

# Caderno de Questões

# 2021

Mathématiques  
SANS  
Frontières

Níveis Júnior e Sênior  
7º EF à 3ª. EM

Qualquer tentativa gera alguma pontuação.  
A organização das resoluções será levada em conta.  
Responda cada questão em apenas uma folha.



Rede  
POC

Rede do Programa de Olimpíadas do Conhecimento  
[www.matematicasemfronteiras.org](http://www.matematicasemfronteiras.org)



# Questão 1<sup>2</sup>

## Tarte Flambé (Língua estrangeira)

7 PONTOS

Escolha um dos idiomas abaixo para responder a questão em seu caderno de respostas com no mínimo 30 palavras

En la comida de la Asamblea Internacional de Matemáticas sin Fronteras en Alsacia, un brasileño, un suizo y un alemán cenan juntos y con sus esposas. Cuando hacen el pedido, un hombre y una mujer piden cada uno una tarta flambeada, un hombre y una mujer piden cada uno una ensalada alsaciana y un hombre y una mujer piden cada uno caracoles.

La esposa del alemán ha elegido una tarta flambeada. El brasileño, que ha elegido una ensalada alsaciana, dice entonces: «¡Qué curioso, en cada pareja, el hombre y la mujer han elegido platos diferentes!».

**Con la ayuda de estos datos, indica lo que ha elegido cada hombre. Justifica la respuesta.**

\*\*\*\*\*

Durante la cena dell'Assemblea Internazionale di Matematica senza Frontiere in Alsazia, un brasiliano, uno svizzero e un tedesco cenano assieme con anche le loro mogli.

Quando effettuano l'ordinazione iniziale un uomo e una donna prendono entrambi una *tarte flambé*, un uomo e una donna ordinano entrambi un'insalata alsaziana e un uomo e una donna ordinano entrambi delle lumache. La moglie del tedesco ha ordinato una *tarte flambé*. Il brasiliano che ha ordinato l'insalata le dice "E' curioso, in ogni coppia, l'uomo e la donna hanno ordinato piatti diversi!"

**In base alle informazioni fornite, individuate la scelta di ogni uomo, giustificando la vostra risposta.**

\*\*\*\*\*

At the meal of the International Assembly of "Mathématiques sans Frontières", a Brazilian, a Swiss and a German dine together, and with their wives

When ordering, one man and one woman each choose a *tarte flambée*, one man and one woman each choose an Alsatian salad, and one man and one woman each choose snails.

The German's wife had a *tarte flambée*. The Brazilian, who had an Alsatian salad, said to him: "It's curious. In each couple, the man and the woman have had different dishes!"

**Using the information provided, identify what each man chose. Justify your answer.**

\*\*\*\*\*

Beim Galadinner der internationalen Versammlung von Mathematik ohne Grenzen sitzen ein Deutscher, ein Brasilianer und ein Schweizer zusammen mit ihren Ehefrauen an einem Tisch.

Jeweils ein Mann und eine Frau bestellen einen Flammkuchen, jeweils ein Mann und eine Frau nehmen einen elsässischen Salat und jeweils ein Mann und eine Frau bestellen Schnecken. Die deutsche Ehefrau hat einen Flammkuchen bestellt, der brasilianische Herr einen elsässischen Salat. Er bemerkt: "Das ist lustig! Bei jedem Ehepaar an diesem Tisch haben Mann und Frau unterschiedliche Gerichte gewählt."

**Was hat jeder Mann bestellt? Begründet eure Antwort.**



Questão 2<sup>3</sup>

Os Daltons estão de volta

5 PONTOS

Os Daltons querem assaltar o banco. Sob a ameaça, o caixa lhes dá pistas para ajudá-los a encontrar a combinação do cofre:

- a combinação é uma série de três números distintos de apenas um dígito, dispostos em ordem crescente;
- a soma dos três números é igual a 18;
- o produto de dois desses três números acrescidos do terceiro é um quadrado.

Quais são as possibilidades de combinação do cofre? Justificar.





## Questão 3<sup>4</sup>

### Números felizes

Aqui está um algoritmo de três passos:

Passo 1: Escolha um número inicial inteiro positivo diferente de zero.

