Curso de Estatística e Probabilidade

DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

Data da Atualização: 20 de maio de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso de Probabilidade e Estatística no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

Espaços Amostrais e Eventos

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Variável de interesse

É a variável observada em um experimento.

Experimento aleatório

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) não pode ser previsto.

Um experimento aleatório é também dito não determinístico.

Experimento determinístico

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) pode ser previsto.

Em um experimento é comum considerar mais de uma variável de interesse e, portanto um mesmo experimento pode ser aleatório ou não dependendo da variável de interesse observada.

Espaço Amostral

É o conjunto de *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. O espaço amostral é dito *enumerável* quando existir uma bijeção entre ele e os números naturais. Se tal bijeção não existir diremos que o espaço amostral é *não enumerável*.

Espaço Amostral Discreto Consiste em um conjunto finito ou infinito enumerável de resultados.

Espaço Amostral Contínuo Contém um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais.

O espaço amostral será denotado por Ω.

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Considere um experimento em que você seleciona uma câmera de um telefone celular e registra o tempo de recarga de um *flash* (o tempo necessário para aprontar a câmera para outro *flash*). Os valores possíveis para esse tempo dependem da resolução do temporizador e dos tempos máximo e mínimo de recarga. Há várias formas de definir o espaço amostral desse experimento:

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga, podemos definir:

$$\Omega = \mathbb{R}^+ = \{t|t > 0\}$$

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga e soubermos que ele sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\Omega = \{t|1,5 < t < 5\}$$

Se o objetivo de estudo consiste em verificar se o tempo é *baixo*, *médio* ou *alto*, então:

$$\Omega = \{baixo, médio, alto\}$$

Se o objetivo é verificar se a câmera satisfaz os requisitos mínimos de tempo de recarga então:

$$\Omega = \{sim, não\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 15) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Evento

São os subconjuntos do espaço amostral Ω.

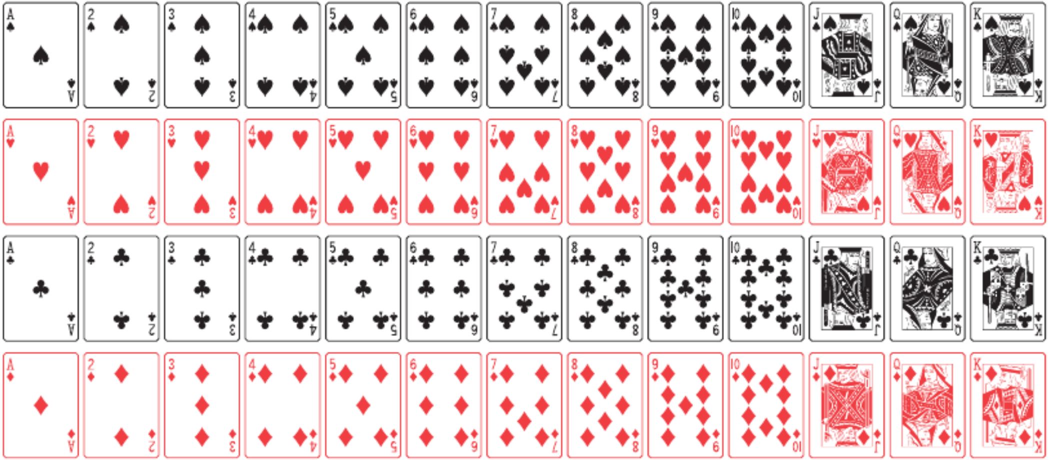
Evento Nulo

É o evento associado a todo *subconjunto vazio* do espaço amostral Ω.

Produto Cartesiano

Sejam dois eventos A e B, o *produto cartesiano* $A \times B$ será o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence à A e o segundo pertence à B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$



INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

O baralho inglês possui um total de 4 naipes que podem ser descritos pelo conjunto:

$$\mathcal{N} = \{\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}.$$

Cada um dos naipes em $\mathcal{N}$ o baralho inglês possui 13 elementos que podem ser descritos como:

$$\mathcal{E} = \{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}.$$

Assim o baralho inglês possui um total de 52 cartas que podem ser descritas como:

$$\mathcal{C} = \mathcal{E} \times \mathcal{N} = \{(A, \spadesuit), (K, \spadesuit), \ldots, (3, \heartsuit), (3, \heartsuit)\}$$

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas.

Se não temos qualquer conhecimento sobre o mecanismo de funcionamento de uma câmera fotográfica podemos definir:

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 > 0, t_2 > 0\}\end{aligned}$$

Se soubermos que o tempo de recarga de cada lâmpada sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{t_1 | 1,5 < t_1 < 5\} \\ \Omega_2 &= \{t_2 | 1,5 < t_2 < 5\} \\ \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 \in \Omega_1, t_2 \in \Omega_2\}\end{aligned}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar se as câmeras atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso reaproveitando os espaços amostrais anteriores

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{sim, não\} \\
\Omega_2 &= \{sim, não\} \\
\Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\
&= \{(não, não), (sim, não), (não, sim), (sim, sim)\}
\end{aligned}
$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar o número de câmeras que atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso o espaço amostral será simplesmente

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Estamos interessados em estudar a quantidade de disparos do flash até que a câmera pare de estar dentro das especificações mínimas de qualidade.

$$\Omega = \mathbb{Z}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 1 - Exercício 1**

Considere o experimento de sortear uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Quais as cartas compõem os seguintes eventos?

- a) Seleciona-se o rei de copas.
- b) Seleciona-se um rei.
- c) Seleciona-se uma carta de copas.
- d) Seleciona-se uma carta de figura.

Fonte: Weiss (2012, p. 153) (Adaptado).

Exercício **Semana 1 - Exercício 2**

Considere os experimentos descritos abaixo. Defina um objetivo para cada um deles. Defina um espaço amostral e uma variável de interesse considerando o objetivo proposto. A variável de interesse é contínua ou discreta? Quais são experimentos aleatórios?

a) Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.
b) Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.
c) Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.
d) Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.
e) Colocamos um litro de água no fogo e medimos a sua temperatura após vinte minutos.
f) Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.
g) Olho pela janela do meu quarto e conto a quantidade de carros que passam na rua pela próxima hora.

Fonte: Bussab & Morettin (2013, p. 108) (Adaptado).

Exercício **Semana 1 - Exercício 3**

Para cada um dos experimentos abaixo, defina um objetivo, apresente um espaço amostral adequado e conte seus eventos elementares.

a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.

b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.

c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.

d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.

e) Em uma cidade, famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.

f) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.

g) Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 52) (Adaptado).

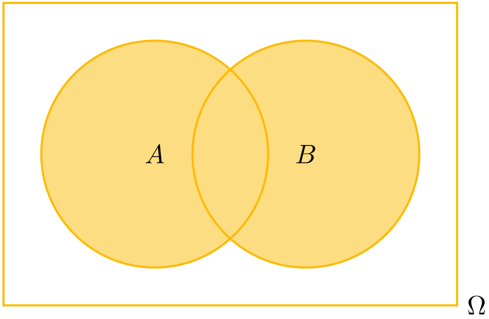
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

União de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cup B$ denota a *união* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência de ao menos um deles. Em notação de conjuntos:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

A operação de união também é chamada de reunião



Comutatividade da união de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in B \vee \omega \in A\} && \text{Comutatividade do operador lógico } \vee \\ &= B \cup A && \text{união de eventos} \end{aligned}$$

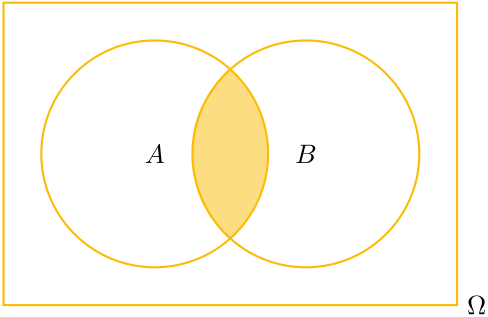
E assim fica justificada a comutatividade da união.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Interseção de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cap B$ denota a *interseção* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência simultânea desses eventos. Em notação de conjuntos:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Comutatividade da interseção de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap B = B \cap A.$$

A demonstração é análoga ao que já fizemos para a união de eventos.

Distributividade da união relativa a interseção

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$(\implies)$ Vamos mostrar primeiramente que:

$$\omega \in A \cup (B \cap C) \implies \omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1}$$

Assuma que $\omega \in A \cup (B \cap C)$, deste modo há dois casos a considerar:

- **i** Se $\omega \in A$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, portanto, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- **ii** Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B \cap C$ e, consequentemente, $\omega \in B$ e $\omega \in C$, e desses dois fatos concluímos que $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, finalmente, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dessa forma, a condição (1) está provada.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$(\Longleftarrow)$ Agora vamos provar a recíproca:

$$\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies \omega \in A \cup (B \cap C). \tag{2}$$

Seja $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$. Novamente, temos dois casos à considerar:

- **i** Se $\omega \in A$, então é fácil ver que $\omega \in A \cup (B \cap C)$.
- **ii** Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B$ e $\omega \in C$, consequentemente, $\omega \in B \cap C$ e, finalmente, $\omega \in A \cup (B \cap C)$.

