

# Probabilidade e Estatística

Thiago VedoVatto

13 de setembro de 2020



# Sumário

<b>I</b>	<b>Introdução à probabilidades</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Probabilidade básica</b>	<b>5</b>
1.1	Conceitos básicos . . . . .	5
1.2	Definições de probabilidade . . . . .	11
1.2.1	Chance e probabilidade . . . . .	15
1.3	A Regra dos Complementares . . . . .	15
1.4	Probabilidade condicional e independência . . . . .	17
1.4.1	Teorema da probabilidade total . . . . .	20
1.4.2	Teorema de Bayes . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Introdução à estatística</b>	<b>25</b>
	<b>Glossário</b>	<b>35</b>
	<b>Símbolos</b>	<b>37</b>



# Introdução

Esta apostila contém vários exercícios que foram extraídos de autores como:

- Bussab & Morettin (2013)
- Magalhães & Lima (2015)

A maioria dos exercícios sofreu alguma forma de adaptação ao ser inserida nesse material. As adaptações incluem mudança na notação, inclusão/exclusão de itens, traduções próprias, inclusão de figuras/tabelas, etc.

“An old joke says that ‘if you copy from one book that is plagiarism, but if you copy from ten books that is scholarship’”. - Durrett (2009).

# Parte I

## Introdução à probabilidades





# Capítulo 1

## Probabilidade básica

### 1.1 Conceitos básicos

Algumas definições que serão necessárias ao longo de todo o nosso curso serão dadas e discutidas à seguir.

#### Definição 1 (Variável de interesse)

É a variável observada em um experimento.

#### Definição 2 (Experimento aleatório)

É qualquer ação cujo resultado (valor variável de interesse) não pode ser previsto.

O conceito de variável de interesse e experimento aleatório serão fortemente associados nesse texto. Um experimento aleatório é também dito não determinístico. Aqui é importante frisar que o adjetivo *aleatório* na definição acima é herdado da variável de interesse. Em um experimento é comum considerar mais de uma variável de interesse e, portanto um mesmo experimento pode ser aleatório ou não dependendo da variável de interesse observada.

#### Definição 3 (Espaço amostral)

É o conjunto de *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. O espaço amostral é dito *enumerável* quando existir uma bijeção entre ele e os números naturais. Quando tal bijeção não existir diremos que o espaço amostral é *não enumerável*.

O espaço amostral será denotado por  $\Omega$ . Um espaço amostral enumerável pode ser finito ou infinito. Todo espaço amostral finito é enumerável.

Um baralho comum possui 52 cartas divididas em quatro naipes: espadas ♠, ouros ◇, bastos ♣ e copas ♥. Cada naipe possui um ás, cartas numeradas de 2 à 10, um valete, uma dama e um rei. Ao sortearmos aleatoriamente uma carta de um baralho como esse o espaço amostral será formado por todas as 52 cartas.

#### Definição 4 (Evento)

É qualquer *subconjunto* do espaço amostral  $\Omega$ .

Normalmente os eventos são denotados por letras alfabéticas maiúsculas, ex.: A, B, C.

#### Definição 5 (Evento nulo)

É o evento associado a todo *subconjunto vazio* do espaço amostral  $\Omega$ .

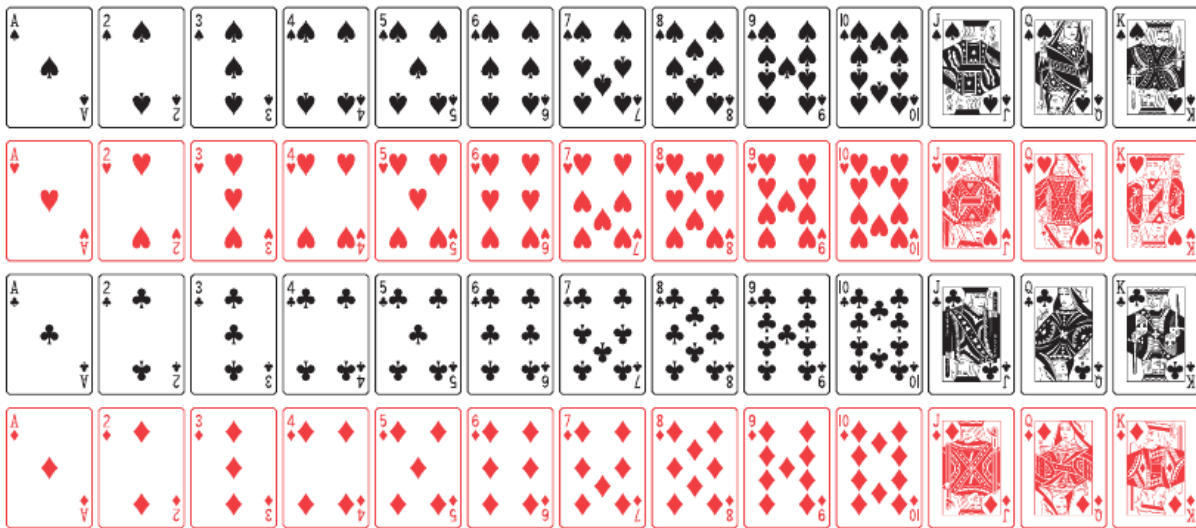


Figura 1.1: Baralho comum

**Exercício 1:** Weiss (2012, p. 153). Considere o experimento de sortear uma carta de baralho comum de 52 cartas como apresentado na fig. 1.1. Quais as cartas compõem os eventos:

- a) Seleciona-se o rei de copas.
- b) Seleciona-se um rei.
- c) Seleciona-se uma carta de copas.
- d) Seleciona-se uma carta de figura.

