

兰姆波频散曲线的计算

郑祥明, 赵玉珍, 史耀武

(北京工业大学 材料科学与工程学院, 北京 100022)

摘要: 兰姆波频散曲线是进行兰姆波超声检测的重要参考和依据。对瑞利-兰姆方程进行了分析, 给出了无限大板中兰姆波频散曲线的数值计算方法, 并采用这一方法绘制了铝板中兰姆波的相速度和群速度曲线。对推广应用兰姆波无损检测有实际意义。

关键词: 超声检验; 铝板; 数值计算; 曲线制作

中图分类号: TG115.28 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-6656(2003)02-0066-03

CALCULATION FOR LAMB WAVE DISPERSION CURVES

ZHENG Xiang-ming, ZHAO Yu-zhen, SHI Yao-wu

(School of Materials Science and Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract: Dispersion curves are of great importance to Lamb wave ultrasonic testing. Rayleigh-Lamb equation was analyzed and a numerical calculation method for Lamb wave dispersion curves of an infinite plate was presented, by which the phase velocity curves and group velocity curves of Lamb waves in aluminium plate were plotted respectively. It is of significance for the use of Lamb waves in nondestructive testing.

Keywords: Ultrasonic testing; Aluminium plate; Numerical calculation; Curve plotting

形成波导的固体在生活和工业中并不少见, 常见的有细长棒、丝和大薄板。在板形结构内传播的导波称为板内波, 简称板波。板波是总称, 当板的上下界面在力学上自由时, 这种特殊的波就叫兰姆波^[1]。兰姆波是超声无损检测中最常见的一种导波形式, 由20世纪初兰姆先生(H Lamb)研究无限大板中正弦波问题而得名。由于超声体波(纵波和横波)在检测薄板时有时会遇到较大的困难, 因而薄板的无损检测就成为了超声兰姆波最初的一个成功应用^[2]。兰姆波检测具有快速便捷的特点, 非常适合于板形结构的大面积无损检测。但是由于其在激励、传播、接收以及信号处理方面的复杂性, 大大限制了兰姆波在工业生产中的广泛应用, 这都是由于兰姆波的频散特性所决定的。要想在无损检测中有效地应用兰姆波, 必须了解兰姆波的基本原理和特点, 并根据兰姆波的频散特性确定检测方案。推广应用兰姆波必须首先解决绘制兰姆波频散曲线的问题。

尽管文献资料中能够查到某些给定参数下的频散曲线, 但还是难以满足实际检测对象的需要。所以, 绘制兰姆波的频散曲线对实际工程有着非常重要的意义。可以说, 不解决兰姆波频散曲线的绘制问题, 就不能充分有效地利用兰姆波。

1 瑞利-兰姆方程

描述兰姆波波动特性的方程是瑞利-兰姆方程^[1,3], 表达式如下

对称模式

$$\frac{\tan k_s b}{\tan k_1 b} = -\frac{4k_0^2 k_1 k_s}{(k_0^2 - k_s^2)^2} \quad (1a)$$

反对称模式

$$\frac{\tan k_s b}{\tan k_1 b} = -\frac{(k_0^2 - k_s^2)^2}{4k_0^2 k_1 k_s} \quad (1b)$$

$$k_1^2 = \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 - k_0^2 \quad (2a)$$

$$k_s^2 = \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - k_0^2 \quad (2b)$$

式中 k_0 ——沿板水平方向的波数

收稿日期: 2002-12-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50075004)

b ——1/2 板厚

ω ——角频率

$\omega = 2\pi f$

c_l ——纵波速度(常数)

c_s ——横波速度(常数)

以上两个超越方程看起来容易令人误以为很简单,实际上并非如此。虽然频率方程早在 19 世纪末就已经导得,但直到 20 世纪 60 年代才由 Mindlin^[4]详细地揭示^[3]。

这组方程决定了兰姆波是多模式和频散的,即 k_0 与 ω 的关系不是线性的,而且不同的模式有不同的非线性关系。由于 k_0 与 ω 的关系不是线性的,因此,声相速 $c_p = \omega/k_0$ 不是常数,而是随频率变化而改变。兰姆波的这种特性反映在相速度-频厚(频率与厚度的乘积)平面内就表现为一系列曲线,这些曲线就是兰姆波的相速度频散曲线。具有有限带宽的脉冲声波,在薄板波导中将成群速度 c_g 传播,即

