Curso de Estatística e Probabilidade

DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

Data da Atualização: 17 de maio de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso de Probabilidade e Estatística no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

Probabilidade Condicional e Independência

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Probabilidade Condicional

Dados os eventos A e B a probabilidade condicional de A dado B, $\mathbb{P}(A|B)$, é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A), & \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(B)$ é a probabilidade à priori

$\mathbb{P}(A|B)$ é a probabilidade à posteriori

Regra do Produto de Probabilidades

Dados os eventos A e B:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

$$D = \{\text{“O item é defeituoso”}\}$$
$$F = \{\text{“O item tem falhas na superfície”}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado $\bar{F}$? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F? Qual? Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).

Note que $\mathbb{P}(F) > 0$. Desse modo temos que:

$$\mathbb{P}(D|F) = \frac{10}{40} = 0,25 = 25\% \qquad \text{e} \qquad \mathbb{P}(D|\bar{F}) = \frac{18}{360} = 0,05 = 5\%$$

Pelo resultado obtido fica sugerida uma possível relação entre falhas na superfície e itens funcionalmente defeituosos que deveria ser investigada. Há indícios de que a presença de falhas na superfície aumenta a probabilidade do item ser defeituoso.

Exercício

Semana 4 - Exercício 1

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se que uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a) sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?

b) sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?

c) sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?

d) sabendo que a pessoa não é estrangeira, prefira futebol? Que conclusão você pode tirar comparando esse item com o item a)?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Estágios de Usinagem

A probabilidade de que o primeiro estágio de uma operação numericamente controlada, de usinagem para pistões com alta rpm atenda as especificações é igual à 0,90. Falhas são causadas por variações no metal, alinhamento de acessórios, condição de lâmina de corte, vibração e condições ambientais. Dado que o primeiro estágio atende as especificações, a probabilidade de que o segundo estágio atenda as especificações é de 0,95. Qual é a probabilidade de ambos os estágios atenderem as especificações?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 26) (Adaptado).

Considere os eventos:

$$A = \{\text{“O primeiro estágio atende as especificações”}\}$$
$$B = \{\text{“O segundo estágio atende as especificações”}\}$$

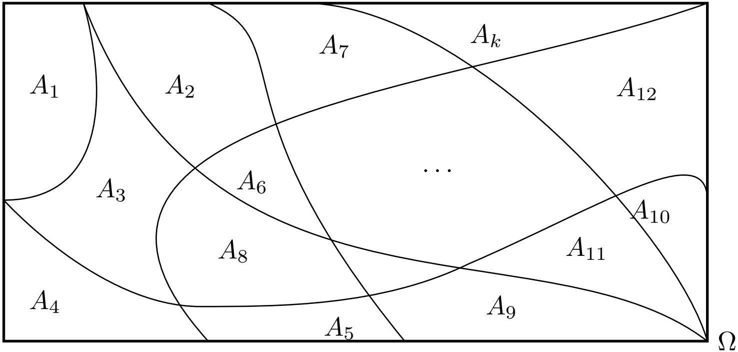
Pelo enunciado do problema temos que: $\mathbb{P}(A) = 0,9$ e $\mathbb{P}(B|A) = 0,95$. Desejamos encontrar $\mathbb{P}(A \cap B)$. Note que a regra do produto estabelece que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855$$

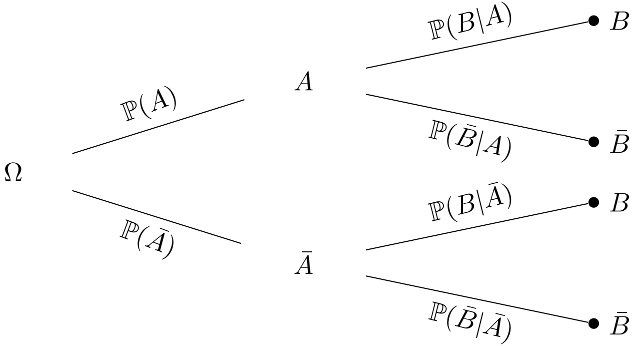
Partição do Espaço Amostral

O conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ de eventos do espaço amostral Ω é uma partição do espaço amostral se:

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$



Sejam $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2 \ldots B_m\}$ duas partições de Ω. Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por um diagrama de árvores. No caso particular onde $\mathcal{P}_1 = \{A, \overline{A}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B, \overline{B}\}$, um diagrama adequado seria:



Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

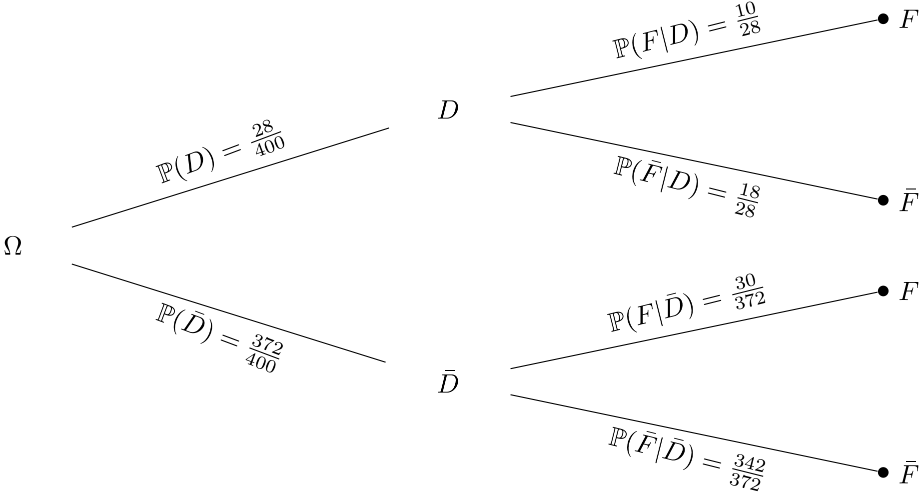
$$D = \{\text{“O item é defeituoso”}\}$$
$$F = \{\text{“O item tem falhas na superfície”}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

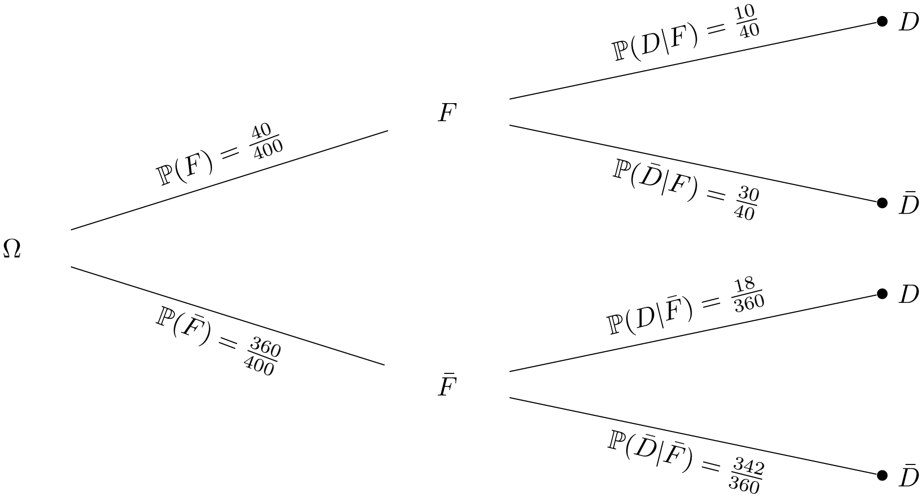
Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado $\bar{F}$? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F? Qual?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás



INSTITUTO
FEDERAL
Goiás



INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 2**

Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com $\mathbb{P}\{1\} = 1/2$ e $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Resp.: $9/10$ Morgado et al. (1991, p 161)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Independência dos complementares

Se dois eventos A e B são independentes seus complementares também serão.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})$$

Três eventos independentes

Três eventos A, B e C são independentes se, e somente se:

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
3. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são mutuamente independentes.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem com reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de dois itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados são repostos. Ou seja, cada item pode ser sorteado mais de uma vez.

a) Qual a probabilidade do segundo item selecionado ser defeituoso, dado que o primeiro item a ser selecionado é defeituoso?

b) Qual a probabilidade de que ambas as peças sejam defeituosas?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Considere os eventos:

$$A = \{\text{“O primeiro item é defeituoso”}\} \qquad \text{e} \qquad B = \{\text{“O segundo item é defeituoso”}\}$$

Precisamos determinar $\mathbb{P}(B|A)$ e $\mathbb{P}(A \cap B)$. Num sorteio com reposição os sucessivos sorteios sempre ocorrem nas mesmas condições, portanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) = {}^{3}/_{50}$. E pela Regra do Produto temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{3}{50} \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{2500}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 3**

Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição?

