

Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto

thiago.vedovatto@ifg.edu.br

thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

4 de março de 2021

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é **convergente** se $-1 < r \leq 1$ e **divergente** para os demais valores de r .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r \leq 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

Séries, Sequências e Somas Parciais

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

A n -ésima **soma parcial** s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

Convergência de uma Série

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

Dizemos que uma série é **convergente** quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com s finito.

Por fim, a série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à essa sequência

a $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b $s_n = \frac{n^2}{n-1}$

Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad a \neq 0$$

A série geométrica é **convergente** se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se $|r| \geq 1$,

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum** r .

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$r \neq 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Exercício

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$ como uma razão de inteiros (fração).

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Mostre que é divergente.

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma

Aula 5 - Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente se, e somente se, a integral imprópria**

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **convergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente**.

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **divergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ é convergente ou divergente.

A função associada à essa série é $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$. Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais. Além disso $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$. Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é **decrecente** em $(0, \infty)$. Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em $[1, \infty)$. Desta forma

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sec^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta + 1} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} d\theta\end{aligned}$$

Substituindo $x = 2 \operatorname{tg} \theta$

Lembre-se que $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctg(1/2)}^{\arctg(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arctg\left(\frac{n}{2}\right) - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

Série- p

A série- p (série potência) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar:

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$$p = 0$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$$p > 0$$

Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é **contínua** em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R}^*$). A função é sempre **positiva** e **decrecente** no intervalo $[1, \infty]$. Portanto podemos aplicar o **Teste da Integral**. Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$p = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$0 < p < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- p** é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Aula 6 - Testes da Comparação: Termo à Termo e com limites

Teste da comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com **termos positivos**.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for **convergente** e $a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será **convergente**.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for **divergente** e $a_n \geq b_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será **divergente**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma **série- p** com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma **série convergente**.

Como $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$ é convergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Note que se trata da **série harmônica**, portanto é uma **série divergente**.

Como $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo **Teste da**

Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = 4/3$ e razão comum $r = 1/3$.

Note que $r < 1$, então essa série geométrica será **convergente**.

Como $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente pelo

Teste da Comparação termo à termo.

Teste da comparação com limite

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com **termos positivos**. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$. Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n^2}$. Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 2n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2/\textcolor{red}{n}^2}{(n^2+2n)/\textcolor{red}{n}^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2/n} = 1
\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$. Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty\end{aligned}$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Aula 7 - Séries Alternadas

Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O n -ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n$$

$$a_n = (-1)^nb_n$$

onde b_n é um número positivo. Note que $b_n = |a_n|$.

Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz

$$b_{n+1} \leq b_n \text{ para todo } n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

então a série é convergente.

Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é convergente.

Note que $b_n = \frac{1}{n}$. Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo n . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

e além disso

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\ &= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1 \end{aligned}$$

para todo n , ou seja $b_{n+1} < b_n$ para todo n . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3 + 4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do **Teste da Série Alternada** está satisfeita. Agora veja que

$$b_1 = 1/5 = 0.2$$

$$b_2 = 1/3 = 0.333$$

$$b_3 = 9/31 \approx 0.29032258 \dots$$

$$b_4 = 4/17 \approx 0.235294117 \dots$$

Dessa forma fica claro se a série **não é totalmente decrescente**, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo n_0 . Para verificarmos se existe um n_0 que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à b_n .

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função $f(x)$ é decrescente sempre que $f'(x) < 0$. Note que $f'(x)$ será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$

$$x^3 > 8$$

$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo $n > 2$, portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do **Teste da Série Alternada** e sua convergência é garantida.

Somando-se $b_1 = 1/5$ e $b_2 = 1/3$ à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

Aula 8 - Testes da Convergência Absoluta, da Razão e da Raiz

Série Absolutamente Convergente

Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita **condicionalmente convergente** se for convergente mas não for absolutamente convergente.