Mostra-se aqui a condição (2). E assim fica justificada a comutatividade da união. A prova é semelhante para o caso da comutatividade da interseção.

Distributividade da interseção relativa à união

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

A demonstração desse resultado é análoga ao que fizemos para a distributividade da união relativa a interseção.

Eventos elementares

São os *elementos* do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de Ω.

Cardinal de um conjunto

Seja um evento A. O cardinal de A é número de eventos elementares de A.

Cardinal do produto

Sejam os conjuntos A e B. O cardinal do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto dos cardinais dos conjuntos individuais:

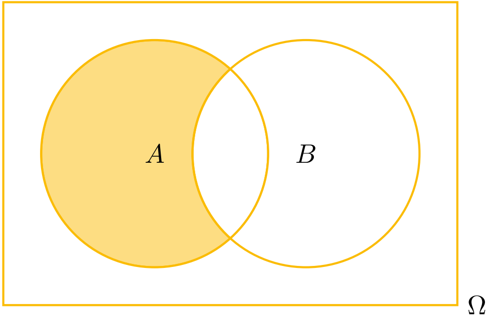
$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

Diferença de eventos

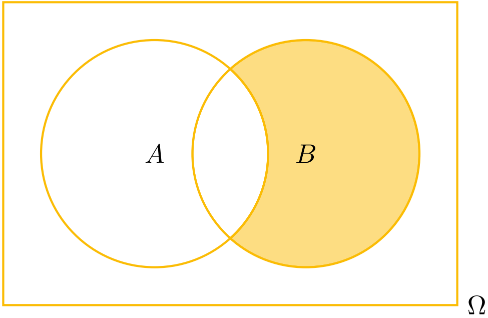
Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A - B$ denota a *diferença* do evento A em relação ao evento B, ou seja, a ocorrência exclusiva de A. Em notação de conjuntos:

$$A - B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

$A - B = A \cap \overline{B}$



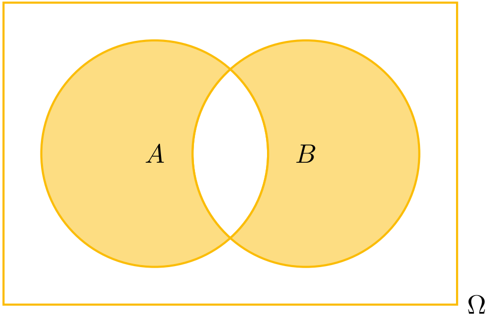
$B - A = B \cap \overline{A}$



Diferença simétrica

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A\Delta B$ denota a *diferença simétrica* entre os eventos A e B, ou seja, a ocorrência exclusiva de ao menos um dos eventos. Em notação de conjuntos:

$$A\Delta B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in (A - B) \wedge \omega \in (B - A)\}.$$

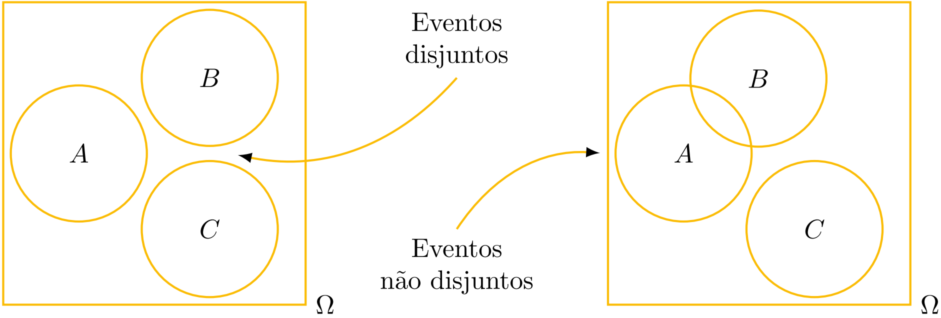


Eventos Disjuntos

Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são disjuntos (mutuamente excludentes) se

$$A_i \cap A_j = \varnothing$$

para quaisquer i e j distintos.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

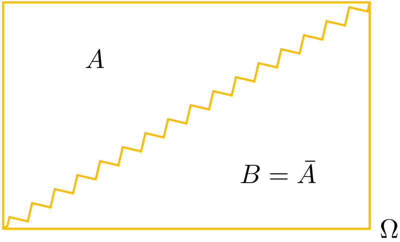
Eventos Complementares

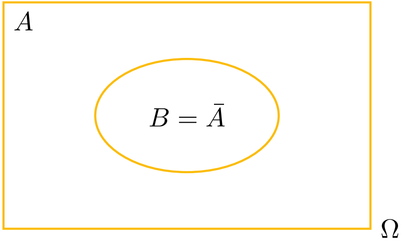
Dois eventos A e B no espaço amostral Ω são complementares se:

1. $A \cap B = \varnothing$
2. $A \cup B = \Omega$

O complementar de A será denotado por $\bar{A}$.

As notações para o evento complementar de A costumam variar entre $\bar{A}$, A' e A^c.





INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Outras propriedades operacionais dos eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

1. $\overline{\varnothing} = \Omega$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cap \Omega = A$
4. $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cup \Omega = \Omega$
6. $A \cap \bar{A} = \varnothing$
7. $A \cup \bar{A} = \Omega$
8. $A - B = A \cap \bar{B}$
9. $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

Leis de Morgan

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

e

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercício **Semana 1 - Exercício 4**

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, "traduza" para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:

1. Pelo menos um dos eventos ocorre.
2. O evento A ocorre mas B não.
3. Nenhum deles ocorre.
4. Exatamente um dos eventos ocorre.

Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Exercício **Semana 1 - Exercício 5**

No experimento de sortear aleatoriamente uma carta de um baralho, considere os eventos:

- (A) Seleciona-se o rei de copas.
- (B) Seleciona-se um rei.
- (C) Seleciona-se uma carta de copas.
- (D) Seleciona-se uma carta de figura.

Determine adequadamente os eventos:

- (a) $A \cap B$
- (b) $A \cup B$
- (c) $A - B$
- (d) $B - A$
- (e) $\bar{D}$
- (f) $B \cap C$
- (g) $B \cup C$
- (h) $C \cap D$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 6

No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

- A seleciona-se uma carta de copas;
- B seleciona-se uma figura;
- C seleciona-se um Ás;
- D seleciona-se um oito;
- E seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

- a C e D;
- b D, E e A;
- c C e E;
- d D, E, A e B;
- e D e E

Técnicas de Contagem

Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Suponhamos que uma ação seja constituída de k etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n_1 maneiras distintas. A 2ª etapa pode ser realizada de n_2 maneiras distintas para cada uma das n_1 maneiras de completar a 1ª etapa. A k-ésima etapa pode ser realizada de n_k maneiras distintas para cada uma das n_{k-1} maneiras de completar a $(k-1)$-ésima etapa . Então o número de maneiras de se efetuar a ação completa é $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Projeto de um site da internet

O projeto de um site na internet consiste em quatro cores, três fontes e três posições para uma imagem. Quantos projetos diferentes são possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Pelo PFC o número de projetos diferentes será

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

Ou seja 36 projetos.

Fatorial de um número natural

Dado um número natural n, $n \geq 2$, o fatorial de n (denota-se por $n!$) é o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fatoriais de alguns números:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Arranjo

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos tomados k a k, a qualquer sequência ordenada de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

Número de arranjos

Seja um conjunto com n elementos distintos. O número A_k^n de arranjos de n elementos tomados k à k é:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \geq k.$$

Exemplo: Placa de circuito impresso

Uma placa de circuito impresso tem oito localizações diferentes em que um componente pode ser colocado. Se quatro componentes diferentes forem colocados na placa, quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Cada projeto consiste em selecionar uma localização das oito localizações para o primeiro componente, uma localização das sete resultantes para o segundo componente, uma localização das seis resultantes para o terceiro componente e uma localização das cinco resultantes para o quarto componente. Portanto,

$$A_4^8 = \frac{8!}{4!} = 1680$$

Logo temos 1680 projetos diferentes possíveis.

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Anagrama

Um anagrama de uma palavra é obtido quando trocamos a ordem das suas letras, sem repeti-las, de modo que se forma uma nova sequencia de letras, com ou sem sentido.

Permutação

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se permutação dos n elementos todo arranjo desses n elementos tomados n à n.

Número de permutações

Seja um conjunto com n elementos distintos, o número P_n de permutações dos n elementos é:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Anagramas da palavra AZUL

Qual é a quantidade de anagramas da palavra AZUL?

O cálculo do número de anagramas de uma palavra (que não tenha letras repetidas) pode ser entendido como um problema de cálculo do número de permutações dos elementos de um conjunto. Note que a palavra azul pode ser interpretada como um conjunto de quatro letras. Desse modo o número total de anagrama será

$$P_4 = 4! = 24$$

Ou seja temos 24 anagramas para a palavra AZUL.

