

# Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto

[thiago.vedovatto@ifg.edu.br](mailto:thiago.vedovatto@ifg.edu.br)

[thiagovedovatto.site](http://thiagovedovatto.site)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Campus de Goiânia

12 de março de 2021

### Sequência $r^n$

A sequência  $\{r^n\}$  é **convergente** se  $-1 < r \leq 1$  e **divergente** para os demais valores de  $r$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r \leq 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

# Séries, Sequências e Somas Parciais

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

A  $n$ -ésima **soma parcial**  $s_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

# Convergência de uma Série

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

Dizemos que uma série é **convergente** quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com  $s$  finito.

Por fim, a série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

## Exercício

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à essa sequência

a  $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b  $s_n = \frac{n^2}{n-1}$

## Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad a \neq 0$$

A série geométrica é **convergente** se  $|r| < 1$  e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se  $|r| \geq 1$ ,

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum**  $r$ .

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$r \neq 1$  As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

## Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a  $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$



## Exercício

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o  $n$ -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

## Exercício

Escreva o número  $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$  como uma razão de inteiros (fração).

## Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

## Exercício

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Mostre que é divergente.

### Condição de Convergência

Se a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  for convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

### Teste da Divergência

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existir ou se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

## Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  séries convergentes e  $c$  é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$  é convergente ou divergente expressando  $s_n$  como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma

## Aula 5 - Teste da Integral



## O Teste da Integral

Suponha que  $f$  seja uma função contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$  e seja  $a_n = f(n)$ . Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente se, e somente se, a integral imprópria**

**$\int_1^{\infty} f(x)dx$  for convergente.** Em outras palavras:

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **convergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente**.

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **divergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$  é convergente ou divergente.

A função associada à essa série é  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ . Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais. Além disso  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$ . Veja que  $f'(x) < 0$  para todo  $x > 0$ , ou seja, a função  $f$  é **decrecente** em  $(0, \infty)$ . Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em  $[1, \infty)$ . Desta forma

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sec^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta + 1} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} d\theta\end{aligned}$$

Substituindo  $x = 2 \operatorname{tg} \theta$

Lembre-se que  $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \arctg\left(\frac{n}{2}\right) - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

## Série- $p$

A série- $p$  (série potência)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p \leq 1$ .

Há três casos à considerar:

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$$p = 0$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$$p > 0$$

Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é **contínua** em todo o seu domínio ( $D_f = \mathbb{R}^*$ ). A função é sempre **positiva** e **decrecente** no intervalo  $[1, \infty]$ . Portanto podemos aplicar o **Teste da Integral**. Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$p = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$0 < p < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $0 < p \leq 1$ .

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- $p$**  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p < 1$ .

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  é convergente ou divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$  é convergente ou divergente.



## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$  é convergente ou divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$  é convergente ou divergente.

## Aula 6 - Testes da Comparação: Termo à Termo e com limites

## Teste da comparação termo à termo

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **convergente** e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **convergente**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **divergente** e  $a_n \geq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ .

Note que se trata de uma **série-p** com  $p = 7/6 > 1$ , portanto é uma **série convergente**.

Como  $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando  $n = 1$ , portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo  $n \geq 2$ .

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Note que se trata da **série harmônica**, portanto é uma **série divergente**.

Como  $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$  para todo  $n \geq 2$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é divergente pelo **Teste da**

**Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial  $a = 4/3$  e razão comum  $r = 1/3$ .

Note que  $r < 1$ , então essa série geométrica será **convergente**.

Como  $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente pelo

**Teste da Comparação termo à termo.**



### Teste da comparação com limite

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde  $c$  é um número finito e  $c > 0$ , então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{\ln n}{n}$ . Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ . Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$ . Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  com  $p = 2$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n^2}$ . Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 2n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2/\textcolor{red}{n}^2}{(n^2+2n)/\textcolor{red}{n}^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2/n} = 1
\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$  é convergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ . Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty\end{aligned}$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é divergente.

## Aula 7 - Séries Alternadas

### Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O  $n$ -ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n$$

$$a_n = (-1)^nb_n$$

onde  $b_n$  é um número positivo. Note que  $b_n = |a_n|$ .



## Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz

$$b_{n+1} \leq b_n \text{ para todo } n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

então a série é convergente.

## Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  é convergente.