**Exercício 2:** Bussab & Morettin (2013, p. 108). Qual é o espaço amostral e a variável de interesse nos seguintes experimentos? Quais são experimentos aleatórios?

- a) Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.
- b) Jogamos um dado e observamos a face que ficou virada para cima.
- c) Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.
- d) Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.
- e) Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.
- f) Colocamos um litro de água no fogo e medimos a sua temperatura depois de vinte minutos.
- g) Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.
- h) Olho pela janela do meu quarto e conto a quantidade de carros que passam na rua pela próxima hora.

Nas definições a seguir considere  $A$  e  $B$  eventos em um mesmo espaço amostral  $\Omega$ . Aqui definiremos quatro operações básicas com eventos. Todas essas operações resultam

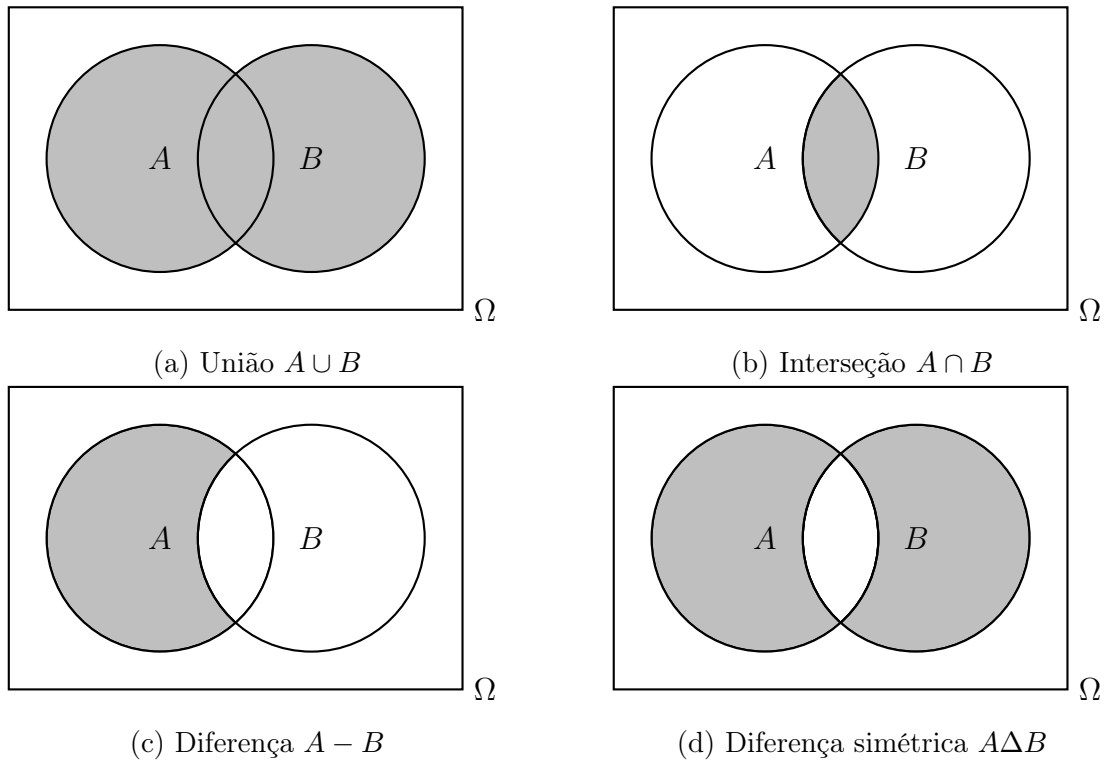


Figura 1.2: Operações entre dois eventos  $A$  e  $B$ .

em novos eventos que são funções de  $A$  e  $B$ .

#### Definição 6 (União de eventos)

O evento  $A \cup B$  denota a *união* dos eventos  $A$  e  $B$ , ou seja, a ocorrência de ao menos um deles.

A operação de união também é chamada de reunião

#### Definição 7 (Interseção de eventos)

O evento  $A \cap B$  denota a *interseção* dos eventos  $A$  e  $B$ , ou seja, a ocorrência simultânea desses eventos.

#### Definição 8 (Diferença de eventos)

O evento  $A - B$  denota a *diferença* do evento  $A$  em relação ao evento  $B$ , ou seja, a ocorrência exclusiva de  $A$ .

#### Definição 9 (Diferença simétrica)

O evento  $A \Delta B$  denota a *diferença simétrica* entre os eventos  $A$  e  $B$ , ou seja, a ocorrência exclusiva de ao menos um dos eventos.

Nas figs. 1.2a à 1.2d usamos diagramas de Venn para ilustrar as quatro operações básicas entre eventos. Os diagramas de Venn normalmente são usados para representar conjuntos. Note que os eventos de um espaço amostral são conjuntos, logo as operações definidas são operações entre conjuntos.

#### Definição 10 (Eventos elementares)

São os *elementos* do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de  $\Omega$ .

