

Curso de Estatística e Probabilidade

DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto

thiago.vedovatto@ifg.edu.br

thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

Data da Atualização: 2 de agosto de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: **Plano de Curso e Outras Informações** que está no início da sala do curso de Probabilidade e Estatística no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa

Plano de Curso

Metodologia de Avaliação

Prazos para entrega das atividades

Bibliografia Básica

Horário das aulas síncronas

Controle de frequência

Horário de Atendimento

Espaços Amostrais e Eventos

Variável de interesse

É a variável observada em um experimento.

Experimento aleatório

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) não pode ser previsto.

Um experimento aleatório é também dito não determinístico.

Experimento determinístico

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) pode ser previsto.

Em um experimento é comum considerar mais de uma variável de interesse e, portanto um mesmo experimento pode ser aleatório ou não dependendo da variável de interesse observada.

Espaço Amostral

É o conjunto de *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. O espaço amostral é dito *enumerável* quando existir uma bijeção entre ele e os números naturais. Se tal bijeção não existir diremos que o espaço amostral é *não enumerável*.

Espaço Amostral Discreto Consiste em um conjunto finito ou infinito enumerável de resultados.

Espaço Amostral Contínuo Contém um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais.

O espaço amostral será denotado por Ω .

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Considere um experimento em que você seleciona uma câmera de um telefone celular e registra o tempo de recarga de um *flash* (o tempo necessário para aprontar a câmera para outro *flash*). Os valores possíveis para esse tempo dependem da resolução do temporizador e dos tempos máximo e mínimo de recarga. Há várias formas de definir o espaço amostral desse experimento:

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga, podemos definir:

$$\Omega = \mathbb{R}^+ = \{t | t > 0\}$$

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga e soubermos que ele sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\Omega = \{t | 1,5 < t < 5\}$$

Se o objetivo de estudo consiste em verificar se o tempo é *baixo*, *médio* ou *alto*, então:

$$\Omega = \{\text{baixo}, \text{médio}, \text{alto}\}$$

Se o objetivo é verificar se a câmera satisfaz os requisitos mínimos de tempo de recarga então:

$$\Omega = \{\text{sim}, \text{não}\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 15) (Adaptado).

Evento

São os **subconjuntos** do espaço amostral Ω .

Evento Nulo

É o evento associado a todo *subconjunto vazio* do espaço amostral Ω .

Produto Cartesiano

Sejam dois eventos A e B , o *produto cartesiano* $A \times B$ será o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence à A e o segundo pertence à B .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$



O baralho inglês possui um total de 4 naipes que podem ser descritos pelo conjunto:

$$\mathcal{N} = \{\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}.$$

Cada um dos naipes em \mathcal{N} o baralho inglês possui 13 elementos que podem ser descritos como:

$$\mathcal{E} = \{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}.$$

Assim o baralho inglês possui um total de 52 cartas que podem ser descritas como:

$$\mathcal{C} = \mathcal{E} \times \mathcal{N} = \{(A, \spadesuit), (K, \spadesuit), \dots, (3, \heartsuit), (3, \heartsuit)\}$$

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas.

Se não temos qualquer conhecimento sobre o mecanismo de funcionamento de uma câmera fotográfica podemos definir:

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 > 0, t_2 > 0\}\end{aligned}$$

Se soubermos que o tempo de recarga de cada lâmpada sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{t_1 | 1,5 < t_1 < 5\} \\ \Omega_2 &= \{t_2 | 1,5 < t_2 < 5\} \\ \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 \in \Omega_1, t_2 \in \Omega_2\}\end{aligned}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar se as câmeras atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso reaproveitando os espaços amostrais anteriores

$$\Omega_1 = \{sim, não\}$$

$$\Omega_2 = \{sim, não\}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$= \{(não, não), (sim, não), (não, sim), (sim, sim)\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar o número de câmeras que atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso o espaço amostral será simplesmente

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Estamos interessados em estudar a quantidade de disparos do flash até que a câmera pare de estar dentro das especificações mínimas de qualidade.

$$\Omega = \mathbb{Z}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Considere o experimento de sortear uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Quais as cartas compõem os seguintes eventos?

- a Seleciona-se o rei de copas.
- b Seleciona-se um rei.
- c Seleciona-se uma carta de copas.
- d Seleciona-se uma carta de figura.

Fonte: Weiss (2012, p. 153) (Adaptado).

Considere os experimentos descritos abaixo. Defina um objetivo para cada um deles. Defina um espaço amostral e uma variável de interesse considerando o objetivo proposto. A variável de interesse é contínua ou discreta? Quais são experimentos aleatórios?

- a) Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.
- b) Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.
- c) Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.
- d) Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.
- e) Colocamos um litro de água no fogo e medimos a sua temperatura após vinte minutos.
- f) Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.
- g) Olho pela janela do meu quarto e conto a quantidade de carros que passam na rua pela próxima hora.