Teste da Convergência Absoluta

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} &= \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots\end{aligned}$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.

Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$\begin{aligned} |\cos(\pi n/3)| &\leq 1 \quad \text{para todo } n \\ \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} &\leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma **série- p** com $p = 2$, portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o **Teste da Comparação** nos garante que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$ é convergente.

Dessa forma a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

Teste da Razão

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ o Teste da Razão é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo **Teste da Razão** a série dada é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1$$

Nessas condições o **Teste da Razão é inconclusivo!** Dessa forma precisamos recorrer à outros teste para poder responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o **Teste da Comparação** com a **série harmônica**. Como a **série harmônica** é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, conseqüentemente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é **condicionalmente convergente**.

Teste da Raiz

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o Teste da Raiz é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo **Teste da Raiz**. E o **Teste da Convergência Absoluta** nos garante que ela será convergente.

Aula 9 - Série de Potências

Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma **variável** e c_n são constantes chamadas **coeficientes da série**.

Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 [\phi(x)] + c_2 [\phi(x)]^2 + c_3 [\phi(x)]^3 + \dots$$

onde ϕ é uma função de x e c_n são constantes chamadas **coeficientes da série**.

Série de Potências Centrada em a

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + c_3 (x - a)^3 + \dots$$

é chamada de série de potências centrada em a , onde x é uma **variável** e c_n são constantes chamadas **coeficientes da série**.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$$

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

Raio de Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

A série converge apenas quando $x = a$

A série converge para todo x

Existe um $R > 0$ tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$$

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2 + n^2}$$

Lista de Exercícios - Aula 9

Determine o intervalo de convergência da série de potências dada:

$$① \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

$$② \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$$

$$⑤ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

Aula 10 - Derivação e Integração de Séries de Potências

Derivação Termo à Termo

Se a série de potências $\sum_{i=1}^{\infty} (x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \end{aligned}$$

O raio de convergência da série resultante é R .

Exercício

Seja f uma função definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Ache o domínio de f , escreva a função que define f' e determine o domínio de f' .

Considere a **série geométrica** com termo inicial $a = 1$ e razão comum $r = x$. Nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Sempre que $|x| < 1$.

Se substituirmos x por $-x$ obtemos a **série geométrica alternada** que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1+x}$$

Sempre que $|x| < 1$.

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente

$$\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Integração Termo à Termo

Se a série de potências $\sum_{i=1}^{\infty} (x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

O raio de convergência da série resultante é R .

Exercício

Seja f uma função definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Ache o domínio de f , escreva a função que define $\int f(x)dx$ e determine seu domínio.

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\ln(1 + x)$.

Lista de Exercícios - Aula 10

Para as seguintes funções $f(x)$ encontre a série de potência que representa $f'(x)$ e determine o seu raio de convergência.

① $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

② $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$

③ Ache a representação em séries de potências para a integral $\int_0^x \frac{dt}{t^2+4}$ e determine o seu raio de convergência.

④ Calcule com precisão de até três casas decimais o valor da integral $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+4}$.

⑤ Determine o intervalo de convergência da série de potências dada: $\int_0^{1/2} e^{-x^3} dx$

Aula 11 - Séries de Taylor e Maclaurin

Existência de representação em séries de potências

Se f tiver uma representação em série de potências em a , isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots$$

Polinômio de Taylor

$$T_k = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Série de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Convergência da Série de Taylor

Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n -ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x-a| < R$, então f é igual à soma da sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

Desigualdade de Taylor

Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

para $|x-a| \leq d$.

Limite frequentemente utilizado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \text{ real}$$

Exercício

Encontre a série de MacLaurin para e^x e mostre que sua soma é igual à e^x .

Exercício

Encontre a série de Taylor para $\sin x$ centrada em a e mostre que sua soma é igual à $\sin x$.

Lista de Exercícios - Aula 11

Ache uma representação em série de MacLaurin para as funções dadas e determine o raio de convergência.

