

# Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto

`thiago.vedovatto@ifg.edu.br`

`thiagovedovatto.site`

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Campus de Goiânia

19 de janeiro de 2021

### Sequência $r^n$

A sequência  $\{r^n\}$  é **convergente** se  $-1 < r \leq 1$  e **divergente** para os demais valores de  $r$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r \leq 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

# Séries, Sequências e Somas Parciais

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

A  $n$ -ésima **soma parcial**  $s_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

# Convergência de uma Série

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

Dizemos que uma série é **convergente** quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com  $s$  finito.

Por fim, a série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

## Exercício

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à essa sequência

a  $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b  $s_n = \frac{n^2}{n-1}$

## Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad a \neq 0$$

A série geométrica é **convergente** se  $|r| < 1$  e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se  $|r| \geq 1$ ,

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum**  $r$ .

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$r \neq 1$  As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

## Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a  $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$$



## Exercício

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o  $n$ -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

## Exercício

Escreva o número  $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$  como uma razão de inteiros (fração).

## Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

## Exercício

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Mostre que é divergente.

### Condição de Convergência

Se a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  for convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

### Teste da Divergência

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existir ou se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

## Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  séries convergentes e  $c$  é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$  é convergente ou divergente expressando  $s_n$  como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma

## Aula 5 - Teste da Integral



## O Teste da Integral

Suponha que  $f$  seja uma função contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$  e seja  $a_n = f(n)$ . Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente se, e somente se, a integral imprópria**

**$\int_1^{\infty} f(x)dx$  for convergente.** Em outras palavras:

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **convergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente**.

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **divergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$  é convergente ou divergente.

A função associada à essa série é  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ . Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais. Além disso  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$ . Veja que  $f'(x) < 0$  para todo  $x > 0$ , ou seja, a função  $f$  é **decrecente** em  $(0, \infty)$ . Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em  $[1, \infty)$ . Desta forma

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sec^2 \theta}{\tg^2 \theta + 1} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} d\theta\end{aligned}$$

Substituindo  $x = 2 \tg \theta$

Lembre-se que  $\tg^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \arctg\left(\frac{n}{2}\right) - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

## Série- $p$

A série- $p$  (série potência)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p \leq 1$ .

Há três casos à considerar:

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$$p = 0$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$$p > 0$$

Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é **contínua** em todo o seu domínio ( $D_f = \mathbb{R}^*$ ). A função é sempre **positiva** e **decrecente** no intervalo  $[1, \infty]$ . Portanto podemos aplicar o **Teste da Integral**. Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$p = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$0 < p < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $0 < p \leq 1$ .

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- $p$**  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p < 1$ .

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  é convergente ou divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$  é convergente ou divergente.



## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$  é convergente ou divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$  é convergente ou divergente.

## Aula 6 - Testes da Comparação: Termo à Termo e com limites

## Teste da comparação termo à termo

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **convergente** e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **convergente**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **divergente** e  $a_n \geq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ .

Note que se trata de uma **série-p** com  $p = 7/6 > 1$ , portanto é uma **série convergente**.

Como  $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando  $n = 1$ , portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo  $n \geq 2$ .

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Note que se trata da **série harmônica**, portanto é uma **série divergente**.

Como  $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$  para todo  $n \geq 2$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é divergente pelo **Teste da**

**Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial  $a = 4/3$  e razão comum  $r = 1/3$ .

Note que  $r < 1$ , então essa série geométrica será **convergente**.

Como  $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente pelo

**Teste da Comparação termo à termo.**



### Teste da comparação com limite

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde  $c$  é um número finito e  $c > 0$ , então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{\ln n}{n}$ . Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ . Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$ . Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  com  $p = 2$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n^2}$ . Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 2n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2/\textcolor{red}{n}^2}{(n^2+2n)/\textcolor{red}{n}^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2/n} = 1
\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$  é convergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ . Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty\end{aligned}$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é divergente.

## Aula 7 - Séries Alternadas

### Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O  $n$ -ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n$$

$$a_n = (-1)^nb_n$$

onde  $b_n$  é um número positivo. Note que  $b_n = |a_n|$ .



## Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz

$$b_{n+1} \leq b_n \text{ para todo } n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

então a série é convergente.

## Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  é convergente.

Note que  $b_n = \frac{1}{n}$ . Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo  $n$ . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

e além disso

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\ &= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1 \end{aligned}$$

para todo  $n$ , ou seja  $b_{n+1} < b_n$  para todo  $n$ . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3 + 4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do **Teste da Série Alternada** está satisfeita. Agora veja que

$$b_1 = 1/5 = 0.2$$

$$b_2 = 1/3 = 0.333$$

$$b_3 = 9/31 \approx 0.29032258 \dots$$

$$b_4 = 4/17 \approx 0.235294117 \dots$$

Dessa forma fica claro se a série **não é totalmente decrescente**, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo  $n_0$ . Para verificarmos se existe um  $n_0$  que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à  $b_n$ .

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função  $f(x)$  é decrescente sempre que  $f'(x) < 0$ . Note que  $f'(x)$  será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$

$$x^3 > 8$$

$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo  $n > 2$ , portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do **Teste da Série Alternada** e sua convergência é garantida.

Somando-se  $b_1 = 1/5$  e  $b_2 = 1/3$  à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

## Aula 8 - Testes da Convergência Absoluta, da Razão e da Raiz



### Série Absolutamente Convergente

Uma série  $\sum a_n$  é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos  $\sum |a_n|$  for convergente.

### Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita **condicionalmente convergente** se for convergente mas não for absolutamente convergente.

## Teste da Convergência Absoluta

Se uma série  $\sum a_n$  for absolutamente convergente, então ela é convergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} &= \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots\end{aligned}$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.

Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$\begin{aligned} |\cos(\pi n/3)| &\leq 1 \quad \text{para todo } n \\ \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} &\leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Note que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é uma **série- $p$**  com  $p = 2$ , portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o **Teste da Comparação** nos garante que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$  é convergente.

Dessa forma a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$  é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

## Teste da Razão

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é divergente.

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  o Teste da Razão é inconclusivo.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$  é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo **Teste da Razão** a série dada é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

## Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1$$



Nessas condições o **Teste da Razão é inconclusivo!** Dessa forma precisamos recorrer à outros teste para poder responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o **Teste da Comparação** com a **série harmônica**. Como a **série harmônica** é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, conseqüentemente, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é **condicionalmente convergente**.

## Teste da Raiz

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é divergente.

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  o Teste da Raiz é inconclusivo.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$  é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo **Teste da Raiz**. E o **Teste da Convergência Absoluta** nos garante que ela será convergente.

## Aula 9 - Série de Potências

## Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde  $x$  é uma **variável** e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

### Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 [\phi(x)] + c_2 [\phi(x)]^2 + c_3 [\phi(x)]^3 + \cdots$$

onde  $\phi$  é uma função de  $x$  e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

### Série de Potências Centrada em $a$

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + c_3 (x - a)^3 + \cdots$$

é chamada de série de potências centrada em  $a$ , onde  $x$  é uma **variável** e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$$

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

## Raio de Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , existem apenas três possibilidades:

A série converge apenas quando  $x = a$

A série converge para todo  $x$

Existe um  $R > 0$  tal que a série converge se  $|x - a| < R$  e diverge se  $|x - a| > R$

## Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$$

## Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2 + n^2}$$

# Lista de Exercícios - Aula 9

Determine o intervalo de convergência da série de potências dada:

① 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

② 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$$

③ 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

④ 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$$

⑤ 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

## Aula 10 - Representação de Séries de Potências

## Lista de Exercícios - Aula 10

Para as seguintes funções  $f(x)$  encontre a série de potência que representa  $f'(x)$  e determine o seu raio de convergência.

①  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2}$

②  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$

---

③ Ache a representação em séries de potências para a integral  $\int_0^x \frac{dt}{t^2+4}$  e determine o seu raio de convergência.

④ Calcule com precisão de até três casas decimais o valor da integral  $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+4}$ .

⑤ Determine o intervalo de convergência da série de potências dada:  $\int_0^{1/2} e^{-x^3} dx$