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_0} \quad (3)$$

且该速度一般不同于相速度,如果把群速度随频率的变化反映在群速度-频厚平面内就得到了群速度频散曲线,群速度曲线可以通过相速度曲线导出。频散曲线是兰姆波检测中不可缺少的参考,如果用斜楔探头激发兰姆波,还可以从相速度曲线计算兰姆波激发曲线。

2 瑞利-兰姆方程分析

以对称模式为例,将式(2)代入式(1a),化简以后得

$$\frac{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_s^2} \omega b}{c_p c_s}}{\tan \frac{\sqrt{c_l^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_l}} = - \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_l^2 - c_p^2)(c_p^2 - c_s^2)}}{c_l(2c_s^2 - c_p^2)^2} \quad (4)$$

对各种材料, $c_l > c_s$, 显然,只有当 $c_p > c_l$ 时,上式左右两边的分子和分母都在实数范围内,否则会有负数开方的问题,会有复数运算。进一步分析如下:

(1) 当 $0 < c_p \leq c_s$ 时,式(4)变为

$$\frac{\tan \frac{i\sqrt{c_s^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_s}}{\tan \frac{i\sqrt{c_l^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_l}} = - \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_l^2 - c_p^2)(c_s^2 - c_p^2)} \cdot i^2}{c_l(2c_s^2 - c_p^2)^2}$$

$$\frac{\text{th} \frac{\sqrt{c_s^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_s}}{\text{th} \frac{\sqrt{c_l^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_l}} = \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_l^2 - c_p^2)(c_s^2 - c_p^2)}}{c_l(2c_s^2 - c_p^2)^2} \quad (5)$$

(2) 当 $c_s < c_p \leq c_l$ 时,有

$$\frac{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_s^2} \omega b}{c_p c_s}}{\tan \frac{i\sqrt{c_l^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_l}} = - \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_l^2 - c_p^2)(c_p^2 - c_s^2)} \cdot i}{c_l(2c_s^2 - c_p^2)^2}$$

$$\frac{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_s^2} \omega b}{c_p c_s}}{i \cdot \text{th} \frac{\sqrt{c_l^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_l}} = - \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_l^2 - c_p^2)(c_p^2 - c_s^2)} \cdot i}{c_l(2c_s^2 - c_p^2)^2}$$

方程两边乘以 i , 有

$$\frac{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_s^2} \omega b}{c_p c_s}}{\text{th} \frac{\sqrt{c_l^2 - c_p^2} \omega b}{c_p c_l}} = - \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_l^2 - c_p^2)(c_p^2 - c_s^2)}}{c_l(2c_s^2 - c_p^2)^2} \quad (6)$$

(3) 当 $c_p > c_l$ 时,原式不变,即

$$\frac{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_s^2} \omega b}{c_p c_s}}{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_l^2} \omega b}{c_p c_l}} = - \frac{4c_s^3 \sqrt{(c_p^2 - c_l^2)(c_p^2 - c_s^2)}}{c_l(2c_s^2 - c_p^2)^2} \quad (7)$$

当上述几种情况取等号时,即 $c_p = c_l$ 时,好像存在分母为零的情况,实际上可以把方程两边转化为各因式相乘的形式。同理,可以对反对称模式进行同样的分段处理。分段处理后的各因式都为实数,这样,就可以在实数域范围内解瑞利-兰姆方程。

这些方程看起来非常简单,但实际上,不可能写出这些曲线的解析表达式^[3]。要得到详细和精确的数字结果,必须在计算机上求方程的数值解。

因为正切函数是周期函数,正切函数可在不同的周期内取值,所以得到的曲线不止一条。

笔者用 Matlab 对上述方程进行了求解,图 1 和图 2 分别为兰姆波在 2024-T3 航空铝合金板中的相速度和群速度频散曲线。在相速度曲线中,随着频厚积的增加, A_0 和 S_0 模趋近于瑞利波速度(2 950 m/s),其它高阶模式趋近于横波速度 c_s 。