Exercício **Ref.:HN3L**

Dados os eventos A, B e C em um mesmo espaço amostral, mostre que as chamadas *regras da cadeia* de probabilidades

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$$

e

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C).$$

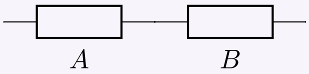
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Circuito em Série

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$A = \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}$$
$$B = \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 8/9$ e $\mathbb{P}(B) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B. Há somente uma rota que depende do funcionamento de ambos os dispositivos. Então a probabilidade do circuito operar é:

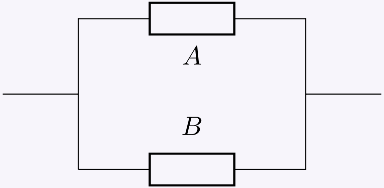
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}.$$

Exemplo: Circuito em Paralelo

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$A = \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}$$
$$B = \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 8/9$ e $\mathbb{P}(B) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B. Nesse caso haverá uma rota se ao menos um dos dispositivos funcionar, ou seja o circuito opera quando o evento $A \cup B$ ocorre, então a probabilidade do circuito operar é $\mathbb{P}(A \cup B)$, mas não é tão simples calcular essa probabilidade diretamente. Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) \qquad \text{e} \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Mas se os eventos A e B são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = {}^{8}/_{9} \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = {}^{1}/_{9}$ e $\mathbb{P}(B) = {}^{9}/_{10} \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = {}^{1}/_{10}$. Portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{89}{90}$$

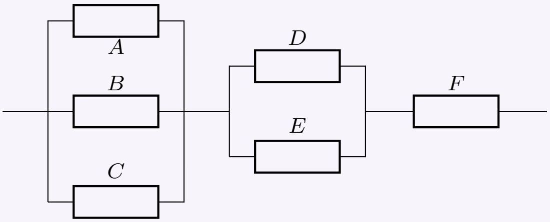
Portando o circuito opera com probabilidade ${}^{89}/_{90}$.

Exemplo: Circuito "Avançado"

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

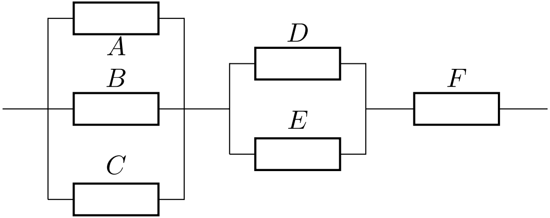
$$A = \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}$$
$$B = \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}$$
$$C = \text{“O dispositivo } C \text{ funcionou normalmente”}$$
$$D = \text{“O dispositivo } D \text{ funcionou normalmente”}$$
$$E = \text{“O dispositivo } E \text{ funcionou normalmente”}$$
$$F = \text{“O dispositivo } F \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 6/7$, $\mathbb{P}(B) = 4/5$, $\mathbb{P}(C) = 2/3$, $\mathbb{P}(D) = 5/6$, $\mathbb{P}(E) = 7/8$ e $\mathbb{P}(F) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

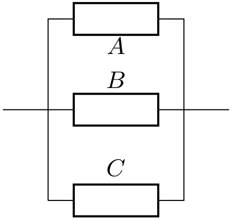
Assuma que o funcionamento de todos os dispositivos seja independente. Para resolver esse problema é necessário separar o circuito em módulos. Vamos definir o módulo M_1 como sendo formado pelos componentes A, B e C. O módulo M_2 como sendo formado pelos componentes D, E. Note que os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série.



Portanto a solução desse exercício será composta de três etapas:

1. Analisar a probabilidade do módulo M_1 funcionar;
2. Analisar a probabilidade do módulo M_2 funcionar;
3. Analisar a probabilidade do circuito formado pelos módulos M_1 e M_2 e a componente F operar.

Note que o módulo 1 é composto por três componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_1 = A \cup B \cup C$ ocorrer.



Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) \qquad \text{e} \qquad \overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

Mas se os eventos A, B e C são independentes os seus complementares também serão:

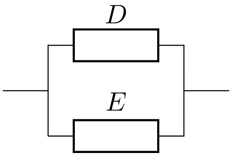
$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{C})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = 6/7 \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = 1/7$, $\mathbb{P}(B) = 4/5 \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = 1/5$ e $\mathbb{P}(C) = 2/3 \implies \mathbb{P}(\bar{C}) = 1/3$. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_1) = 1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{104}{105}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que o módulo 2 é composto por duas componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_2 = D \cup E$ ocorrer.



Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) \qquad \text{e} \qquad \overline{D \cup E} = \bar{D} \cap \bar{E}$$

Deste modo temos que:

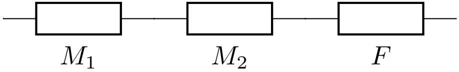
$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D} \cap \bar{E})$$

Mas se os eventos D e E são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D}) \cdot \mathbb{P}(\bar{E})$$

Note que $\mathbb{P}(D) = {}^{5}/_{6} \implies \mathbb{P}(\bar{D}) = {}^{1}/_{6}$ e $\mathbb{P}(E) = {}^{7}/_{8} \implies \mathbb{P}(\bar{E}) = {}^{1}/_{8}$. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{47}{48}.$$



Como comentado anteriormente os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série. Dessa forma temos que o circuito funcionará se o evento $M_1 \cap M_2 \cap F$ ocorrer. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap F) = \mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(M_2) \cdot \mathbb{P}(F) = \frac{104}{105} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{9}{10} = \frac{611}{700}$$

Logo o circuito funcionará com probabilidade $\dfrac{611}{700} \approx 0.872857\ldots$

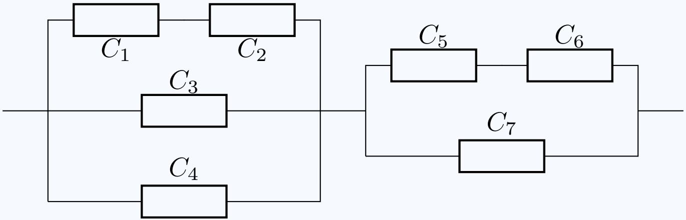
Exercício

Semana 4 - Exercício 4

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$C_i = \text{“A componente } i \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(C_i) = \dfrac{100 - i}{100}$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Exercício **Ref.:25KL**

Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retiramos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 5**

Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela?

Exercício

Semana 4 - Exercício 6

Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequencia amarela-verde-roxa considerando que:

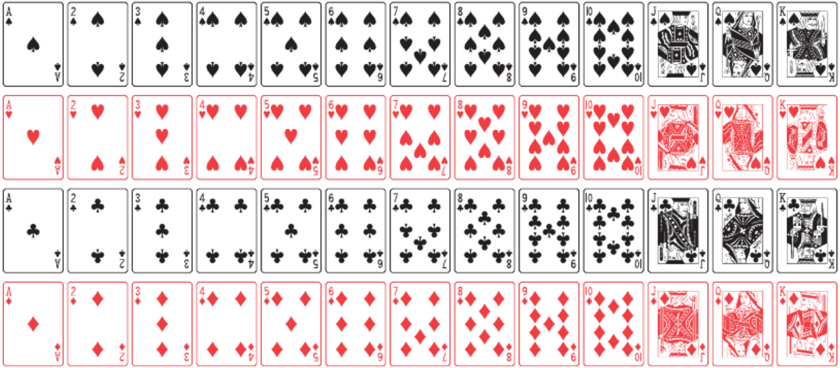
a) o sorteio é sem reposição

b) o sorteio é com reposição

Exercício **Ref.: Ref.:J42K**

Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento "O ás de copas está entre as treze cartas" e B o evento "As treze cartas são do mesmo naipe". Verifique se A e B são independentes.

Morgado et al. (1991, p 166)



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:MZ2O**

Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $^1/_3$ e $^2/_3$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador ABA ou BAB?

Morgado et al. (1991, p 169) Resp.: Surpreendentemente é a sequência ABA!!!

Exercício

Ref.:HNY6

Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:

a) escolhermos aleatoriamente as sete respostas;

b) escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas "verdadeiro" do que "falso".