Passo 2: Calcule a soma dos quadrados dos algarismos que compõem esse número (como o exemplo abaixo ilustra) e escreva o resultado obtido.

Passo 3: Repita o passo 2 utilizando o número obtido no passo anterior.

Na execução deste algoritmo, obtemos uma sequência de números:

- Quando o resultado obtido for igual a 1, a sequência é interrompida e afirmamos que o número inicial é um "número feliz".
- Se um dos números nessa sequência for repetido, o algoritmo é interrompido e o número inicial é considerado também "número feliz".

Veja dois exemplos:

- Escolhendo 70 como número de partida :  $7^2 + 0^2 = 49$  ;  $4^2 + 9^2 = 97$  ;  $9^2 + 7^2 = 130$  ;  $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$  et  $1^2 + 0^2 = 1$ . Obtemos 1, porque 70 é um « número feliz ».

- Escolhendo 40 como número de partida obtemos o resultado seguinte:

**16 - 37 - 58 - 89 - 145 - 42 - 20 - 4 - 16.** O número 16 se repete porque 40 é um « número feliz ».

Determine os cinco "números felizes" menores que 20.

Thomas afirma que o ano de 2021 é um "ano feliz" porque 2021 é um número feliz. Ele está correto? Em caso negativo, qual seria o próximo ano feliz?

Justifique sua resposta



Questão 4<sup>7</sup>

Tudo branco

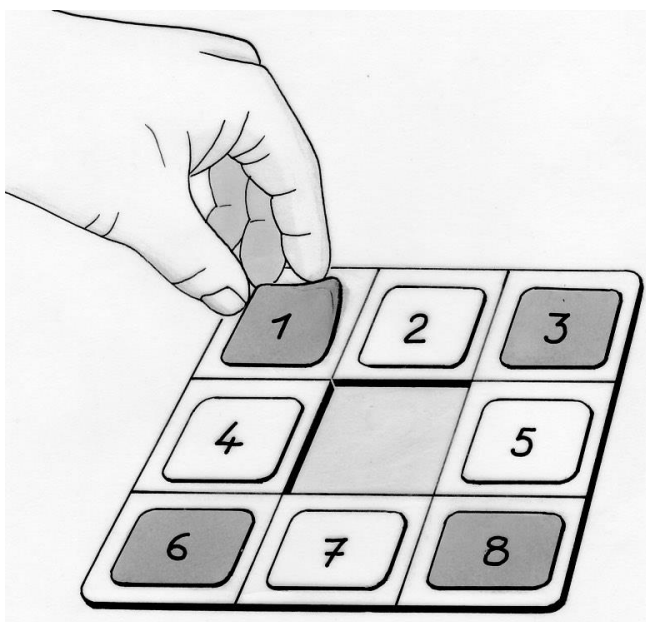
Lili joga com fichas, cada uma com um lado cinza e um lado branco e com o mesmo número em ambos os lados.

Quando o jogo começa, as fichas estão organizadas conforme mostra a figura abaixo.

Quando Lili vira uma ficha, as duas fichas vizinhas também são viradas.

O jogo termina quando todas as fichas estão mostrando o lado branco.

Como Lili pode concluir o jogo com o menor número possível de viradas?



5 PONTOS

Questão 5<sup>8</sup>

Muitas dobras

7 PONTOS

Queremos construir dois prismas retos baseados em um triângulo equilátero.