Note que  $b_n = \frac{1}{n}$ . Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo  $n$ . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

e além disso

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\ &= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1 \end{aligned}$$

para todo  $n$ , ou seja  $b_{n+1} < b_n$  para todo  $n$ . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3 + 4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do **Teste da Série Alternada** está satisfeita.  
Agora veja que

$$b_1 = 1/5 = 0.2$$

$$b_2 = 1/3 = 0.333$$

$$b_3 = 9/31 \approx 0.29032258 \dots$$

$$b_4 = 4/17 \approx 0.235294117 \dots$$

Dessa forma fica claro se a série **não é totalmente decrescente**, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo  $n_0$ . Para verificarmos se existe um  $n_0$  que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à  $b_n$ .

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função  $f(x)$  é decrescente sempre que  $f'(x) < 0$ . Note que  $f'(x)$  será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$

$$x^3 > 8$$

$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo  $n > 2$ , portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do **Teste da Série Alternada** e sua convergência é garantida.

Somando-se  $b_1 = 1/5$  e  $b_2 = 1/3$  à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

## Aula 8 - Testes da Convergência Absoluta, da Razão e da Raiz



### Série Absolutamente Convergente

Uma série  $\sum a_n$  é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos  $\sum |a_n|$  for convergente.

### Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita **condicionalmente convergente** se for convergente mas não for absolutamente convergente.

## Teste da Convergência Absoluta

Se uma série  $\sum a_n$  for absolutamente convergente, então ela é convergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} &= \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots\end{aligned}$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.

Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$\begin{aligned} |\cos(\pi n/3)| &\leq 1 \quad \text{para todo } n \\ \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} &\leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Note que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é uma **série- $p$**  com  $p = 2$ , portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o **Teste da Comparação** nos garante que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$  é convergente.

Dessa forma a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$  é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

## Teste da Razão

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é absolutamente convergente  
(e, portanto, convergente).

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é  
divergente.

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  o Teste da Razão é inconclusivo.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$  é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo **Teste da Razão** a série dada é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

## Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1$$



Nessas condições o **Teste da Razão é inconclusivo!** Dessa forma precisamos recorrer à outros teste para poder responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o **Teste da Comparação** com a **série harmônica**. Como a **série harmônica** é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, conseqüentemente, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é **condicionalmente convergente**.

## Teste da Raiz

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é divergente.

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  o Teste da Raiz é inconclusivo.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$  é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo **Teste da Raiz**. E o **Teste da Convergência Absoluta** nos garante que ela será convergente.

## Aula 9 - Série de Potências

## Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde  $x$  é uma **variável** e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

### Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 [\phi(x)] + c_2 [\phi(x)]^2 + c_3 [\phi(x)]^3 + \dots$$

onde  $\phi$  é uma função de  $x$  e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

### Série de Potências Centrada em $a$

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + c_3 (x - a)^3 + \dots$$

é chamada de série de potências centrada em  $a$ , onde  $x$  é uma **variável** e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$$

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

## Raio de Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , existem apenas três possibilidades:

A série converge apenas quando  $x = a$

A série converge para todo  $x$

Existe um  $R > 0$  tal que a série converge se  $|x - a| < R$  e diverge se  $|x - a| > R$

## Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$$

## Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2 + n^2}$$

# Lista de Exercícios - Aula 9

Determine o intervalo de convergência da série de potências dada:

①  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$

②  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$

③  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

④  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$

⑤  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$

## Aula 10 - Derivação e Integração de Séries de Potências

## Derivação Termo à Termo

Se a série de potências  $\sum_{i=1}^{\infty} (x-a)^n$  tiver um raio de convergência  $R > 0$ , então a função  $f$  definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo  $(a-R, a+R)$  e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \end{aligned}$$

O raio de convergência da série resultante é  $R$ .



## Exercício

Seja  $f$  uma função definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Ache o domínio de  $f$ , escreva a função que define  $f'$  e determine o domínio de  $f'$ .

Considere a **série geométrica** com termo inicial  $a = 1$  e razão comum  $r = x$ . Nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Sempre que  $|x| < 1$ .

Se substituirmos  $x$  por  $-x$  obtemos a **série geométrica alternada** que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1+x}$$

Sempre que  $|x| < 1$ .

## Exercício

Obtenha uma série de potências que represente

$$\frac{1}{(1-x)^2}.$$

## Integração Termo à Termo

Se a série de potências  $\sum_{i=1}^{\infty} (x-a)^n$  tiver um raio de convergência  $R > 0$ , então a função  $f$  definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo  $(a-R, a+R)$  e

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

O raio de convergência da série resultante é  $R$ .