Número de permutações com elementos repetidos

O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ objetos dos quais n_1 são do tipo 1, n_2 são do tipo 2, ... e n_k são do tipo k é:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Programação de um hospital

Um centro cirúrgico de um hospital necessita programar três cirurgias de joelho e duas cirurgias de quadris em um dia. Denominamos uma cirurgia de joelhos e de quadris como j e q, respectivamente. Qual o número de sequências possíveis das três cirurgias de joelho e das duas cirurgias de quadris?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Note que nesse caso podemos interpretar a cirurgia como um conjunto de 5 elementos (cirurgias) sendo duas de um tipo (cirurgia de joelho) e três de outro (cirurgia de quadril). Desse modo se trata de um problema de permutações com elementos repetidos.

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

É possível enumerar as sequências:

$$\{jjjqq, jjqjq, jjqqj, jqjjq, jqjqj, jqqjj, qjjjq, qjjqj, qjqjj, qqjjj\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Combinação

Uma combinação é todo subconjunto de tamanho k de um conjunto de tamanho $n \geq k$ com elementos distintos.

Número de combinações

O número C_k^n de combinações de tamanho k que podem ser selecionadas a partir de um conjunto de n elementos distintos é

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemplo: Disposição de Placa de Circuito Impresso

Um componente pode ser colocado em oito localizações diferentes em uma placa de circuito impresso. Se cinco componentes idênticos forem colocados na placa quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Cada projeto é um subconjunto de oito localizações que devem conter os componentes, portanto se trata de um problema de combinação.

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Temos ao todo 56 projetos diferentes.

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Quantas amostras diferentes existem, de tamanho seis, que contêm exatamente dois itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Um subconjunto contendo exatamente dois itens defeituosos pode ser formado escolhendo primeiro os dois itens defeituosos a partir dos três itens defeituosos. Portanto, um problema de combinação:

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Na segunda etapa sorteamos os quatro itens não defeituosos dentre os 47 não defeituosos. Novamente um problema de combinação:

$$C_4^{47} = \binom{47}{4} = \frac{47!}{4!43!} = 178365$$

Aplicando agora o TFC temos que quantidade de amostras que contém exatamente dois itens defeituosos será

$$3 \cdot 178365 = 535095$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:H7J6**

Considere um polígono regular de n lados. Mostre que a quantidade de diagonais é dada por:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 2 - Exercício 1**

Quantos múltiplos de 3, compostos de 3 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 7?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:J7YR**

Uma determinada área de pesquisa contém doze estudantes orientandos. O professor orientador dessa área deseja dividir os estudantes em três grupos de estudos de mesmo tamanho. De quantos modos diferentes esse professor pode dividir esses doze estudantes?

Exercício **Semana 2 - Exercício 2**

Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

Exercício Ref.:HJ84

O historiador judeu *Flavius Josephus*, que viveu no século 1°, figura como personagem de um problema clássico da computação. Neste problema, as pessoas estão em um círculo esperando para serem assassinadas. A contagem para definir a próxima pessoa a ser assassinada começa em um ponto especificado no círculo, e prossegue ao redor do círculo em uma direção especificada. Depois que um determinado número de pessoas é ignorado, a próxima pessoa é assassinada. O procedimento é repetido com as pessoas restantes, começando com a próxima pessoa, indo na mesma direção e pulando o mesmo número de pessoas, até que apenas uma pessoa permaneça e seja libertada. Neste problema, n denota o número de pessoas no círculo inicial, e k denota a contagem para cada etapa, ou seja, $k-1$ pessoas são ignoradas e o k-ésimo é assassinado. Considerando que as pessoas no círculo são numeradas de 1 à n, a posição inicial sendo 1 e a contagem sendo inclusiva com $k=2$, em qual posição do círculo de 153 pessoas deveria estar alguém para que seja libertada?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 2 - Exercício 3**

Pretende-se selecionar quatro pessoas de um grupo constituído de três professores e cinco alunos, para tirar uma fotografia. Se pelo menos um dos professores deve aparecer na foto, de quantos modos poderá ser feita a seleção?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 372) (Adaptado).

Exercício **Ref.:L6T7**

Suponha que você criou uma senha que contém três letras seguidas de quatro algarismos. Por algum motivo você esqueceu sua senha. Você somente lembra que a senha tem uma única letra “A” e, na última posição tem o algarismo “5”. No pior caso, quantas combinações você terá que fazer até achar sua senha correta? (Considere as 26 letras e os 10 algarismos)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:N7E3**

Maria acabou de aprender que computadores entendem apenas códigos binários (sequências de 0 e 1). João desafiou Maria à calcular quantas strings binárias, de 100 algarismos, possuem 4 ou menos 1's. Sabendo que Maria acertou o desafio, qual valor foi calculado por Maria ?

Exercício **Ref.:M41L**

Uma pessoa deseja criar uma senha que é um número natural de quatro dígitos e que possui pelo menos dois dígitos iguais e, consequentemente, o primeiro algarismo dessa senha é diferente de zero. Quantas senhas distintas essa pessoa pode criar, satisfazendo essas condições apresentadas?

Definições de Probabilidade

Definição frequentista de probabilidade

Considere o número limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Seja n_A o número de ocorrências do evento A em n repetições independentes do experimento em questão. Então:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}.$$

Essa definição nos permite interpretar a probabilidade como frequência relativa.

Probabilidade não existe!!! A probabilidade não se trata de um grandeza física que pode ser mensurável por meio de alguma "régua" ou "balança".

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Definição clássica de probabilidade

Seja um espaço amostral Ω composto por um número finito de eventos elementares equiprováveis:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

A probabilidade de ocorrência do evento $A \subset \Omega$ é dada por:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde $n(A)$ é o número de eventos elementares contidos em A e $n(\Omega)$ é o número de eventos elementares no espaço amostral.

O caso onde o espaço amostral possui um número infinito de elementos (enumerável ou não) não será foco desse curso introdutório.

Em caso de um número infinito enumerável de eventos usamos limites para obter essa probabilidade e no caso de um espaço amostral composto por um número infinito não enumerável de eventos elementares será preciso associar o cálculo das probabilidades à medidas de intervalos, áreas e volumes.

Nesse caso teremos a chamada probabilidade geométrica que não será focada desse curso.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Diodos a laser

Considere que 30% dos diodos a *laser* em uma batelada de 100 satisfazem os requerimentos mínimos de potência de um consumidor específico. Se um diodo à *laser* for selecionado ao acaso, isto é, se cada diodo a *laser* for igualmente provável de ser selecionado, nosso sentimento intuitivo será de que a probabilidade de satisfazer os requerimentos do consumidor é 0,30. Seja E o evento em que o diodo selecionado satisfaça os requerimentos do consumidor. Então E é o subconjunto de 30 diodos que satisfaz os requerimentos do consumidor. Visto que E contém 30 resultados e cada um deles tem probabilidade igual a 0,01, concluímos que a probabilidade de E é 0,3. A conclusão coincide com a nossa intuição.

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 21) (Adaptado).

Exemplo: Lançamento de Moedas

Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de:

a) Obter exatamente 2 caras?

b) Obter pelo menos 2 caras?

Para resolver esse exercício vamos construir inicialmente os espaços amostrais. Seja $\Omega_1 = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ um espaço amostral para o lançamento de apenas uma moeda. Dessa forma no lançamento de três moedas podemos considerar o espaço amostral:

$$\begin{aligned}\Omega =& \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \\ =& \{(\text{cara}, \text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{cara}, \text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{cara}), \\ & (\text{coroa}, \text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{cara}, \text{coroa}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{coroa}, \text{coroa})\}\end{aligned}$$

Note que Ω é finito e todos os seus eventos elementares são equiprováveis.

1. Considere o evento: $A =$ "Obter exatamente 2 caras?". Logo: $\mathbb{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$
2. Considere o evento: $B =$ "Obter pelo menos 2 caras?". Logo: $\mathbb{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade da amostra selecionada conter exatamente dois itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Inicialmente vamos definir

$$\Omega = \{\text{“Amostras de tamanho seis selecionadas a partir do total de 50 itens.”}\}$$

Note que Ω é finito, todos os seus eventos elementares são equiprováveis e além disso:

$$n(\Omega) = C_6^{50} = \binom{50}{6} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = 15.890.700$$

Seja o evento:

$$A = \{\text{“A amostra de seis itens contêm exatamente dois defeituosos”}\}$$

Em aulas anteriores vimos que $n(A) = 535.095$. Portando:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{535.095}{15.890.700} = \frac{33}{980}$$

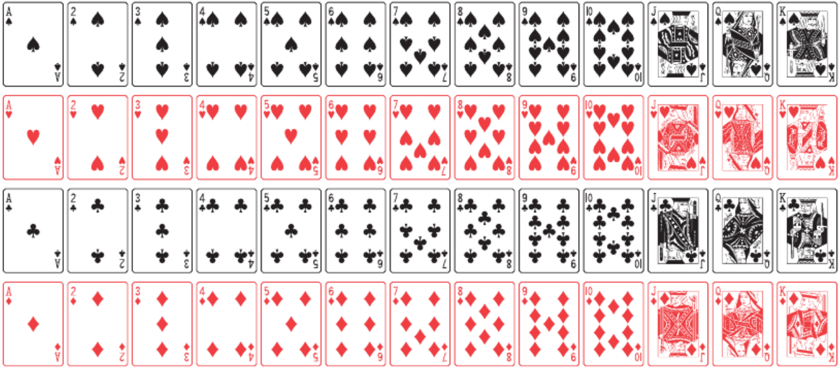
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício Ref.:BN6G

Seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum. Qual a probabilidade da carta ser:

a) Um ás e vermelha?

b) Um ás ou vermelha?