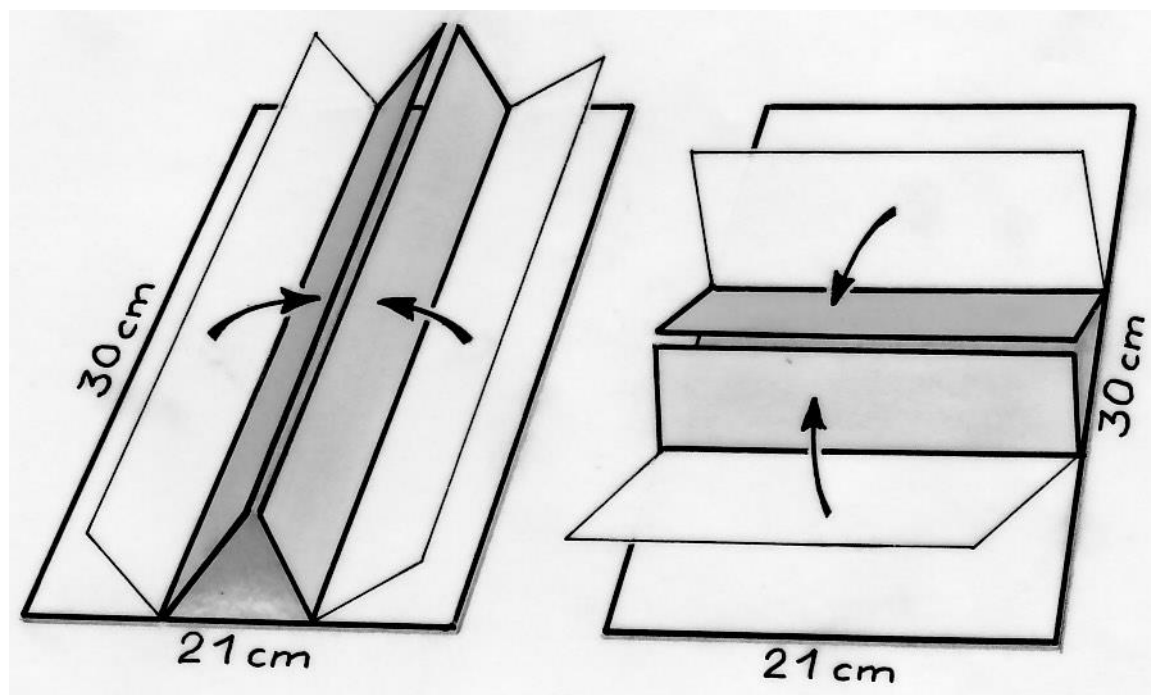
Temos duas folhas de papelão com 30 cm de comprimento e 21 cm de largura.

A primeira é dobrada em três retângulos iguais no sentido do comprimento e a segunda em três retângulos iguais, mas no sentido da largura (veja o desenho).

Cada um dos prismas é fechado conectando as duas faces laterais retangulares com fita adesiva.

Calcule o volume do prisma em cada uma das duas configurações.

Em qual configuração o volume é maior? Calcule a proporção dos dois volumes.



Questão 6<sup>9</sup>

Cobertura

5 PONTOS

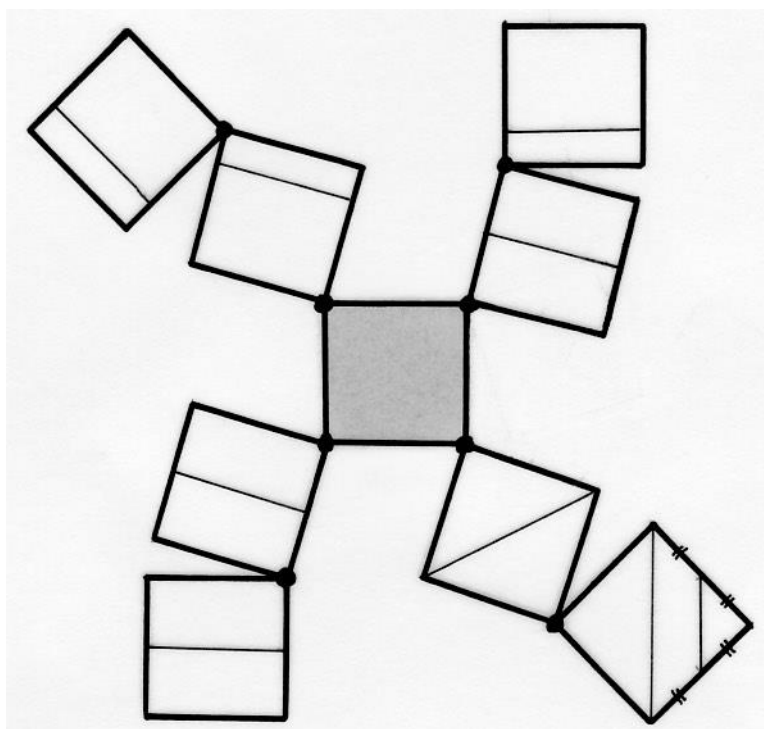
Os quadrados nesta figura foram desenhados em papel vegetal (papel transparente).

