

Questões Olímpicas

Uma pequena amostra de exercícios feitos em olimpíadas de matemática recentes

Prof. Thiago VedoVatto

thiago.vedovatto@ifg.edu.br

thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

15 de outubro de 2021

Durante uma de suas aulas, o professor Wagner encontrou, sobre sua mesa, uma caricatura dele. O professor riu da situação, mas queria saber quem tinha feito aquele desenho. Ele sabia que apenas quatro alunos daquela turma tinham habilidades suficientes para fazê-lo: Ana, Beto, Carlos e Daniela. O professor, então, fez a seguinte pergunta aos quatro estudantes: quem de vocês fez esta minha caricatura? Eles afirmaram:

Ana Não fui eu

Beto Foi a Daniela

Carlos Foi o Beto

Daniela O Carlos está mentindo

Sabendo-se que realmente foi um desses quatro alunos que fez a caricatura e que exatamente dois alunos mentiram para o professor em suas afirmações, pode-se concluir que:

- a Daniela não fez a caricatura e Ana mentiu.
- b Ana mentiu e foi Daniela quem fez a caricatura.
- c Carlos mentiu e não foi Ana quem fez a caricatura.
- d Quem fez a caricatura foi Ana ou Daniela.
- e Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.

Hipótese 1

Ana Mentiu!

Se Ana mentiu, então a autora da caricatura é a própria Ana e dessa forma Beto e Carlos estão mentindo. Dessa forma temos três mentirosos: Ana, Beto e Carlos. Como a quantidade máxima de mentirosos é dois então a hipótese de Ana estar mentindo não é verdadeira, portanto as alternativas a) e b) não podem estar corretas.

Ana Não fui eu (**Mentira!**)

Beto Foi a Daniela (**Mentira!**)

Carlos Foi o Beto (**Mentira!**)

Daniela O Carlos está mentindo (**Verdade!**)

-
- a) ~~Daniela não fez a caricatura e Ana mentiu.~~
 - b) ~~Ana mentiu e foi Daniela quem fez a caricatura.~~
 - c) Carlos mentiu e não foi Ana quem fez a caricatura.
 - d) Quem fez a caricatura foi Ana ou Daniela.
 - e) Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.

Conclusão 1

Ana está dizendo a verdade!

Hipótese 2

Ana disse a Verdade e Daniela Mentiu!

Se Daniela mentiu, então Carlos não mentiu e o autor da caricatura foi o Beto. Dessa forma temos que os mentirosos foram Beto e Daniela.

Ana Não fui eu (**Verdade!**)

Beto Foi a Daniela (**Mentira!**)

Carlos Foi o Beto (**Verdade!**)

Daniela O Carlos está mentindo (**Mentira!**)

-
- ~~a Daniela não fez a caricatura e Ana mentiu.~~
 - ~~b Ana mentiu e foi Daniela quem fez a caricatura.~~
 - ~~c Carlos mentiu e não foi Ana quem fez a caricatura.~~
 - ~~d Quem fez a caricatura foi Ana ou Daniela.~~
 - ~~e Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.~~

Hipótese 3

Ana e Daniela disseram a verdade!

Se Daniela está falando a verdade, então Carlos está mentindo, como temos exatamente dois mentirosos Beto também deve estar mentindo. Dessa forma o autor foi Carlos.

Ana Não fui eu (**Verdade!**)

Beto Foi a Daniela (**Mentira!**)

Carlos Foi o Beto (**Mentira!**)

Daniela O Carlos está mentindo (**Verdade!**)

-
- a ~~Daniela não fez a caricatura e Ana mentiu.~~
 - b ~~Ana mentiu e foi Daniela quem fez a caricatura.~~
 - c Carlos mentiu e não foi Ana quem fez a caricatura.
 - d ~~Quem fez a caricatura foi Ana ou Daniela.~~
 - e Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.

Note que independente de Daniela estar dizendo a verdade ou não chegamos a conclusão de que Beto está mentindo, portanto certamente Beto está mentindo.

Conclusão 2

Beto está mentindo.

Hipótese 4

Ana e disse a verdade, Beto e Carlos mentiram.

Essa hipótese é equivalente a Hipótese 3

Ana Não fui eu (Verdade!)

Beto Foi a Daniela (Mentira!)

Carlos Foi o Beto (Mentira!)

Daniela O Carlos está mentindo (Verdade!)

Hipótese 5

Ana e Carlos disserem a verdade, e Beto mentiu.

Essa hipótese é equivalente a Hipótese 2

Ana Não fui eu (Verdade!)

Beto Foi a Daniela (Mentira!)

Carlos Foi o Beto (Verdade!)

Daniela O Carlos está mentindo (Mentira!)

Conclusão Final

A única alternativa que não foi eliminada por nenhuma hipótese foi a alternativa e).

Olimpíada Internacional Mathématiques Sans Frontières 2021 - Questão 11

Charlotte vai ao correio comprar selos. Chegando lá ela diz para funcionária:

- Eu gostaria de comprar R\$10,00 (dez reais) em selos. Preciso de selos de R\$0,10, R\$0,20 e R\$0,50.

A funcionária do correio responde:

- Sim, mas quantos de cada um?

Charlotte:

- Eu preciso de dez vezes mais de selos de 10 centavos do que de 20 centavos.

Quantos selos de cada tipo a funcionária entregará para Charlotte? Explique sua resposta.



Sejam:

a total de selos de R\$0,10

b total de selos de R\$0,20

c total de selos de R\$0,50

Sabemos que $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ e que:

$$\begin{cases} 0,1a + 0,2b + 0,5c = 10 \\ a = 10b \end{cases}$$

Combinando as duas equações anteriores obtemos que:

$$1,2b + 0,5c = 10 \implies c = 20 - 2,4b$$

Como $c \in \mathbb{Z}_+$ então:

$$20 - 2,4b > 0 \implies b < 8,333\dots$$

Como $b \in \mathbb{Z}_+$ uma solução do problema é todo valor de $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ tal que $a, c \in \mathbb{Z}_+$. A única solução possível é:

$$b = 5 \implies \begin{cases} c = 8 \\ a = 50 \end{cases}$$

Olimpíada Internacional Mathématiques Sans Frontières 2021 - Questão 12

Para dar uma volta completa em torno de uma ilha caribenha, Hassan leva uma hora em seu barco a remo, enquanto, Seema, sua amiga, gasta apenas 10 minutos com sua nova lancha. Os dois amigos partem de um mesmo lugar e seguem o mesmo caminho. Quando Hassan tiver completado uma volta, quantas voltas Seema terá dado? Quanto tempo Seema levará para encontrar Hassan novamente?



37ª Olimpíada de Matemática da Unicamp - IMECC - Questão 2

Seja um triângulo equilátero de lado L . Vamos considerar a divisão do triângulo por retas paralelas a um dos lados (fixo). Considere a altura em relação à esse lado. Esta altura é dividida pelas retas paralelas em segmentos de altura $a_1 > a_2 > \dots > a_n$.

- a Se quisermos dividir o triângulo em 2 pedaços de mesma área, qual seria a altura a_1 ?
- b Se quisermos dividir o triângulo em 3 pedaços de mesma área, quais seriam as alturas a_1 e a_2 ?
- c Se quisermos dividir o triângulo em n pedaços de mesma área, quais seriam as alturas a_1, a_2, \dots, a_{n-1} ?
- d O que poderíamos falar sobre estas grandezas se o triângulo não for equilátero?