① $f(x) = \cos \pi x$

② $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$

③ $f(x) = e^{-(x-1)^2}$

Ache uma representação em série de potências centrada em a para as funções dadas e determine o raio de convergência.

④ $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad a = 8$

⑤ $f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad a = 1$

Aula 12 - Série Binomial

Teorema Binomial

Se m for um número real qualquer, então

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \quad (2)$$

para todos os valores de x , tais que $|x| < 1$.

Exercício

Encontre uma uma série de potências de x para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

e use essa série para obter uma série de potências de x para

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e por fim encontre uma série para $\sin^{-1} x$.

Lista de Exercícios - Aula 12

Use a série binomial para encontrar a série de MacLaurin para a função dada e determine seu raio de convergência:

① $f(x) = (3 - x)^{-2}$

② $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

③ $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Calcule com precisão de até três casas decimais de precisão, o valor da integral definida (use alguma técnica baseada em séries de potência):

④ $\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3} dx$

⑤ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Aula 13 - Funções de duas variáveis

Função f de duas variáveis

Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$.

Gráfico de uma função de duas variáveis

Se f é uma função de duas variáveis com domínio D , então seu **gráfico** é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em \mathbb{R}^3 tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D .

Curvas de nível

As **curvas de nível** de uma função de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Exercício

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a) calcule $f(1, 1)$
- b) encontre seu domínio e sua imagem;
- c) descreva as equações das curvas de nível;
- d) esboce algumas de suas curvas de nível;
- e) determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f) decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

1 $f(x, y) = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-1}$

2 $f(x, y) = \ln(\sqrt{4-x^2-y^2})$

3 $f(x, y) = \ln(x+y)$

4 $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x-y+2}}{y}$

5 $f(x, y) = \frac{\ln(2-x)}{1-x^2-y^2}$

6 $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{x-y}$

Lista de Exercícios - Aula 13

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a) encontre seu domínio e sua imagem;
- b) descreva as equações das curvas de nível;
- c) esboce algumas de suas curvas de nível;
- d) esboce o gráfico da função;
- e) determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f) decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

1 $f(x, y) = y - x$

2 $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

3 $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

4 $f(x, y) = x^2 - y^2$

5 $f(x, y) = xy$

Aula 14 - Funções de duas variáveis

Lista de Exercícios - Aula 14

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a) encontre seu domínio e sua imagem;
- b) descreva as equações das curvas de nível;
- c) esboce algumas de suas curvas de nível;
- d) esboce o gráfico da função;
- e) determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f) decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

1 $f(x, y) = y/x^2$

2 $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

3 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

4 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

5 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

Aula 15 - Limites de funções de duas variáveis

Limite de uma função f de duas variáveis

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) . Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \in D$ tende à (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

Se para todo $\epsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Se $f(x, y) \rightarrow L_1$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \rightarrow L_2$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_2 , com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ não existe.

Propriedade dos limites de funções de duas variáveis

As regras a seguir são verdadeiras se L , M e k forem números reais e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

① $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$

② $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$ para todo número k

③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$

④ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ para todo número $M \neq 0$

⑤ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n$ para todo número n inteiro positivo

⑥ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ para todo número n inteiro positivo, e, se n for par, assumimos que $L > 0$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$$

Se investigarmos o comportamento desse limite por diferentes caminhos veremos que ele sempre será 0, mas isso não significa que o limite será 0 para todos os (infinitos) caminhos possíveis. Considere um $\epsilon > 0$ dado, mas arbitrário. Desejamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

ou

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} < \epsilon$$

Note que $y^2 \leq x^2 + y^2 \implies \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$, portanto

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, escolhendo $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta$, obtemos

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon$$

A partir dessa definição, sabemos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$$

Lista de Exercícios - Aula 15

Calcule os seguintes limites, se existirem

$$\textcircled{1} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} 3x^2 + xy - 2y^2$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{e^{2x} + e^{2y}}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^4}$$

Aula 16 - Continuidade de funções de duas variáveis

Continuidade de uma função f de duas variáveis

Uma função f de duas variáveis é dita contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D .