Exercício **Ref.:KZ4C**

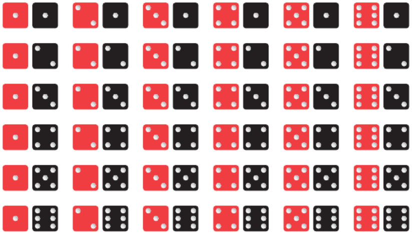
Suponhamos que eu lance simultaneamente um tetraedro (dado de quatro faces) e uma moeda. Qual é a probabilidade de ocorrer uma face par no tetraedro e sair coroa na moeda?

Exercício **Ref.:KJ56**

Dois dados de cores diferentes são jogados simultaneamente.

a) Qual a probabilidade de que a soma deles seja maior que sete?

b) Qual a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual à três?



INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício **Semana 2 - Exercício 4**

De um grupo de n objetos escolhemos r ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de não sortearmos objetos repetidos?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:BG5R**

Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos 1 cara e 1 coroa?

Exercício **Ref.:H5F3**

Uma urna contém 10 bolas identificadas como $B_1 \ldots B_{10}$. Qual a probabilidade de que a bola sorteada tenha índice par? E do índice ser primo?

Exercício **Semana 2 - Exercício 5**

Cinco homens e cinco mulheres estão dispostas em fila indiana. Qual a probabilidade de que:

a) A primeira pessoa da fila seja homem?

b) A primeira e a última pessoas da fila sejam homens?

Exercício **Ref.:H7J6**

Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Exercício **Semana 2 - Exercício 6**

Considere um polígono regular de n lados. Tome uma das retas determinadas por dois vértices quaisquer. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Definição axiomática de probabilidade

Uma função $\mathbb{P}(\cdot)$, com domínio no espaço amostral Ω, é denominada probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega;$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1;$
3. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Essa definição não determina probabilidades; as probabilidades são atribuídas de acordo com o conhecimento que temos do contexto de aplicação.

Conseguências da definição

- $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$. Portanto, usando as propriedades 2 e 3, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonicidade);
- E da monotonicidade vem naturalmente que $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Regra da Adição de Probabilidades

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Regra da Adição - Dois Eventos

Sejam A e B dois eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Regra da Adição - Três Eventos

Sejam A, B e C três eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 1

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

Seja Ω o espaço amostral composto por todas as pastilhas e H o evento no qual a pastilha contém altos níveis de contaminação. Note que o espaço amostral Ω é finito e todas as pastilhas tem a mesma probabilidade de ser sorteadas. Desse modo podemos aplicar a DCP.

$$\mathbb{P}(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{358}{940} = \frac{179}{470}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 2

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

Seja Ω o espaço amostral composto por todas as pastilhas e C o evento no qual a pastilha esta localizada no centro da ferramenta. Note que o espaço amostral Ω é finito e todas as pastilhas tem a mesma probabilidade de ser sorteadas. Desse modo podemos aplicar a DCP.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{626}{940} = \frac{313}{470}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 3

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação e estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

$$\mathbb{P}(C \cap H) = \frac{n(C \cap H)}{n(\Omega)} = \frac{112}{940} = \frac{28}{235}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 4

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação ou estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

$$\mathbb{P}(C \cup H) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(C \cap H) = \frac{313}{470} + \frac{179}{470} - \frac{28}{235} = \frac{218}{235}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 3 - Exercício 1

Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter:

a) Soma dos pontos igual a oito?
Resp.: $^{5}/_{36}$

b) Dois números iguais?
Resp.: $^{1}/_{6}$

c) Soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais (Use a regra da adição)?
Resp.: $^{5}/_{18}$

Exercício **Ref.:NJYG**

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = {}^2\!/_5$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^4\!/_5$. Determine $\mathbb{P}(B)$ tais que A e B sejam disjuntos.

Exercício **Semana 3 - Exercício 2**

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = {}^1\!/_5$, $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^1\!/_2$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = {}^1\!/_{10}$. Determine o valor de p.
Resp.: $p = {}^2\!/_5$

Magalhães & Lima (2015, p. 53) (Adaptado)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício Ref.:N72G

Sejam A e B eventos em um espaço amostral Ω, onde B é três vezes mais provável que A. Sabendo que $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^4\!/_5$ determine $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ quando:

- (a) A e B são disjuntos
- (b) $\mathbb{P}(A \cap B) = {}^1\!/_8$.

Exercício **Semana 3 - Exercício 3**

Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É três vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de cada time vencer?
Resp.: $\mathbb{P}(A) = {}^{9}/_{14}$, $\mathbb{P}(B) = {}^{3}/_{14}$, $\mathbb{P}(C) = {}^{3}/_{28}$ e $\mathbb{P}(D) = {}^{1}/_{28}$

Morgado et al. (1991, p. 143) (Adaptado)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:N65I**

Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7. Resp.: $^{63}/_{200}$

Exercício

Ref.:NT53

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a) ser brasileira?

b) preferir futebol?

c) ser estrangeira e preferir natação?

d) ser estrangeira ou preferir queimada?

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Regra dos Complementares

Para quaisquer eventos A e B:

1. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Demonstrações:

1. Note que A e $\overline{A}$ são eventos disjuntos e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Aplicando a segunda e a terceira propriedades das funções de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}).$$

2. Note que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, logo $A \cap B$ e $\overline{A} \cup \overline{B}$ são complementares, logo esse resultado decorre diretamente do resultado 1.

3. Note que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, mas $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ são disjuntos, logo $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Probabilidade de Eventos

Um experimento aleatório pode resultar em um dos resultados $\{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0,1; 0,3; 0,5 e 0,1, respectivamente. Seja A o evento $\{a, b\}$, seja B o evento $\{a, b, c\}$ e seja C o evento $\{d\}$. Então,

$$\mathbb{P}(A) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$
$$\mathbb{P}(B) = 0,3 + 0,5 + 0,1 = 0,9$$
$$\mathbb{P}(C) = 0,1$$

Além disso aplicando a Regra dos Complementares

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,6$$
$$\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,1$$
$$\mathbb{P}(\bar{C}) = 0,9$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade da amostra selecionada conter no máximo dois itens defeituosos? Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Inicialmente vamos definir o espaço amostral:

$$\Omega = \{\text{“Amostras de tamanho seis selecionadas a partir do total de 50 itens.”}\}$$

Note que Ω é finito, todos os seus eventos elementares são equiprováveis e além disso:

$$n(\Omega) = C_6^{50} = \binom{50}{6} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = 15.890.700$$

Sejam os eventos:

$$A = \{\text{“A amostra de seis itens contêm exatamente três defeituosos”}\}$$
$$B = \{\text{“A amostra de seis itens contêm no máximo dois defeituosos”}\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que $B = \bar{A}$. Além disso:

$$n(A) = C_3^{47} = \binom{47}{3} = \frac{47!}{3! \cdot 44!} = 16.215$$

Portando:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16.215}{15.890.700} = \frac{1}{980}$$

Aplicando a Regra dos Complementares obtemos que:

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{980} = \frac{979}{980}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 3 - Exercício 4**

Dois dados são lançados independentemente. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares? (Dica.: Use a regra dos complementares)
Resp.:$^3/_4$

Exercício **Ref.:J6G8**

Considere duas urnas tais que a primeira contenha bolas numeradas de 1 até 1000 e a segunda contenha bolas numeradas de 10 até 500. Uma bola é sorteada de cada uma das urnas. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares? (Dica.: Use a regra dos complementares)

Exemplo: **Ref.:23JK**

Numa classe de 55 alunos, 21 praticam vôlei e basquete, 39 praticam vôlei e 33 praticam basquete. Um aluno da classe é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de o aluno escolhido praticar um e somente um desses esportes?

Considere o espaço amostral

$$\Omega = \{\text{“Todos os alunos na classe”}\}$$

Note que Ω é finito e assuma que os alunos tem igual probabilidade de serem sorteados e os eventos.

$$\begin{aligned} B &= \{\text{“O aluno escolhido pratica basquete”}\} \\ V &= \{\text{“O aluno escolhido pratica vôlei”}\} \end{aligned}$$

Pelo enunciado temos que: $n(\Omega) = 55$, $n(B \cap V) = 21$, $n(V) = 39$ e $n(B) = 33$.

