del controlador, T_m . Se tuvieron en cuenta los siguientes

criterios:

- T_m debe ser 10 veces más rápido que T (la constante de la planta) para capturar bien la dinámica de la planta.
- T_m debe ser más lento que el tiempo que se tarda en calcular la acción de control con el microcontrolador. Es difícil definir en este momento cuánto tiempo lleva este cálculo, pero se verificará más adelante una vez implementado.

En base a esto, se definió un período de muestreo $T_m = 30ms$.

La transferencia en z para ese período de muestreo queda definida:

$$G_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0.1189 + (-0.2132)z^{-1} + (0.0954)z^{-2}}{1 - (0.1749)z^{-1} - (-0.0749)z^{-2}}$$

Antitrasnformando y despejando $U[n]$, se obtiene la ecuación en diferencias:

$$u[n] = B_1 u[n-1] + B_2 u[n-2] + A_0 e[n] + A_1 e[n-1] + A_2 e[n-2].$$

Coefficiente	Valor
A_0	0.39256
A_1	-0.71423
A_2	3.2570
B_1	1.4340
B_2	-0.4340

TABLA IV. Coeficientes del controlador digital.

V. FILTRO Y SU ECUACIÓN EN DIFERENCIAS

De manera similar a la discretización del controlador, se obtiene la ecuación en diferencias del filtro:

$$u[n] = B_1 u[n-1] + B_2 u[n-2] + A_0 e[n] + A_1 e[n-1] + A_2 e[n-2].$$

Coefficiente	Valor
A_0	1
A_1	-1.9181
A_2	0.9314
B_1	1.7595
B_2	-0.7728

TABLA V. Coeficientes del filtro.

VI. IMPLEMENTACIÓN CON EL MICROCONTROLADOR

El esquema de control implementado en el ATMega328p se describe según el siguiente diagrama:

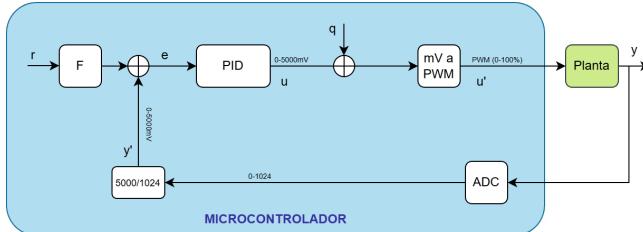


Fig. 9. Diagrama del esquema de control

El período de muestreo es de 30ms, más que suficiente para efectuar los cálculos de la señal de control y del filtro entre muestra y muestra.

VI-A. Cálculo de la acción de control u

Se define la señal de error e como una variable igual a la resta entre referencia ref y la salida y .

Como el microcontrolador no dispone de una unidad de aritmética de punto flotante, se mantiene la señal de error en mV y los coeficientes de la ecuación en diferencias se multiplican por mil, para efectuar los cálculos como enteros con signo de 64 bits.

El error se pasa como parámetro a la función **controlador_PID()**, que realiza la siguiente operación:

$$\begin{aligned} u[n] &= B_1 u[n-1] \\ &\quad + B_2 u[n-2] \\ &\quad + A_0 e[n] \\ &\quad + A_1 e[n-1] \\ &\quad + A_2 e[n-2] \end{aligned}$$

Coeficiente	Valor
A_0	1189
A_1	-2132
A_2	954
B_1	1749
B_2	-749

TABLA VI. Coeficientes del controlador digital implementado.

Luego se divide el resultado por mil, se limita el valor máximo y mínimo de u en 0 y 5000mV para evitar wind-up, y se actualizan los valores de e y u para la siguiente iteración.

Por último, al valor de u que retorna la función se le suma primero un valor *delta* que simula una perturbación a la acción de control. Este valor es inicialmente 0 y se actualiza a 1000mV cuando se presiona el botón 1 de la placa.

VII. COMPARACIÓN: RESULTADOS SIMULADOS VS. EXPERIMENTALES.

El gráfico a continuación incluye la respuesta al escalón en la referencia (de 1 a 4V) y a la perturbación (de -1V) para los datos reales y los simulados en Matlab. También se representa la señal de control (filtrada por el primer RC de

la planta), junto con la señal de control simulada (filtrada con un RC equivalente, a modo de poder compararlas).

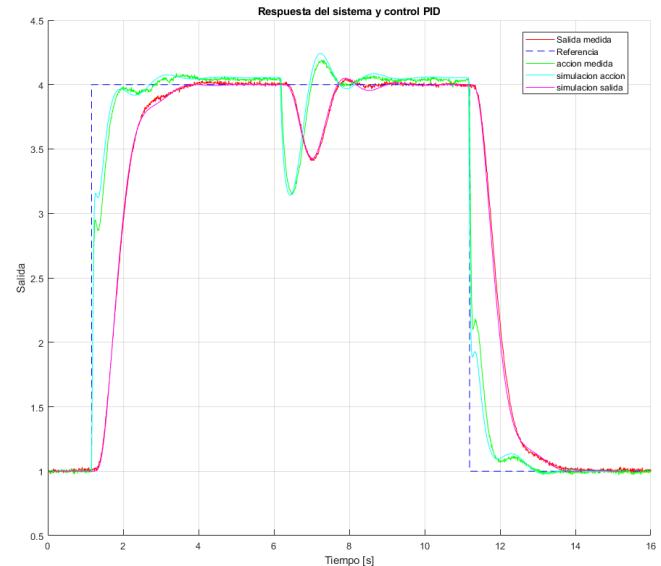


Fig. 10. Comparación de respuestas al escalón en la referencia, y respuestas a la perturbación, simulación vs. experimental.

Parámetro	Experimental	Simulación	Especificación
Amplitud del sobrepasso (el porcentaje es relativo a la amplitud del escalón de 3V)	0.014V (0.46 %)	0.001V (0.033 %)	0V
Tiempo de respuesta (al 5 %) a la perturbación (el porcentaje es relativo a la especificación)	1.45 seg (6 %)	1.475 seg (8.1 %)	1.36 seg

TABLA VII. Comprobación de las especificaciones.

De acá se concluye:

- A simple vista, la simulación representa fielmente el comportamiento experimental. De este modo, es posible decir que la implementación fue correcta.
 - La especificación de no-sobrepaso se cumple, con un error 0.014V. Es decir, el sobrepaso es mínimo, del orden del 0.46 % del escalón en la referencia.
 - La especificación de rechazo a perturbación se cumple en cierta medida: la velocidad de respuesta experimental tiene un error relativo del 6 % por sobre la especificada. Aunque no se logra cumplir con el objetivo, el error es de un orden aceptable.
 - La acción de control no satura en ningún momento.

VIII. CONCLUSIONES

El desarrollo de este trabajo permitió poner en práctica distintas herramientas de diseño de control en un contexto realista, donde la presencia de retardo, incertidumbre en el modelo y limitaciones de implementación juegan un rol determinante.

La utilización del método de asignación de polos resultó adecuada para priorizar el rechazo a perturbaciones, aunque

dejó clara la dificultad de cumplir simultáneamente con la especificación de no-sobrepaso. En este aspecto, la aplicación de un filtro en la referencia demostró ser buena herramienta para lograr ambos objetivos.

REFERENCES

- [1] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho, *Control of Dead-time Processes*, Springer, London, 2007.
- [2] Apuntes de la cátedra (material de clase proporcionado).