

兰姆波频率方程的数值解法

艾春安, 李 剑

(第二炮兵工程学院, 西安 710025)

摘 要: 针对兰姆波频率方程求解问题, 提出了以兰姆波相速度为自变量, 用函数间断点划分求解区间的数值计算求解方法。通过 Matlab 软件对算法进行编程实现, 绘制出了兰姆波在铝板和钢板中传播时的频散曲线, 取得了理想的结果。该方法对兰姆波的工程应用有实际指导意义。

关键词: 超声检测; 兰姆波; 数值计算; 编程; 工程应用

中图分类号: TG115.28

文献标识码: A

文章编号: 1000-6656(2005)06-0294-03

Numerical Calculation for Lamb Wave Frequency Equation

AI Chun-an, LI Jian

(The Second Artillery Engineering Institute, Xi'an 710025, China)

Abstract: A numerical calculation method was presented for Lamb wave frequency equation, in which the phase velocity of Lamb waves was independently variable and the evaluation interval was conformed by discontinuity points, and the algorithm was realized with software Matlab, and the frequency dispersion curves of Lamb wave propagating in aluminium plate and armor plate were plotted, and the result was satisfactory. It is of significance for practical application of Lamb waves in engineering.

Keywords: Ultrasonic testing; Lamb wave; Numerical calculation; Programme; Engineering application

兰姆波(Lamb)是 20 世纪初期英国力学家兰姆按平板自由边界条件解波动方程时得到了一种特殊的波动解而发现的。它是一种在厚度与激励声波波长为相同数量级的声波导中由纵波和横波合成的特殊形式的应力波^[1]。由于自身独特的优点, 兰姆波特别适合于薄壁板形结构的无损检测。但是兰姆波的频散特性使得其在激励、传播、接收以及信号处理方面比较复杂。在应用兰姆波检测时首先是要根据不同材料、不同结构形式的构件, 选择合适的兰姆波模式, 这就需求解 Lamb 频率方程。尽管文献中能够查到某些给定参数下的频率方程的频散曲线, 但有时还是难以满足实际检测的要求, 所以求解兰姆波频率方程在工程中有着非常重要的意义^[2]。

1 Lamb 频率方程

根据声波质点振动特点, 兰姆波分为对称模式和反对称模式, 每种模式有不同的阶次, 通常用 S_0 ,

$S_1, S_2, \dots, A_0, A_1, A_2, \dots$ 表示。在自由边界条件下, Lamb 频率方程为^[3]

对称模式

$$4pq \tan \frac{\pi f d}{C_p} q + (p^2 - 1)^2 \tan \frac{\pi f d}{C_p} p = 0 \quad (1)$$

反对称模式

$$(p^2 - 1)^2 \tan \frac{\pi f d}{C_p} q + 4pq \tan \frac{\pi f d}{C_p} p = 0 \quad (2)$$

式中 $p = \sqrt{\left(\frac{C_p}{C_s}\right)^2 - 1}$

$$q = \sqrt{\left(\frac{C_p}{C_l}\right)^2 - 1}$$

C_p ——兰姆波相速度

C_s ——横波波速

C_l ——纵波波速

f ——兰姆波频率

d ——板厚

式(1)和(2)中的 C_p 不是常数, 随 f 和 d 的变化而变化。该特性反映在相速度-频厚(频率与厚度

的乘积)平面内就表现为一系列曲线,即频散曲线。

2 Lamb 频率方程数值解法

以下为对称模式的 Lamb 频率方程解法。

2.1 方程分析

令 $x = fd$, 从式(1)可见, 若以 x 为自变量, 则对 C_p 的求解从形式上看将会十分复杂; 而以 C_p 为自变量, 则对 x 的求解将相对简单一些, 因此选定 C_p 为自变量。考虑到工程实际应用, 设 C_p 和 x 均为大于零的实数。

当 C_p 给定为某一值(特殊值除外)时, 式(1)可改写为

$$A \tan Bx + C \tan Dx = 0 \quad (3)$$

其中系数 A, B, C 和 D 的值是随 C_p 的变化而变化的。对于一般的材料有 $C_s < C_l$, 则各系数的值如表 1 所示。

表 1 C_p 一定时各系数的值

项目	$0 < C_p < C_s$	$C_s < C_p < C_l$	$C_l < C_p$
A	$-a$	ai	a
B	bi	bi	b
C	c	c	c
D	di	d	d