Desejamos determinar:

$$\mathbb{P}(B\triangle V) = \mathbb{P}\left[(B\cap\bar{V})\cup(\bar{B}\cap V)\right]$$

Veja que os eventos $(B\cap\bar{V})$ e $(\bar{B}\cap V)$ são eventos disjuntos, portanto podemos aplicar a Definição Axiomática de Probabilidade

$$\mathbb{P}(B\triangle V) = \mathbb{P}(B\cap\bar{V}) + \mathbb{P}(\bar{B}\cap V)$$

A Regra dos Complementares estabelece que:

$$\mathbb{P}(B\cup\bar{V}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B\cap V) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\bar{B}\cup V) = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(B\cap V).$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(B\triangle V) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V) - 2\mathbb{P}(B\cap V).$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Aplicando a Definição Clássica de Probabilidade:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{33}{55} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{39}{55}$$

$$\mathbb{P}(B \cap V) = \frac{n(B \cap V)}{n(\Omega)} = \frac{21}{55}$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(B \triangle V) = \frac{3}{5} + \frac{39}{55} - 2 \cdot \frac{21}{55} = \frac{6}{11}$$

Exercício **Ref.:Z3L5**

Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 20 são esportistas e da biologia noturno.Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

1. Ser esportista.
2. Ser esportista e aluno da biologia e noturno.
3. Não ser da biologia.
4. Ser esportista ou aluno da biologia.
5. Não ser esportista, nem aluno da biologia.

Magalhães & Lima (2015, p. 53)

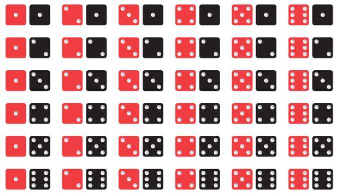
Exercício **Ref.:MK23**

Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?

Exercício **Ref.:K3X8**

Em um jogo de dados são jogados dois dados honestos de seis faces. Considere os eventos:

- (A) A soma das faces é 7;
- (B) A soma das faces é 11;
- (C) A soma das faces é 2;
- (D) A soma das faces é 3;
- (E) A soma das faces é 12;
- (F) A soma das faces é 8;
- (G) As faces são iguais.



- (a) Determine a probabilidade de todos os eventos.
- (b) O jogador vence esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 7 ou 11. Calcule a probabilidade desse evento.
- (c) O jogador perde esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 2, 3 ou 12. Calcule a probabilidade desse evento.
- (d) Qual a probabilidade das faces serem diferentes?
- (e) Qual a probabilidade da soma ser 8 ou das faces serem iguais?

Weiss (2012, p. 147)

Exercício Ref.:N7R2

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. não ser brasileira e preferir de futebol?
2. não ser estrangeira e nem preferir de vôlei?
3. não ser estrangeira ou não preferir de queimada?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:M36Q**

Uma caixa contém nove peças das quais três são defeituosas. Sorteamos duas peças. Qual a probabilidade de não escolhermos duas peças defeituosas?

Chance de um evento

A chance de um evento A é definida como:

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1-\mathbb{P}(A)}.$$

Existe uma confusão muito grande entre os conceitos de *chance* (em inglês *odds*) e *probabilidade*, o senso comum trata esses dois conceitos como sinônimos, mas não o são.

A chance e a probabilidade são medidas que assumem valores em intervalos diferentes:

$$\mathbb{P}(A) \in [0,1]$$
$$\mathbb{C}h(A) \in [0,\infty)$$

Desigualdade entre Chance e Probabilidade

Para todo evento A:

$$\mathbb{C}h(A) \geq \mathbb{P}(A).$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 3 - Exercício 5

Sabendo que a chance de um evento A é definida como:

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

Mostre que:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{C}h(A)}{1 + \mathbb{C}h(A)}.$$

Exemplo: Lançamento de um dado

Considere o experimento de lançarmos um dado e observarmos a face que ficou voltada pra cima. Seja A o evento no qual a face ⚂ fica voltada para cima. A chance de ocorrer o evento A é de 1 para 5, ou seja, o evento A possui 5 eventos elementares contrários {⚀, ⚁, ⚃, ⚄, ⚅} e 1 evento elementar favorável {⚂}. Portanto nesse caso:

$$\mathbb{C}h(A) = 0,2 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A) = {}^{1}\!/\!{}_{6} \approx 0.1666\ldots$$

Exemplo: Apostas Esportivas

Em um site de apostas esportivas é dito que a chance da seleção brasileira de futebol vencer a seleção espanhola é de 3 para 1. Qual a probabilidade da seleção brasileira vencer?

Considere o evento:

$$A = \text{“A seleção brasileira vence a seleção espanhola.”}$$

Se a chance da seleção brasileira de futebol vencer a seleção espanhola são de 3 para 1 então

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{3}{1} = 3$$

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade e a chance da amostra selecionada não conter itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Exercício

Semana 3 - Exercício 6

A probabilidade de um cavalo vencer três ou menos corridas é de 58%; a probabilidade de ele vencer três ou mais corridas é de 71%.

1. Qual é a probabilidade do cavalo vencer exatamente três corridas?
   Resp.:29%
2. Qual é a chance do cavalo vencer exatamente três corridas?
   Resp.:As chances são de aproximadamente 41 para 100.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Probabilidade Condicional e Independência

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Probabilidade Condicional

Dados os eventos A e B a probabilidade condicional de A dado B, $\mathbb{P}(A|B)$, é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A), & \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(B)$ é a probabilidade à priori

$\mathbb{P}(A|B)$ é a probabilidade à posteriori

Regra do Produto de Probabilidades

Dados os eventos A e B:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

$$D = \{\text{“O item é defeituoso”}\}$$
$$F = \{\text{“O item tem falhas na superfície”}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado $\bar{F}$? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F? Qual? Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).

Note que $\mathbb{P}(F) > 0$. Desse modo temos que:

$$\mathbb{P}(D|F) = \frac{10}{40} = 0,25 = 25\% \qquad \text{e} \qquad \mathbb{P}(D|\bar{F}) = \frac{18}{360} = 0,05 = 5\%$$

Pelo resultado obtido fica sugerida uma possível relação entre falhas na superfície e itens funcionalmente defeituosos que deveria ser investigada. Há indícios de que a presença de falhas na superfície aumenta a probabilidade do item ser defeituoso.

Exercício

Semana 4 - Exercício 1

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se que uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a) sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?

b) sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?

c) sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?

d) sabendo que a pessoa não é estrangeira, prefira futebol? Que conclusão você pode tirar comparando esse item com o item a)?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Estágios de Usinagem

A probabilidade de que o primeiro estágio de uma operação numericamente controlada, de usinagem para pistões com alta rpm atenda as especificações é igual à 0,90. Falhas são causadas por variações no metal, alinhamento de acessórios, condição de lâmina de corte, vibração e condições ambientais. Dado que o primeiro estágio atende as especificações, a probabilidade de que o segundo estágio atenda as especificações é de 0,95. Qual é a probabilidade de ambos os estágios atenderem as especificações?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 26) (Adaptado).

Considere os eventos:

$$A = \{\text{“O primeiro estágio atende as especificações”}\}$$
$$B = \{\text{“O segundo estágio atende as especificações”}\}$$

Pelo enunciado do problema temos que: $\mathbb{P}(A) = 0,9$ e $\mathbb{P}(B|A) = 0,95$. Desejamos encontrar $\mathbb{P}(A \cap B)$. Note que a regra do produto estabelece que:

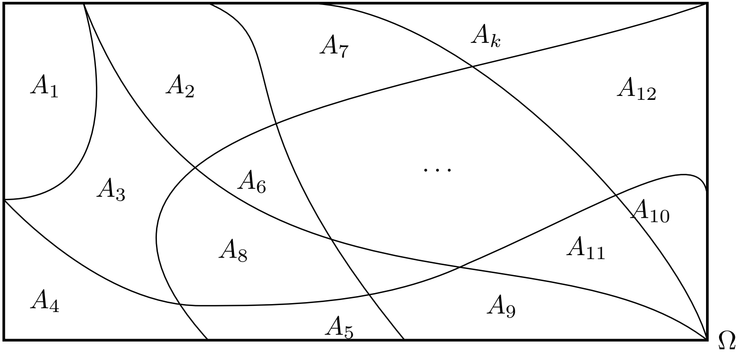
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Partição do Espaço Amostral

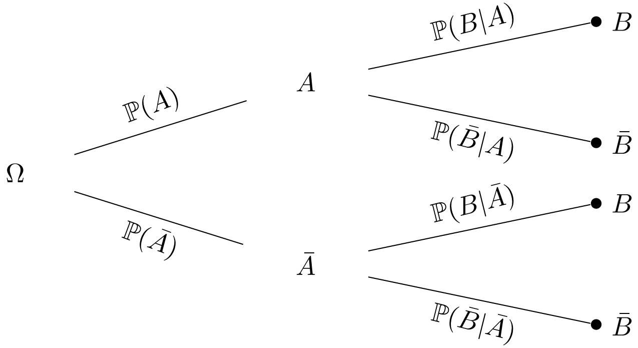
O conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2 \dots A_n\}$ de eventos do espaço amostral Ω é uma partição do espaço amostral se:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Sejam $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2 \ldots B_m\}$ duas partições de Ω. Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por um diagrama de árvores. No caso particular onde $\mathcal{P}_1 = \{A, \overline{A}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B, \overline{B}\}$, um diagrama adequado seria:



Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

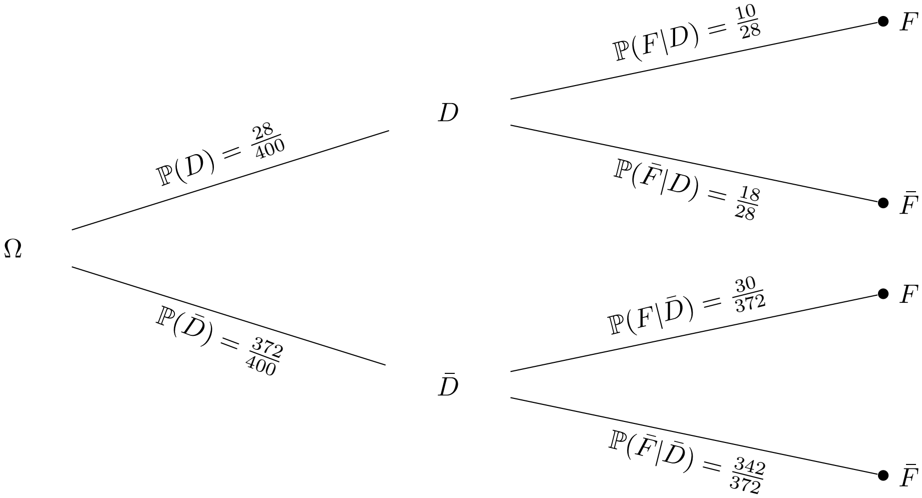
A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

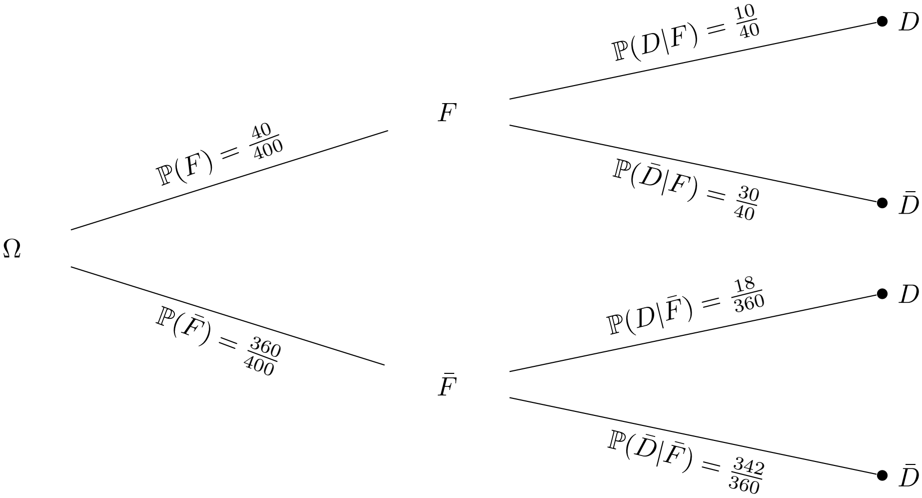
$$D = \{\text{“O item é defeituoso”}\}$$
$$F = \{\text{“O item tem falhas na superfície”}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado $\bar{F}$? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F? Qual?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).


Ω
$\mathbb{P}(D) = \frac{28}{400}$
$\mathbb{P}(\bar{D}) = \frac{372}{400}$
D
$\bar{D}$
$\mathbb{P}(F|D) = \frac{10}{28}$
$\mathbb{P}(\bar{F}|D) = \frac{18}{28}$
$\mathbb{P}(F|\bar{D}) = \frac{30}{372}$
$\mathbb{P}(\bar{F}|\bar{D}) = \frac{342}{372}$
F
$\bar{F}$
F
$\bar{F}$



Ω
$\mathbb{P}(F) = \frac{40}{400}$
$\mathbb{P}(\bar{F}) = \frac{360}{400}$
F
$\bar{F}$
$\mathbb{P}(D|F) = \frac{10}{40}$
$\mathbb{P}(\bar{D}|F) = \frac{30}{40}$
$\mathbb{P}(D|\bar{F}) = \frac{18}{360}$
$\mathbb{P}(\bar{D}|\bar{F}) = \frac{342}{360}$
D
$\bar{D}$
D
$\bar{D}$

Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Independência dos complementares

Se dois eventos A e B são independentes seus complementares também serão.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})$$

Três eventos independentes

Três eventos A, B e C são independentes se, e somente se:

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
3. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são mutuamente independentes.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem com reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de dois itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados são repostos. Ou seja, cada item pode ser sorteado mais de uma vez.

- (a) Qual a probabilidade do segundo item selecionado ser defeituoso, dado que o primeiro item a ser selecionado é defeituoso?
- (b) Qual a probabilidade de que ambas as peças sejam defeituosas?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Considere os eventos:

$$A = \{\text{“O primeiro item é defeituoso”}\} \qquad \text{e} \qquad B = \{\text{“O segundo item é defeituoso”}\}$$

Precisamos determinar $\mathbb{P}(B|A)$ e $\mathbb{P}(A \cap B)$. Num sorteio com reposição os sucessivos sorteios sempre ocorrem nas mesmas condições, portanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) = {}^{3}/_{50}$. E pela Regra do Produto temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{3}{50} \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{2500}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 2**

Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retiramos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição? (Faça um diagrama de árvores)

Exercício **Semana 4 - Exercício 3**

Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição? (Faça um diagrama de árvores)

Exercício

Ref.:HN3L

Dados os eventos A, B e C em um mesmo espaço amostral, mostre que as chamadas *regras da cadeia* de probabilidades

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$$

e

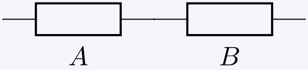
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C).$$

Exemplo: Circuito em Série

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$A = \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}$$
$$B = \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = {}^{8}/_{9}$ e $\mathbb{P}(B) = {}^{9}/_{10}$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B. Há somente uma rota que depende do funcionamento de ambos os dispositivos. Então a probabilidade do circuito operar é:

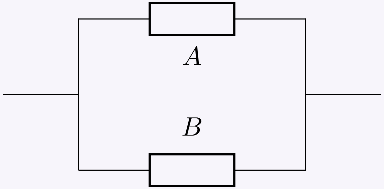
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}.$$

Exemplo: Circuito em Paralelo

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$A = \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}$$
$$B = \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 8/9$ e $\mathbb{P}(B) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B. Nesse caso haverá uma rota se ao menos um dos dispositivos funcionar, ou seja o circuito opera quando o evento $A \cup B$ ocorre, então a probabilidade do circuito operar é $\mathbb{P}(A \cup B)$, mas não é tão simples calcular essa probabilidade diretamente. Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) \qquad \text{e} \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Mas se os eventos A e B são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = {}^{8}/_{9} \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = {}^{1}/_{9}$ e $\mathbb{P}(B) = {}^{9}/_{10} \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = {}^{1}/_{10}$. Portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{89}{90}$$

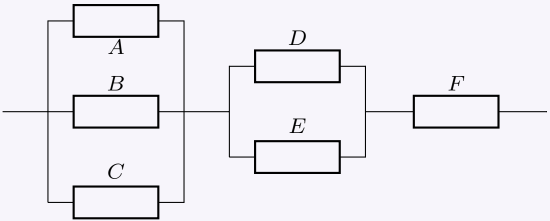
Portando o circuito opera com probabilidade ${}^{89}/_{90}$.

Exemplo: Circuito “Avançado”

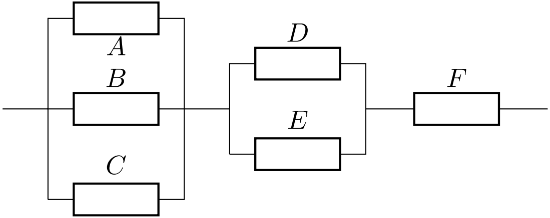
O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}\\
B &= \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}\\
C &= \text{“O dispositivo } C \text{ funcionou normalmente”}\\
D &= \text{“O dispositivo } D \text{ funcionou normalmente”}\\
E &= \text{“O dispositivo } E \text{ funcionou normalmente”}\\
F &= \text{“O dispositivo } F \text{ funcionou normalmente”}
\end{aligned}
$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 6/7$, $\mathbb{P}(B) = 4/5$, $\mathbb{P}(C) = 2/3$, $\mathbb{P}(D) = 5/6$, $\mathbb{P}(E) = 7/8$ e $\mathbb{P}(F) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento de todos os dispositivos seja independente. Para resolver esse problema é necessário separar o circuito em módulos. Vamos definir o módulo M_1 como sendo formado pelos componentes A, B e C. O módulo M_2 como sendo formado pelos componentes D, E. Note que os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série.



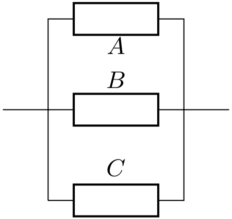
Portanto a solução desse exercício será composta de três etapas:

❶ Analisar a probabilidade do módulo M_1 funcionar;

❷ Analisar a probabilidade do módulo M_2 funcionar;

❸ Analisar a probabilidade do circuito formado pelos módulos M_1 e M_2 e a componente F operar.

Note que o módulo 1 é composto por três componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_1 = A \cup B \cup C$ ocorrer.



Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) \qquad \text{e} \qquad \overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

Mas se os eventos A, B e C são independentes os seus complementares também serão:

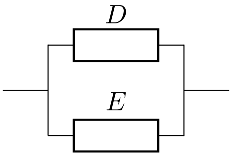
$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{C})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = {}^6\!/_7 \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = {}^1\!/_7$, $\mathbb{P}(B) = {}^4\!/_5 \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = {}^1\!/_5$ e $\mathbb{P}(C) = {}^2\!/_3 \implies \mathbb{P}(\bar{C}) = {}^1\!/_3$.
Portanto:

$$\mathbb{P}(M_1) = 1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{104}{105}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que o módulo 2 é composto por duas componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_2 = D \cup E$ ocorrer.



Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) \qquad \text{e} \qquad \overline{D \cup E} = \bar{D} \cap \bar{E}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D} \cap \bar{E})$$

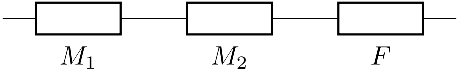
Mas se os eventos D e E são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D}) \cdot \mathbb{P}(\bar{E})$$

Note que $\mathbb{P}(D) = {}^5/_6 \implies \mathbb{P}(\bar{D}) = {}^1/_6$ e $\mathbb{P}(E) = {}^7/_8 \implies \mathbb{P}(\bar{E}) = {}^1/_8$. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{47}{48}.$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás



Como comentado anteriormente os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série. Dessa forma temos que o circuito funcionará se o evento $M_1 \cap M_2 \cap F$ ocorrer. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap F) = \mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(M_2) \cdot \mathbb{P}(F) = \frac{104}{105} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{9}{10} = \frac{611}{700}$$

Logo o circuito funcionará com probabilidade $\dfrac{611}{700} \approx 0.872857\ldots$

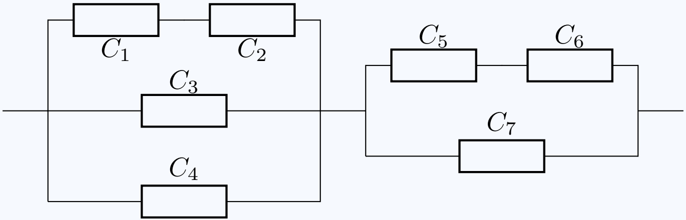
Exercício

Semana 4 - Exercício 4

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$C_i = \text{“A componente } i \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(C_i) = \dfrac{100 - i}{100}$. Qual a probabilidade do circuito operar?



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 5**

Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela? (Faça um diagrama de probabilidades)

Exercício **Semana 4 - Exercício 6**

Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequencia amarela-verde-roxa considerando que:

a) o sorteio é sem reposição (Faça um diagrama de probabilidades)

b) o sorteio é com reposição (Faça um diagrama de probabilidades)

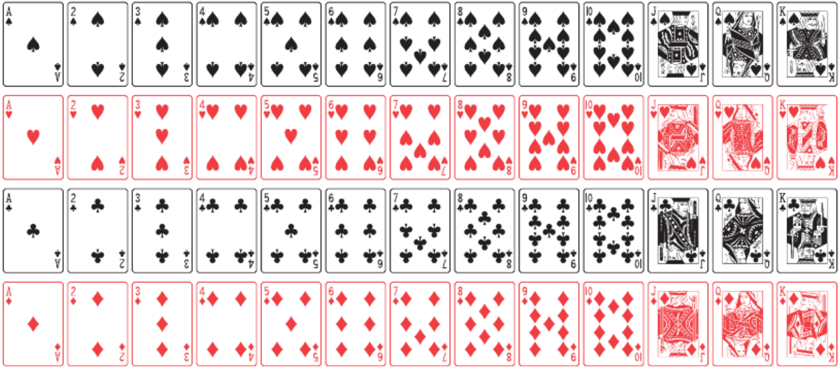
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ref.: Ref.:J42K

Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento "O ás de copas está entre as treze cartas" e B o evento "As treze cartas são do mesmo naipe". Verifique se A e B são independentes.

Morgado et al. (1991, p 166)



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:MZ2O**

Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $1/3$ e $2/3$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador ABA ou BAB?

Morgado et al. (1991, p 169) Resp.: Surpreendentemente é a sequência ABA!!!

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:HNY6**

Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:

a) escolhermos aleatoriamente as sete respostas;

b) escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas “verdadeiro” do que “falso”.

Morgado et al. (1991, p 157)

Exercício **Ref.:MK3K**

Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $8/10$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $9/10$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $9/10$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

Morgado et al. (1991, p 162) Resp.: $25/44$

Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total

Seja B um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em um espaço amostral Ω tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

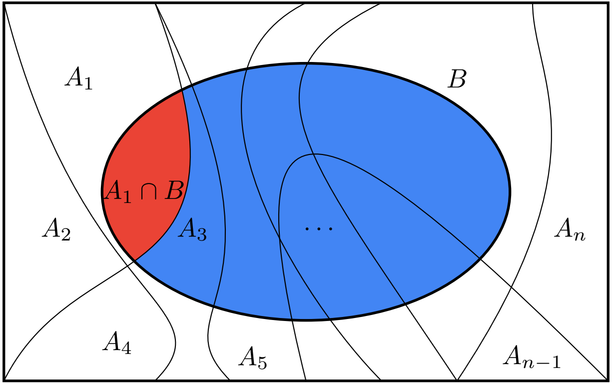
Caso o evento B esteja numa união de apenas dois eventos disjuntos A e $\bar{A}$, então:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B|\bar{A})$$

Dessa forma se $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B|\bar{A}) = p$ então $\mathbb{P}(B) = p$ e, consequentemente, os eventos A e B são independentes, pois $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Para demonstrarmos o Teorema da Probabilidade Total note que B pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em Ω da seguinte forma:



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

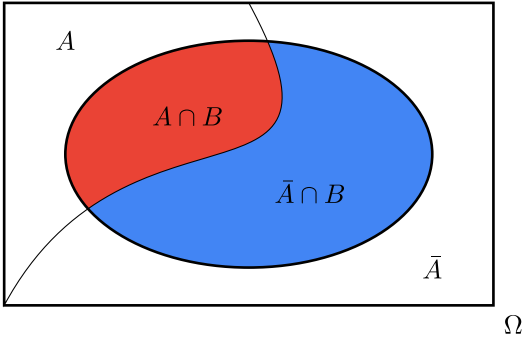
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

Portando o teorema da probabilidade total está demonstrado:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

O evento B está contido numa união de eventos disjuntos compostos por A e $\bar{A}$.



$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Exemplo: Contaminação de Semicondutores

Considere a tabulação que relaciona o nível de contaminação com suas respectivas probabilidades de falha do nível correspondente. A informação é resumida aqui:

Probabilidade de Falha	Nível de Contaminação	Probabilidade do Nível
0,1	Alto	0,2
0,005	Não Alto	0,8

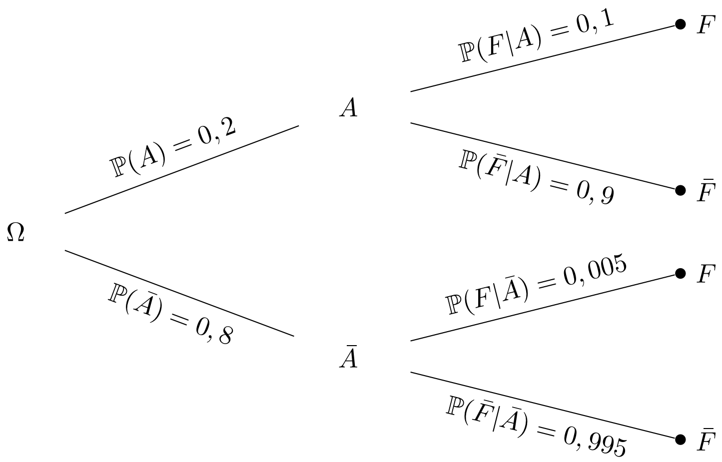
Qual a probabilidade do item falhar?

Sejam os eventos:

$$A = \{\text{“O } \textit{chip} \text{ é exposto a altos níveis de contamização”}\} \qquad \text{e} \qquad F = \{\text{“O } \textit{chip} \text{ falha”}\}$$

Pela tabulação acima temos as seguintes probabilidades: $\mathbb{P}(F|A) = 0,1$, $\mathbb{P}(F|\bar{A}) = 0,005$, $\mathbb{P}(A) = 0,2$ e $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,8$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás



O Teorema da Probabilidade Total nos permite escrever:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,005 \cdot 0,8 = 0,024$$

Note que esse valor coincide com a média ponderada das duas probabilidades de falha.

