순천향대학교
SOON CHUN HYANG UNIVERSITY

2024년 2학기

선형대수

8-1장

Chapter 08

- SECTION 08-1 직교 행렬
- SECTION 08-2 그람-슈미트 과정
- SECTION 08-3 QR 분해

SCH

SECTION 08-1 직교 행렬(1)

- 직교 행렬(orthogonal matrix)
  - QR 분해, 고유 값 분해, 특이 값 분해 등 여러 가지 분해에 필수적인 특수 행렬
  - 문자 Q로 직교행렬을 표시
  - 직교행렬의 속성

직교 열

- 행렬의 모든 열은 서로 직교

단위 노름 열

- 각 열의 노름(기하학적 길이)은 정확히 1

$$\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ 1, & \text{if } i = j \end{cases}$$

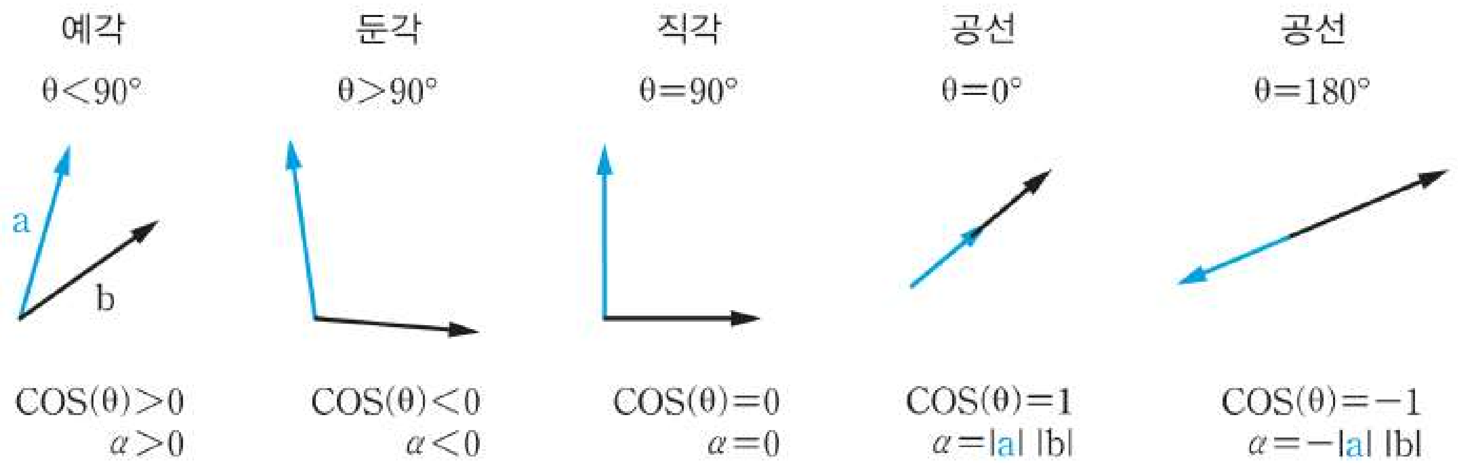
- 모든 열은 자기자신과의 내적은 1이지만 다른 열과의 내적은 0

$$Q^T Q = I$$

- 직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치

내적과 벡터의 사이각

- 두 벡터 사이각에 따른 내적의 값



SECTION 08-1 직교 행렬(2)

- 각 열의 노름이 1이고 다른 열과 직교

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\-2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

- 파이썬 코드

```
Q1 = np.array([ [1,-1],[1,1] ]) / np.sqrt(2)
Q2 = np.array([ [1,2,2],[2,1,-2],[-2,2,-1] ]) / 3

print( Q1.T @ Q1 )
print( Q2.T @ Q2 )
```

- 직교 행렬은 QR 분해를 통해 비직교 행렬로부터 계산할 수 있음
  - QR 분해는 기본적으로 그람-슈미트(Gram-Schmidt)에서 발전된 형태