Eles podem girar em torno de um de seus vértices de modo a se sobrepor e, assim, cobrir exatamente o quadrado central.

Em seis dos nove quadrados, os segmentos adicionados são paralelos a um de seus lados (dividindo o quadrado ao meio ou em um quarto).

Construa o quadrado central de 8 cm de lado coberto pelos oito quadrados.

Em quantas regiões o quadrado obtido é dividido?





Questão 7<sup>4</sup>

Pés de madeira

7 PONTOS

Éloi recuperou uma tábua muito comprida da parte de trás do jardim de sua casa. Ele acha que a tábua seria perfeita para uma prateleira em sua estufa.

Para a construção da prateleira, a tábua deverá ser colocada sobre pés, de forma que fique na altura certa para colocar os potes de mudas na primavera. Ele também encontrou várias toras de madeira de comprimentos diferentes que podem ser usadas para construir os pés da prateleira.

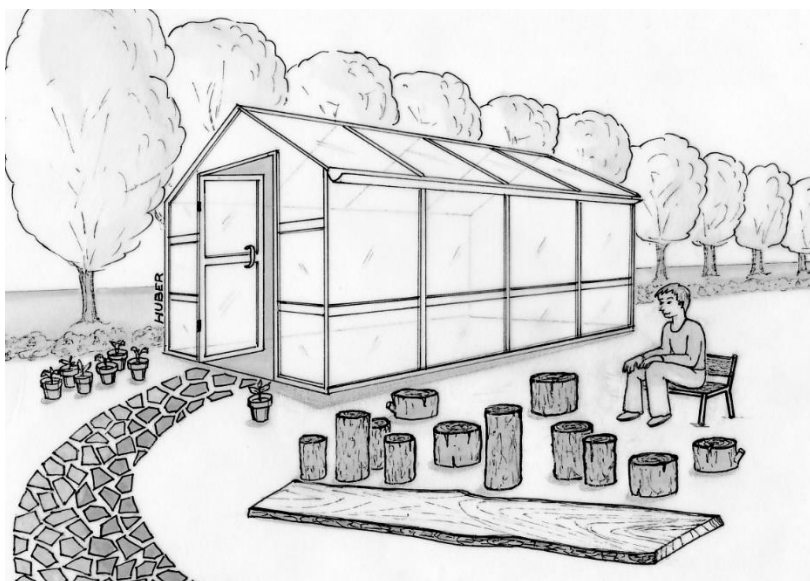
Duas toras têm 10 cm de altura; três, 20 cm; quatro, 30 cm; uma, 40 cm; uma, 50 cm e uma tora tem 60 cm de altura.

As toras serão todas utilizadas sem recorte e todas os pés deverão ter a mesma altura.

Cada pé deverá ser montado com pelo menos duas toras.

Indique a quantidade de pés que poderão ser montados e quais toras serão utilizadas em cada um.

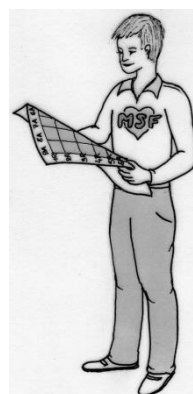
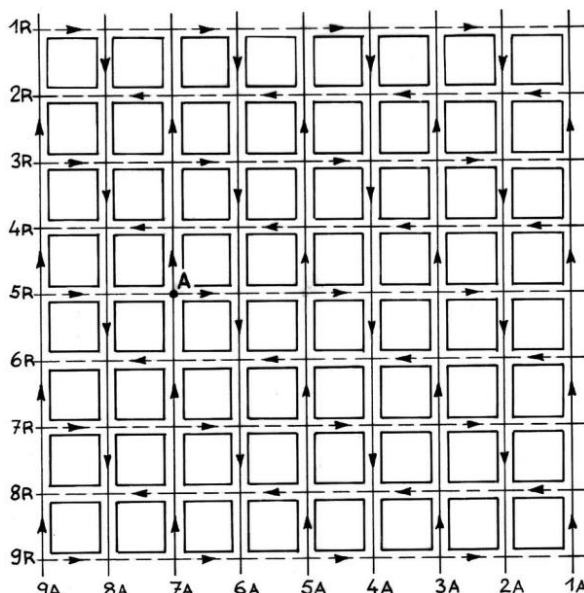
Justifique sua resposta.