Uma conceito muito útil na construção de alguns espaços amostrais será a de produto cartesiano:

**Definição 11 (Produto Cartesiano)**

Sejam dois conjuntos  $A$  e  $B$ , o *produto cartesiano*  $A \times B$  será o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence à  $A$  e o segundo pertence à  $B$ .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

O baralho inglês na fig. 1.1 possui um total de 4 naipes que podem ser descritos pelo conjunto:

$$\mathcal{N} = \{\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}. \quad (1.1)$$

Para cada um dos naipes em  $\mathcal{N}$  o baralho inglês possui 13 elementos que podem ser descritos pelo conjunto:

$$\mathcal{E} = \{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}. \quad (1.2)$$

Assim sendo o baralho inglês possui um total de 52 cartas que podem ser descritas pelo conjunto  $\mathcal{C} = \mathcal{E} \times \mathcal{N}$ , ou seja:

$$\mathcal{C} = \{(A, \spadesuit), (K, \spadesuit), \dots, (3, \heartsuit), (2, \heartsuit)\} \quad (1.3)$$

Um conceito que será fundamental nesse texto é o de cardinal, ou seja, o número de elementos de um conjunto. O seguinte teorema estabelece uma relação matemática bastante intuitiva para obtermos a quantidade de elementos de um produto cartesiano.

**Teorema 1 (Cardinal)**

Sejam os conjuntos  $A$  e  $B$ . O cardinal do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto dos cardinais dos conjuntos individuais:

$$n(A \times B) = n(A)n(B). \quad (1.4)$$

**Exercício 3:** Magalhães & Lima (2015, p. 52). Para cada um dos casos a seguir, escreva um espaço amostral adequado e conte seus eventos elementares.

- Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.
- Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.
- Uma urna contém dez bolas azuis e dez vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.
- Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
- Vou ao quintal de casa e conto a quantidade de mangas que caem da mangueira que lá está plantada na próxima hora.
- Em uma cidade, famílias com três crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.
- Uma máquina produz vinte peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.
- Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

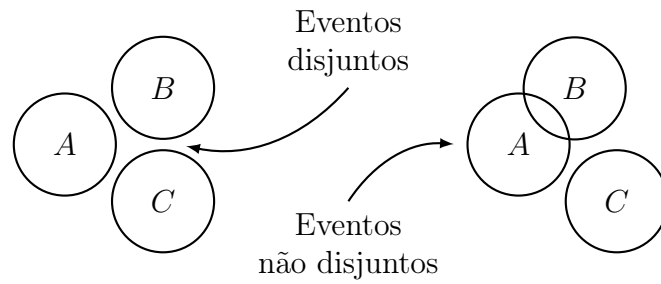


Figura 1.3: Coleções de eventos disjuntos e não disjuntos.

**Exercício 4:** No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

$A$ : Seleciona-se o rei de copas

$B$ : Seleciona-se um rei

$C$ : Seleciona-se uma carta de copas

$D$ : Seleciona-se uma carta de figura

Determine adequadamente os eventos:

a)  $A \cap B$

b)  $A \cup B$

c)  $A - B$

d)  $B - A$

e)  $B \Delta A$

f)  $B \cap C$

g)  $B \cup C$

h)  $C \cap D$

i)  $B \Delta D$

### Definição 12 (Eventos disjuntos)

Os eventos  $A_1, \dots, A_n$  são *disjuntos* se  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para quaisquer  $i$  e  $j$  distintos.

Eventos disjuntos também são chamados de mutuamente excludentes. Na fig. 1.3 os diagramas de Venn são usados novamente para ilustrar conjuntos de eventos disjuntos e não disjuntos.

**Exercício 5:** Num experimento seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

$A$ : seleciona-se uma carta de copas

$B$ : seleciona-se uma figura

$C$ : seleciona-se um ás

$D$ : seleciona-se um oito

$E$ : seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

- a)  $C$  e  $D$
- b)  $D$  e  $E$
- c)  $C$  e  $E$
- d)  $D$ ,  $E$  e  $A$
- e)  $D$ ,  $E$ ,  $A$  e  $B$
- f)  $A$  e  $B$

### Definição 13 (Eventos complementares)

Dois eventos  $A$  e  $B$  contidos em um espaço amostral  $\Omega$  são *complementares* se:

1.  $A \cap B = \emptyset$
2.  $A \cup B = \Omega$

O complementar de  $A$  será denotado por  $\overline{A}$ .

**Teorema 2 (Propriedades operacionais dos eventos)**

Sejam três eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  quaisquer em  $\Omega$ . Então:

- a)  $\overline{\emptyset} = \Omega$
- b)  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- c)  $A \cap \Omega = A$
- d)  $A \cup \emptyset = A$
- e)  $A \cup \Omega = \Omega$
- f)  $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- g)  $A \cup \overline{A} = \Omega$
- h)  $A - B = A \cap \overline{B}$
- i)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- j)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- k)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- l)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

## 1.2 Definições de probabilidade

A probabilidade não é uma grandeza física mensurável, ou seja, não existe um instrumento capaz de “medir” a probabilidade de ocorrência de um evento. Por isso temos várias formas de definir probabilidade, cada uma com um conceito diferente sobre como podemos “medir” a probabilidade de um evento ocorrer. Em geral a percepção da probabilidade de ocorrência de um evento está associada ao conhecimento que temos do experimento (aleatório) no que o evento está inserido. Lembre-se, probabilidade não existe!!!