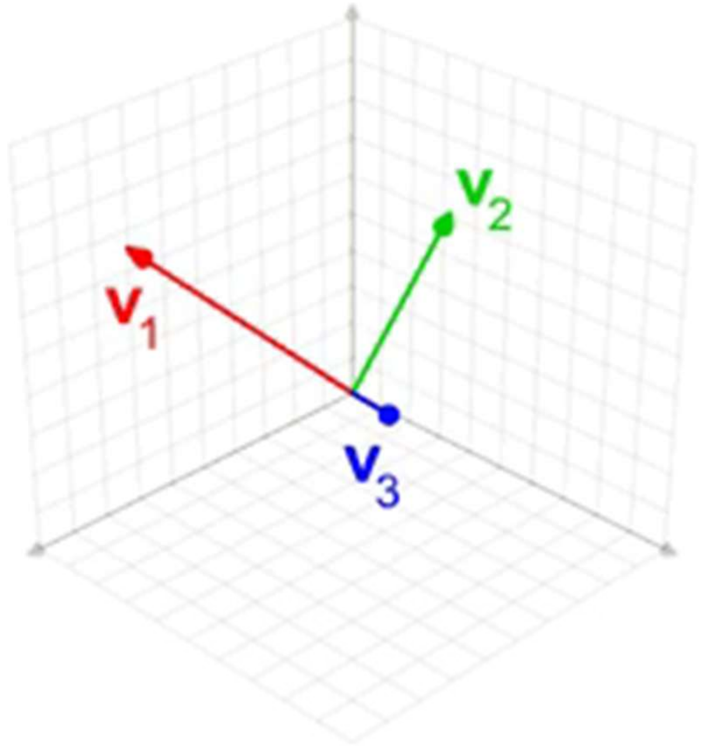
SECTION 08-2 그람-슈미트 과정

- 그람-슈미트(GS 또는 G-S) 과정은 비직교 행렬을 직교 행렬로 변환하는 방법
  - 그람-슈미트는 학문적으로는 가치가 높지만 응용 가치는 매우 낮음
  - 작은 단위의 숫자를 여러 번 연산하면서 수치적으로 불안정함
- 하우스홀더 변환(Householder reflection)
  - 보다 정교하고 수치적으로 안정적인 QR 분해 방법

- 직교화 알고리즘
  - 열 v_1부터 v_n까지로 구성된 행렬 **V** 는 다음 알고리즘에 따라 열 q_k 를 갖는 직교 행렬 **Q** 로 변환
  - V 의 모든 열벡터는 첫 번째(가장 왼쪽)부터 시작하여 마지막(가장 오른쪽)까지 차례로 이동
    - 1. 직교벡터 분해를 사용하여 v_k를 행렬 **Q** 의 모든 이전 열과 직교화
      - q_{k-1} ,q_{k-2}에서 q_1까지의 모든 열과 수직인 v_k의 원소를 계산
      - 이렇게 직교화된 벡터를 v_k^*
    - 2. v_k^* 를 단위 길이로 정규화
      - **Q** 행렬의 k 번째 열인 q_k가 됨