## Exercício

Seja  $f$  uma função definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Ache o domínio de  $f$ , escreva a função que define  $\int f(x)dx$  e determine seu domínio.

## Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para  $\ln(1 + x)$ .

## Lista de Exercícios - Aula 10

Para as seguintes funções  $f(x)$  encontre a série de potência que representa  $f'(x)$  e determine o seu raio de convergência.

①  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

②  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$

---

③ Ache a representação em séries de potências para a integral  $\int_0^x \frac{dt}{t^2+4}$  e determine o seu raio de convergência.

④ Calcule com precisão de até três casas decimais o valor da integral  $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+4}$ .

⑤ Determine o intervalo de convergência da série de potências dada:  $\int_0^{1/2} e^{-x^3} dx$

## Aula 11 - Séries de Taylor e Maclaurin



## Existência de representação em séries de potências

Se  $f$  tiver uma representação em série de potências em  $a$ , isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

## Série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots$$

## Polinômio de Taylor

$$T_k = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

## Série de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

### Convergência da Série de Taylor

Se  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ , onde  $T_n$  é o polinômio de Taylor de  $n$ -ésimo grau de  $f$  em  $a$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

para  $|x - a| < R$ , então  $f$  é igual à soma da sua série de Taylor no intervalo  $|x - a| < R$ .

### Desigualdade de Taylor

Se  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  para  $|x - a| \leq d$ , então o resto  $R_n(x)$  da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}$$

para  $|x - a| \leq d$ .

### Limite frequentemente utilizado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \text{ real}$$

## Exercício

Encontre a série de MacLaurin para  $e^x$  e mostre que sua soma é igual à  $e^x$ .

## Exercício

Encontre a série de Taylor para  $\sin x$  centrada em  $a$  e mostre que sua soma é igual à  $\sin x$ .

# Lista de Exercícios - Aula 11

Ache uma representação em série de MacLaurin para as funções dadas e determine o raio de convergência.

①  $f(x) = \cos \pi x$

②  $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$

③  $f(x) = e^{-(x-1)^2}$

Ache uma representação em série de potências centrada em  $a$  para as funções dadas e determine o raio de convergência.

④  $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad a = 8$

⑤  $f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad a = 1$

## Aula 12 - Série Binomial



### Teorema Binomial

Se  $m$  for um número real qualquer, então

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \quad (2)$$

para todos os valores de  $x$ , tais que  $|x| < 1$ .

## Exercício

Encontre uma uma série de potências de  $x$  para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

e use essa série para obter uma série de potências de  $x$  para

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e por fim encontre uma série para  $\sin^{-1} x$ .

## Lista de Exercícios - Aula 12

Use a série binomial para encontrar a série de MacLaurin para a função dada e determine seu raio de convergência:

①  $f(x) = (3 - x)^{-2}$

②  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

③  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Calcule com precisão de até três casas decimais de precisão, o valor da integral definida (use alguma técnica baseada em séries de potência):

④  $\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3} dx$

⑤  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

## Aula 13 - Funções de duas variáveis

### Função $f$ de duas variáveis

Uma função  $f$  de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais  $(x, y)$  de um conjunto  $D$  um único valor real denotado por  $f(x, y)$ . O conjunto  $D$  é o **domínio** de  $f$  e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de  $f$ , ou seja,  $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$ .

### Gráfico de uma função de duas variáveis

Se  $f$  é uma função de duas variáveis com domínio  $D$ , então seu **gráfico** é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $z = f(x, y)$  e  $(x, y)$  pertença a  $D$ .

## Curvas de nível

As **curvas de nível** de uma função de duas variáveis são aquelas com equação  $f(x, y) = k$ , onde  $k$  é uma constante (na imagem de  $f$ ).