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de dois itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Sejam os eventos:

$$A = \text{“O primeiro item sorteado é defeituoso”}$$
$$B = \text{“O segundo item sorteado é defeituoso”}$$

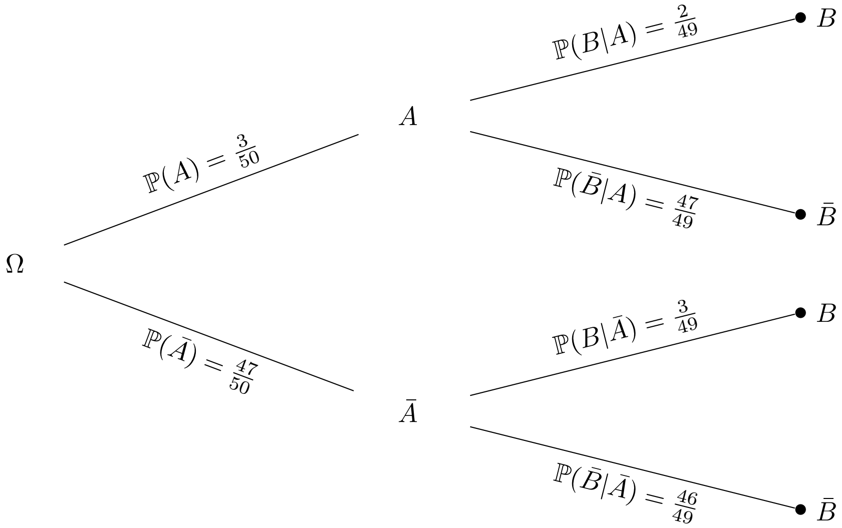
Determine a probabilidade de que o segundo item selecionado seja defeituoso.

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 28) (Adaptado).

Desejamos encontrar $\mathbb{P}(B)$. Note que o evento B é dependente do evento A, ou seja $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B|\bar{A})$. Pelo Teorema da Probabilidade Total temos que:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B|\bar{A})$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás



Desse modo:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} + \frac{47}{50} \cdot \frac{3}{49} = \frac{144}{1225} \approx 0.11755102\ldots$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 5 - Exercício 1

Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida? (Faça um diagrama de árvores)

Resp.: 0,325

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 5 - Exercício 2

Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano. (Faça um diagrama de árvores)

- (a) Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano? Resp.: 0,26
- (b) Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade de que o indivíduo tenha sofrido seu primeiro acidente? Resp.: 0,46

Ross (2010, p. 66)

Exercício **Semana 5 - Exercício 3**

Três candidatos: João, Maria e Leonel, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição? (Faça um diagrama de árvores) Resp.: 0,71

Ross (2010, p. 66)

Exercício

Semana 5 - Exercício 4

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma fazenda F_2 e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado? (Faça um diagrama de árvores)

Magalhães & Lima (2015, p. 58)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 5 - Exercício 5**

Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado. Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido? (Faça um diagrama de árvores) Resp.: $0,32$.

Morgado et al. (1991, p 159)

Exercício **Semana 5 - Exercício 6**

Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $^4/_{10}$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $^6/_{10}$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $^4/_{10}$. Qual a probabilidade da equipe ganhar? (Faça um diagrama de árvores) Resp.: 0,48

Morgado et al. (1991, p. 164)

Teorema de Bayes

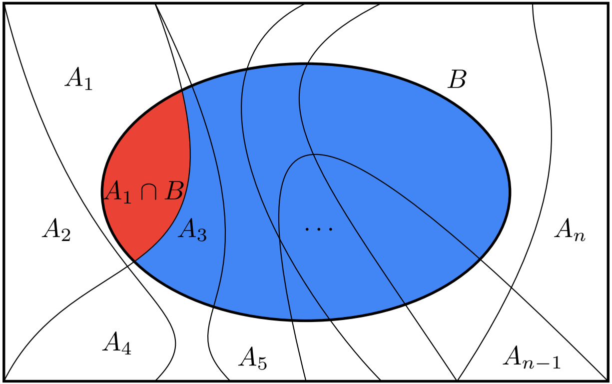
Teorema de Bayes

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e $\mathbb{P}(A_1) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então, para $i = 1, \ldots, n$:

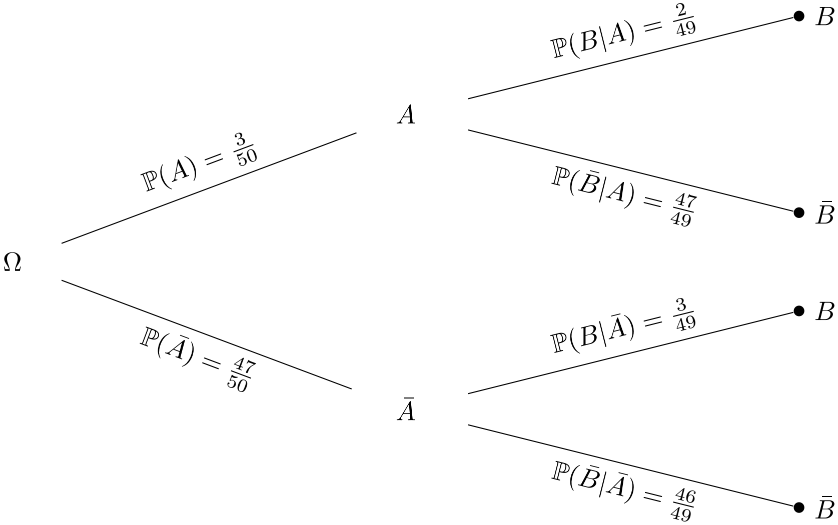
$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$



A_1
B
$A_1 \cap B$
A_2
A_3
$\cdots$
A_n
A_4
A_5
A_{n-1}

Exemplo: Diagnóstico Médico

Pelo fato de um novo procedimento médico ter se mostrado efetivo na detecção prévia de uma doença, propôs-se um rastreamento médico da população. A probabilidade de o teste identificar corretamente alguém com a doença, dando positivo, é 0,99, e a probabilidade de o teste identificar corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é de 0,95. A incidência da doença na população em geral é 0,0001. Você fez o teste e o resultado foi positivo. Qual a probabilidade de você ter a doença?



INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:J4L7**

Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado: (Faça um diagrama de árvores)

a) Qual a probabilidade do pênalti ser convertido? Resp.: $0,46$.

b) Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense? Resp.: $0,88$.

Morgado et al. (1991, p 159)

Exercício **Semana 6 - Exercício 1**

Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A chance de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A chance de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico? (Faça um diagrama de árvores)

Resp.: $^2/_3$

Exercício **Ref.:19LQ**

Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $4/10$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $6/10$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $4/10$.

- (a) Qual a probabilidade da equipe ganhar? Resp.: 0,48
- (b) Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia? Resp.: $1/2$

Morgado et al. (1991, p. 164)

Exercício **Ref.:HJD9**

Considere três eventos A, B e C tais que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ e $\mathbb{P}(C) > 0$. Demonstre o Teorema de Bayes com condicionamento:

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)}.$$

Exercício **Ref.:K59O**

Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $1/3$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame.

(a) Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular? R.: $8/15$

(b) Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.: 0,44

Morgado et al. (1991, p. 165)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:N2L1**

Três urnas I, II e III contém respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna e escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna I? R.: $^5/_{24}$

Exercício **Ref.:JN43**

Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:

- (a) A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro? R.: 0,0792
- (b) A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato. R.: 0,264

Ross (2010, p. 102)

Exercício **Ref.:J32N**

Duas máquinas A e B produzem 3 mil peças em um dia. A máquina A produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A? R.: $^3/_5$

Exercício **Ref.:J297**

Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo A e dez amostras de solo tipo B. Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.

a) Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo B que são selecionadas e quais suas probabilidades. R.: $X \in \{5, \ldots, 10\}$

b) Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo A ou todas as dez amostras do tipo B? R.: 0,0326

c) Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo B selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média? R.: 0,6966

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 6 - Exercício 2

Dentre os estudantes João, Pedro e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas, qual a probabilidade:

- a) De manuel nunca ser escolhido?
- b) De um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?

Exercício **Ref.:1Y34**

Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta? R.: $^4/_7$

Exercício

Semana 6 - Exercício 3

Os colégios A, B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se o resultado for $RRRMMMMM$ (R para rapaz e M para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C?

Bussab & Morettin (2013, p. 128)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 6 - Exercício 4**

Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:K777**

Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com $\mathbb{P}\{1\} = 1/2$ e $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Resp.: $9/10$ Morgado et al. (1991, p 161)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:H7R5**

Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Bussab & Morettin (2013, p. 126)

Exercício **Ref.:5IT6**

Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha n alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é p. Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente?

R.: $\dfrac{np}{1+(n-1)p}$ Ross (2010, p. 67)

Exercício | **Problema de Monty Hall**

Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas, A, B e C: atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe A, mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta C e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

Selvin et al. (1975)

Exercício **Problema do Aniversário**

Considere k pessoas numa sala.

1. Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
2. A partir de qual valor de k essa probabilidade é maior que 0,5?

Mckinney (1966)

Referências

Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, & David Degenszajn ans Roberto Périgo (2002). *Matemática - Volume único* (2 ed.). Atual.

Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.

Mckinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly 73*(4), 385–387.

Montgomery, D. C. & G. C. Runger (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.

Morgado, A. C., J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, & P. Fernandez (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade* (9 ed.). Coleção do Professor de Matemática. SBM.

Ross, S. M. (2010). *A First Course in Probability* (8 ed.). New York: Pearson Hall.

Selvin, S., M. Bloxham, A. I. Khuri, M. Moore, R. Coleman, G. R. Bryce, J. A. Hagans, T. C. Chalmers, E. A. Maxwell, & G. N. Smith (1975). Letters to the editor. *The American Statistician 29*(1), 67–71.

Weiss, N. A. (2012). *Introdutory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás