2024년 2학기

선형대수

2장

Chapter 02

- SECTION 02-1 벡터 집합
- SECTION 02-2 선형 가중 결합
- SECTION 02-3 선형 독립성
- SECTION 02-4 부분공간과 생성
- SECTION 02-5 기저
- SECTION 02-6 마치며

SCH

SECTION 02-1 벡터 집합

- 벡터 집합(set): 벡터들의 모음
  - 벡터 집합은 S 또는 V와 같이 대문자 이탤릭체로 표시
  - 수학적 표현

$$V = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

  - 벡터 집합은 유한 또는 무한한 수의 벡터를 가질 수 있음
  - 벡터 집합이 비어 있다면 $V=\{\ \}$

SECTION 02-2 선형 가중 결합(1)

- 선형 가중 결합 (linear weighted combination)
  - 여러 변수마다 가중치를 다르게 주어 정보를 혼합하는 방법
  - 선형 혼합물 (linear mixture) 또는 가중 결합 (weighted combination)
  - 계수 (coefficient)
  - 스칼라-벡터 곱을 한 다음 합하기

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ -13 \end{bmatrix}$$

SECTION 02-2 선형 가중 결합(2)

- 선형 가중 결합의 코드 구현

```
l1 = 1
l2 = 2
l3 = 3
v1 = np.array([4,5,1])
v2 = np.array([-4,0,-4])
v3 = np.array([1,3,2])
l1*v1 + l2*v2 + l3*v3
```

```
array([-1, 14, -1])
```

연습문제 1

- 선형 가중 결합 코드 구현
  - 각각 스칼라 값과 벡터를 리스트로 묶기
  - for문을 사용해 선형 가중 결합 연산을 계산하기

```
l1 = 1
l2 = 2
l3 = 3
v1 = np.array([4,5,1])
v2 = np.array([-4,0,-4])
v3 = np.array([1,3,2])
l1*v1 + l2*v2 + l3*v3
```

```
array([-1, 14, -1])
```

SECTION 02-3 선형 독립성(1)

- 선형 종속적(linearly dependent)
  - 벡터 집합에서 적어도 하나의 벡터를 집합의 다른 벡터들의 선형 가중 결합으로 나타낼 수 있을 때 벡터 집합
- 선형 독립적(linearly independent)
  - 집합에 있는 벡터들의 선형 가중 결합으로 집합의 아무런 벡터도 나타낼 수 없을 때

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

- 벡터 집합 V 는 선형 독립적
- 집합의 한 벡터를 집합의 다른 벡터의 선형 배수로 나타낼 수 없음
- 즉, 집합 내의 벡터들을 v_1과 v_2 라고 했을 때 $v_1 = \lambda v_2$인 스칼라 λ가 존재하지 않음

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

- 벡터 집합 S는 선형 종속적
- 집합의 벡터를 선형 가중 결합해서 집합의 다른 벡터를 만들 수 있기 때문임
- 이러한 결합은 무한히 존재하며 그 중 두 가지는 $S_1 = .5*S_2$와 $S_2 = 2*S_1$

SECTION 02-3 선형 독립성(2)

- 선형 독립성을 결정하는 방법
  - 벡터 집합으로 행렬을 만들고 행렬의 계수를 계산한 다음 행의 수와 열의 수 중에서 더 작은 값과 비교 (나중에 배우게 됨)
  - 행렬의 계수(rank): 행렬의 일차독립인 행 또는 열의 최대 개수

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

SECTION 02-3 선형 독립성(3)

2.3.1 수학에서의 선형 독립성

- 선형 종속의 수학적 정의
  - 선형 종속적이라면 집합의 벡터들의 선형 가중 결합으로 영벡터를 만들 수 있음
  - 식을 0과 같다고 설정하면 전체 집합이 종속적 또는 식을 참으로 만들 수 없다면 독립적
    - □ 어떤 개별 벡터도 '종속 벡터'라는 특권을 가지지 않게 됨
      다시 말해 독립에 관해서 평등한 벡터 집합

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

  - 적어도 하나의 λ≠0이라는 제약 조건

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \mathbf{v}_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 \neq 0$$

SECTION 02-3 선형 독립성(4)

2.3.2 독립성과 영벡터

- 영벡터에 스칼라를 곱하면 여전히 영벡터
  - λ≠0이며 자명하지 않은 해법(nontrivial solution)이 존재한다면 그 집합은 선형 종속성 정의에 부합
  - 영벡터가 포함된 모든 벡터 집합은 선형 종속적인 집합