Fonte: Bussab & Morettin (2013, p. 108) (Adaptado).

Para cada um dos experimentos abaixo, defina um objetivo, apresente um espaço amostral adequado e conte seus eventos elementares.

- a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.
- b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.
- c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.
- d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
- e) Em uma cidade, famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.
- f) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.
- g) Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 52) (Adaptado).

União de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω . O evento $A \cup B$ denota a *união* dos eventos A e B , ou seja, a ocorrência de ao menos um deles. Em notação de conjuntos:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

A operação de união também é chamada de reunião



Comutatividade da união de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω . Então:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \in B \vee \omega \in A\} \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

Comutatividade do operador lógico \vee
união de eventos

E assim fica justificada a comutatividade da união.

Interseção de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω . O evento $A \cap B$ denota a *interseção* dos eventos A e B , ou seja, a ocorrência simultânea desses eventos. Em notação de conjuntos:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$



Comutatividade da interseção de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω . Então:

$$A \cap B = B \cap A.$$

A demonstração é análoga ao que já fizemos para a união de eventos.

Distributividade da união relativa a interseção

Sejam três eventos A , B e C quaisquer em Ω . Então:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(\implies) Vamos mostrar primeiramente que:

$$\omega \in A \cup (B \cap C) \implies \omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (1)$$

Assuma que $\omega \in A \cup (B \cap C)$, deste modo há dois casos a considerar:

- i Se $\omega \in A$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, portanto, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- ii Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B \cap C$ e, conseqüentemente, $\omega \in B$ e $\omega \in C$, e desses dois fatos concluímos que $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, finalmente, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dessa forma, a condição (1) está provada.

(\Leftarrow) Agora vamos provar a recíproca:

$$\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies \omega \in A \cup (B \cap C). \quad (2)$$

Seja $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$. Novamente, temos dois casos à considerar:

- ❶ Se $\omega \in A$, então é fácil ver que $\omega \in A \cup (B \cap C)$.
- ❷ Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B$ e $\omega \in C$, consequentemente, $\omega \in B \cap C$ e, finalmente, $\omega \in A \cup (B \cap C)$.

Mostra-se aqui a condição (2). E assim fica justificada a comutatividade da união. A prova é semelhante para o caso da comutatividade da interseção.

Distributividade da interseção relativa à união

Sejam três eventos A , B e C quaisquer em Ω . Então:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

A demonstração desse resultado é análoga ao que fizemos para a distributividade da união relativa a interseção.

Eventos elementares

São os *elementos* do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de Ω .

Cardinal de um conjunto

Seja um evento A . O cardinal de A é número de eventos elementares de A .

Cardinal do produto

Sejam os conjuntos A e B . O cardinal do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto dos cardinais dos conjuntos individuais:

$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

Diferença de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω . O evento $A - B$ denota a *diferença* do evento A em relação ao evento B , ou seja, a ocorrência exclusiva de A . Em notação de conjuntos:

$$A - B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

 Ω

$$B - A = B \cap \overline{A}$$

 Ω

Diferença simétrica

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω . O evento $A\Delta B$ denota a *diferença simétrica* entre os eventos A e B , ou seja, a ocorrência exclusiva de ao menos um dos eventos. Em notação de conjuntos:

$$A\Delta B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in (A - B) \wedge \omega \in (B - A)\}.$$



Eventos Disjuntos

Os eventos A_1, \dots, A_n são **disjuntos** (mutuamente excludentes) se

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

para quaisquer i e j distintos.



Eventos Complementares

Dois eventos A e B no espaço amostral Ω são **complementares** se:

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = \Omega$

O complementar de A será denotado por \bar{A} .

As notações para o evento complementar de A costumam variar entre \bar{A} , A' e A^c .



Outras propriedades operacionais dos eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω . Então:

① $\overline{\emptyset} = \Omega$

② $A \cap \emptyset = \emptyset$

③ $A \cap \Omega = A$

④ $A \cup \emptyset = A$

⑤ $A \cup \Omega = \Omega$

⑥ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

⑦ $A \cup \bar{A} = \Omega$

⑧ $A - B = A \cap \bar{B}$

⑨ $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

Leis de Morgan

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω . Então:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

e

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, “ traduza ” para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:

- ① Pelo menos um dos eventos ocorre.
- ② O evento A ocorre mas B não.
- ③ Nenhum deles ocorre.
- ④ Exatamente um dos eventos ocorre.

Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 53)

No experimento de sortear aleatoriamente uma carta de um baralho, considere os eventos:

- A Selecciona-se o rei de copas.
- B Selecciona-se um rei.
- C Selecciona-se uma carta de copas.
- D Selecciona-se uma carta de figura.