注: $a = 4 |pq| > 0$, $b = \left| \frac{\pi q}{C_p} \right| > 0$, $c = (p^2 - 1)^2 > 0$, $d = \left| \frac{\pi p}{C_p} \right| > 0$, i 为虚数单位。

2.2 方程数值解法

(1) 特殊点的求解 当 $C_p = C_l$ 时, $q = 0$, 此时式(1)变为简单的三角方程, 即

$$(p^2 - 1)^2 \tan \frac{\pi p}{C_p} x = 0 \quad (4)$$

易解得式(4)的解为 $x = k \frac{C_p}{p}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)。

同理, 当 $C_p = \sqrt{2} C_s$ 时, $p = 1$, 可解得方程的解为 $x = \frac{(2k-1)C_p}{2q}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)。上述两种情况 $k = 1, 2, 3, \dots$ 时, 分别对应 1, 2, 3, ... 阶模式的解。

当 $C_p = C_s$ 时, $p = 0$, 此时式(1)变成恒等式, 没有意义。

(2) 当 $0 < C_p < C_s$ 时 式(3)可写成

$$F(x) = a \tanh bx - c \tanh dx = 0 \quad (5)$$

分析可知, 若式(5)有实数解, 必须满足条件 $c > a$, 且 $ab > cd$ 。当上述条件满足时, 式(5)在区间 $(0, \frac{1}{2d} \ln \frac{c+a}{c-a})$ 内有且仅有一解, 并且在区间的两端

点处, 函数 $F(x)$ 异号, 此时可以用二分法很容易求出方程的解^[4], 由此得到的解对应 0 阶模式。

(3) 当 $C_s < C_p < C_l$ 时 式(3)可写成

$$F(x) = a \tanh bx - c \tanh dx = 0 \quad (6)$$

分析可知, 式(6)在两相邻间断点构成的区间

$[\frac{k\pi}{d}, \frac{(2k+1)\pi}{2d})$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) 内有且仅有一解, 且在区间的两端点处, 函数 $F(x)$ 异号。 $k = 1, 2, 3, \dots$ 分别对应 1, 2, 3, ... 阶模式的解。

特别的, 当满足条件 $ab > cd$ 时, 在区间 $(0, \frac{1}{d} \arctan \frac{a}{c})$ 内方程亦有且仅有一解, 且在区间的两端点处, 函数 $F(x)$ 异号, 此时的解对应的是 0 阶模式。

同样用二分法可求出式(6)在各个区间内的解。

(4) 当 $C_l < C_p$ 时 式(3)可写成

$$F(x) = a \tan bx + c \tanh dx = 0 \quad (7)$$

令 $bx = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, $dx = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), 可以求出函数 $F(x)$ 的一系列间断点, 将这些间断点按照从小到大的顺序排成一列, 设为 $\{J_1, J_2, J_3, \dots\}$ 。在任意两个相邻间断点所构成的区间 (J_k, J_{k+1}) 内对函数 $F(x)$ 求导可得

$$F'(x) = ab \sec^2 bx + cd \sec^2 dx > 0$$

又 $F(J_k^+) < 0$, $F(J_{k+1}^-) > 0$, 即在区间内函数 $F(x)$ 单调, 且在两端点处异号, 所以在 (J_k, J_{k+1}) 内式(7)有且仅有一解。对各个区间分别用二分法即可求出方程的解。此时 $k = 1, 2, 3, \dots$ 分别对应 1, 2, 3, ... 阶模式的解。

式(2)反对称模式解法同上述对称模式一样, 在此不再赘述。

3 算法程序框图

笔者用 Matlab 软件对上述算法进行了编程实现, 程序框图见图 1。

图 1 中计算模块 1 为简单三角方程的求解子程序。模块 2~4 为用二分法数值求解子程序。

4 应用举例

笔者用 Matlab 软件分

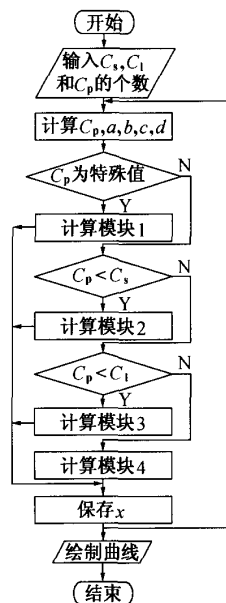


图 1 程序框图

别对兰姆波在钢板中传播时的 Lamb 频率方程进行求解,并绘制了相应的频散曲线(图 2)。

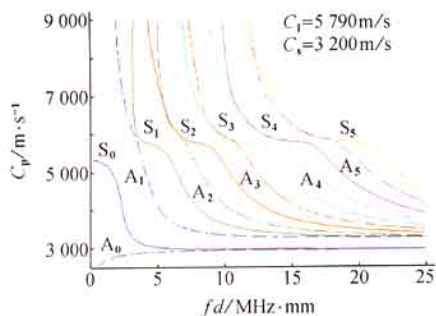


图 2 钢板中兰姆波频散曲线

从前面的分析可知, $C_p = C_s$ 时方程无意义,这一点反映在频散曲线图中表现为,随着频厚积的增大,除 0 阶模式外,其它模式相速度 C_p 趋近于横波速度 C_s 。

通过频散曲线可以很容易地作出激励角- fd 曲线,图 3 是通过有机玻璃在钢板中激励出兰姆波曲线的激励角- fd 曲线。

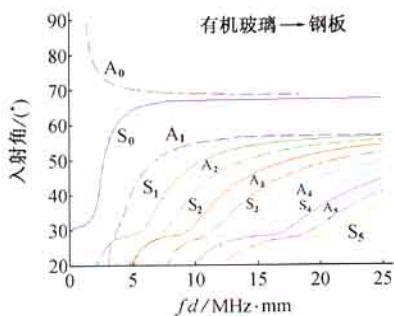


图 3 激励角- fd 曲线

群速度曲线可由 $C_g = \frac{d\omega}{dk_0}$ 得到,其中 ω 是兰姆波角频率, k_0 是兰姆波波数,根据频散曲线可画出群速度- fd 曲线。图 4 是钢板中兰姆波的群速度- fd 曲线。

以上各图中曲线的长短和光滑程度与程序中计

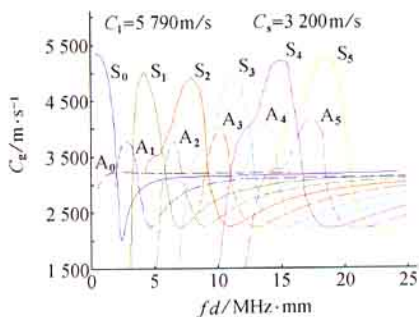


图 4 钢板中群速度- fd 曲线

算所取的 C_p 的点数有关。实线为对称模式,虚线为反对称模式。

5 结束语

通过对 Lamb 频率方程的分析,提出了以兰姆波相速度为自变量,用函数间断点划分求解区间的方法,利用数值解法对方程进行了求解。在数值解法中,选用了二分法而没有选用诸如牛顿迭代法等其它方法,是因为其它方法相对严格的收敛条件会使所研究的问题复杂化。同时,利用二分法会使编程相对简单些。实际计算表明,上述解法取得了理想的结果。在目前各种频散曲线资料相对匮乏的情况下,绘制频散曲线对一般的工程人员是有一定难度的,所以以上工作对兰姆波在工程中的应用具有一定实际意义。

参考文献:

- [1] 徐可北. 金属薄板兰姆波检验技术[J]. 无损检测, 1999, 21(10): 402-404.
- [2] 郑祥明, 赵玉珍, 史耀武. 兰姆波频散曲线的计算[J]. 无损检测, 2003, 25(2): 153-154.
- [3] 超声波探伤编写组. 超声波探伤[M]. 北京: 电力工业出版社, 1980.
- [4] 邓建中, 刘之行. 计算方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

(上接第 293 页)

- [2] Clauzon T, Thollon F, Nicolas A. Flaws characterization with pulsed eddy currents NDT[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1999, 35(3): 1873-1876.
- [3] Safizadeh MS, Lepine BA, Forsyth DS, et al. Time-frequency analysis of pulsed eddy current signals[J].

Journal of Nondestructive Evaluation, 2001, 20(2): 73.

- [4] Ali Sophin, Gui Yun Tian, David Taylor, et al. A feature extraction technique based on principal component analysis for pulsed eddy current NDT[J]. NDT & E International, 2003, 36(1): 37-41.