A primeira definição que estudaremos baseia-se no princípio de que podemos obter a probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  repetindo-se o experimento um número “infinito” sempre em iguais condições.

**Definição 14 (Definição frequentista de probabilidade)**

A probabilidade do evento  $A$  é dada por

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n},$$

onde  $n_A$  o número de ocorrências do evento  $A$  em  $n$  repetições independentes do experimento em questão

Como visto na definição 14 o princípio frequentista estabelece que a probabilidade  $\mathbb{P}(A)$  seria a *proporção limite* de ocorrência do evento  $A$ .

**Definição 15 (Definição clássica de probabilidade (DCP))**

Seja um espaço amostral  $\Omega$  composto por um número *finito* de eventos elementares *equiprováveis*:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}.$$

A probabilidade de ocorrência do evento  $A \subset \Omega$  é dada por:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde  $n(A)$  é o número de eventos elementares contidos em  $A$  e  $n(\Omega)$  é o número de eventos elementares no espaço amostral.

Em caso de um número *infinito enumerável* de eventos usamos limites para obter essa probabilidade e no caso de um espaço amostral composto por um número *infinito não enumerável* de eventos elementares será preciso associar o cálculo das probabilidades à medidas de intervalos, áreas e volumes. Nesse caso teremos a chamada *probabilidade geométrica*.

**Teorema 3 (Princípio da Inclusão e Exclusão)**

Sejam  $A_1, \dots, A_n$  subconjuntos de  $\Omega$ , então:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n n(A_i) - \sum_{i < j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} n\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

É interessante enunciar alguns casos particulares do princípio. Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de  $\Omega$ , então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Sejam  $A$  e  $B$  e  $C$  três eventos de  $\Omega$ , então:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

**Exercício 6:** Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de:

- a) Obter exatamente 2 caras?
- b) Obter pelo menos 2 caras?

**Exercício 7:** Seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum. Qual a probabilidade de que:

- a) A carta seja um ás e seja vermelha?
- b) A carta seja um ás ou seja vermelha?

**Exercício 8:** Suponhamos que eu lance simultaneamente um tetraedro (dado de quatro faces) e uma moeda. Qual é a probabilidade de ocorrer uma face par no tetraedro e sair coroa na moeda?

**Exercício 9:** Dois dados de cores diferentes são jogados simultaneamente.

- a) Qual a probabilidade de que a soma deles seja maior que sete?
- b) Qual a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual à três?



**Exercício 10:** De um grupo de  $n$  objetos escolhemos  $r$  ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de não sortearmos objetos repetidos?

**Exercício 11:** Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos 1 cara e 1 coroa?

**Exercício 12:** Uma urna contém 10 bolas identificadas como  $B_1 \dots B_{10}$ . Qual a probabilidade de que a bola sorteada tenha índice par? E qual a probabilidade do índice ser primo?

**Exercício 13:** Numa classe de 55 alunos, 21 praticam vôlei e basquete, 39 praticam vôlei e 33 praticam basquete. Um aluno da classe é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de o aluno escolhido praticar um e somente um desses esportes?

**Exercício 14:** Cinco homens e cinco mulheres estão dispostas em fila indiana. Qual a probabilidade de que:

- a) A primeira pessoa da fila seja homem?
- b) A primeira e a última pessoas da fila sejam homens?

**Exercício 15:** Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

### Definição 16 (Definição axiomática de probabilidade)

Uma função  $\mathbb{P}(\cdot)$ , com domínio no espaço amostral  $\Omega$ , é denominada probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

- i)  $\mathbb{P}(A) \geq 0$ ,  $\forall A \subset \Omega$ ;
- ii)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
- iii)  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ , com  $A_i \cap A_j = \emptyset$  sempre que  $i \neq j$ .

Algumas consequências dessa definição são:

- $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ . Portanto, usando as propriedades ii e iii,  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ;
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  (Monotonicidade);
- E da monotonicidade vem naturalmente que  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ .

### Teorema 4 (Regra da Adição de Probabilidades)

Sejam  $A_1, \dots, A_n$  eventos de  $\Omega$ , então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de  $\Omega$ , então:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Tabela 1.1: Preferências esportivas de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros

Sejam  $A$  e  $B$  e  $C$  três eventos de  $\Omega$ , então:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

**Exercício 16:** Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais?

**Exercício 17:** Sejam  $A$  e  $B$  eventos em um dado espaço amostral  $\Omega$ , tais que  $\mathbb{P}(A) = 2/5$  e  $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$ . Determine  $\mathbb{P}(B)$  tais que  $A$  e  $B$  sejam disjuntos.

**Exercício 18:** (Magalhães & Lima, 2015, p. 53). Sejam  $A$  e  $B$  eventos em um dado espaço amostral  $\Omega$ , tais que  $\mathbb{P}(A) = 1/5$ ,  $\mathbb{P}(B) = p$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$  e  $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/10$ . Determine o valor de  $p$ .

**Exercício 19:** Sejam  $A$  e  $B$  eventos em um espaço amostral  $\Omega$ , onde ocorrer  $B$  é três vezes mais provável que ocorrer  $A$ . Sabendo que  $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$  determine  $\mathbb{P}(A)$  e  $\mathbb{P}(B)$  quando:

- a)  $A$  e  $B$  são disjuntos
- b)  $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$ .