Determine adequadamente os eventos:

- a $A \cap B$
- b $A \cup B$
- c $A - B$
- d $B - A$
- e \bar{D}
- f $B \cap C$
- g $B \cup C$
- h $C \cap D$

No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

- A seleciona-se uma carta de copas;
- B seleciona-se uma figura;
- C seleciona-se um Ás;
- D seleciona-se um oito;
- E seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

- a C e D ;
- b D , E e A ;
- c C e E ;
- d D , E , A e B ;
- e D e E

Técnicas de Contagem

Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Suponhamos que uma ação seja constituída de k etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n_1 maneiras distintas. A 2ª etapa pode ser realizada de n_2 maneiras distintas para cada uma das n_1 maneiras de completar a 1ª etapa. A k -ésima etapa pode ser realizada de n_k maneiras distintas para cada uma das n_{k-1} maneiras de completar a $(k - 1)$ -ésima etapa. Então o número de maneiras de se efetuar a ação completa é $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Exemplo: Projeto de um site da internet

O projeto de um site na internet consiste em quatro cores, três fontes e três posições para uma imagem. Quantos projetos diferentes são possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Pelo PFC o número de projetos diferentes será

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

Ou seja 36 projetos.

Fatorial de um número natural

Dado um número natural n , $n \geq 2$, o **fatorial de n** (denota-se por $n!$) é o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, isto é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fatoriais de alguns números:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Arranjo

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se **arranjo dos n elementos tomados k a k** , a qualquer **sequência ordenada** de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

Número de arranjos

Seja um conjunto com n elementos distintos. O número A_k^n de arranjos de n elementos tomados k à k é:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \geq k.$$

Exemplo: Placa de circuito impresso

Uma placa de circuito impresso tem oito localizações diferentes em que um componente pode ser colocado. Se quatro componentes diferentes forem colocados na placa, quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Cada projeto consiste em selecionar uma localização das oito localizações para o primeiro componente, uma localização das sete resultantes para o segundo componente, uma localização das seis resultantes para o terceiro componente e uma localização das cinco resultantes para o quarto componente. Portanto,

$$A_4^8 = \frac{8!}{4!} = 1680$$

Logo temos 1680 projetos diferentes possíveis.

Anagrama

Um **anagrama** de uma palavra é obtido quando trocamos a ordem das suas letras, sem repeti-las, de modo que se forma uma nova sequência de letras, com ou sem sentido.

Permutação

Dado um conjunto com n elementos **distintos**, chama-se **permutação dos n elementos** todo arranjo desses n elementos tomados n à n .

Número de permutações

Seja um conjunto com n elementos distintos, o número P_n de permutações dos n elementos é:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Exemplo: Anagramas da palavra AZUL

Qual é a quantidade de anagramas da palavra AZUL?

O cálculo do número de anagramas de uma palavra (que não tenha letras repetidas) pode ser entendido como um problema de cálculo do número de permutações dos elementos de um conjunto. Note que a palavra azul pode ser interpretada como um conjunto de quatro letras. Desse modo o número total de anagrama será

$$P_4 = 4! = 24$$

Ou seja temos 24 anagramas para a palavra AZUL.

Número de permutações com elementos repetidos

O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ objetos dos quais n_1 são do tipo 1, n_2 são do tipo 2, \dots e n_k são do tipo k é:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Exemplo: Programação de um hospital

Um centro cirúrgico de um hospital necessita programar três cirurgias de joelho e duas cirurgias de quadris em um dia. Denominamos uma cirurgia de joelhos e de quadris como j e q , respectivamente. Qual o número de sequências possíveis das três cirurgias de joelho e das duas cirurgias de quadris?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Note que nesse caso podemos interpretar a cirurgia como um conjunto de 5 elementos (cirurgias) sendo duas de um tipo (cirurgia de joelho) e três de outro (cirurgia de quadril). Desse modo se trata de um problema de permutações com elementos repetidos.

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

É possível enumerar as sequências:

$$\{jjjqj, jjqqj, jqqjj, jqqjj, jqqjj, jqqjj, jqqjj, jqqjj, jqqjj, jqqjj\}$$

Combinação

Uma **combinação** é todo subconjunto de tamanho k de um conjunto de tamanho $n \geq k$ com elementos **distintos**.

Número de combinações

O número C_k^n de combinações de tamanho k que podem ser selecionadas a partir de um conjunto de n elementos distintos é

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemplo: Disposição de Placa de Circuito Impresso

Um componente pode ser colocado em oito localizações diferentes em uma placa de circuito impresso. Se cinco componentes idênticos forem colocados na placa quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Cada projeto é um subconjunto de oito localizações que devem conter os componentes, portanto se trata de um problema de combinação.

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Temos ao todo 56 projetos diferentes.

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Quantas amostras diferentes existem, de tamanho seis, que contêm exatamente dois itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Um subconjunto contendo exatamente dois itens defeituosos pode ser formado escolhendo primeiro os dois itens defeituosos a partir dos três itens defeituosos. Portanto, um problema de combinação:

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Na segunda etapa sortearmos os quatro itens não defeituosos dentre os 47 não defeituosos. Novamente um problema de combinação:

$$C_4^{47} = \binom{47}{4} = \frac{47!}{4!43!} = 178365$$

Aplicando agora o TFC temos que quantidade de amostras que contêm exatamente dois itens defeituosos será

$$3 \cdot 178365 = 535095$$

Considere um polígono regular de n lados. Mostre que a quantidade de diagonais é dada por:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Quantos múltiplos de 3, compostos de 3 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 7?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

Uma determinada área de pesquisa contém doze estudantes orientandos. O professor orientador dessa área deseja dividir os estudantes em três grupos de estudos de mesmo tamanho. De quantos modos diferentes esse professor pode dividir esses doze estudantes?

Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

O historiador judeu *Flavius Josephus*, que viveu no século 1º, figura como personagem de um problema clássico da computação. Neste problema, as pessoas estão em um círculo esperando para serem assassinadas. A contagem para definir a próxima pessoa a ser assassinada começa em um ponto especificado no círculo, e prossegue ao redor do círculo em uma direção especificada. Depois que um determinado número de pessoas é ignorado, a próxima pessoa é assassinada. O procedimento é repetido com as pessoas restantes, começando com a próxima pessoa, indo na mesma direção e pulando o mesmo número de pessoas, até que apenas uma pessoa permaneça e seja libertada. Neste problema, n denota o número de pessoas no círculo inicial, e k denota a contagem para cada etapa, ou seja, $k - 1$ pessoas são ignoradas e o k -ésimo é assassinado. Considerando que as pessoas no círculo são numeradas de 1 à n , a posição inicial sendo 1 e a contagem sendo inclusiva com $k = 2$, em qual posição do círculo de 153 pessoas deveria estar alguém para que seja libertada?

Pretende-se selecionar quatro pessoas de um grupo constituído de três professores e cinco alunos, para tirar uma fotografia. Se pelo menos um dos professores deve aparecer na foto, de quantos modos poderá ser feita a seleção?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 372) (Adaptado).

Suponha que você criou uma senha que contém três letras seguidas de quatro algarismos. Por algum motivo você esqueceu sua senha. Você somente lembra que a senha tem uma única letra “A” e, na última posição tem o algarismo “5”. No pior caso, quantas combinações você terá que fazer até achar sua senha correta? (Considere as 26 letras e os 10 algarismos)

Maria acabou de aprender que computadores entendem apenas códigos binários (sequências de 0 e 1). João desafiou Maria à calcular quantas strings binárias, de 100 algarismos, possuem 4 ou menos 1's. Sabendo que Maria acertou o desafio, qual valor foi calculado por Maria ?

Uma pessoa deseja criar uma senha que é um número natural de quatro dígitos e que possui pelo menos dois dígitos iguais e, conseqüentemente, o primeiro algarismo dessa senha é diferente de zero. Quantas senhas distintas essa pessoa pode criar, satisfazendo essas condições apresentadas?

Definições de Probabilidade

Definição frequentista de probabilidade

Considere o número limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Seja n_A o número de ocorrências do evento A em n repetições independentes do experimento em questão. Então:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}.$$

Essa definição nos permite interpretar a probabilidade como **frequência relativa**.

Probabilidade não existe!!! A probabilidade não se trata de um grandeza física que pode ser mensurável por meio de alguma “régua” ou “balança”.

Definição clássica de probabilidade

Seja um espaço amostral Ω composto por um número **finito** de eventos elementares **equiprováveis**:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}.$$

A probabilidade de ocorrência do evento $A \subset \Omega$ é dada por:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde $n(A)$ é o número de eventos elementares contidos em A e $n(\Omega)$ é o número de eventos elementares no espaço amostral.

O caso onde o espaço amostral possui um número **infinito** de elementos (enumerável ou não) não será foco desse curso introdutório.

Em caso de um número **infinito enumerável** de eventos usamos limites para obter essa probabilidade e no caso de um espaço amostral composto por um número **infinito não enumerável** de eventos elementares será preciso associar o cálculo das probabilidades à medidas de intervalos, áreas e volumes.

Nesse caso teremos a chamada **probabilidade geométrica** que não será focada desse curso.

Exemplo: Diodos a laser

Considere que 30% dos diodos a *laser* em uma batelada de 100 satisfazem os requerimentos mínimos de potência de um consumidor específico. Se um diodo à *laser* for selecionado ao acaso, isto é, se cada diodo a *laser* for igualmente provável de ser selecionado, nosso sentimento intuitivo será de que a probabilidade de satisfazer os requerimentos do consumidor é 0,30. Seja E o evento em que o diodo selecionado satisfaça os requerimentos do consumidor. Então E é o subconjunto de 30 diodos que satisfaz os requerimentos do consumidor. Visto que E contém 30 resultados e cada um deles tem probabilidade igual a 0,01, concluimos que a probabilidade de E é 0,3. A conclusão coincide com a nossa intuição.