## Exercício

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a calcule  $f(1, 1)$
- b encontre seu domínio e sua imagem;
- c descreva as equações das curvas de nível;
- d esboce algumas de suas curvas de nível;
- e determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

1  $f(x, y) = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-1}$

2  $f(x, y) = \ln(\sqrt{4-x^2-y^2})$

3  $f(x, y) = \ln(x+y)$

4  $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x-y+2}}{y}$

5  $f(x, y) = \frac{\ln(2-x)}{1-x^2-y^2}$

6  $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{x-y}$



# Lista de Exercícios - Aula 13

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a) encontre seu domínio e sua imagem;
- b) descreva as equações das curvas de nível;
- c) esboce algumas de suas curvas de nível;
- d) esboce o gráfico da função;
- e) determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f) decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

---

1  $f(x, y) = y - x$

2  $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

3  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

4  $f(x, y) = x^2 - y^2$

5  $f(x, y) = xy$

## Aula 14 - Funções de duas variáveis

# Lista de Exercícios - Aula 14

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a) encontre seu domínio e sua imagem;
- b) descreva as equações das curvas de nível;
- c) esboce algumas de suas curvas de nível;
- d) esboce o gráfico da função;
- e) determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f) decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

---

1  $f(x, y) = y/x^2$

2  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

3  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

4  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

5  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

## Aula 15 - Limites de funções de duas variáveis

### Limite de uma função $f$ de duas variáveis

Seja  $f$  uma função de duas variáveis cujo domínio  $D$  contém pontos arbitrariamente próximos de  $(a, b)$ . Dizemos que o limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y) \in D$  tende à  $(a, b)$  é  $L$  e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

Se para todo  $\epsilon > 0$  houver um número correspondente de  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Se  $f(x, y) \rightarrow L_1$  quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  ao longo do caminho  $C_1$  e  $f(x, y) \rightarrow L_2$  quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  ao longo do caminho  $C_2$ , com  $L_1 \neq L_2$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$  não existe.

## Propriedade dos limites de funções de duas variáveis

As regras a seguir são verdadeiras se  $L$ ,  $M$  e  $k$  forem números reais e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

- ①  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$
- ②  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$  para todo número  $k$
- ③  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$
- ④  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$  para todo número  $M \neq 0$
- ⑤  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n$  para todo número  $n$  inteiro positivo
- ⑥  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$  para todo número  $n$  inteiro positivo, e, se  $n$  for par, assumimos que  $L > 0$

## Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

## Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2}$$



## Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$$

Se investigarmos o comportamento desse limite por diferentes caminhos veremos que ele sempre será 0, mas isso não significa que o limite será 0 para todos os (infinitos) caminhos possíveis. Considere um  $\epsilon > 0$  dado, mas arbitrário. Desejamos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

ou

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} < \epsilon$$

Note que  $y^2 \leq x^2 + y^2 \implies \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ , portanto

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, escolhendo  $\delta = \frac{\epsilon}{4}$  e fizermos  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta$ , obtemos

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon$$

A partir dessa definição, sabemos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

## Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$$

# Lista de Exercícios - Aula 15

Calcule os seguintes limites, se existirem

$$\textcircled{1} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} 3x^2 + xy - 2y^2$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{e^{2x} + e^{2y}}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^4}$$

## Aula 16 - Continuidade de funções de duas variáveis

## Continuidade de uma função $f$ de duas variáveis

Uma função  $f$  de duas variáveis é dita contínua em  $(a, b)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que  $f$  é contínua em  $D$  se  $f$  for contínua em todo ponto  $(a, b)$  de  $D$ .

## Exercício

Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

É contínua em todo o ponto exceto na origem.

Dica: Considere os caminhos ao longo das retas furadas  $y = mx$ ,  $x \neq 0$ .



## Exercício

Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

É contínua em todo o ponto exceto na origem.

Dica: Considere os caminhos ao longo das parábolas furadas  $y = mx^2$ ,  $x \neq 0$ .

# Lista de Exercícios - Aula 16

Determine todos os pontos nos quais  $f$  é contínua.

$$\textcircled{1} \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = \ln xy^2$$

$$\textcircled{3} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x, y) = (x + y) \operatorname{sen} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

## Aula 17 - Derivadas Parciais

Derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  em  $(a, b)$  pode ser definida como:

$$f_x(a, b) = g'(a) \quad \text{onde} \quad g(x) = f(x, b)$$

Formalmente a definição é dada por:

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

## Derivadas Parciais

Se  $f$  é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções  $f_x$  e  $f_y$  definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

## Derivadas de Ordem Superior

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

## Teorema de Clairaut

Suponha que  $f$  seja definida numa bola aberta  $D$  que contenha o ponto  $(a, b)$ . Se as funções  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  forem ambas contínuas em  $D$ , então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

## Exercício

Encontre os valores de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  no ponto  $(4, -5)$  se  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$ .