**Exercício 20:** Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais?

**Exercício 21:** (Morgado et al., 1991, p. 143). Um torneio é disputado por 4 times  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . É três vezes mais provável que  $A$  vença do que  $B$ , duas vezes mais provável que  $B$  vença do que  $C$  e é três vezes mais provável que  $C$  vença do que  $D$ . Quais as probabilidades de cada time vencer?

**Exercício 22:** Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7.

**Exercício 23:** Considere os dados da section 1.2. Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

- a) ser brasileira?
- b) preferir futebol?
- c) ser estrangeira e preferir natação?
- d) ser estrangeira ou preferir queimada?

### 1.2.1 Chance e probabilidade

Existe uma confusão muito grande entre os conceitos de *chance* e *probabilidade*, o senso comum trata esses dois conceitos como sinônimos, mas não o são. O conceito de chance de um evento  $A$  ocorrer remete à razão do número de eventos elementares contidos em  $A$  sobre o total de eventos elementares não contidos em  $A$ , fica implícito aqui que todos os eventos elementares contidos no espaço amostral composto por  $A$  são *equiprováveis*. Por exemplo, ao lançarmos um dado honesto a chance de ocorrer a face  $\square$  é de 1 para 5, ou seja, para evento onde ocorre o evento de  $A$  temos 5 eventos onde  $A$  não ocorre. A seguir apresentamos uma definição formal do conceito de chance.

#### Definição 17 (Chance de um evento)

A chance de um evento  $A$  qualquer ocorrer é definida como:

$$r(A) = \frac{n(A)}{n(\bar{A})}.$$

#### Teorema 5

A chance de um evento  $A$  qualquer ocorrer pode ser representada como:

$$r(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

A demonstração do teorema 5 é bastante simples e ficará a cargo do leitor como sugerido no exercício 24.

**Exercício 24:** Verifique o resultado apresentado no teorema 5.

**Exercício 25:** Considere um evento  $A$  tal que  $\mathbb{P}(A) = 0.3$ . Qual é a chance de  $A$  ocorrer?

**Exercício 26:** Considere um evento  $A$  tal que a sua chance de ocorrer é de 3 para 1. Qual é a probabilidade de  $A$ ?

## 1.3 A Regra dos Complementares

#### Teorema 6 (A Regra dos Complementares)

Para quaisquer eventos  $A$  e  $B$ :

- i)  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$
- ii)  $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B})$
- iii)  $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

*Demonstração.* Para quaisquer eventos  $A$  e  $B$ :

1. Note que  $A$  e  $\bar{A}$  são eventos disjuntos e  $A \cup \bar{A} = \Omega$ . Aplicando a segunda e a terceira propriedades das funções de probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup \bar{A}) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \\ \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \\ \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(\bar{A}).\end{aligned}$$

2. Note que  $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$ , logo  $A \cap B$  e  $\overline{A \cup B}$  são complementares, logo esse resultado decorre diretamente do resultado 1.
3. Note que  $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ , mas  $A \cap B$  e  $\overline{A} \cap B$  são disjuntos, logo  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ .

□

**Exercício 27:** Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?

**Exercício 28:** Dois dados são lançados independentemente. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares?

**Exercício 29:** A probabilidade de um cavalo vencer três ou menos corridas é de 58%; a probabilidade de ele vencer três ou mais corridas é de 71%. Qual é a probabilidade do cavalo vencer exatamente três corridas?

**Exercício 30:** Uma caixa contém nove peças das quais três são defeituosas. Sorteamos duas peças. Qual a probabilidade de não escolhermos duas peças defeituosas?

**Exercício 31:** Magalhães & Lima (2015, p. 53). Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 20 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

- a) Ser esportista.
- b) Ser esportista e aluno da biologia e noturno.
- c) Não ser da biologia.
- d) Ser esportista ou aluno da biologia.
- e) Não ser esportista, nem aluno da biologia.

**Exercício 32:** Weiss (2012, p. 147). Em um jogo de dados são jogados dois dados honestos de seis faces. Considere os eventos:

A: “A soma das faces é 7.”

B: “A soma das faces é 11.”

C: “A soma das faces é 2.”

D: “A soma das faces é 3.”

E: “A soma das faces é 12.”

F: “A soma das faces é 8.”

G: “As faces são iguais.”

- a) Determine a probabilidade de todos os eventos.
- b) O jogador vence esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 7 ou 11. Calcule a probabilidade desse evento.
- c) O jogador perde esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 2, 3 ou 12. Calcule a probabilidade desse evento.
- d) Qual a probabilidade das faces serem diferentes?
- e) Qual a probabilidade da soma ser 8 ou das faces serem iguais?

**Exercício 33:** Considerando os dados da section 1.2. Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. não ser brasileira e preferir de futebol?
2. não ser estrangeira e nem preferir de vôlei?
3. não ser estrangeira ou não preferir de queimada?

## 1.4 Probabilidade condicional e independência

### Definição 18 (Regra do produto de probabilidades)

Dados os eventos  $A$  e  $B$ , a *probabilidade condicional* de  $A$  dado  $B$ ,  $\mathbb{P}(A|B)$ , é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{se } \mathbb{P}(B) > 0$$

e

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \quad \text{se } \mathbb{P}(B) = 0,$$

onde  $\mathbb{P}(B)$  é a probabilidade *à priori* e  $\mathbb{P}(A|B)$  é a probabilidade *à posteriori*.

