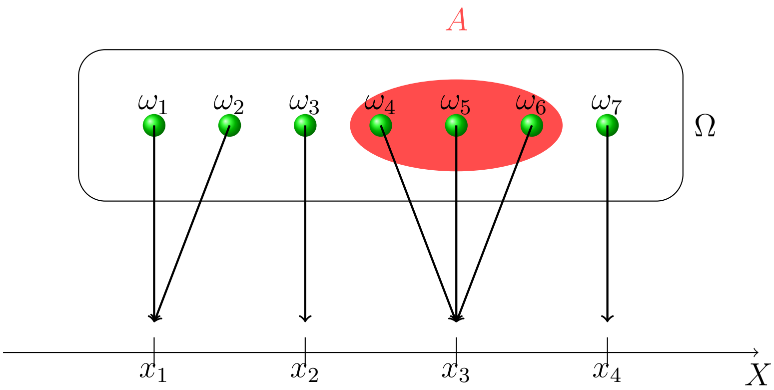
Capítulo 2

Variáveis Aleatórias

Definição 21 (Variável aleatória)

Seja Ω um espaço amostral definido para um determinado experimento aleatório. Uma *variável aleatória* associada à esse experimento é uma função real com domínio em Ω.



A figura acima define um espaço amostral Ω composto por sete eventos elementares:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_7\}$$

e uma variável aleatória X que associa um número real a cada um desses eventos elementares de Ω. A associação feita é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\{\omega_1, \omega_2\} &\to x_1 \\
\{\omega_3\} &\to x_2 \\
A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} &\to x_3 \\
\{\omega_7\} &\to x_4
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2) \\
&\mathbb{P}(X = x_2) = \mathbb{P}(\omega_3) \\
&\mathbb{P}(X = x_3) = \mathbb{P}(\omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6) = \mathbb{P}(A) \\
&\mathbb{P}(X = x_4) = \mathbb{P}(\omega_7)
\end{aligned}$$

Exercício 72: (Ross, 2010, p. 117) Suponha o experimento de jogar três moedas honestas. Seja X o número de caras que apareceram ao final dos três lançamentos. Claramente X é uma variável aleatória. Defina um espaço amostral para esse experimento aleatório e calcule $\mathbb{P}(X = i)$ para $i \in \mathbb{R}$. Repita o exercício assumindo que a probabilidade de sair cara é p.

Exercício 73: (Ross, 2010, p. 118) Duas bolas são retiradas aleatoriamente sem reposição de uma urna contendo 8 bolas numeradas de 1 à 8. Se fizermos uma aposta que ao menos uma das bolas tenha um número maior ou igual à 6, qual é a probabilidade de vencermos essa aposta? Repita o exercício assumindo sorteio com reposição.

Exercício 74: Um experimento consiste em jogar sucessivamente uma moeda honesta até a ocorrência da primeira cara ou até o n-ésimo lançamento da moeda. Seja X o total de lançamentos feitos nesse experimento. Determine:

a) $\mathbb{P}(X = 1)$

b) $\mathbb{P}(X = k), \quad k < n$

c) $\mathbb{P}(X = n)$

Repita o exercício assumindo que a probabilidade de sair cara é p.

Exercício 75: (Ross, 2010, p. 119) Três bolas são aleatoriamente escolhidas de uma urna contendo 3 bolas brancas, 3 vermelhas e 5 pretas. Suponha que eu ganhe \$1 por cada bola branca sorteada e perca \$1 por cada bola vermelha. Seja X o ganho obtido com a retirada de três bolas dessa urna. Determine:

a) Os possíveis valores que a variável aleatória X pode assumir.

b) As probabilidades de que X assuma cada um desses valores.

Exercício 76: (Ross, 2010, p. 172) Duas bolas são aleatoriamente escolhidas de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 pretas e 2 laranjas. Suponha que eu ganhe \$2 por cada bola preta sorteada e perca \$1 por cada bola branca. Seja X o ganho obtido com a retirada de três bolas dessa urna. Determine:

a) Os possíveis valores que a variável aleatória X pode assumir.

b) As probabilidades de que X assuma cada um desses valores.

Exercício 77: (Ross, 2010, p. 172) Dois dados honestos são jogados. Seja X o produto das duas faces obtidas. Calcule $\mathbb{P}(X = i)$ para $i \in \{1, \ldots, 36\}$.

2.1 Variáveis Aleatórias Discretas

Uma variável aleatória é discreta quando seu conjunto de valores possíveis (que apresentam probabilidade positiva) é *finito* ou *enumerável*.

Definição 22 (Função de densidade de probabilidade)

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores num conjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Uma *função de distribuição de probabilidade* (FDP) para X é qualquer função $f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$ onde:

1. $0 \leq f(x_i) \leq 1$ para todo x_i
2. $\displaystyle\sum_i f(x_i) = 1$