Questão 8<sup>5</sup>

O mapa de Mickey



5 PONTOS

Uma grande cidade americana é dividida em bairros quadrados de 100 metros de lado por avenidas numeradas de leste a oeste e por ruas numeradas de norte a sul.

Todas as avenidas e ruas são de mão única.

As direções do tráfego mudam de uma avenida para outra e de uma rua para outra como ilustrado no mapa acima.

Mickey mora num apartamento localizado na coordenada **A(7A; 5R)**, no cruzamento da 7ª Avenida com a 5ª Rua e decidiu se mudar para outro apartamento também localizado próximo a um cruzamento. Ele faz sua mudança utilizando seu carro e percorrendo o caminho mais curto. E, claro, respeitando as direções de tráfego indicadas!

Ao final da mudança, ele observou que a distância de "retorno ao apartamento original" era duas vezes a distância "da ida" ao novo apartamento.

Descubra três possíveis cruzamentos que possam ser a localização do novo apartamento de Mickey. Indique os endereços em coordenadas na forma (xA; yR). Justifique a resposta.

Questão 9<sup>6</sup>

Sorteio dúbio

5 PONTOS

Malo é o presidente de um grande clube de basquete. Para comemorar o 50º aniversário do clube, ele decide organizar um sorteio cujo bilhete premiado valerá uma viagem a Berlim.

Para fazer isso, ele imprime 1.000 bilhetes numerados de 1 a 1.000.

Olhando atentamente para os bilheres, ele diz:

"Há um pequeno problema com os bilhetes 908 e 806 porque duas pessoas diferentes podem aparecer com o bilhete ganhador! "

Explique o problema encontrado com esses dois bilhetes.

Identifique todos os pares de bilhetes problemáticos.



908

125

473

96

Questão 10

Cactus fractalus

10 PONTOS

Aqui está um cacto geométrico estranho cujo tronco é um quadrado de 5 cm de lado.

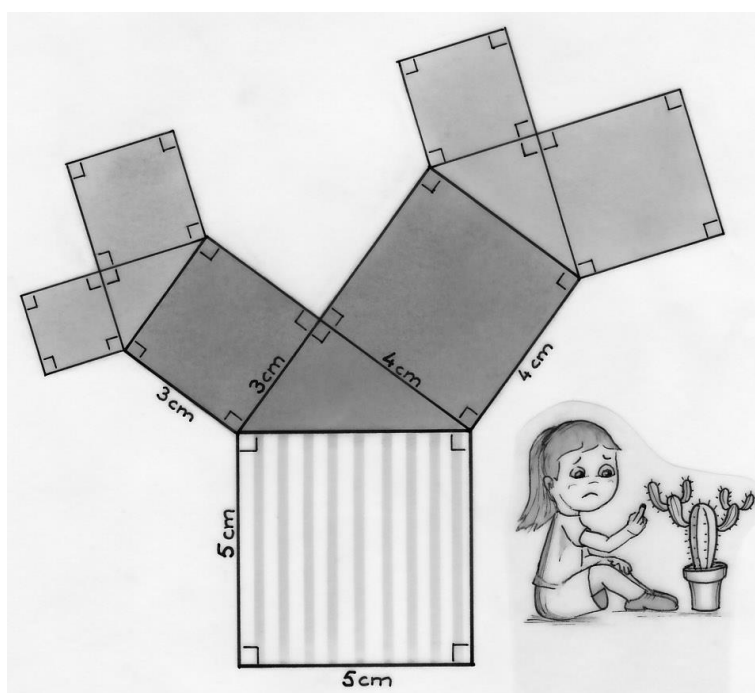
Na primeira semana, o cacto se expande em um triângulo retângulo com lados de 3cm, 4cm e 5cm e dois quadrados, como mostra o desenho. O cacto agora tem dois ramos.

Na segunda semana, o mesmo processo continua: em cada galho cresce um triângulo retângulo semelhante ao anterior e seus dois quadrados associados.

Na terceira semana, o crescimento do cacto continua da mesma forma. O cacto é feito de quadrados e triângulos retângulos semelhantes.

Construa o cacto em tamanho real na folha de respostas na terceira semana.

Encontre a área de cada um dos quadrados e pinte os quadrados da mesma área com a mesma cor.



Questão 11

Selos

Apenas para Ensino Médio

5 PONTOS

Charlotte vai ao correio comprar selos.

Chegando lá ela diz para a funcionária:

- Eu gostaria de comprar € 10 (dez euros) em selos. Preciso de selos de € 0,10, € 0,20 e € 0,50.

A funcionária do correio responde:

- Sim, mas quantos de cada?

Charlotte:

- Eu preciso dez vezes mais de selos de 10 centavos do que de 20 centavos.

Quantos selos de cada tipo a funcionária entregará para Charlotte?

Explique sua resposta.





Questão 12

Apenas para Ensino Médio

De barco



Para dar uma volta completa em torno de uma pequena ilha caribenha, Hassan leva uma hora em seu barco a remo, enquanto, Seema, sua amiga, gasta apenas 10 minutos com sua nova lancha.

Os dois amigos partem do mesmo lugar e seguem o mesmo caminho.

**Quando Hassan tiver completado uma volta, quantas voltas Seema terá dado?  
Justifique sua resposta.**

**Quanto tempo Seema levará para encontrar Hassan novamente?  
Justifique sua resposta.**

7 PONTOS

Questão 13

Os pés sob a mesa

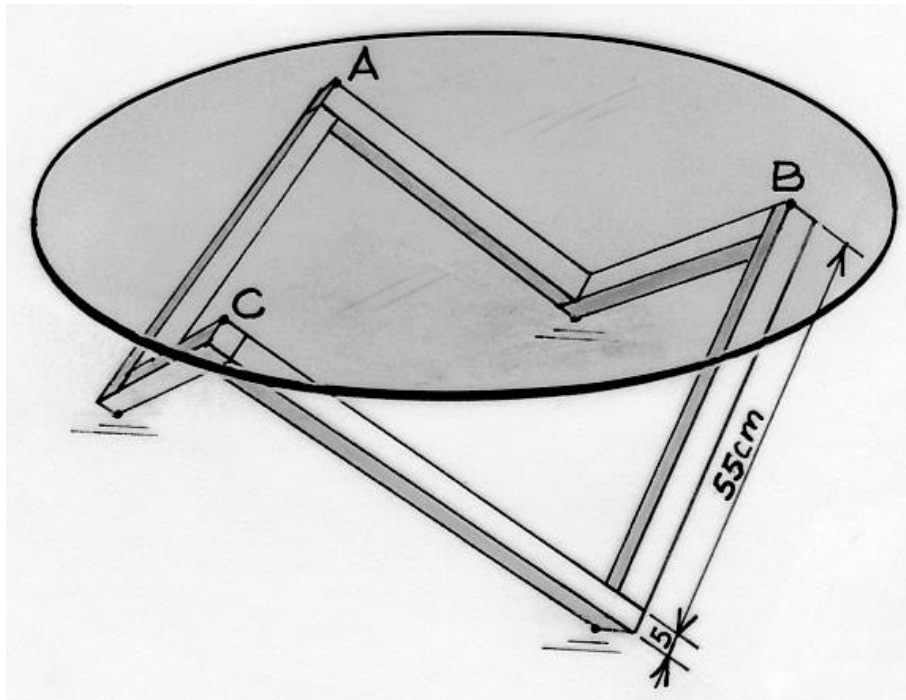
Apenas para Ensino Médio

Laura montou uma mesa de centro conforme ilustra a imagem abaixo.

A base foi montada a partir de seis ripas de madeira idênticas, cada uma perpendicular às outras duas. Cada ripa tem a forma de um paralelepípedo retangular com 55 cm de comprimento, 5 cm de largura e 5 cm de espessura.

O tampo da mesa é um disco circular de vidro o qual é apoiado sobre a base nos pontos A, B e C, equidistantes do centro da mesa. A distância entre o ponto A e a borda do tampo da mesa é de 10 cm.

Determine a natureza e as dimensões do triângulo ABC.  
Calcule o raio do tampo da mesa. Justifique sua resposta



10 PONTOS