순천향대학교
SOON CHUN HYANG UNIVERSITY

2024년 2학기

선형대수

12장

Chapter 12

- SECTION 12-1 고유값과 고유벡터의 해석
- SECTION 12-2 고유값 구하기
- SECTION 12-3 고유벡터 찾기
- SECTION 12-4 정방 행렬의 대각화
- SECTION 12-5 대칭 행렬의 특별함
- SECTION 12-6 특이 행렬의 고유값 분해
- SECTION 12-7 이차식, 정부호성 및 고유값
- SECTION 12-8 일반화된 고유값 분해

SCH

SECTION 12-5 대칭 행렬의 특별함(1)

12.5.1 직교 고유벡터

- 대칭 행렬의 모든 고유벡터는 모든 쌍이 직교
  - 세 개의 내적은 모두 컴퓨터 반올림 오차 범위 10^{-16}내에서 0 (무작위 행렬에 전치를 곱해서 대칭 행렬을 만들었음)
  - 직교 고유벡터 특성은 모든 고유벡터 쌍 사이의 내적이 0이고 고유벡터 자체와의 내적은 0이 아니라는 것을 의미
  - $V^TV = D$로 나타낼 수 있으며 여기서 D는 고유벡터 노름을 포함하는 대각 행렬
    - □ 모든 고유벡터가 직교하고, 단위 길이를 가질 때 $V^TV = I$

```
# 무작위 행렬
A = np.random.randint(-3,4,(3,3))
A = A.T@A

# 위 행렬의 고유값 분해
L,V = np.linalg.eig(A)

# 모든 쌍의 내적
print( np.dot(V[:,0],V[:,1]) )
print( np.dot(V[:,0],V[:,2]) )
print( np.dot(V[:,1],V[:,2]) )
```

SECTION 12-5 대칭 행렬의 특별함(2)

- (증명) 대칭 행렬의 고유벡터 행렬은 직교 행렬
  - 모든 고유벡터 쌍 사이의 곱이 0임을 증명
    1) 행렬 A가 대칭
    2) λ_1과 λ_2는 A의 서로 다른 고유값(서로 같을 수 없다는 의미)이며 대응하는 고유벡터는 v_1과 v_2

대칭 행렬의 고유벡터 직교성 증명: $\lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T A^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2$

고유벡터 직교성 증명 (계속):

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2$$

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$$

고유벡터 직교성 증명 (마지막): $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$

SECTION 12-5 대칭 행렬의 특별함(3)

12.5.2 실수 고유값

- 대칭 행렬의 두 번째 특별한 특성 - 행렬이 실수 고유값(따라서 실수값 고유벡터)을 가짐
  1) 모든 실수 항목이 있는 행렬도 복소수 고유값을 가질 수 있음

```
A = np.array([[-3, -3, 0],
              [ 3, -2, 3],
              [ 0,  1, 2]])

# its eigendecomposition
L,V = np.linalg.eig(A)
L.reshape(-1,1) # 고윳값 분

>> array([[-2.744739  +2.85172624j],
         [-2.744739  -2.85172624j],
         [ 2.489478  +0.j        ]])
```

- NumPy 배열은 3 × 2 행렬이 아니라 복소수를 포함하는 3 × 1 열벡터이므로 해석할 때 주의 (숫자 사이에 쉼표가 없는 점과 j에 유의)
- 3 × 3 행렬 A는 두 개의 복소수 고유값과 하나의 실수 고유값을 가짐
- 복소수 고유값에 결합된 고유벡터는 그 자체로 복소수를 가짐. 이 행렬은 말 그대로 -3에서 +3 사이의 임의의 정수에서 생성
- 답은 켤레 복소수쌍으로 산출됨
  즉 $\lambda_i = a + {}_ib$가 존재하면 $\lambda_j = a - {}_ib$도 존재
- 이에 대응하는 고유벡터도 켤레복소수쌍

SECTION 12-5 대칭 행렬의 특별함(4)

2) 대칭 행렬은 실수 고유값을 가지는 것이 보장되며 따라서 실수 고유벡터도 보장

```
A = np.array([[-3, -3, 0],
              [-3, -2, 1],
              [ 0,  1, 2]])

# 고윳값 분해
L,V = np.linalg.eig(A)
L.reshape(-1,1) # 행벡터로 출력

>> array([[-5.59707146],
          [  0.22606174],
          [  2.37100972]])
```

실습 문제

- A와 A의 역행렬의 고유벡터가 같고, 고유값은 λ^{-1}이다. 이것을 5x5 대칭행렬을 사용해 증명하세요.
  - $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}$는 대칭행렬
  - np.sort(행렬)을 사용해 원소 값에 따라 오름차순 정렬해 비교

SECTION 12-6 특이 행렬의 고윳값 분해(1)

- 행렬의 고유값 분해는 완벽하게 동작

```
# 특이 행렬
A = np.array([[1,4,7],
              [2,5,8],
              [3,6,9]])

# 특이 행렬의 고윳값 분해
L,V = np.linalg.eig(A)
```

- 이 행렬의 계수, 고유값, 고유벡터를 출력

```
print( f'Rank = {np.linalg.matrix_rank(A)}₩n' )
print('Eigenvalues: '), print(L.round(2)), print(' ')
print('Eigenvectors:'), print(V.round(2))
>> Rank = 2

Eigenvalues:
[16.12 -1.12 -0. ]
Eigenvectors:
[[-0.46 -0.88 0.41]
 [-0.57 -0.24 -0.82]
 [-0.68 0.4 0.41]]
```

SECTION 12-6 특이 행렬의 고유값 분해(2)

- 계수-2 행렬은 하나의 0인 고유값과 함께 0이 아닌 고유값을 가짐
  - 특이 행렬의 고유값 분해는 적어도 하나의 고유값 0이 보장. 0이 아닌 고유값의 수가 행렬의 계수와 같다는 의미는 아니며 그 반대도 마찬가지
  - 모든 최대계수 행렬은 0인 고유값이 존재하지 않음
    - 특이 행렬이 이미 자명하지 않은(nontrivial) 널 공간을 가지고 있기 때문임
    - 즉 $\lambda = 0$은 $(A - \lambda I) = 0$ 식에 대한 자명하지 않은 해를 제공
    - $\lambda = 0$과 관련된 고유벡터는 정규화된 벡터 [1-2 1]로 영벡터를 생성하는 열(또는 행)의 선형 가중 결합

  - 요약

1) 고유값 분해는 축소계수 행렬에 유효
2) 고유값 0이 하나 이상 존재하면 축소계수 행렬