Méthode de Householder

Le but est de transformer une matrice symétrique A en une matrice tridiagonale T à l'aide d'une série de matrices orthogonales H_i, de telle sorte que $T = H^T AH$, où H est le produit des matrices H_i.

Les matrices H sont définies comme $H = I - 2ww^T$ où ω est un vecteur unitaire et I est la matrice identité. Cette matrice à la propriété d'être orthogonale $P^T = P^{-1}$ $(PP^T = P^T P = I)$

Procédure

- Pour chaque colonne de i de A, de $i = 1$ à $n - 2$ (pour une matrice $n \times n$)
  - Sélectionnez un vecteur x qui est une copie de la colonne j, à partir de l'élément $i + 1$ jusqu'à la fin. (afin d'annuler l'élément $i + 1$)
  - Construisez un vecteur v qui est x plus un multiple du vecteur unitaire dans la direction de i. Le multiple est choisi de manière à ce que la norme de v soit égale à celle de x ce qui simplifie $v = x \pm \|x\|e_i$ où $e_i$est le i-ème vecteur unitaire.
  - Le vecteur w est ensuite normalisé à partir de v, $w = v/\|v\|$
  - La matrice de Householder $P_i = I - 2ww^T$ est ensuite construite et utilisée pour transformer A et les P_i précédents.
- L'opération est répétée en travaillant toujours sur la sous-matrice qui exclut les lignes et colonnes déjà traitées, jusqu'à ce que toute la matrice, à l'exception des deux premières diagonales soit réduire à zéro

Exemple

Prenons en exemple une matrice A symétrique de taille 3×3.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sélection du vecteur x

Pour une matrice A de taille 4×4, le vecteur x est la partie de la première colonne de A que nous voulons zéroter c'est-à-dire :

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nous voulons que $Hx = \lambda e_1$, où $e_1$est le premier vecteur de base de l'espace R^2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcul de v

Le vecteur v est calculé en ajoutant à x un multiple du vecteur unitaire dans la direction concernée, multiplié par la norme de x. Le but est de créer un vecteur qui, lorsqu'il sera utilisé pour construire une transformation de Householder, annulera tous éléments de x, sauf le premier. Pour éviter l'annulation numérique, le signe devant la norme de x est choisi de manière à maximiser la magnitude du premier élément de v

La norme de x, notée $\|x\|$ est calculée comme la racine carrée de la somme des carrés de ses éléments. Pour $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, cela donne $\|x\| = 2.2361$

En choisissant le vecteur unitaire $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, le calcul de v devient

{THALES GROUP LIMITED DISTRIBUTION}

$$v = x - \|x\|e_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 2.2361\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1.2361\\2\end{bmatrix}$$

Normalisation de v pour obtenir w

Le vecteur w est le vecteur v normalisé, c'est-à-dire divisé par sa propre norme. Cela garantie que la matrice de Householder $P = I - 2ww^T$sera orthogonale et reflétera efficacement le reste de la matrice autour du plan défini par w, tout en annulant les éléments souhaités.

La norme de v, $\|v\|$ est calculée, et w est obtenu par

$$w = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\begin{bmatrix}-4.8284\\2\end{bmatrix}}{\sqrt{(-4.8284)^2 + 2^2}} = \begin{bmatrix}-0.5257\\0.8507\end{bmatrix}$$

Cette étape prépare le vecteur nécessaire pour construire la matrice de Householder, qui sera utilisé pour effectuer la transformation souhaitée sur A, en commençant le processus de réduction de forme tridiagonale.

Construction de la matrice de Householder

On a $H = I - 2ww^T$, après calcul nous obtenons H=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -0.4472 & -0.8944\\0 & -0.8944 & 0.4472\end{bmatrix}$

Afin de pouvoir réaliser l'opération, il sera nécessaire d'étendre le vecteur w avec $w = \begin{bmatrix}0\\-0.5257\\0.8507\end{bmatrix}$

Après réalisation de l'opération $A' = HAH^T$ nous obtenons :

A'=$\begin{bmatrix}4 & -2.2361 & 0\\-2.2361 & 0.6 & 0.2\\0 & 0.2 & 3.4\end{bmatrix}$

Un code en C a été écrit qui traite de cet exemple, il se trouve à l'adresse suivante V:\PG5\Affaires\ALVEO\ALVEOU280\code\eigenproblem\symmetric_matrix\householder\example

{THALES GROUP LIMITED DISTRIBUTION}