Morgado et al. (1991, p 157)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:MK3K**

Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $8/10$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $9/10$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $9/10$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

Morgado et al. (1991, p 162) Resp.: $25/44$

Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total

Seja B um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em um espaço amostral Ω tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

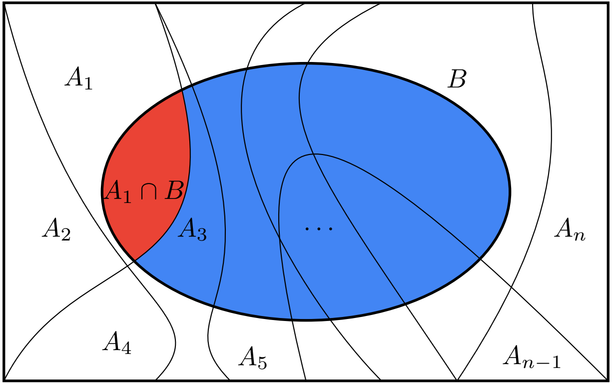
Caso o evento B esteja numa união de apenas dois eventos disjuntos A e $\bar{A}$, então:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B|\bar{A})$$

Dessa forma se $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B|\bar{A}) = p$ então $\mathbb{P}(B) = p$ e, consequentemente, os eventos A e B são independentes, pois $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Para demonstrarmos o Teorema da Probabilidade Total note que B pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em Ω da seguinte forma:



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

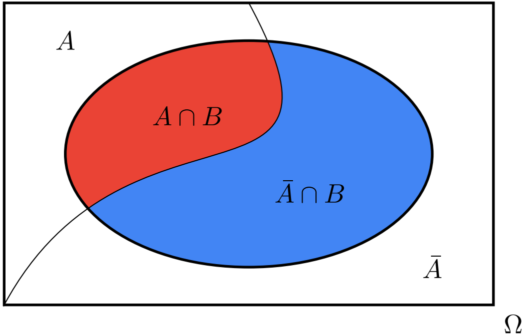
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

Portando o teorema da probabilidade total está demonstrado:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

O evento B está contido numa união de eventos disjuntos compostos por A e $\bar{A}$.



$$B = ({\color{red}A \cap B}) \cup ({\color{blue}\bar{A} \cap B})$$

Exemplo: Contaminação de Semicondutores

Considere a tabulação que relaciona o nível de contaminação com suas respectivas probabilidades de falha do nível correspondente. A informação é resumida aqui:

Probabilidade de Falha	Nível de Contaminação	Probabilidade do Nível
0,1	Alto	0,2
0,005	Não Alto	0,8

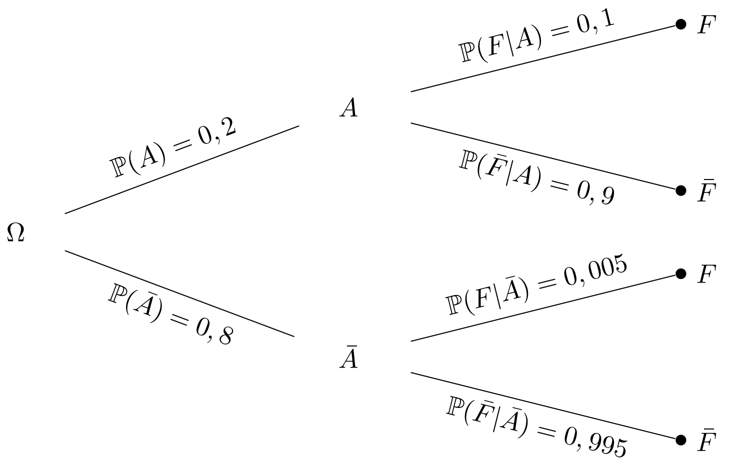
Qual a probabilidade do item falhar?

Sejam os eventos:

$$A = \{\text{“O } \textit{chip} \text{ é exposto a altos níveis de contamização”}\} \qquad \text{e} \qquad F = \{\text{“O } \textit{chip} \text{ falha”}\}$$

Pela tabulação acima temos as seguintes probabilidades: $\mathbb{P}(F|A) = 0,1$, $\mathbb{P}(F|\bar{A}) = 0,005$, $\mathbb{P}(A) = 0,2$ e $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,8$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás



O Teorema da Probabilidade Total nos permite escrever:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,005 \cdot 0,8 = 0,024$$

Note que esse valor coincide com a média ponderada das duas probabilidades de falha.