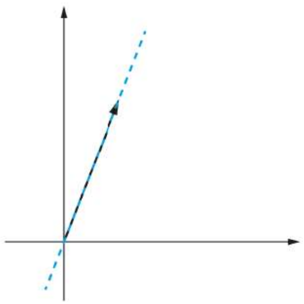
$$\lambda_0 0 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_n$$

□ 자명하지 않은 해: 해가 존재하지 않거나 또는 무수히 많은 경우

2.3.2 독립성과 영벡터

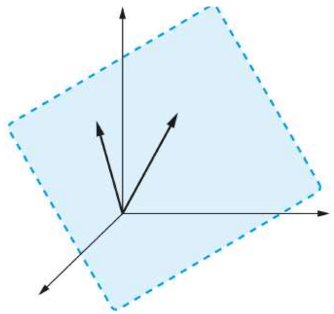
- 집합 안에서 벡터들을 선형 결합할 수 있는 무한한 방법
  - (유한한) 벡터 집합의 동일한 벡터들을 사용하지만 다른 가중치 숫자를 사용해서 무한히 선형 결합하는 방식으로 벡터 부분공간을 생성
  - 벡터 집합의 생성(span): 가능한 모든 선형 가중 결합을 구성하는 메커니즘

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$



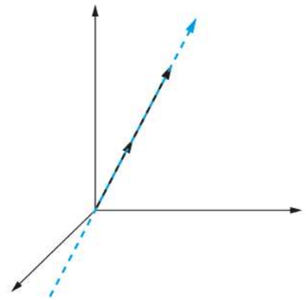
벡터 (검은색)와 벡터가 생성하는 부분공간 (강조색)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$



두 벡터 (검은색)와 이들이 생성하는 부분공간 (강조색)

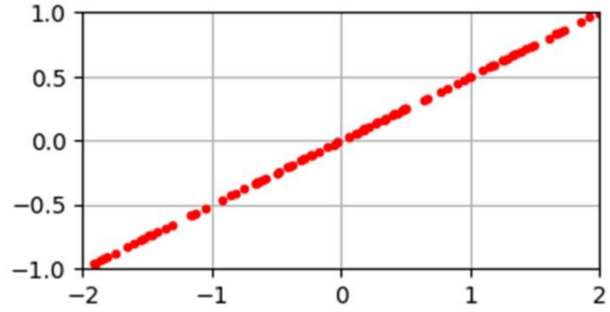
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$



2개의 벡터 (검은색)로 생성된 1차원 부분공간 (강조색)

연습문제 2

- 2개의 벡터로 생성된 부분공간 그래프 그리기
  - 선형 종속적인 2개의 벡터 (2,1), (1, 0.5)로 표현된 부분공간 그리기
    - 점 200개로 표현



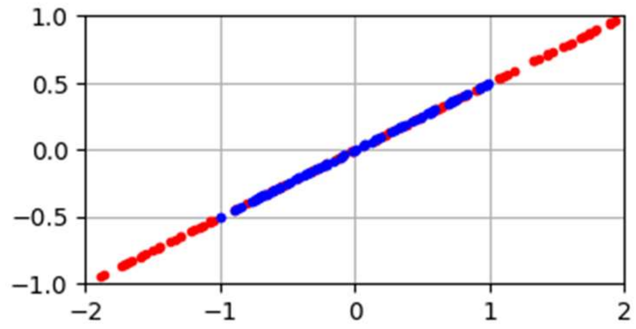

```
import matplotlib.pyplot as plt

A = np.array([2,1])
xlim = [-2,2] # x-axis range
ylim = [-1,1]
# y-axis range
# random scalars in that range
scalars = np.random.uniform(low=-1,high=1,size=100)

plt.figure(figsize=(4,2)) # create a figure and size

# loop over the random scalars
for s in scalars:
  p = A*s # create point p
  plt.plot(p[0], p[1], 'o', color = "red", markersize = 3)

plt.xlim(xlim)
plt.ylim(ylim)
plt.grid()
plt.show()
```



SECTION 02-4 부분공간과 생성(2)

생성 부분공간의 차원과 집합의 벡터 수 사이의 관계

- 벡터 집합에서 생성되는 부분공간의 차원은 선형 독립 집합을 형성하는 데 필요한 최소한의 벡터 수
- 벡터 집합이 선형 독립적이면 해당 집합의 벡터들로 생성된 부분공간의 차원은 집합의 벡터 수와 동일
- 반대로 종속적이라면 해당 벡터들로 생성된 부분공간의 차원은 반드시 해당 집합의 벡터 수보다 작음
- 벡터 부분공간의 공식적인 정의는 덧셈과 스칼라 곱셈으로 닫혀 있는 부분집합으로 공간의 원점을 포함
  - 모든 가중치를 0으로 설정해서 만들어진 공간의 원점인 영벡터도 마찬가지
  - a 집합 내 임의의 두 원소가 b 연산의 결과가 a 집합의 원소가 될 때, a 집합은 b 연산에 대해 닫혀 있다.

SECTION 02-5 기저(1)

- 기저(basis)는 일종의 공간을 측정하기 위한 자
  - 기저 단위를 부여해야 의미가 존재
    - 암스테르담(네덜란드)과 테네리페(스페인) 사이의 거리는 대략 **2,000 마일**
  - 기저는 행렬의 정보(예, 데이터)를 설명하는 데 사용하는 자(ruler)의 집합
    - 데카르트 좌표계(Cartesian Coordinate System)
    - 데카르트 기저 집합은 서로 직교하며 단위 길이인 벡터로 구성
      - 표준 기저 집합(standard basis set)

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

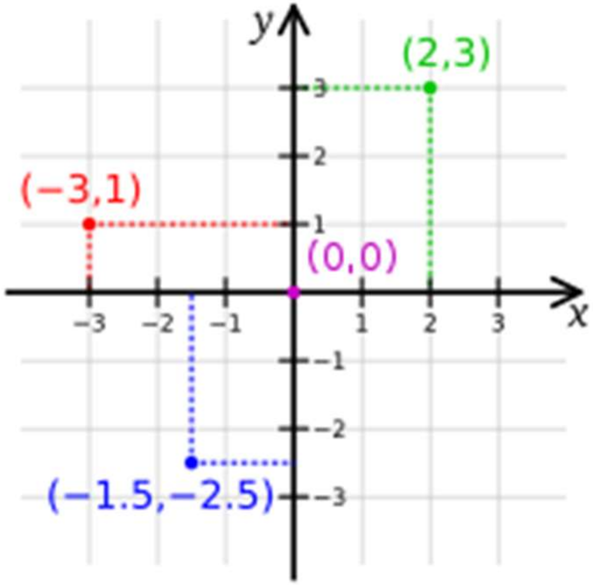
2차원과 3차원 데카르트 그래프의 기저 집합

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

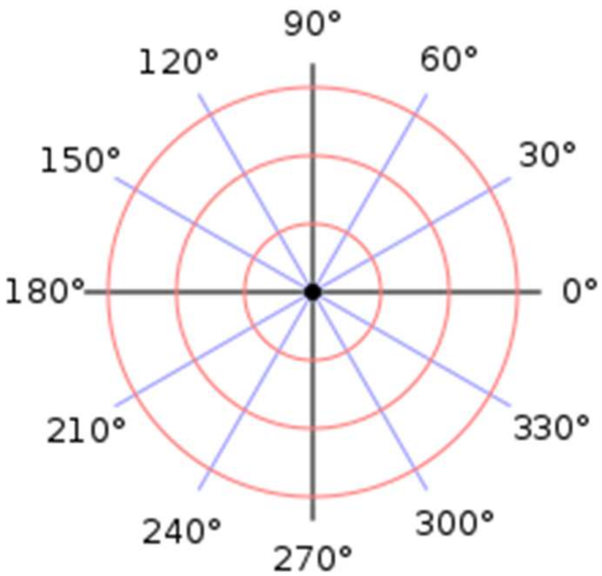
$\mathbb{R}^2$ 의 또 다른 기저 집합

데카르트 좌표계 (Cartesian Coordinate System)

- 데카르트 좌표계는 유클리드 공간을 나타내는 좌표계 중 하나
- 천장을 날아다니는 파리를 통해 영감을 얻어 해당 좌표계를 발명한 프랑스의 철학자이자 수학자인 르네 데카르트의 이름을 땀



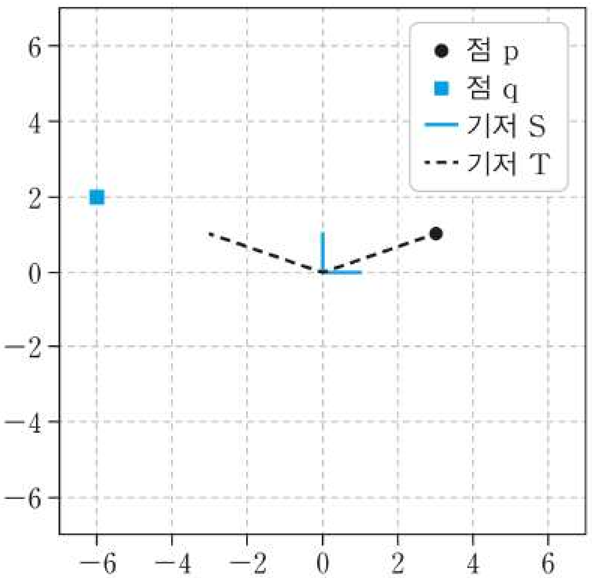
직교하는 x와 y축을 사용



각도와 거리를 사용

SECTION 02-5 기저(2)

- 기저 집합 S_2 와 T는 모두 동일한 부분공간을 생성($\mathbb{R}^2$ 전체).
  - S보다 T를 선호
  - 그림 2-4의 데이터 점 p 와 q 는 기저 집합에 관계없이 동일하지만 T는 간결하고 직관적



#기저 지반 S를 사용한 경우
- $p = 3s_1 + 1s_2$
- $q = -6s_1 + 2s_2$

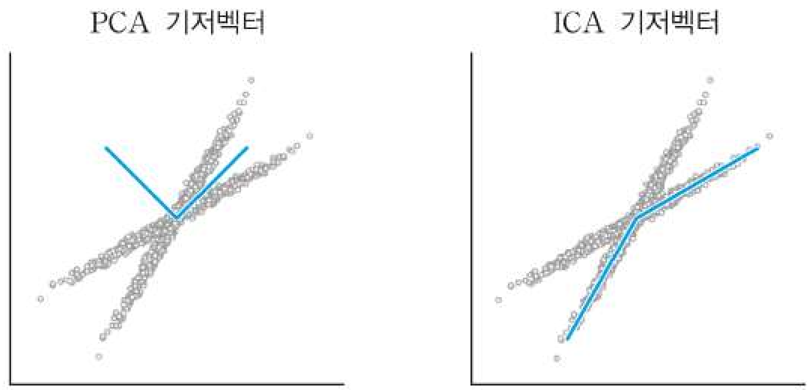
#기저 집합 T를 사용한 경우
- $p = 1t_1 + 0t_2$
- $q = 0t_1 + 2t_2$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

SECTION 02-5 기저(3)

- 다음 그림은 두 변수를 가진 데이터 집합(각 점은 데이터)
  - 세 개의 다른 기저 집합 중 최적의 기저 집합을 모색 - 분석 목표, 데이터 특성, 분석의 제약 조건 등을 고려
    - x = 0과 y = 0 줄에 해당하는 '표준 기저 집합'
    - 주성분 분석 (PCA (Principal Component Analysis), 왼쪽 도표)
    - 독립 성분 분석 (ICA (Independent Component Analysis), 오른쪽 도표)

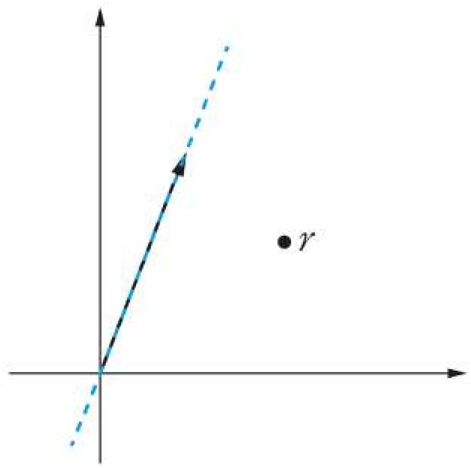


다른 기저벡터(강조색 선)를 사용한 2차원 데이터 집합

SECTION 02-5 기저(4)

2.5.1 기저 정의

- 기저는 단순히 생성과 독립성을 결합한 것
  - 벡터 집합이 (1)특정 부분공간을 생성하고 (2)독립적인 벡터 집합이라면 해당 부분공간의 기저



기저 집합은 생성 내에 포함된 것만 측정할 수 있다.

SECTION 02-5 기저(5)

- 기저 집합은 선형 독립이어야 하는 이유
  - 부분공간에 있는 모든 벡터는 그 기저를 이용한 고유한 좌표를 가져야 하기 때문임
  - 모든 벡터가 기저 집합 내에서 고유한 좌표를 가져야 함
    - **고유성을 보장하려면 선형 독립적이 필요**

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- ***U* 는 완벽하게 유효한 벡터 집합이지만 기저 집합은 절대 아님**

- 하나의 기저 집합 내에서 하나의 점은 정확히 하나의 선형 가중 결합으로 정의
  - 측정 단위마다 하나의 값만 존재
  - 암스테드담과 테네리페까지의 거리를 다양한 단위를 사용해 측정할 수는 있지만, 하나의 단위에서는 하나의 고유 값만이 존재함.
  - 3,200마일과 2,000마일이 동시에 가능한 것이 아니라 3,200 킬로미터와 2,000 마일이 동시에 가능