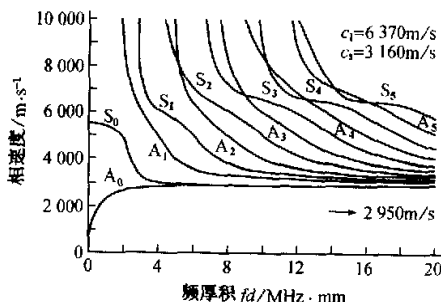


图 1 2024-T3 铝板中兰姆波相速度频散曲线

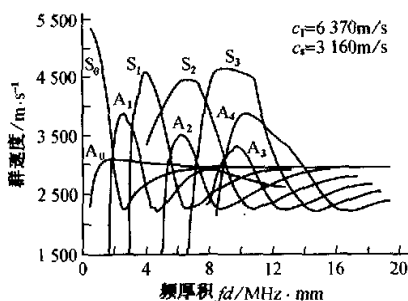


图2 2024-T3 铝板中兰姆波群速度频散曲线

3 数值计算方法

在对各条曲线进行分段数值计算前,必须对方程进行认真分析,弄清各分段函数的定义域。

(1) 当 $0 < c_p < c_s$ 时,只有 A_0 和 S_0 有取值,而 A_k 和 S_k 的计算相对简单,两者的方程可以不考虑多值问题,可以通过在 $[0, +\infty]$ 范围内以一定步长逐步增加频厚积,逐点确定相速度,在此不再赘述。

(2) 当 $c_s < c_p \leq c_l$ 时,由式(6)可以确定

$$\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_s^2} ab}{c_p c_s} \geq 0$$

对于 k 阶对称模式,对应的频厚积 fd 的可能取值范围为

$$fd \in \left[k \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}}, \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

同理,对于 k 阶反对称模式有

$$fd \in \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}}, k \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}} \right)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

(3) $c_p > c_l$ 时,式(7)左边必须 < 0 ,即

$$\frac{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_s^2} ab}{c_p c_s}}{\tan \frac{\sqrt{c_p^2 - c_l^2} ab}{c_p c_l}} < 0$$

上下两个正切函数反号,经分析以及用 Matlab 进行数值实验验证,发现对于 $k (k > 0)$ 阶对称和反对称模式, fd 可能在以下区间取值

$$\left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}}, k \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}} \right) \cap$$

$$\left(0 \frac{c_p c_l}{\sqrt{c_p^2 - c_l^2}}, \frac{1}{2} \frac{c_p c_l}{\sqrt{c_p^2 - c_l^2}} \right)$$

$$\left[\left(k - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}}, \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}} \right) \cap$$

$$\left(\left(0 + \frac{1}{2} \right) \frac{c_p c_l}{\sqrt{c_p^2 - c_l^2}}, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{c_p c_l}{\sqrt{c_p^2 - c_l^2}} \right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\left[\left(k - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (k - 1) \right] \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}}, \right.$$

$$\left. \left[k - \frac{1}{2} (k - 1) \right] \frac{c_s c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_s^2}} \right) \cap$$

$$\left(\left[0 + \frac{1}{2} (k - 1) \right] \frac{c_p c_l}{\sqrt{c_p^2 - c_l^2}}, \right.$$

$$\left. \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (k - 1) \right] \frac{c_p c_l}{\sqrt{c_p^2 - c_l^2}} \right)$$

对于同一个 k 值,当 c_p 在 $c_p > c_l$ 范围内取任一值时,以上各交集只有一个不是空集,这在数值计算中很好判断。

根据上述分析所得的 c_p 和 fd 的取值范围,就可以用数值方法分段对瑞利-兰姆方程求解。相对于上述分析过程,编程来实现它就是一件较简单的事了,图1已给出了采用上述方法得到的 2024-T4 航空铝合金板中兰姆波相速度频散曲线的计算结果,通过相速度频散曲线可以很容易地计算出兰姆波群速度频散曲线和斜楔探头激发曲线,在此不再赘述。

4 结束语

兰姆波相速度频散曲线是进行兰姆波无损检测的重要参考,根据相速度曲线可以推算群速度曲线和斜楔探头的激发角。对于不同的材料,兰姆波的频散特性是不同的,要想充分有效地利用兰姆波,必须解决频散曲线的绘制问题,在目前各种频散曲线资料匮乏的情况下,绘制频散曲线对一般工程技术人员来说是有一定难度的,所以作者所做的工作很有实际意义。

参考文献:

- [1] 应崇福,等. 超声在固体中的散射[M]. 北京:国防工业出版社,1994.
- [2] 刘镇清. 无损检测中的超声兰姆波[J]. 无损检测, 1999, 21(9): 409-423.
- [3] [美]阿肯巴赫著,徐植信,洪锦如译. 弹性固体中波的传播[M]. 上海:同济大学出版社,1992.
- [4] Mindlin RD. Waves and vibrations in isotropic elastic plates. in: Structural Mechanics[M]. Goodier JN, Hoff NJ, eds. New York: Pergamon Press, 1960.