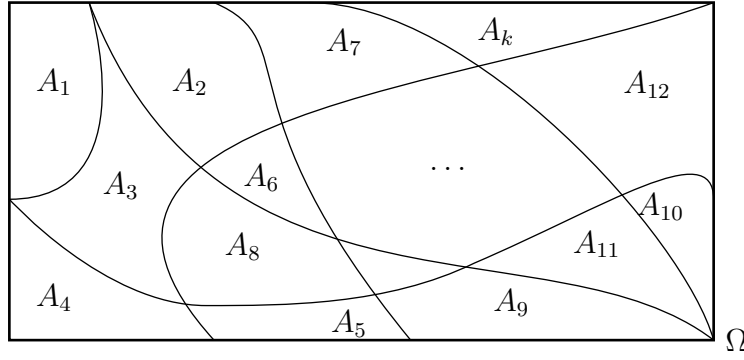


Figura 1.4: Particionamento do espaço amostral  $\Omega$ .

### Teorema 7 (Regra do produto de probabilidades)

Dados os eventos  $A$  e  $B$  então

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) \quad (1.5)$$

**Exercício 34:** Considerando os dados da section 1.2. Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?
2. sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?
3. sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?

### Definição 19 (Partição do espaço amostral)

O conjunto  $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  é uma partição do espaço amostral se seus elementos não têm interseção entre si e se a união de seus elementos é o espaço amostral. Isto é,

$$\text{i) } \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

$$\text{ii) } A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

Sejam  $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  e  $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  duas partições de  $\Omega$ . Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  por um diagrama de árvores. No caso particular onde  $\mathcal{P}_1 = \{A, \bar{A}\}$  e  $\mathcal{P}_2 = \{B, \bar{B}\}$ , um diagrama adequado é apresentado na section 1.4.

**Exercício 35:** Morgado et al. (1991, p 161). Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com  $\mathbb{P}\{1\} = 1/2$  e  $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = 1/10$ . Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

### Definição 20 (Eventos independentes)

Dois eventos  $A$  e  $B$  são *independentes* se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

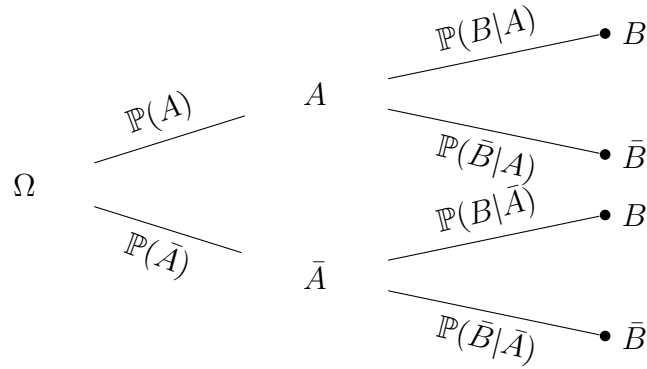


Figura 1.5: Árvore de probabilidades.

Três eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são *independentes* se, e somente se:

- i)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- ii)  $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
- iii)  $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
- iv)  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são *mutuamente independentes*.

**Exercício 36:** Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição?

**Exercício 37:** Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retirarmos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição?

**Exercício 38:** Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela?

**Exercício 39:** Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequência amarela-verde-roxa considerando que:

- a) o sorteio é sem reposição
- b) o sorteio é com reposição

**Exercício 40:** Morgado et al. (1991, p 166). Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja  $A$  o evento “O ás de copas está entre as treze cartas” e  $B$  o evento “As treze cartas são do mesmo naipe”. Verifique se  $A$  e  $B$  são independentes.

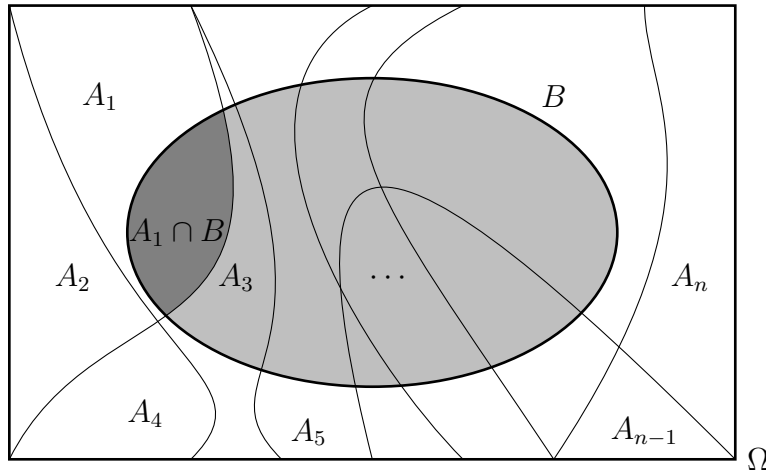


Figura 1.6: Decomposição do evento  $B$  como união disjunta dos eventos  $A_1 \cap B, \dots, A_n \cap B$ .

**Exercício 41:** (Morgado et al., 1991, p 169). Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros  $A$  e  $B$ . Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de  $A$  e de  $B$  são  $1/3$  e  $2/3$  respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador  $ABA$  ou  $BAB$ ?