## Exercício

Encontre  $\frac{\partial f}{\partial y}$  se  $f(x, y) = y \sen xy$ .



## Exercício

Encontre  $f_x$  e  $f_y$  como funções se  $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$ .

## Lista de Exercícios - Aula 17

Nos seguintes exercícios encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$

①  $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$

②  $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

③  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

④  $f(x, y) = x^y$

## Aula 18 - Derivadas Parciais

# Lista de Exercícios - Aula 18

Nos seguintes exercícios encontre  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$

①  $f(x, y) = \log_y x$

②  $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$

③  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

④  $f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x}{y} \right)$

## Aula 19 - Planos Tangentes

### Equação do Plano Tangente à Superfície

Suponha que  $f$  tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície  $z = f(x, y)$  no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

### Exercício

Determine uma equação no plano tangente à superfície  $z = 2x^2 + y^2 - 5y$  no ponto  $(1, 2)$ .

### Função Diferenciável

Se  $z = f(x, y)$ , então  $f$  é diferenciável no ponto  $(a, b)$  se  $\Delta z$  puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ .

### Diferenciabilidade implica Continuidade

Se as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existirem perto do ponto  $(a, b)$  e forem contínuas em  $(a, b)$ , então  $f$  é contínua em  $(a, b)$ .

### Diferenciação Total

Se  $z = f(x, y)$  a diferenciação total  $dz$  será definida como:

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

onde  $dx$  e  $dy$  são variáveis independentes.



### Exercício

Se  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 5y$  determine a diferencial  $dz$ . Se  $x$  varia de 2 para 2,05 e  $y$  varia de 3 para 2,96, compare os valores de  $\Delta z$  e  $dz$ .

## Lista de Exercícios - Aula 19

Nos seguintes exercícios determine a diferencial total e apresente uma equação para o plano tangente à superfície no ponto especificado:

①  $z = 2x^2 + y^3 - 3y$ ,  $(1, 2)$

②  $z = \exp(x + 2xy)$ ,  $(-1, 2)$

③  $z = y \operatorname{sen} x$ ,  $(\pi/2, 1)$

④  $z = \sqrt{x + 2y}$ ,  $(2, 1)$

## Aula 20 - A Regra da Cadeia

### Regra da Cadeia - Caso 1

Suponha que  $z = f(x, y)$  seja uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(t)$  e  $y = h(t)$  são funções diferenciáveis de  $t$ . Então  $z$  é uma função diferenciável de  $t$  e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

## Exercício

Determine  $\frac{\partial z}{\partial t}$  se  $z = xy^3 - x^2y$ ,  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^2 - 1$

## Regra da Cadeia - Caso 2

Suponha que  $z = f(x, y)$  seja uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(s, t)$  e  $y = h(s, t)$  são funções diferenciáveis de  $s$  e  $t$ . Então:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

## Exercício

Determine  $\frac{\partial z}{\partial s}$  e  $\frac{\partial z}{\partial t}$  se  $z = (x - y)^5$ ,  $x = s^2t$ ,  $y = st^2$

### Regra da Cadeia - Caso Geral

Suponha que  $u$  seja uma função diferenciável de  $n$  variáveis seja uma função diferenciável de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  onde cada  $x_j$  é uma função diferencial de  $m$  variáveis  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Então  $u$  é uma função de  $t_1, t_2, \dots, t_m$  e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ .



## Exercício

Determine  $\frac{\partial z}{\partial s}$  e  $\frac{\partial z}{\partial t}$  se  $z = \ln(3x + 2y)$ ,  $x = s \operatorname{sen} t$ ,  $y = t \cos s$

## Lista de Exercícios - Aula 20

Nos seguintes exercícios expresse  $dw/dt$  como uma função de  $t$ , utilizando a regra da cadeia, expressando  $w$  em termos de  $t$  e diferenciando diretamente com relação a  $t$ . Em seguida calcule  $dw/dt$  no valor dado de  $t$ .

①  $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t; \quad t = 0$

②  $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t}; \quad t = 3$

Nos seguintes exercícios expresse  $dz/du$  e  $dz/dv$  como uma função de  $u$  e  $v$ , utilizando a regra da cadeia, expressando  $z$  em termos de  $u$  e  $v$  diferenciando diretamente com relação a  $t$ . Em seguida calcule  $dz/du$  e  $dz/dv$  no valor dado de  $(u, v)$ .

