Méthode de Givens

C'est une méthode qui utilise les rotations de Givens au lieu de réflexions (Householder) pour réduire une matrice à une forme tridiagonale.

Rotation de Givens

Une rotation de Givens est définie par une matrice $G(i, j, \theta)$ qui est essentiellement la matrice identité à l'exception de quatre éléments qui forment une sous matrice de rotation 2×2. Cette sous matrice effectue une rotation dans le plan formé par les axes i et j.

$$G(i,j,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Pour chaque élément non désiré a_{ij} que nous souhaitons annuler, nous allons créer une rotation de Givens. Cette rotation est définie de manière à annuler a_{ij} en affectant seulement les lignes (ou colonnes) i et j.

L'angle de rotation θ est déterminé par les éléments que l'on souhaite annuler. Pour un élément a_{ij} à annuler, l'angle θ satisfait les relations trigonométriques, où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$:

$$c = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2}}, s = \frac{-a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2}},$$

A noter que pour conserver l'orthogonalité de la transformation nous avons la relation $c^2 + s^2 = 1$

Pour une matrice de dimension n, il y a $n(n-1)/2$ rotations de Givens possibles, car c'est le nombre de paires uniques qu'il est possible de former à partir de n dimensions.

Matrice de dimension 4 :

Pour une matrice de dimension 4, le nombre de rotations de Givens possible est $4(4-1)/2) = 6$ correspondant aux rotations dans un plan bidimensionnel, tout en laissant les autres dimension inchangées. Donc pour une matrice de dimension 4, les rotations de Givens s'appliqueraient dans les plans (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) où chaque paire représente les axes autour desquels la rotation a lieu.

Rotations dans les différents plans

$$R_{12}(c,s)\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{13}(c,s)\begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{14}(c,s)\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$R_{23}(c,s)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{24}(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$R_{34}(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}$$

Pour choisir la rotation de Givens appropriée en fonction de l'élément à annuler, nous devons considérer l'emplacement de cet élément dans la matrice.
Si l'on souhaite annuler l'élément a_{21} nous prendrons la rotation R_{12}, pour supprimer l'élément a_{41} nous prendrons l'élément R_{14}, etc.

Exemple

Supposons une matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Prenons la première colonne (vecteur) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, nous souhaitons supprimer le 2 donc nous voulons ce vecteur $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ avec $\alpha = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ pour préserver la norme du vecteur.

Donc la première matrice de Givens devra être de forme $G_1 = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et nous voulons que $G_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ce qui nous donne $c + 2s = \sqrt{5}$ et $-s + 2c = 0$ donc $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $s = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Donc $G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, en réalisant l'opération $A' = AG_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ nous pouvons observer que l'élément a_{12} a été zéroter.

L'objectif est d'annuler $a_{31} = -2$ donc la procédure pour calculer s, c et θ est basée sur l'idée que que nous voulons transformer le vecteur $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ en un nouveau vecteur $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ où r est la norme de $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, à l'aide d'une rotation.

Si on pose $r = \sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{4^2 + (-2^2)} = 4.4721$

Donc $c = \frac{a_{11}}{r} = \frac{4}{4.4721} = 0.8944$, $s = \frac{-a_{31}}{r} = \frac{-2}{4.4721} = 0.4472$

La matrice de rotation G_{31}est :

$$G = \begin{bmatrix} 0.8944 & 0 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -0.4472 & 0 & 0.8944 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$