# Méthode de Householder

Le but est de transformer une matrice symétrique en une matrice tridiagonale à l’aide d’une série de matrices orthogonales , de telle sorte que , où est le produit des matrices .

Les matrices sont définies comme où est un vecteur unitaire et est la matrice identité. Cette matrice à la propriété d’être orthogonale ()

## Procédure

* Pour chaque colonne de de , de à (pour une matrice
  + Sélectionnez un vecteur qui est une copie de la colonne , à partir de l’élément  
     jusqu’à la fin. (afin d’annuler l’élément )
  + Construisez un vecteur qui est plus un multiple du vecteur unitaire dans la direction de . Le multiple est choisi de manière à ce que la norme de soit égale à celle de ce qui simplifie où est le -ème vecteur unitaire.
  + Le vecteur est ensuite normalisé à partir de ,
  + La matrice de Householder est ensuite construite et utilisée pour transformer et les précédents.
* L’opération est répétée en travaillant toujours sur la sous-matrice qui exclut les lignes et colonnes déjà traitées, jusqu’à ce que toute la matrice, à l’exception des deux premières diagonales soit réduire à zéro

## Exemple

Prenons en exemple une matrice symétrique de taille .

### Sélection du vecteur

Pour une matrice de taille , le vecteur est la partie de la première colonne de   que nous voulons zéroter c’est-à-dire :

Nous voulons que , où est le premier vecteur de base de l’espace

### Calcul de

Le vecteur est calculé en ajoutant à un multiple du vecteur unitaire dans la direction concernée, multiplié par la norme de . Le but est de créer un vecteur qui, lorsqu’il sera utilisé pour construire une transformation de Householder, annulera tous éléments de , sauf le premier. Pour éviter l’annulation numérique, le signe devant la norme de est choisi de manière à maximiser la magnitude du premier élément de

La norme de , notée est calculée comme la racine carrée de la somme des carrés de ses éléments. Pour , cela donne

En choisissant le vecteur unitaire , le calcul de devient

### Normalisation de pour obtenir

Le vecteur est le vecteur normalisé, c’est-à-dire divisé par sa propre norme. Cela garantie que la matrice de Householder sera orthogonale et reflétera efficacement le reste de la matrice autour du plan défini par , tout en annulant les éléments souhaités.

La norme de , est calculée, et est obtenu par

Cette étape prépare le vecteur nécessaire pour construire la matrice de Householder, qui sera utilisé pour effectuer la transformation souhaitée sur A, en commençant le processus de réduction de forme tridiagonale.

### Construction de la matrice de Householder

On a , après calcul nous obtenons H=

Afin de pouvoir réaliser l’opération, il sera nécessaire d’étendre le vecteur avec

Après réalisation de l’opération nous obtenons :

A’=

Un code en C a été écrit qui traite de cet exemple, il se trouve à l’adresse suivante V:\PG5\Affaires\ALVEO\ALVEOU280\code\eigenproblem\symmetric\_matrix\householder\example