Exercício

Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

É contínua em todo o ponto exceto na origem.

Dica: Considere os caminhos ao longo das retas furadas $y = mx$, $x \neq 0$.

Exercício

Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

É contínua em todo o ponto exceto na origem.

Dica: Considere os caminhos ao longo das parábolas furadas $y = mx^2$, $x \neq 0$.

Lista de Exercícios - Aula 16

Determine todos os pontos nos quais f é contínua.

① $f(x, y) = \frac{x^2}{y - 1}$

② $f(x, y) = \ln xy^2$

③ $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$

④ $f(x, y) = (x + y) \operatorname{sen} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

Aula 17 - Derivadas Parciais

Derivada parcial de f em relação a x em (a, b) pode ser definida como:

$$f_x(a, b) = g'(a) \quad \text{onde} \quad g(x) = f(x, b)$$

Formalmente a definição é dada por:

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Derivadas Parciais

Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Derivadas de Ordem Superior

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Teorema de Clairaut

Suponha que f seja definida numa bola aberta D que contenha o ponto (a, b) . Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D , então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Exercício

Encontre os valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(4, -5)$ se $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$.

Exercício

Encontre $\frac{\partial f}{\partial y}$ se $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$.

Exercício

Encontre f_x e f_y como funções se $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$.

Lista de Exercícios - Aula 17

Nos seguintes exercícios encontre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$

① $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$

② $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

③ $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

④ $f(x, y) = x^y$

Aula 18 - Derivadas Parciais

Lista de Exercícios - Aula 18

Nos seguintes exercícios encontre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$

① $f(x, y) = \log_y x$

② $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$

③ $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

④ $f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$

Aula 19 - Planos Tangentes

Equação do Plano Tangente à Superfície

Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exercício

Determine uma equação no plano tangente à superfície $z = 2x^2 + y^2 - 5y$ no ponto $(1, 2)$.

Função Diferenciável

Se $z = f(x, y)$, então f é diferenciável no ponto (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Diferenciabilidade implica Continuidade

Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b) , então f é contínua em (a, b) .

Diferenciação Total

Se $z = f(x, y)$ a diferenciação total dz será definida como:

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

onde dx e dy são variáveis independentes.

Exercício

Se $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 5y$ determine a diferencial dz . Se x varia de 2 para 2,05 e y varia de 3 para 2,96, compare os valores de Δz e dz .

Lista de Exercícios - Aula 19

Nos seguintes exercícios determine a diferencial total e apresente uma equação para o plano tangente à superfície no ponto especificado:

① $z = 2x^2 + y^3 - 3y$, $(1, 2)$

② $z = \exp(x + 2xy)$, $(-1, 2)$

③ $z = y \operatorname{sen} x$, $(\pi/2, 1)$

④ $z = \sqrt{x + 2y}$, $(2, 1)$

Aula 20 - A Regra da Cadeia

Regra da Cadeia - Caso 1

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t . Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Exercício

Determine $\frac{\partial z}{\partial t}$ se $z = xy^3 - x^2y$, $x = t^2 - 1$, $y = t^2 - 1$

Regra da Cadeia - Caso 2

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t . Então:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Exercício

Determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ se $z = (x - y)^5$, $x = s^2t$, $y = st^2$

Regra da Cadeia - Caso Geral

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis seja uma função diferenciável de x_1, x_2, \dots, x_n onde cada x_j é uma função diferencial de m variáveis t_1, t_2, \dots, t_m . Então u é uma função de t_1, t_2, \dots, t_m e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

Exercício

Determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ se $z = \ln(3x + 2y)$, $x = s \operatorname{sen} t$, $y = t \cos s$

Lista de Exercícios - Aula 20

Nos seguintes exercícios expresse dw/dt como uma função de t , utilizando a regra da cadeia, expressando w em termos de t e diferenciando diretamente com relação a t . Em seguida calcule dw/dt no valor dado de t .

