1.4 Probabilidade condicional e independência

Considere um experimento aleatório que possa ser separado em etapas sucessivas. A informação do que ocorreu nas primeiras etapas pode alterar as probabilidades dos eventos associados as etapas seguintes. Numa situação, a probabilidade é *condicionada* à informação do resultado dos experimentos anteriores. Na Definição 18 é introduzido o conceito de *probabilidade condicional*, o qual nos mostra como calcular à probabilidade de um evento A assumindo que, previamente, já ocorreu o evento B. Essa definição é útil mesmo quando o evento B tem probabilidade nula de se realizar.

Definição 18 (Probabilidade Condicional)

Dados os eventos A e B, a *probabilidade condicional* de A dado B, $\mathbb{P}(A|B)$, é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{se } \mathbb{P}(B) > 0$$

e

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \quad \text{se } \mathbb{P}(B) = 0,$$

onde $\mathbb{P}(B)$ é a probabilidade *à priori* e $\mathbb{P}(A|B)$ é a probabilidade *à posteriori*.

No Teorema 9 vemos uma consequência imediata da definição de probabilidade condicional. Essa é a chamada *regra do produto de probabilidades* que pode ser usada para obter a probabilidade de dois eventos ocorrerem simultaneamente.

Teorema 9 (Regra do produto de probabilidades)

Dados os eventos A e B, então

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

Demonstração. A demonstração decorre diretamente da definição de probabilidade condicional. □

É importante notar que na regra do produto de probabilidades o condicionamento pode ser relativo à qualquer um dos eventos. Isso significa que podemos expressar essa regra como:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

Exercício 35: Considerando os dados da Tabela 1.1. Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?
2. sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?
3. sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?

Na Definição 19 é formalizado o conceito de *partição* de um espaço amostral. Uma partição é um "retalhamento" do espaço amostral em uma determinada quantidade de eventos disjuntos. A Figura 1.4 ilustra uma partição de tamanho k para um espaço amostral Ω, todos os eventos A_i são, por definição, disjuntos dois a dois.

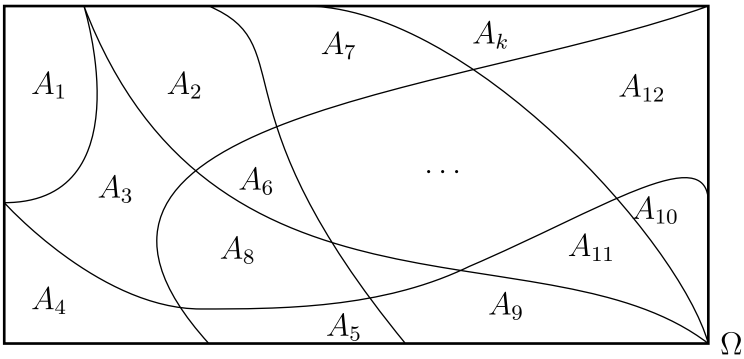

Figura 1.4: Particionamento do espaço amostral Ω.

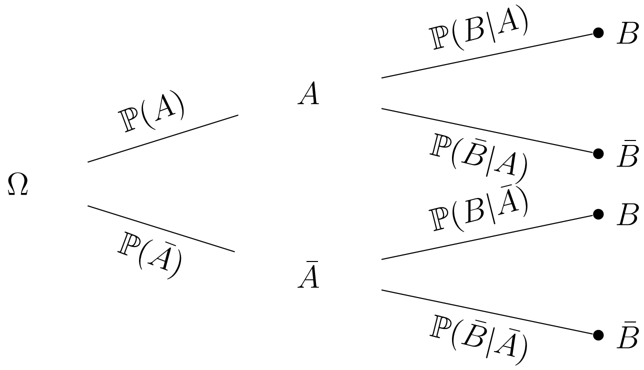

Figura 1.5: Árvore de probabilidades.

Definição 19 (Partição do espaço amostral)

O conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma partição do espaço amostral se seus elementos não têm interseção entre si e se a união de seus elementos é o espaço amostral. Isto é,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \tag{1.27}$$

e

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j. \tag{1.28}$$

Sejam $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2 \ldots B_m\}$ duas partições de Ω. Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por um diagrama de árvores. No caso particular onde $\mathcal{P}_1 = \{A, \overline{A}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B, \overline{B}\}$, um diagrama adequado é apresentado na Figura 1.5.

Exercício 36: Morgado et al. (1991, p 161). Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com $\mathbb{P}\{1\} = 1/2$ e $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Definição 20 (Eventos independentes)

Dois eventos A e B são *independentes* se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Três eventos A, B e C são *independentes* se, e somente se:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são *mutuamente independentes*.

Exercício 37: Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição?

Exercício 38: Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retiramos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição?

Exercício 39: Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela?

Exercício 40: Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequencia amarela-verde-roxa considerando que:

a) o sorteio é sem reposição

b) o sorteio é com reposição

Exercício 41: Morgado et al. (1991, p 166). Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento "O ás de copas está entre as treze cartas" e B o evento "As treze cartas são do mesmo naipe". Verifique se A e B são independentes.

Exercício 42: (Morgado et al., 1991, p 169). Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $1/3$ e $2/3$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador ABA ou BAB?

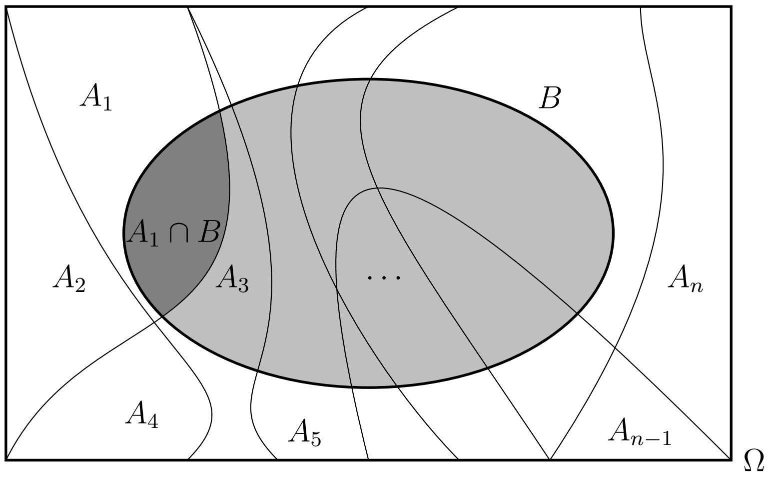

Figura 1.6: Decomposição do evento B como união disjunta dos eventos $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$.

Exercício 43: (Morgado et al., 1991, p 157). Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:

a) escolhermos aleatoriamente as sete respostas;

b) escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas "verdadeiro" do que "falso".

Exercício 44: (Morgado et al., 1991, p 162) Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $8/10$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $9/10$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $9/10$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

1.5 Teorema da probabilidade total

No Teorema 10 será apresentado um método que nos permite calcular a probabilidade de ocorrência de um evento sempre que for possível decompor esse evento em uma união finita de eventos disjuntos. A Figura 1.6 ilustra esse conceito. Um evento B pode ser *decomposto* numa união finita de eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ quando poder ser expresso na forma:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B). \tag{1.29}$$

Teorema 10 (Teorema da probabilidade total)

Seja B um evento contido numa união finita de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em um espaço amostral Ω tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i). \tag{1.30}$$

Demonstração. Para demonstrarmos esse resultado note que B pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em Ω da forma (1.29). Aplicando o terceiro axioma da