**Exercício 42:** (Morgado et al., 1991, p 157). Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:

- escolhermos aleatoriamente as sete respostas;
- escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas “verdadeiro” do que “falso”.

**Exercício 43:** (Morgado et al., 1991, p 162) Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de  $8/10$ . A probabilidade de que o correio não a perca é de  $9/10$ . A probabilidade de que o carteiro a entregue é de  $9/10$ . Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

### 1.4.1 Teorema da probabilidade total

#### Teorema 8 (Teorema da probabilidade total)

Seja  $B$  um evento contido numa união de eventos disjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  em um espaço amostral  $\Omega$  tais que  $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \dots, \mathbb{P}(A_n) > 0$ . Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i). \quad (1.6)$$

Para demonstrarmos esse resultado note  $B$  pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em  $\Omega$  da seguinte forma:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$



Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)] \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \dots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

Portando o teorema da probabilidade total está demonstrado:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

**Exercício 44:** Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

**Exercício 45:** (Ross, 2010, p. 66) Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano.

- a) Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano?
- b) Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade de que o indivíduo tenha sofrido seu primeiro acidente?

**Exercício 46:** Três candidatos: João, Maria e Pedro, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas probabilidades de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição?

**Exercício 47:** (Magalhães & Lima, 2015, p. 58) Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda  $F_1$ , 30% de uma fazenda  $F_2$  e 50% de  $F_3$ . Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por  $F_1$  estava adulterado por adição de água, enquanto que para  $F_2$  e  $F_3$ , essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado?

### 1.4.2 Teorema de Bayes

#### Teorema 9 (Teorema de Bayes)

Se  $B$  é um evento contido numa união de eventos disjuntos  $A_1, \dots, A_n$  e  $\mathbb{P}(A_1) > 0, \dots, \mathbb{P}(A_n) > 0$ . Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se  $\mathbb{P}(B) > 0$ , então, para  $i = 1, \dots, n$ :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}.$$

**Exercício 48:** (Morgado et al., 1991, p 159). Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:

- Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido?
- Qual a probabilidade do pênalti ser convertido?
- Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense?

**Exercício 49:** Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A probabilidade de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A probabilidade de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico?

**Exercício 50:** (Morgado et al., 1991, p. 164). Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de  $4/10$ . Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade  $6/10$  e em um dia sem chuva com probabilidade de  $4/10$ .

- Qual a probabilidade da equipe ganhar?
- Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia?

**Exercício 51:** (Morgado et al., 1991, p. 165). Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade  $1/3$  de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame.

- Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular?
- Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.:

**Exercício 52:** Três urnas  $I$ ,  $II$  e  $III$  contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna  $I$ ?

**Exercício 53:** (Ross, 2010, p. 102). Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:

- a) A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro?
- b) A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato.

**Exercício 54:** Três urnas  $I$ ,  $II$  e  $III$  contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna  $I$ ?

**Exercício 55:** Duas máquinas  $A$  e  $B$  produzem 3 mil peças em um dia. A máquina  $A$  produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina  $B$  produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina  $A$ ?

**Exercício 56:** Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta?

**Exercício 57:** Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo  $A$  e dez amostras de solo tipo  $B$ . Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.

- a) Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo  $B$  que são selecionadas e quais suas probabilidades.
- b) Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo  $A$  ou todas as dez amostras do tipo  $B$ ?
- c) Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo  $B$  selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média?

**Exercício 58:** Dentre os estudantes João, Pedro e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas. qual a probabilidade de:

- a) Manuel nunca ser escolhido?
- b) Um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?



**Exercício 59:** (Bussab & Morettin, 2013, p. 128) Os colégios  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se o resultado for  $RRRMMMMM$  ( $R$  para rapaz e  $M$  para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio  $C$ ?

**Exercício 60:** Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

**Exercício 61:** (Bussab & Morettin, 2013, p. 126). Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

**Exercício 62:** (Ross, 2010, p. 67). Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha  $n$  alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é  $p$ . Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente?

**Exercício 63:** Problema de Monty Hall - Selvin et al. (1975). Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ : atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe  $P_1$ , mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta  $P_3$  e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

**Exercício 64:** Problema do Aniversário - Mckinney (1966). Considere  $k$  pessoas numa sala.

- Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
- A partir de qual valor de  $k$  essa probabilidade é maior que 0,5?

## Parte II

### Introdução à estatística



# Referências Bibliográficas

- Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.
- Durrett, R. (2009). *Elementary Probability for Applications*.
- Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.
- Mckinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly* 73(4), 385–387.
- Morgado, A. C., J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, & P. Fernandez (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade* (9 ed.). Coleção do Professor de Matemática. SBM.
- Ross, S. M. (2010). *A First Course in Probability* (8 ed.). New York: Pearson Hall.
- Selvin, S., M. Bloxham, A. I. Khuri, M. Moore, R. Coleman, G. R. Bryce, J. A. Hagans, T. C. Chalmers, E. A. Maxwell, & G. N. Smith (1975). Letters to the editor. *The American Statistician* 29(1), 67–71.
- Weiss, N. A. (2012). *Introductory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.





# Soluções

## Solução do Exercício 1 na página 6:

Faça você mesmo.

## Solução do Exercício 2 na página 6:

Faça você mesmo.

## Solução do Exercício 3 na página 8:

- a) Seja  $A = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$  um espaço amostral para o experimento de lançar uma moeda uma única vez. Um espaço amostral adequado para o experimento de lançar uma moeda duas vezes consecutivas é  $\Omega = A \times A = \{(\text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{coroa})\}$  e  $n(\Omega) = 4$ .
- b) Faça você mesmo
- c) Faça você mesmo
- d) Faça você mesmo
- e) Faça você mesmo
- f) Faça você mesmo
- g) Faça você mesmo
- h) Faça você mesmo
- i) Faça você mesmo

## Solução do Exercício 4 na página 9:

Faça você mesmo.

## Solução do Exercício 5 na página 10:

- a) Disjuntos
- b) Disjuntos
- c) Disjuntos
- d) Não disjuntos
- e) Não disjuntos
- f) Não disjuntos

**Solução do Exercício 6 na página 12:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 7 na página 12:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 8 na página 12:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 9 na página 12:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 10 na página 13:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 11 na página 13:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 12 na página 13:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 13 na página 13:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 14 na página 13:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 15 na página 13:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 20 na página 14:**

Seja  $F = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$  o conjunto de todas as faces de um dado. Posto isso, um espaço amostral adequado para o experimento de lançar dois dados simultaneamente é dado por  $\Omega = F \times F$ . Defina os eventos  $A$ : “Obter soma dos pontos igual à oito” e  $B$ : “Obter dois números iguais”. Com base no espaço amostral  $\Omega$  construído podemos descrever os eventos  $A$  e  $B$  como:

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (6, 2), (5, 3)\}$$

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

O evento de interesse é  $A \cup B$ . Note que  $A \cap B = \{(4, 4)\}$ . Usando a DCP e o teorema 1:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

Dessa forma:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

**Solução do Exercício 17 na página 14:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 18 na página 14:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 19 na página 14:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 20 na página 14:**

Seja  $F = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$  o conjunto de todas as faces de um dado. Posto isso, um espaço amostral adequado para o experimento de lançar dois dados simultaneamente é dado por  $\Omega = F \times F$ . Defina os eventos  $A$ : “Obter soma dos pontos igual à oito” e  $B$ : “Obter dois números iguais”. Com base no espaço amostral  $\Omega$  construído podemos descrever os eventos  $A$  e  $B$  como:

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (6, 2), (5, 3)\}$$

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

O evento de interesse é  $A \cup B$ . Note que  $A \cap B = \{(4, 4)\}$ . Usando a DCP e o teorema 1:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

Dessa forma:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

**Solução do Exercício 22 na página 14:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 22 na página 14:** $63/200$ **Solução do Exercício 23 na página 14:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 24 na página 15:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 25 na página 15:** $63/200$ **Solução do Exercício 26 na página 15:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 27 na página 16:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 28 na página 16:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 29 na página 16:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 30 na página 16:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 31 na página 16:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 32 na página 17:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 33 na página 17:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 34 na página 18:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 35 na página 18:**

9/10

**Solução do Exercício 36 na página 19:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 37 na página 19:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 38 na página 19:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 39 na página 19:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 40 na página 19:**

Os eventos  $A$  e  $B$  são independentes.

**Solução do Exercício 44 na página 21:**

Surpreendentemente é a sequência ABA!!!

**Solução do Exercício 45 na página 21:**

Surpreendentemente é a sequência ABA!!!

**Solução do Exercício 44 na página 21:**

25/44

**Solução do Exercício 44 na página 21:**

Resp.: 0,325

**Solução do Exercício 45 na página 21:**

a) 0,26

b) 0,46

**Solução do Exercício 46 na página 21:**

0,71

**Solução do Exercício 48 na página 22:**

Faça você mesmo

**Solução do Exercício 48 na página 22:**

- a) 0,32.
- b) 0,46.
- c) 0,88.

**Solução do Exercício 50 na página 22:**

$$\frac{2}{3}$$

**Solução do Exercício 50 na página 22:**

- a) 0,48.
- b)  $\frac{1}{2}$ .

**Solução do Exercício 51 na página 22:**

- a)  $\frac{8}{15}$ .
- b) 0,44.

**Solução do Exercício 52 na página 23:**

$$\frac{5}{24}$$

**Solução do Exercício 53 na página 23:**

- a) 0,0792.
- b) 0,264.

**Solução do Exercício 54 na página 23:**

$$\frac{5}{24}$$

**Solução do Exercício 55 na página 23:**

$$\frac{3}{5}$$

**Solução do Exercício 57 na página 23:**

$$\frac{4}{7}$$

**Solução do Exercício 57 na página 23:**

- a)  $X \in \{5, \dots, 10\}$
- b) 0,0326
- c) 0,6966

**Solução do Exercício 58 na página 23:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 59 na página 24:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 64 na página 24:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 62 na página 24:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 62 na página 24:**

$$\frac{np}{1 + (n-1)p}$$

**Solução do Exercício 64 na página 24:**

Faça você mesmo.

**Solução do Exercício 64 na página 24:**

Faça você mesmo.

# Glossário

**DCP** definição clássica de probabilidade 11





# Símbolos

$\mathbb{P}(E)$  probability of a random variable  $E$  11–15, 22, 27