Méthode de Givens

C'est une méthode qui utilise les rotations de Givens au lieu de réflexions (Householder) pour réduire une matrice à une forme tridiagonale.

Rotation de Givens

Une rotation de Givens est définie par une matrice $G(i,j,\theta)$ qui est essentiellement la matrice identité à l'exception de quatre éléments qui forment une sous matrice de rotation 2×2. Cette sous matrice effectue une rotation dans le plan formé par les axes i et j.

$$G(i,j,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Pour chaque élément non désiré a_{ij} que nous souhaitons annuler, nous allons créer une rotation de Givens. Cette rotation est définie de manière à annuler a_{ij} en affectant seulement les lignes (ou colonnes) i et j.

L'angle de rotation θ est déterminé par les éléments que l'on souhaite annuler. Pour un élément a_{ij} à annuler, l'angle θ satisfait les relations trigonométriques, où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$:

$$c = \frac{a_{kk}}{\sqrt{a_{kk}^2 + a_{ij}^2}}, s = \frac{-a_{ij}}{\sqrt{a_{kk}^2 + a_{ij}^2}},$$

Où a_{kk}est un élément choisi pour la rotation avec a_{ij}, généralement l'élément sur la même ligne mais sur une la colonne $j-1$.

c et s peuvent aussi être calculés grâce à la formule suivante :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_{ii}}{a_{ij}}, c = \cos\theta, s = \sin\theta$$

A noter que pour conserver l'orthogonalité de la transformation nous avons la relation $c^2 + s^2 = 1$

Pour une matrice de dimension n, il y a $n(n-1)/2$ rotations de Givens possibles, car c'est le nombre de paires uniques qu'il est possible de former à partir de n dimensions.

Matrice de dimension 4 :

Pour une matrice de dimension 4, le nombre de rotations de Givens possible est $4(4-1)/2) = 6$ correspondant aux rotations dans un plan bidimensionnel, tout en laissant les autres dimension inchangées. Donc pour une matrice de dimension 4, les rotations de Givens s'appliqueraient dans les plans (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) où chaque paire représente les axes autour desquels la rotation a lieu.

Rotations dans les différents plans

$$R_{12}(c,s)\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{13}(c,s)\begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{14}(c,s)\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$R_{23}(c,s)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{24}(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$R_{34}(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}$$

Pour choisir la rotation de Givens appropriée en fonction de l'élément à annuler, nous devons considérer l'emplacement de cet élément dans la matrice.
Si l'on souhaite annuler l'élément a_{21} nous prendrons la rotation R_{12}, pour supprimer l'élément a_{41} nous prendrons l'élément R_{14}, etc.

Exemple

Supposons une matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ que nous voulons rendre tridiagonale, nous devons donc supprimer les éléments a_{13} et a_{31}.

Nous prendre l'élément a_{13} comme étant le KeyElement (élément à annuler) et a_{12} le PivotElement (l'élément qui nous permettra de faire la rotation).

Nous pouvons calculer $\theta = \tan^{-1}\frac{a_{13}}{a_{12}} = \tan^{-1}\frac{4}{2} = 1.1071$, et donc $s = \sin(\theta) = 0.8944$ et $c = \cos(\theta) = 0.4472$

Il est maintenant possible de construire la matrice de rotation suivante :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4472 & -0.8944 \\ 0 & 0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix}$$

Pour maintenir l'égalité, nous allons réécrire la matrice A sous la forme $A' = G^T A G$

Le résultat est $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.8944 & 0 \\ 0.8944 & 2.1667 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & -0.6 \end{bmatrix}$

Un code en C a été écrit qui traite de cet exemple, il se trouve à l'adresse suivante
V:\PG5\Affaires\ALVEO\ALVEOU280\code\eigenproblem\symmetric_matrix\givens\example