그람-슈미트 과정

- 주어진 벡터에 대해서 순차적으로 직교한 벡터를 연산

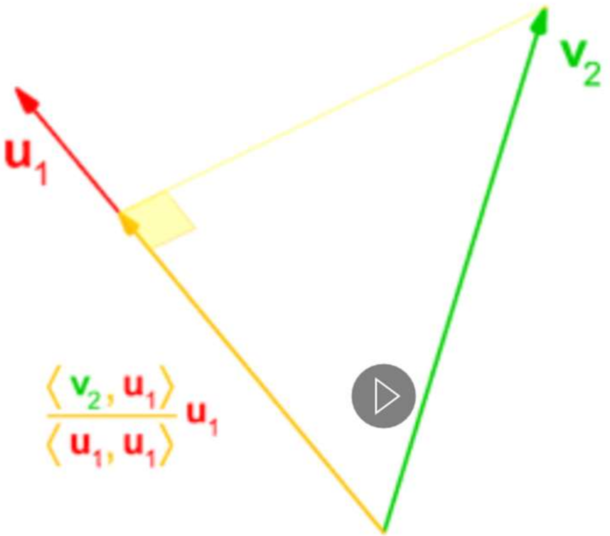


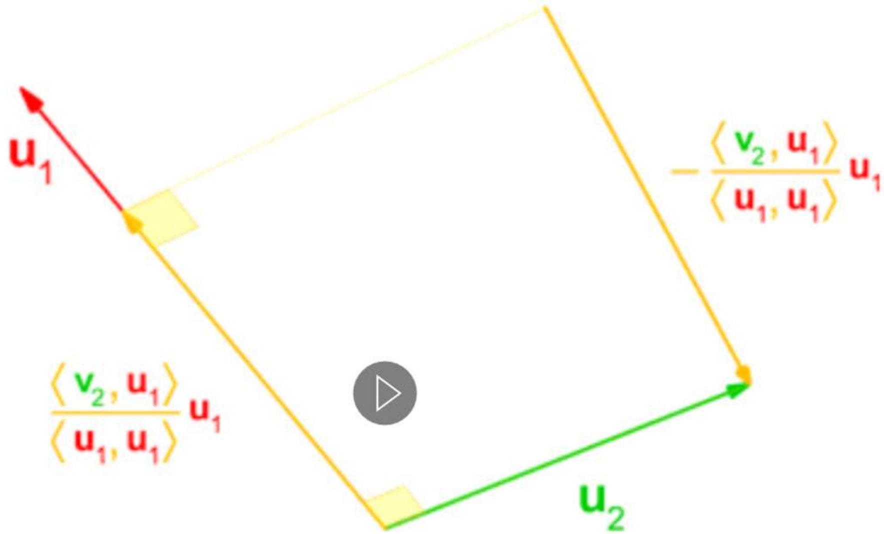
직교벡터 분해

- 평행 성분
  - **r** 의 크기를 조정한 벡터는 **r**과 평행 (대상 벡터 **t**, 기준 벡터 **r**)
  - 이전의 직교투영 공식을 적용하면 $t_{||r}$ 을 계산할 수 있음
  - 이전에는 스칼라 값인 β만 계산했다면, βr을 계산함

$$\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{b} - \beta\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{a} = 0$$
$$\beta\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{a} = \mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{b}$$
$$\beta = \frac{\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{b}}{\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{a}}$$

$$t_{||r} = r\frac{t^{\mathrm{T}}r}{r^{\mathrm{T}}r}$$



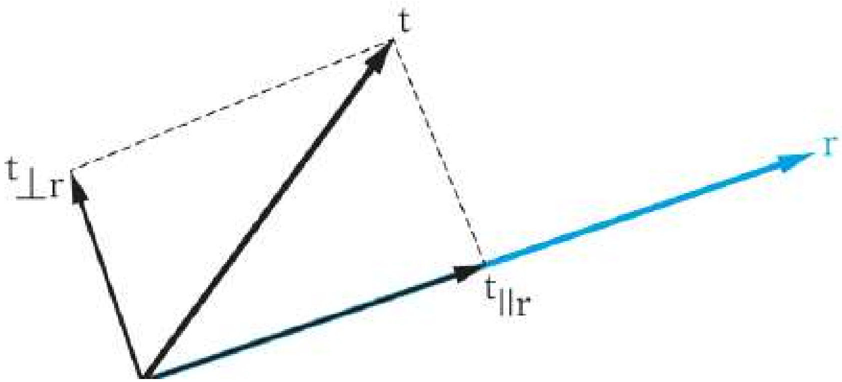


직교벡터 분해

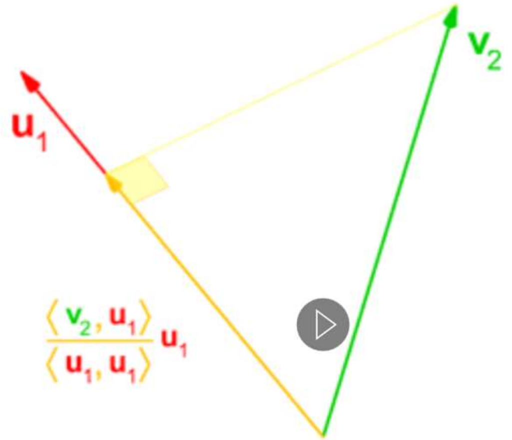
- 수직 성분
  - 대상 벡터 t (v2), 기준 벡터 r(u1)

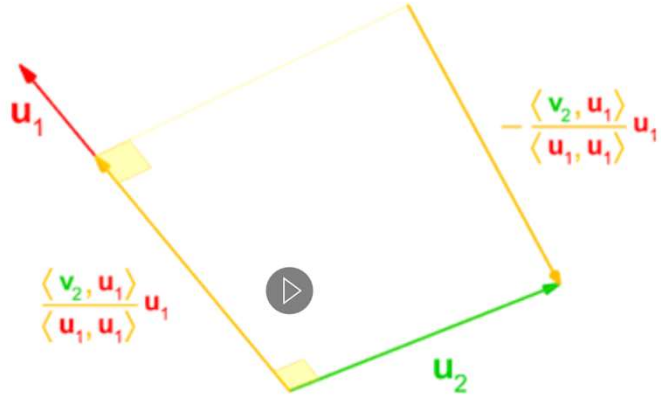
$$t = t_{\perp r} + t_{\parallel r}$$

$$t_{\perp r} = t - t_{\parallel r}$$



$$v_2 = v_{2\perp u1} + v_{2||u1}$$
$$v_{2\perp u1}(u_2) = v_2 - v_{2||u1}$$





실습 문제

- 그람-슈미트 (Gram-Schmidt process) 함수를 정의하고, 3x3 난수 행렬을 생성해 직교 행렬인지 증명하세요.
  - 모든 열은 자기 자신과의 내적은 1, 다른 열과의 내적은 0

    $$\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ 1, & \text{if } i = j \end{cases}$$

  - 각 열의 크기(norm)은 1 $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$
  - 직교 행렬의 역행렬은 그 행렬의 전치
    - A = np.random.randn(3,3)