Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

27 de janeiro de 2021

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e divergente para os demais valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r \leq 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

Séries, Sequências e Somas Parciais

Uma série (infinita) é a soma dos termos de uma sequência (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

A n-ésima soma parcial s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Convergência de uma Série

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \tag{1}$$

Dizemos que uma série é convergente quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

com s finito.
Por fim, a série será chamada divergente quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à essa sequencia

a) $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$

b) $s_n = \dfrac{n^2}{n-1}$

Série Geométrica

A série geométrica é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad a \neq 0$$

A série geométrica é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e divergente se $|r| \geq 1$,

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela razão comum r.

$r = 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$r \neq 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

(a) $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Exercício

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- (a) Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n-ésimo comprimido?
- (b) Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\ldots$ como uma razão de inteiros (fração).

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício

A série harmônica é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Mostre que é divergente.

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica. Se for convergente, calcule sua soma

Aula 5 - Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ é convergente ou divergente.

A função associada à essa série é $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Note que essa função é contínua (toda função racional é contínua no seu domínio) e positiva nos reais. Além disso $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$. Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é decrescente em $(0, \infty)$. Portanto essa função é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Desta forma

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x^2+4} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\operatorname{arctg}(n/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sec^2\theta}{\operatorname{tg}^2\theta + 1} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\operatorname{arctg}(n/2)} d\theta
\end{aligned}
$$

Substituindo $x = 2\operatorname{tg}\theta$

Lembre-se que $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} [\theta]_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\operatorname{arctg}(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{n}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Note que a integral indefinida é convergente, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado converge.

Série-p

A série-p (série potência) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar:

$p < 0$ Nesse caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$p = 0$ Assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$\boxed{p > 0}$ Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R}^*$). A função é sempre positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty]$. Portanto podemos aplicar o Teste da Integral. Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$\boxed{p = 1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n\to\infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$

$\boxed{0 < p < 1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^n =$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \cdots = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o Teste da Integral garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a série-p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{19}+\cdots$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Aula 6 - Testes da Comparação: Termo à Termo e com limites

Teste da comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma série-p com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma série convergente.

Como $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \dfrac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Note que se trata da série harmônica, portanto é uma série divergente.

Como $\dfrac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n+1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = {}^4\!/_3$ e razão comum $r = {}^1\!/_3$.
Note que $r < 1$, então essa série geométrica será convergente.
Como $\displaystyle\frac{4}{3^n+1} \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Teste da comparação com limite

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Note que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2+2n}}{\dfrac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/\textcolor{red}{n^2}}{(n^2+2n)/\textcolor{red}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + 2/n} = 1$$

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$. Note que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty
\end{aligned}$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Aula 7 - Séries Alternadas

Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O n-ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n$$

$$a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. Note que $b_n = |a_n|$.

Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz

$$\boxed{b_{n+1} \leq b_n \text{ para todo } n} \qquad \boxed{\lim_{n \to \infty} b_n = 0}$$

então a série é convergente.

Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é convergente.

Note que $b_n = \dfrac{1}{n}$. Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

e além disso

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{n+2}{n(n+1)}} \\
&= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\
&= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1
\end{aligned}
$$

para todo n, ou seja $b_{n+1} < b_n$ para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do Teste da Série Alternada está satisfeita.
Agora veja que

$$\begin{aligned} b_1 &= 1/5 = 0.2 \\ b_2 &= 1/3 = 0.333 \\ b_3 &= 9/31 \approx 0.29032258\ldots \end{aligned}$$

$$b_4 = {}^4/_{17} \approx 0.235294117\ldots$$

Dessa forma fica claro se a série não é totalmente decrescente, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo n_0. Para verificarmos se existe um n_0 que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à b_n.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função $f(x)$ é decrescente sempre que $f'(x) < 0$. Note que $f'(x)$ será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$

$$x^3 > 8$$

$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo $n > 2$, portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$$

satisfaz as duas condições do Teste da Série Alternada e sua convergência é garantida. Somando-se $b_1 = 1/5$ e $b_2 = 1/3$ à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$$

também é convergente.

Aula 8 - Testes da Convergência Absoluta, da Razão e da Raiz

Série Absolutamente Convergente

Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita condicionalmente convergente se for convergente mas não for absolutamente convergente.

Teste da Convergência Absoluta

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} = \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.

Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$|\cos(\pi n/3)| \leq 1 \quad \text{para todo } n$$
$$\frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+$$

Note que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série-p com $p = 2$, portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o Teste da Comparação nos garante que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$ é convergente.

Dessa forma a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Teste da Razão

Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ o Teste da Razão é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\\ &= \frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo Teste da Razão a série dada é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{4}{n^2}} = 1$$

Nessas condições o Teste da Razão é inconclusivo! Dessa forma precisamos recorrer à outros teste para poder responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o Teste da Comparação com a série harmônica. Como a série harmônica é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, consequentemente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é condicionalmente convergente.

Teste da Raiz

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o Teste da Raiz é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2+1/n}}{n^2}=0<1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo Teste da Raiz. E o Teste da Convergência Absoluta nos garante que ela será convergente.

Aula 9 - Série de Potências

Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n[\phi(x)]^n = c_0 + c_1[\phi(x)] + c_2[\phi(x)]^2 + c_3[\phi(x)]^3 + \cdots$$

onde ϕ é uma função de x e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Série de Potências Centrada em a

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

é chamada de série de potências centrada em a, onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n3^n}$$

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

Raio de Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

A série converge apenas quando $x = a$

A série converge para todo x

Existe um $R > 0$ tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$$

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2 + n^2}$$

Lista de Exercícios - Aula 9

Determine o intervalo de convergência da série de potências dada:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$$
2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$$

Aula 10 - Derivação e Integração de Séries de Potências

Derivação Termo à Termo

Se a série de potências $\sum_{i=1}^{\infty}(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \end{aligned}$$

O raio de convergência da série resultante é R.

Exercício

Seja f uma função definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Ache o domínio de f, escreva a função que define f' e determine o domínio de f'.

Considere a série geométrica com termo inicial $a = 1$ e razão comum $r = x$. Nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Sempre que $|x| < 1$.
Se substituirmos x por $-x$ obtemos a série geométrica alternada que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

Sempre que $|x| < 1$.

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente

$$\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Integração Termo à Termo

Se a série de potências $\sum_{i=1}^{\infty}(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

O raio de convergência da série resultante é R.

Exercício

Seja f uma função definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Ache o domínio de f, escreva a função que define $\displaystyle\int f(x)dx$ e determine seu domínio.

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\ln(1 + x)$.

Lista de Exercícios - Aula 10

Para as seguintes funções $f(x)$ encontre a série de potência que representa $f'(x)$ e determine o seu raio de convergência.

1. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
2. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$

---

3. Ache a representação em séries de potências para a integral $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+4}$ e determine o seu raio de convergência.
4. Calcule com precisão de até três casas decimais o valor da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+4}$.
5. Determine o intervalo de convergência da série de potências dada: $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^3}\,dx$

Aula 11 - Séries de Taylor e Maclaurin

Existência de representação em séries de potências

Se f tiver uma representação em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

Polinômio de Taylor

$$T_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Série de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Convergência da Série de Taylor

Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x-a| < R$, então f é igual à soma da sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

Desigualdade de Taylor

Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para $|x-a| \leq d$.

Limite frequentemente utilizado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \text{ real}$$

Exercício

Encontre a série de MacLaurin para e^x e mostre que sua soma é igual à e^x.

Exercício

Encontre a série de Taylor para $\operatorname{sen} x$ centrada em a e mostre que sua soma é igual à $\operatorname{sen} x$.

Lista de Exercícios - Aula 11

Ache uma representação em série de MacLaurin para as funções dadas e determine o raio de convergência.

1. $f(x) = \cos \pi x$
2. $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$
3. $f(x) = e^{-(x-1)^2}$

Ache uma representação em série de potências centrada em a para as funções dadas e determine o raio de convergência.

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad a = 8$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}; \quad a = 1$

Aula 12 - Série Binomial

Teorema Binomial

Se m for um número real qualquer, então

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n \tag{2}$$

para todos os valores de x, tais que $|x| < 1$.

Exercício

Encontre uma uma série de potências de x para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

e use essa série para obter uma série de potências de x para

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e por fim encontre uma série para $\operatorname{sen}^{-1} x$.

Lista de Exercícios - Aula 12

Use a série binomial para encontrar a série de MacLaurin para a função dada e determine seu raio de convergência:

1. $f(x) = (3 - x)^{-2}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$

Calcule com precisão de até três casas decimais de precisão, o valor da integral definida (use alguma técnica baseada em séries de potência):

4. $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt{1 + x^3}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$