③  $w = 4e^x \ln y, \quad x = \ln(u \cos v), \quad y = u \sin v; \quad (u, v) = (2, \pi/4)$

④  $w = \operatorname{tg}^{-1}(x/y), \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v; \quad (u, v) = (13/10, \pi/6)$

## Aula 21 - Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

## Derivada Direcionada

A **derivada direcionada** de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

### Derivada Direcional

Se  $f$  é uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , então  $f$  tem derivada direcional na direção de qualquer vetor  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  e

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se o vetor unitário  $\mathbf{u}$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  positivo, então podemos escrever  $\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$  e a fórmula anterior pode ser escrita como.

### Derivada direcional com ângulo $\theta$

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

## Exercício

Encontre a derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$  se

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y^2$$

e  $\mathbf{u}$  é o vetor unitário dado pelo ângulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Qual será  $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ ?

## Gradiente

Se  $f$  é uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , então o gradiente de  $f$  é a função vetorial  $\nabla f$  definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

Usando essa definição de gradiente é possível reescrever a derivada direcional de uma função diferenciável como o **produto escalar** do **vetor gradiente** pelo **vetor unitário  $\mathbf{u}$** .

## Derivada Direcional na direção do vetor $\mathbf{u}$

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

### Exercício

Determine a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2y^2 - 4y$  no ponto  $(2, -1)$  da direção do vetor  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ .



### Exercício

Determine a derivada direcional da função  $f(x, y) = e^x \sin y$  no ponto  $(0, \pi/3)$  da direção do vetor  $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$ .

## Exercício

Determine a derivada direcional da função  $f(s, t) = s\sqrt{t}$  no ponto  $(2, 4)$  da direção do vetor  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ .

## Exercício

Determine a derivada direcional da função  $f(u, v) = u^2 e^{-v}$  no ponto  $(3, 0)$  da direção do vetor  $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ .

## Lista de Exercícios - Aula 21

Determine a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P(x_0, y_0)$  dado e na direção indicada pelo ângulo  $\theta$ .

①  $f(x, y) = xy^2 - x^2y, \quad P(1, 2), \quad \theta = \pi/2.$

②  $f(x, y) = y \operatorname{sen}(x/y), \quad P(0, 1), \quad \theta = \pi/3.$

Determine a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P(x_0, y_0)$  dado e na direção do vetor  $\mathbf{v}$ .

③  $f(x, y) = \exp(1 - x) \operatorname{sen}(x + y), \quad P(0, \pi/3), \quad \mathbf{v} = \langle -3, 4 \rangle.$

④  $f(u, v) = u^2 e^{-v}, \quad P(3, 0), \quad \mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle.$

## Aula 22 - Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

### Maximizando a derivada direcional

Suponha que  $f$  seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$  é  $|\nabla f(\mathbf{x})|$  ocorre quando  $\mathbf{u}$  tem a mesma direção do vetor gradiente  $\nabla f(\mathbf{x})$ .

## Exercício

Determine a taxa de variação máxima de  $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$  no ponto  $(4, 1)$  e a direção em que isso ocorre.

## Exercício

Determine a taxa de variação máxima de  $f(x, y) = \sin xy$  no ponto  $(1, 0)$  e a direção em que isso ocorre.



## Exercício

Determine a taxa de variação máxima de  $f(x, y, z) = \frac{x}{x+z}$  no ponto  $(8, 1, 3)$  e a direção em que isso ocorre.

## Exercício

Determine a taxa de variação máxima de  $f(x, y, z) = x \ln yz$  no ponto  $(1, 2, 1/3)$  e a direção em que isso ocorre.

## Lista de Exercícios - Aula 22

Determine a taxa de variação máxima de  $f$  no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

①  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad (1, 4)$

②  $f(x, y) = \cos(xy), \quad (\pi/2, 1)$

③  $f(x, y) = \log_x y, \quad (2, 4)$

④  $f(x, y) = \frac{x}{x+y}, \quad (1, 2)$

## Aula 23 - Valores máximo e mínimo

### Máximos Locais

Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em  $(a, b)$  se  $f(x, y) \leq f(a, b)$  quando  $(x, y)$  está próximo de  $(a, b)$ . O número  $f(a, b)$  é chamado **valor máximo local**.

### Mínimos Locais

Uma função de duas variáveis tem um **mínimo local** em  $(a, b)$  se  $f(x, y) \geq f(a, b)$  quando  $(x, y)$  está próximo de  $(a, b)$ . O número  $f(a, b)$  é chamado **valor mínimo local**.

Se as inequações das definições anteriores valerem para todos os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$ , então  $f$  tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em  $(a, b)$ .

### Condição para ser máximo e mínimo local

Se  $f$  tem um máximo ou mínimo local em  $(a, b)$  e as derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  existem nesses pontos, então  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$ .

### Ponto crítico

Um ponto  $(a, b)$  é chamado **ponto crítico** de  $f$  se  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$ , ou se uma das derivadas parciais não existir.

Todos os máximos e mínimos locais são pontos críticos, mas nem todos os pontos críticos são máximos e mínimos locais.

## Teste da Segunda Derivada

Suponha que as segundas derivadas parciais de  $f$  sejam contínuas em uma bola aberta com centro em  $(a, b)$ , e suponha que  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$  [ou seja,  $(a, b)$  é um ponto crítico de  $f$ ]. Seja

$$D = D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{yx}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) > 0$ , então  $f(a, b)$  é um mínimo local.

Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) < 0$ , então  $f(a, b)$  é um máximo local.

Se  $D < 0$ , então  $f(a, b)$  não é mínimo local nem máximo local (ponto de sela).

## Exercício

Seja  $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$ . Determine os valores máximo e mínimo locais e os pontos de sela da função.



### Exercício

Seja  $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$ . Determine os valores máximo e mínimo locais e os pontos de sela da função.

## Exercício

Seja  $f(x, y) = y(e^x - 1)$ . Determine os valores máximo e mínimo locais e os pontos de sela da função.

### Exercício

Seja  $f(x, y) = 2 - x^4 + 2x^2 - y^2$ . Determine os valores máximo e mínimo locais e os pontos de sela da função.

## Lista de Exercícios - Aula 23

Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

①  $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

②  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$

③  $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$

④  $f(x, y) = e^x \sin y$

## Aula 24 - Teorema do Valor Extremo para Funções de Duas Variáveis

### Teorema do Valor Extremo

Se  $f$  é contínua em um conjunto fechado e limitado  $D$  em  $\mathbb{R}^2$ , então  $f$  assume um valor máximo absoluto  $f(x_1, y_1)$  e um valor mínimo absoluto  $f(x_2, y_2)$  em alguns pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  de  $D$ .

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua  $f$  em um conjunto fechado e limitado  $D$ :

- 1 Determine os valores de  $f$  nos pontos críticos de  $f$  em  $D$ .
- 2 Determine os valores extremos de  $f$  na fronteira de  $D$ .
- 3 O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto/ o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

## Exercício

Determine os valores máximo e mínimo de  $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 2x - 4y + 1$ , na  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$ .

### Exercício

Determine os valores máximo e mínimo de  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$  na região triangular fechada com vértices  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(0, -2)$ .



## Lista de Exercícios - Aula 24

- ① Determine o ponto do plano  $x - 2y + 3z = 5$  que está mais próximo do ponto  $(1, 0, 1)$ .

Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

- ②  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ ,  $D$  é a região triangular fechada com vértices  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$  e  $(0, -3)$ .
- ③  $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$
- ④  $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$ ,  $D$  é o quadrilátero cujos vértices são  $(-2, 3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 2)$  e  $(-2, 2)$ .

## Aula 25 - Multiplicadores de Lagrange

## Lista de Exercícios - Aula 25

- ① Encontre os pontos na elipse  $x^2 + 2y^2 = 1$  onde  $f(x, y) = xy$  tem seus valores extremos.
- ② Encontre os valores extremos de  $f(x, y) = xy$  sujeitos à restrição  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$ .
- ③ Encontre os valores máximo de  $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$  na reta  $x + 3y = 10$ .
- ④ Encontre os valores locais de  $f(x, y) = x^2y$  na reta  $x + y = 3$ .
- ⑤ Encontre os pontos da curva  $x^2 + xy + y^2 = 1$  no plano  $xy$  que estão mais próximos e mais distantes da origem.
- ⑥ Encontre as dimensões da lata cilíndrica circular reta fechada de menos área de superfície cujo volume seja  $16\pi\text{cm}^3$ .
- ⑦ Encontre os valores máximo e mínimo de  $3x - y + 6$  sujeitos à restrição  $x^2 + y^2 = 4$ .
- ⑧ O valor máximo de  $xy$ , sujeito à restrição  $x + y = 16$ .