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de dois itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Sejam os eventos:

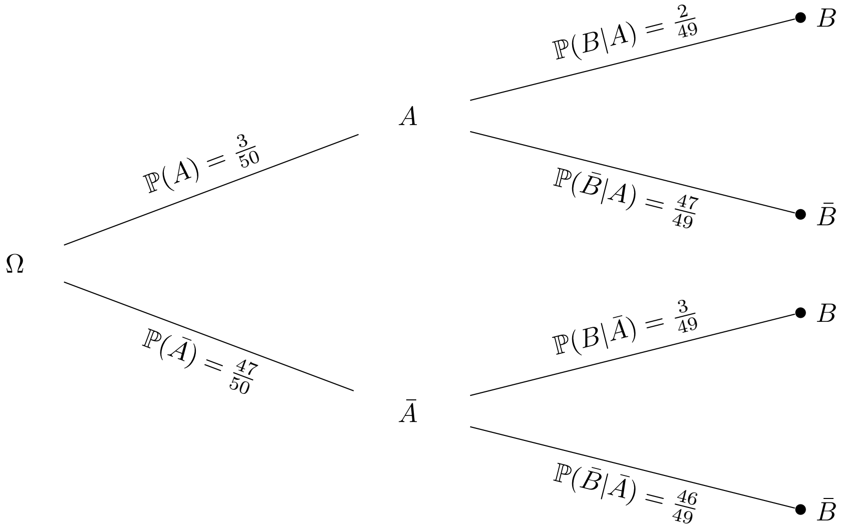
$$A = \text{“O primeiro item sorteado é defeituoso”}$$
$$B = \text{“O segundo item sorteado é defeituoso”}$$

Determine a probabilidade de que o segundo item selecionado seja defeituoso.

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 28) (Adaptado).

Desejamos encontrar $\mathbb{P}(B)$. Note que o evento B é dependente do evento A, ou seja $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B|\bar{A})$. Pelo Teorema da Probabilidade Total temos que:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B|\bar{A})$$



Desse modo:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} + \frac{47}{50} \cdot \frac{3}{49} = \frac{144}{1225} \approx 0.11755102\ldots$$

Exercício **Semana 5 - Exercício 1**

Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida? (Faça o diagrama de árvores)

Resp.: 0,325

Exercício

Semana 5 - Exercício 2

Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano. (Faça o diagrama de árvores)

- (a) Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano? Resp.: 0,26
- (b) Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade de que o indivíduo tenha sofrido seu primeiro acidente? Resp.: 0,46

Ross (2010, p. 66)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 5 - Exercício 3**

Três candidatos: João, Maria e Leonel, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição? (Faça o diagrama de árvores) Resp.: 0,71

Ross (2010, p. 66)

Exercício

Semana 5 - Exercício 4

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma fazenda F_2 e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado? (Faça o diagrama de árvores)

Magalhães & Lima (2015, p. 58)

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

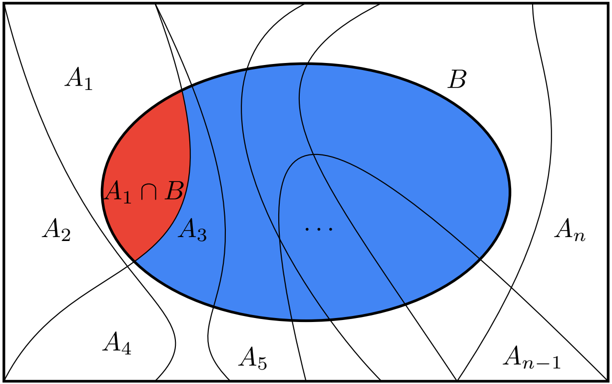
Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e $\mathbb{P}(A_1) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então, para $i = 1, \ldots, n$:

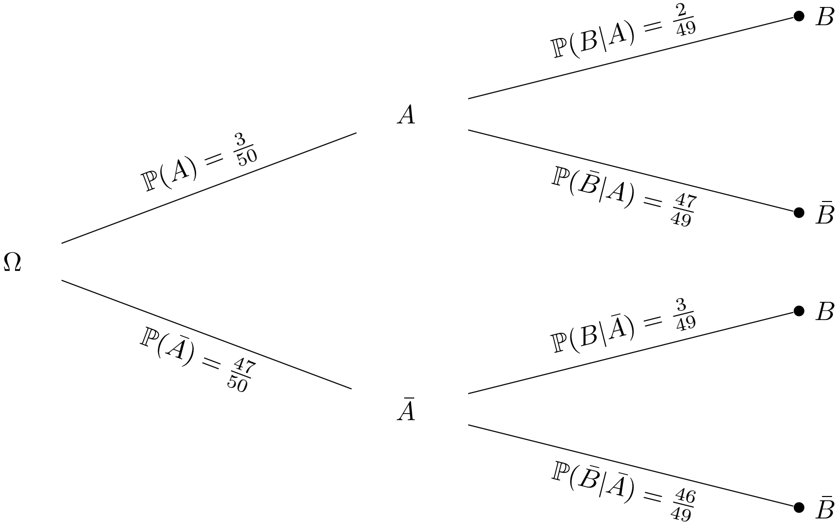
$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás


A_1
B
$A_1 \cap B$
A_2
A_3
$\cdots$
A_n
A_4
A_5
A_{n-1}

Exemplo: Diagnóstico Médico

Pelo fato de um novo procedimento médico ter se mostrado efetivo na detecção prévia de uma doença, propôs-se um rastreamento médico da população. A probabilidade de o teste identificar corretamente alguém com a doença, dando positivo, é 0,99, e a probabilidade de o teste identificar corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é de 0,95. A incidência da doença na população em geral é 0,0001. Você fez o teste e o resultado foi positivo. Qual a probabilidade de você ter a doença?



INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Exercício Ref.:J4L7

Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado: (Faça o diagrama de árvores)

a. Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido? R.: $0,32$.
b. Qual a probabilidade do pênalti ser convertido? R.: $0,46$.
c. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense? R.: $0,88$.

Morgado et al. (1991, p 159)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 5 - Exercício 3**

Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A chance de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A chance de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico?

Resp.: $^2/_3$

Exercício **Ref.:19LQ**

Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $4/10$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $6/10$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $4/10$.

a) Qual a probabilidade da equipe ganhar? R.: 0,48

b) Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia? R.: $1/2$

Morgado et al. (1991, p. 164)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ref.:HJD9

Considere três eventos A, B e C tais que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ e $\mathbb{P}(C) > 0$. Demonstre o Teorema de Bayes com condicionamento:

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)}.$$

Exercício **Ref.:K59O**

Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $1/3$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame.

a. Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular? R.: $8/15$

b. Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.: 0,44

Morgado et al. (1991, p. 165)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:N2L1**

Três urnas I, II e III contém respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna e escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna I? R.: $^{5}/_{24}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:JN43**

Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:

- (a) A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro? R.: 0,0792
- (b) A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato. R.: 0,264

Ross (2010, p. 102)

Exercício **Ref.:J32N**

Duas máquinas A e B produzem 3 mil peças em um dia. A máquina A produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A? R.: $^3/_5$

Exercício Ref.:J297

Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo A e dez amostras de solo tipo B. Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.

a) Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo B que são selecionadas e quais suas probabilidades. R.: $X \in \{5, \ldots, 10\}$

b) Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo A ou todas as dez amostras do tipo B? R.: 0,0326

c) Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo B selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média? R.: 0,6966

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 5 - Exercício 4

Dentre os estudantes João, Pedro e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas, qual a probabilidade:

a) De manuel nunca ser escolhido?

b) De um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?

Exercício **Ref.:1Y34**

Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta? R.: $^4/_7$

Exercício **Semana 5 - Exercício 5**

Os colégios A, B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se o resultado for $RRRMMMMM$ (R para rapaz e M para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C?

Bussab & Morettin (2013, p. 128)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 5 - Exercício 6**

Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

Exercício **Ref.:H7R5**

Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Bussab & Morettin (2013, p. 126)

Exercício **Ref.:5IT6**

Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha n alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é p. Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente?

R.: $\dfrac{np}{1+(n-1)p}$ Ross (2010, p. 67)

Exercício — **Problema de Monty Hall**

Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas, A, B e C: atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe A, mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta C e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

Selvin et al. (1975)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício — Problema do Aniversário

Considere k pessoas numa sala.

1. Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
2. A partir de qual valor de k essa probabilidade é maior que 0,5?

Mckinney (1966)

Referências

Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.

Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.

Mckinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly 73*(4), 385–387.

Montgomery, D. C. & G. C. Runger (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.

Morgado, A. C., J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, & P. Fernandez (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade* (9 ed.). Coleção do Professor de Matemática. SBM.

Ross, S. M. (2010). *A First Course in Probability* (8 ed.). New York: Pearson Hall.

Selvin, S., M. Bloxham, A. I. Khuri, M. Moore, R. Coleman, G. R. Bryce, J. A. Hagans, T. C. Chalmers, E. A. Maxwell, & G. N. Smith (1975). Letters to the editor. *The American Statistician 29*(1), 67–71.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás