МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики»

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа №1
Реализация симплекс метода

Сделали:
Подколзин Олег M33071
Якимов Даниил M33011
Юрченко Владислав M33031

Санкт-Петербург 2021

Задание

Реализуйте симплекс-метод для решения задач линейного программирования. Для тестирования использовать варианты, находящиеся в файле "Линейное программирование варианты.pdf".

Тест 1

```
Точка:
[0, 4.00003, 1e-05, 0]
Значение:
-4.00003
```

Тест 2

```
Точка:
[2.0, 2.0, 0, 0]
Значение:
-6.0
```

Тест 5

```
Точка:
[1.0, 0, 1.0, 0]
Значение:
-4.0
```

Теория

Симплексный метод (метод последовательного улучшения плана) решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает (убывает) для задачи на max (на min) при условии, что данная задача имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным. Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_mx_m + A_{m+1}x_{m+1} + ... + A_nx_n = A_0 \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \quad (3)$$

где A_1, A_2, …, A_m - единичные векторы, образующие базис m-мерного пространства.

Теорема 1 (условие оптимальности). Опорный план $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m, 0, \ldots, 0)$ задачи (1) - (3) является оптимальным, если (δ ≥ O для любого j, j = 1,. . . ,n.

Теорема 2 Если опорный план X_0 задачи (1) - (3) невырожден и $\delta_к < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_k \leq 0$), то существует такой опорный план X', что Z(X') > $Z(X_0)$

Теорема 3 Если $\delta_к < 0$ для некоторого j = k и среди чисел a_{ik}(i = 1, .. . ,m) нет положительных ($a_{ik} < 0$), то целевая функция (1) задачи (1) - (3) не ограничена на множестве ее планов.

Алгоритм:

1. **Привести задачу к канонической форме.** Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на - 1) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком "плюс", если в исходном неравенстве знак "меньше или равно", и со знаком "минус", если "больше или равно").
2. **Определяем исходный базис.** Если в полученной системе m уравнений, то m переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к допустимому базисному решению.
3. **Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения и проверить**. Если

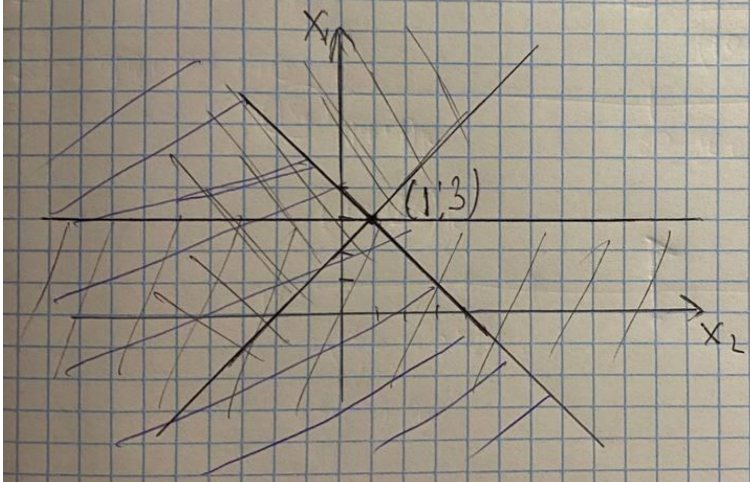
отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.

4. **Новая переменная в базисе.** Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят ее в основные. Повторить шаг 2.

Решение задач

5) Может ли ОДР в задаче ЛП состоять из одной точки? – Да. Пример.

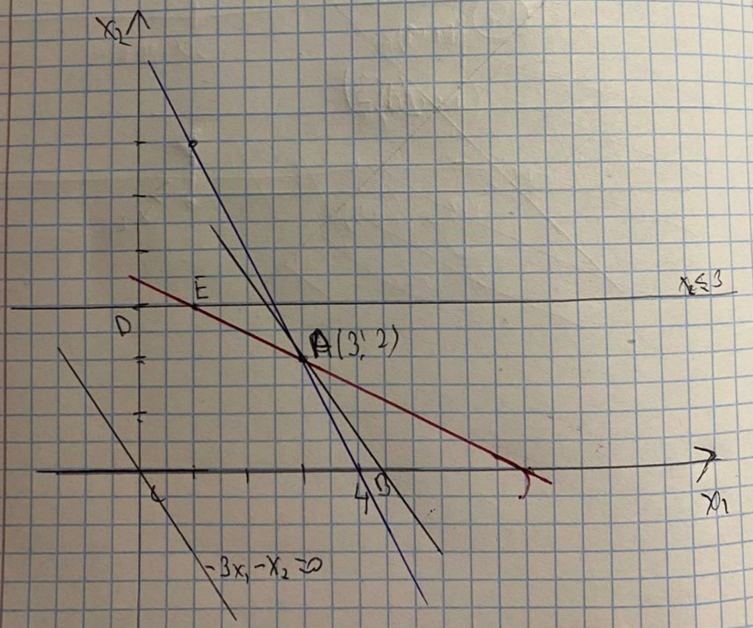
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_2 < 3 \end{cases}$$



7) Решить графическим методом

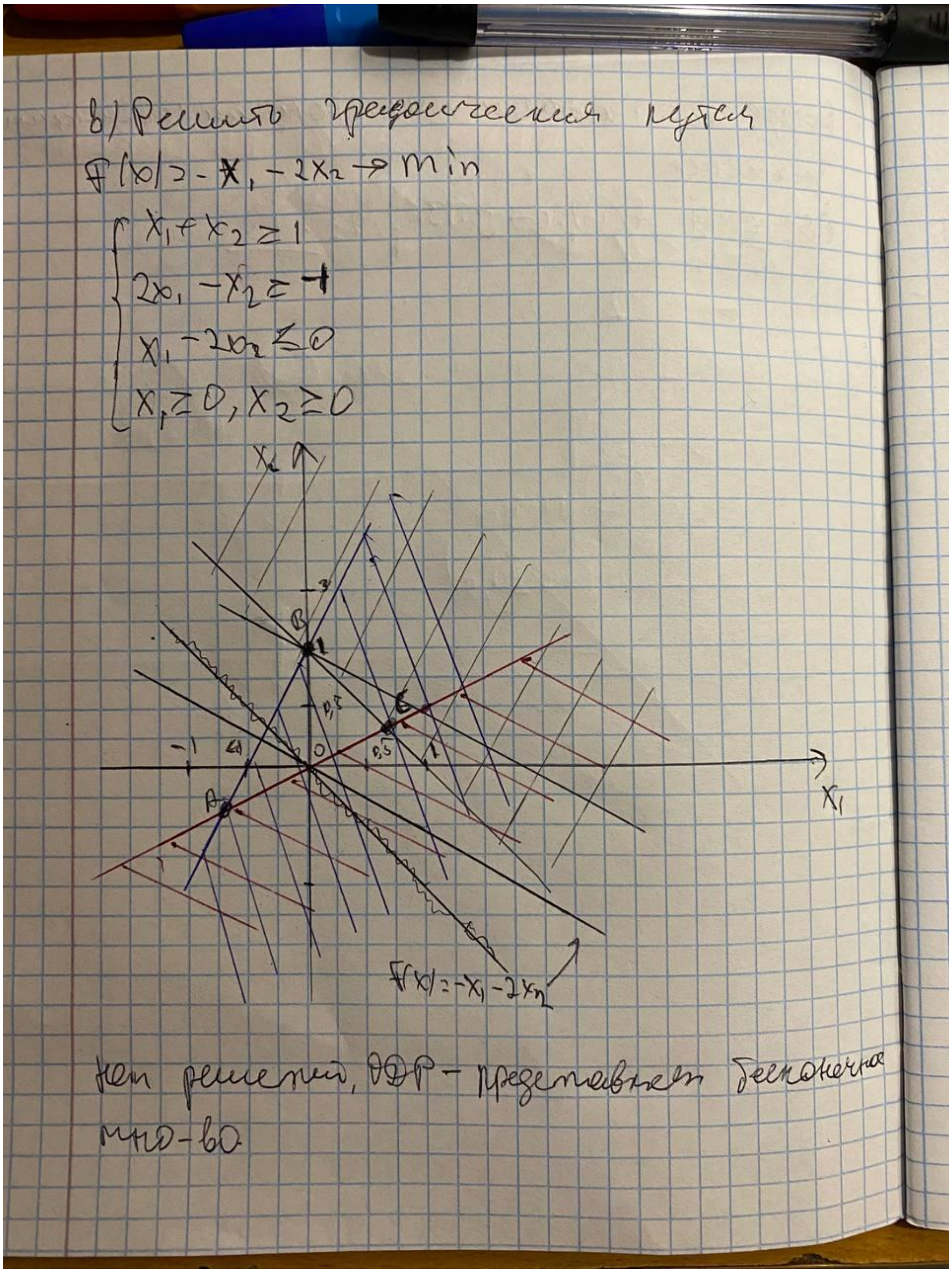
$F(x) = -3x_1 - 2x_2 \Rightarrow min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7 & x_2 \leq \frac{7 - x_1}{2} \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 & x_2 \leq 8 - 2x_1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



т. A получена пересечением прямых $2x_1 + x_2 \geq 6$ и $x_1 + 2x_2 \geq 7$, т. A и является ~~???~~ точкой, подставив координаты которой мы получим наименьшее значение

поэтому $F(x) = -3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = \underline{-13}$



Вывод

- Любая задача линейного программирования может быть приведена к одному из специальных видов: стандартному или каноническому
- Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие двойственную задачу. Решения этих задач связаны рядом свойств.

- Итоговым ответом должны быть координаты точки симплекса.