Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

17 de dezembro de 2020

Teste da Comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente ou divergente.

.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma série-p com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma série convergente.

Como $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

.

A série dada é uma série com termos positivos. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Note que se trata da série harmônica, portanto é uma série divergente.

Como $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente ou divergente.

.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n+1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = {}^{4}/_{3}$ e razão comum $r = {}^{1}/_{3}$.
Note que $r < 1$, então essa série geométrica será convergente.
Como $\displaystyle\frac{4}{3^n+1} \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Teste da Comparação com Limite

Suponha que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln n}{n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente ou divergente.

.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2+2n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/n^2}{(n^2+2n)/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2/n} = 1$$

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.