① $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t; \quad t = 0$

② $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t}; \quad t = 3$

Nos seguintes exercícios expresse dz/du e dz/dv como uma função de u e v , utilizando a regra da cadeia, expressando z em termos de u e v diferenciando diretamente com relação a t . Em seguida calcule dz/du e dz/dv no valor dado de (u, v) .

③ $w = 4e^x \ln y, \quad x = \ln(u \cos v), \quad y = u \sin v; \quad (u, v) = (2, \pi/4)$

④ $w = \operatorname{tg}^{-1}(x/y), \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v; \quad (u, v) = (13/10, \pi/6)$

Aula 21 - Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Derivada Direcionada

A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Derivada Direcional

Se f é uma função diferenciável de x e y , então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Se o vetor unitário \mathbf{u} faz um ângulo θ com o eixo x positivo, então podemos escrever $\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$ e a fórmula anterior pode ser escrita como.

Derivada direcional com ângulo θ

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

Exercício

Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y^2$$

e \mathbf{u} é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Qual será $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$?

Gradiente

Se f é uma função de duas variáveis x e y , então o gradiente de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

Usando essa definição de gradiente é possível reescrever a derivada direcional de uma função diferenciável como o **produto escalar** do **vetor gradiente** pelo **vetor unitário \mathbf{u}** .

Derivada Direcional na direção do vetor \mathbf{u}

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Exercício

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^2 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ da direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Exercício

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ no ponto $(0, \pi/3)$ da direção do vetor $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$.

Exercício

Determine a derivada direcional da função $f(s, t) = s\sqrt{t}$ no ponto $(2, 4)$ da direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Exercício

Determine a derivada direcional da função $f(u, v) = u^2 e^{-v}$ no ponto $(3, 0)$ da direção do vetor $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Lista de Exercícios - Aula 21

Determine a derivada direcional de f no ponto $P(x_0, y_0)$ dado e na direção indicada pelo ângulo θ .

① $f(x, y) = xy^2 - x^2y, \quad P(1, 2), \quad \theta = \pi/2.$

② $f(x, y) = y \operatorname{sen}(x/y), \quad P(0, 1), \quad \theta = \pi/3.$

Determine a derivada direcional de f no ponto $P(x_0, y_0)$ dado e na direção do vetor \mathbf{v} .

③ $f(x, y) = \exp(1 - x) \operatorname{sen}(x + y), \quad P(0, \pi/3), \quad \mathbf{v} = \langle -3, 4 \rangle.$

④ $f(u, v) = u^2 e^{-v}, \quad P(3, 0), \quad \mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle.$

Aula 22 - Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Maximizando a derivada direcional

Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ ocorre quando \mathbf{u} tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

Exercício

Determine a taxa de variação máxima de $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ no ponto $(4, 1)$ e a direção em que isso ocorre.

Exercício

Determine a taxa de variação máxima de $f(x, y) = \sin xy$ no ponto $(1, 0)$ e a direção em que isso ocorre.

Exercício

Determine a taxa de variação máxima de $f(x, y, z) = \frac{x}{x+z}$ no ponto $(8, 1, 3)$ e a direção em que isso ocorre.

Exercício

Determine a taxa de variação máxima de $f(x, y, z) = x \ln yz$ no ponto $(1, 2, 1/3)$ e a direção em que isso ocorre.

Lista de Exercícios - Aula 22

Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

① $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad (1, 4)$

② $f(x, y) = \cos(xy), \quad (\pi/2, 1)$

③ $f(x, y) = \log_x y, \quad (2, 4)$

④ $f(x, y) = \frac{x}{x+y}, \quad (1, 2)$