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 21) (Adaptado).

Exemplo: Lançamento de Moedas

Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de:

- a) Obter exatamente 2 caras?
- b) Obter pelo menos 2 caras?

Para resolver esse exercício vamos construir inicialmente os espaços amostrais. Seja $\Omega_1 = \{\text{cara, coroa}\}$ um espaço amostral para o lançamento de apenas uma moeda. Dessa forma no lançamento de três moedas podemos considerar o espaço amostral:

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \\ &= \{(\text{cara, cara, cara}), (\text{cara, cara, coroa}), (\text{cara, coroa, cara}), (\text{coroa, cara, cara}), \\ &\quad (\text{coroa, coroa, cara}), (\text{coroa, cara, coroa}), (\text{cara, coroa, coroa}), (\text{coroa, coroa, coroa})\}\end{aligned}$$

Note que Ω é **finito** e todos os seus eventos elementares são **equiprováveis**.

- ① Considere o evento: $A = \text{"Obter exatamente 2 caras?"}$. Logo: $\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$
- ② Considere o evento: $B = \text{"Obter pelo menos 2 caras?"}$. Logo: $\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade da amostra selecionada conter exatamente dois itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Inicialmente vamos definir

$$\Omega = \{\text{"Amostras de tamanho seis selecionadas a partir do total de 50 itens."}\}$$

Note que Ω é **finito**, todos os seus eventos elementares são **equiprováveis** e além disso:

$$n(\Omega) = C_6^{50} = \binom{50}{6} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = 15.890.700$$

Seja o evento:

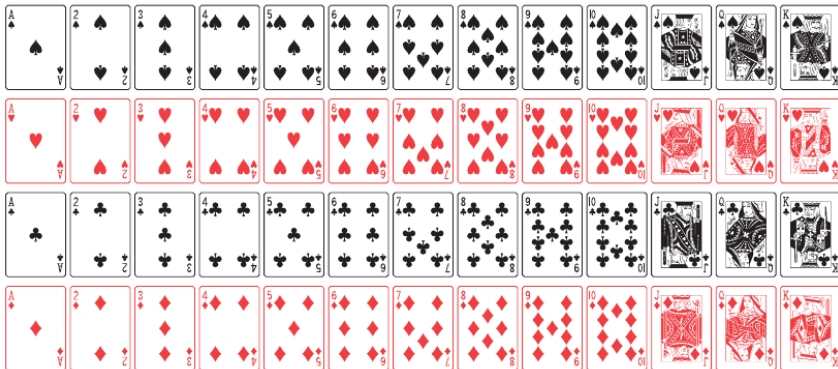
$$A = \{\text{"A amostra de seis itens contém exatamente dois defeituosos"}\}$$

Em aulas anteriores vimos que $n(A) = 535.095$. Portanto:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{535.095}{15.890.700} = \frac{33}{980}$$

Seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum. Qual a probabilidade da carta ser:

- a Um ás e vermelha?
- b Um ás ou vermelha?



Suponhamos que eu lance simultaneamente um tetraedro (dado de quatro faces) e uma moeda. Qual é a probabilidade de ocorrer uma face par no tetraedro e sair coroa na moeda?

Dois dados de cores diferentes são jogados simultaneamente.

- a Qual a probabilidade de que a soma deles seja maior que sete?
- b Qual a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual à três?



De um grupo de n objetos escolhemos r ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de não sortearmos objetos repetidos?

Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos 1 cara e 1 coroa?

Uma urna contém 10 bolas identificadas como $B_1 \dots B_{10}$. Qual a probabilidade de que a bola sorteada tenha índice par? E do índice ser primo?

Cinco homens e cinco mulheres estão dispostas em fila indiana. Qual a probabilidade de que:

- a A primeira pessoa da fila seja homem?
- b A primeira e a última pessoas da fila sejam homens?

Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Considere um polígono regular de n lados. Tome uma das retas determinadas por dois vértices quaisquer. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Definição axiomática de probabilidade

Uma função $\mathbb{P}(\cdot)$, com domínio no espaço amostral Ω , é denominada probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

- 1 $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega;$
- 2 $\mathbb{P}(\Omega) = 1;$
- 3 $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i),$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Essa definição não determina probabilidades; as probabilidades são atribuídas de acordo com o conhecimento que temos do contexto de aplicação.

Consequências da definição

- $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$. Portanto, usando as propriedades 2 e 3, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonicidade);
- E da monotonicidade vem naturalmente que $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Regra da Adição de Probabilidades

Sejam A_1, \dots, A_n eventos de Ω , então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

Regra da Adição - Dois Eventos

Sejam A e B dois eventos de Ω , então:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Regra da Adição - Três Eventos

Sejam A , B e C três eventos de Ω , então:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 1

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

Contaminação	Localização na Ferramenta		Total
	Centro	Borda	
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

Seja Ω o espaço amostral composto por todas as pastilhas e H o evento no qual a pastilha contém altos níveis de contaminação. Note que o espaço amostral Ω é finito e todas as pastilhas tem a mesma probabilidade de ser sorteadas. Desse modo podemos aplicar a DCP.

$$\mathbb{P}(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{358}{940} = \frac{179}{470}.$$

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 2

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

Contaminação	Localização na Ferramenta		Total
	Centro	Borda	
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

Seja Ω o espaço amostral composto por todas as pastilhas e C o evento no qual a pastilha esta localizada no centro da ferramenta. Note que o espaço amostral Ω é finito e todas as pastilhas tem a mesma probabilidade de ser sorteadas. Desse modo podemos aplicar a DCP.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{626}{940} = \frac{313}{470}.$$

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 3

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

Contaminação	Localização na Ferramenta		Total
	Centro	Borda	
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação e estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

$$\mathbb{P}(C \cap H) = \frac{n(C \cap H)}{n(\Omega)} = \frac{112}{940} = \frac{28}{235}.$$

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 4

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

Contaminação	Localização na Ferramenta		Total
	Centro	Borda	
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação ou estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

$$\mathbb{P}(C \cup H) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(C \cap H) = \frac{313}{470} + \frac{179}{470} - \frac{28}{235} = \frac{218}{235}$$

Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter:

- a Soma dos pontos igual a oito?

Resp.: $\frac{5}{36}$

- b Dois números iguais?

Resp.: $\frac{1}{6}$

- c Soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais (Use a regra da adição)?

Resp.: $\frac{5}{18}$

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω , tais que $\mathbb{P}(A) = 2/5$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$. Determine $\mathbb{P}(B)$ tais que A e B sejam disjuntos.

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω , tais que $\mathbb{P}(A) = 1/5$, $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/10$. Determine o valor de p .

Resp.: $p = 2/5$

Magalhães & Lima (2015, p. 53) (Adaptado)

Sejam A e B eventos em um espaço amostral Ω , onde B é três vezes mais provável que A . Sabendo que $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$ determine $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ quando:

- a A e B são disjuntos
- b $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.

Um torneio é disputado por 4 times A , B , C e D . É três vezes mais provável que A vença do que B , 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D . Quais as probabilidades de cada time vencer?

Resp.: $\mathbb{P}(A) = 9/14$, $\mathbb{P}(B) = 3/14$, $\mathbb{P}(C) = 3/28$ e $\mathbb{P}(D) = 1/28$

Morgado et al. (1991, p. 143) (Adaptado)

Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7. Resp.: $\frac{63}{200}$

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

- a ser brasileira?
- b preferir futebol?
- c ser estrangeira e preferir natação?
- d ser estrangeira ou preferir queimada?

Regra dos Complementares

Para quaisquer eventos A e B :

- ① $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$
- ② $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$
- ③ $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Demonstrações:

- ① Note que A e \overline{A} são eventos disjuntos e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Aplicando a segunda e a terceira propriedades das funções de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}).$$

- ② Note que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, logo $A \cap B$ e $\overline{A} \cup \overline{B}$ são complementares, logo esse resultado decorre diretamente do resultado 1.
- ③ Note que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, mas $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ são disjuntos, logo $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

Exemplo: Probabilidade de Eventos

Um experimento aleatório pode resultar em um dos resultados $\{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0,1; 0,3; 0,5 e 0,1, respectivamente. Seja A o evento $\{a, b\}$, seja B o evento $\{a, b, c\}$ e seja C o evento $\{d\}$. Então,

$$\mathbb{P}(A) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

$$\mathbb{P}(B) = 0,3 + 0,5 + 0,1 = 0,9$$

$$\mathbb{P}(C) = 0,1$$

Além disso aplicando a **Regra dos Complementares**

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,6$$

$$\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,1$$

$$\mathbb{P}(\bar{C}) = 0,9$$

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade da amostra selecionada conter no máximo dois itens defeituosos? Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Inicialmente vamos definir o espaço amostral:

$$\Omega = \{\text{"Amostras de tamanho seis selecionadas a partir do total de 50 itens."}\}$$

Note que Ω é **finito**, todos os seus eventos elementares são **equiprováveis** e além disso:

$$n(\Omega) = C_6^{50} = \binom{50}{6} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = 15.890.700$$

Sejam os eventos:

$A = \{\text{"A amostra de seis itens contêm exatamente três defeituosos"}\}$

$B = \{\text{"A amostra de seis itens contêm no máximo dois defeituosos"}\}$

Note que $B = \bar{A}$. Além disso:

$$n(A) = C_3^{47} = \binom{47}{3} = \frac{47!}{3! \cdot 44!} = 16.215$$

Portando:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16.215}{15.890.700} = \frac{1}{980}$$

Aplicando a **Regra dos Complementares** obtemos que:

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{980} = \frac{979}{980}$$

Dois dados são lançados independentemente. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares? (Dica.: Use a regra dos complementares)

Resp.: $3/4$

Considere duas urnas tais que a primeira contenha bolas numeradas de 1 até 1000 e a segunda contenha bolas numeradas de 10 até 500. Uma bola é sorteada de cada uma das urnas. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares? (Dica.: Use a regra dos complementares)

Numa classe de 55 alunos, 21 praticam vôlei e basquete, 39 praticam vôlei e 33 praticam basquete. Um aluno da classe é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de o aluno escolhido praticar um e somente um desses esportes?

Considere o espaço amostral

$$\Omega = \{\text{"Todos os alunos na classe"}\}$$

Note que Ω é finito e assumamos que os alunos têm igual probabilidade de serem sorteados e os eventos.

$$B = \{\text{"O aluno escolhido pratica basquete"}\}$$

$$V = \{\text{"O aluno escolhido pratica vôlei"}\}$$

Pelo enunciado temos que: $n(\Omega) = 55$, $n(B \cap V) = 21$, $n(V) = 39$ e $n(B) = 33$.

Desejamos determinar:

$$\mathbb{P}(B \Delta V) = \mathbb{P}[(B \cap \bar{V}) \cup (\bar{B} \cap V)]$$

Veja que os eventos $(B \cap \bar{V})$ e $(\bar{B} \cap V)$ são eventos disjuntos, portanto podemos aplicar a **Definição Axiomática de Probabilidade**

$$\mathbb{P}(B \Delta V) = \mathbb{P}(B \cap \bar{V}) + \mathbb{P}(\bar{B} \cap V)$$

A **Regra dos Complementares** estabelece que:

$$\mathbb{P}(B \cup \bar{V}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap V) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\bar{B} \cup V) = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(B \cap V).$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(B \Delta V) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V) - 2\mathbb{P}(B \cap V).$$

Aplicando a **Definição Clássica de Probabilidade**:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{33}{55} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{39}{55}$$

$$\mathbb{P}(B \cap V) = \frac{n(B \cap V)}{n(\Omega)} = \frac{21}{55}$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(B \triangle V) = \frac{3}{5} + \frac{39}{55} - 2 \cdot \frac{21}{55} = \frac{6}{11}$$

Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 20 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

- ① Ser esportista.
- ② Ser esportista e aluno da biologia e noturno.
- ③ Não ser da biologia.
- ④ Ser esportista ou aluno da biologia.
- ⑤ Não ser esportista, nem aluno da biologia.

Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas. Resp.: $3/2^4$

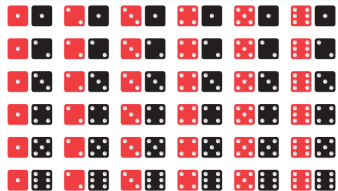
Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?

Dentre os estudantes João, Gabriela e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas, qual a probabilidade:

- a De manuel nunca ser escolhido? Resp.: $(2/3)^5$
- b De um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta? Resp.: $\frac{2^5}{3^4}$

Em um jogo de dados são jogados dois dados honestos de seis faces. Considere os eventos:

- A soma das faces é 7;
 - A soma das faces é 11;
 - A soma das faces é 2;
 - A soma das faces é 3;
 - A soma das faces é 12;
 - A soma das faces é 8;
 - As faces são iguais.
- a Determine a probabilidade de todos os eventos.
 - b O jogador vence esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 7 ou 11. Calcule a probabilidade desse evento.
 - c O jogador perde esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 2, 3 ou 12. Calcule a probabilidade desse evento.
 - d Qual a probabilidade das faces serem diferentes?
 - e Qual a probabilidade da soma ser 8 ou das faces serem iguais?



Weiss (2012, p. 147)

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

- 1 não ser brasileira e preferir de futebol?
- 2 não ser estrangeira e nem preferir de vôlei?
- 3 não ser estrangeira ou não preferir de queimada?

Uma caixa contém nove peças das quais três são defeituosas. Sorteamos duas peças. Qual a probabilidade de não escolhermos duas peças defeituosas?

Chance de um evento

A chance de um evento A é definida como:

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

Existe uma confusão muito grande entre os conceitos de *chance* (em inglês *odds*) e *probabilidade*, o senso comum trata esses dois conceitos como sinônimos, mas não o são.

A chance e a probabilidade são medidas que assumem valores em intervalos diferentes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\in [0, 1] \\ \mathbb{C}h(A) &\in [0, \infty)\end{aligned}$$

Desigualdade entre Chance e Probabilidade

Para todo evento A :

$$\mathbb{C}h(A) \geq \mathbb{P}(A).$$

Sabendo que a chance de um evento A é definida como:

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

Mostre que:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{C}h(A)}{1 + \mathbb{C}h(A)}.$$

Exemplo: Lançamento de um dado

Considere o experimento de lançarmos um dado e observarmos a face que ficou voltada pra cima. Seja A o evento no qual a face \square fica voltada para cima. A chance de ocorrer o evento A é de 1 para 5, ou seja, o evento A possui 5 eventos elementares contrários $\{\square, \square, \square, \square, \square\}$ e 1 evento elementar favorável $\{\square\}$. Portanto nesse caso:

$$\mathbb{C}h(A) = 0,2 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A) = 1/6 \approx 0.1666 \dots$$

Exemplo: Apostas Esportivas

Em um site de apostas esportivas é dito que a chance da seleção brasileira de futebol vencer a seleção espanhola é de 3 para 1. Qual a probabilidade da seleção brasileira vencer?

Considere o evento:

$A = \text{“A seleção brasileira vence a seleção espanhola.”}$

Se a chance da seleção brasileira de futebol vencer a seleção espanhola são de 3 para 1 então

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{3}{1} = 3$$

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade e a chance da amostra selecionada não conter itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

A probabilidade de um cavalo vencer três ou menos corridas é de 58%; a probabilidade de ele vencer três ou mais corridas é de 71%.

- 1 Qual é a probabilidade do cavalo vencer exatamente três corridas?

Resp.:29%

- 2 Qual é a chance do cavalo vencer exatamente três corridas?

Resp.:As chances são de aproximadamente 41 para 100.

Probabilidade Condicional e Independência

Probabilidade Condicional

Dados os eventos A e B a **probabilidade condicional** de A dado B , $\mathbb{P}(A|B)$, é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A), & \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(B)$ é a probabilidade à **priori**

$\mathbb{P}(A|B)$ é a probabilidade à **posteriori**

Regra do Produto de Probabilidades

Dados os eventos A e B :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

$$D = \{\text{"O item é defeituoso"}\}$$

$$F = \{\text{"O item tem falhas na superfície"}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado \bar{F} ? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F ? Qual? Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).

Note que $\mathbb{P}(F) > 0$. Desse modo temos que:

$$\mathbb{P}(D|F) = \frac{10}{40} = 0,25 = 25\% \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(D|\bar{F}) = \frac{18}{360} = 0,05 = 5\%$$

Pelo resultado obtido fica sugerida uma possível relação entre falhas na superfície e itens funcionalmente defeituosos que deveria ser investigada. Há indícios de que a presença de falhas na superfície aumenta a probabilidade do item ser defeituoso.

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se que uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

- a) sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?
- b) sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?
- c) sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?
- d) sabendo que a pessoa não é estrangeira, prefira futebol? Que conclusão você pode tirar comparando esse item com o item a)?

Exemplo: Estágios de Usinagem

A probabilidade de que o primeiro estágio de uma operação numericamente controlada, de usinagem para pistões com alta rpm atenda as especificações é igual à 0,90. Falhas são causadas por variações no metal, alinhamento de acessórios, condição de lâmina de corte, vibração e condições ambientais. Dado que o primeiro estágio atende as especificações, a probabilidade de que o segundo estágio atenda as especificações é de 0,95. Qual é a probabilidade de ambos os estágios atenderem as especificações?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 26) (Adaptado).

Considere os eventos:

$A = \{\text{"O primeiro estágio atende as especificações"}\}$

$B = \{\text{"O segundo estágio atende as especificações"}\}$

Pelo enunciado do problema temos que: $\mathbb{P}(A) = 0,9$ e $\mathbb{P}(B|A) = 0,95$. Desejamos encontrar $\mathbb{P}(A \cap B)$. Note que a regra do produto estabelece que:

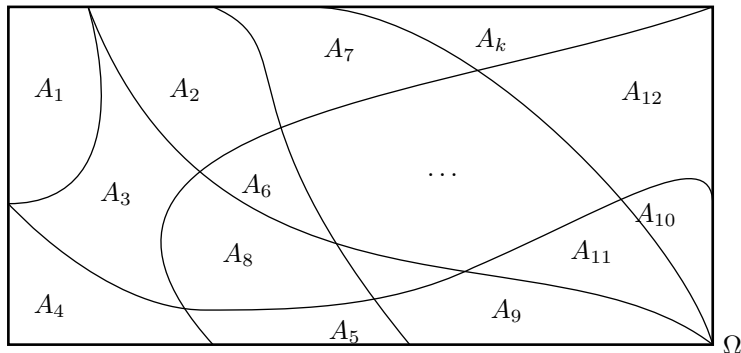
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855$$

Partição do Espaço Amostral

O conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2 \dots A_n\}$ de eventos do espaço amostral Ω é uma partição do espaço amostral se:

① $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

② $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$



Sejam $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2 \dots A_n\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2 \dots B_m\}$ duas partições de Ω . Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 por um diagrama de árvores. No caso particular onde $\mathcal{P}_1 = \{A, \bar{A}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B, \bar{B}\}$, um diagrama adequado seria:



Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

$$D = \{\text{"O item é defeituoso"}\}$$

$$F = \{\text{"O item tem falhas na superfície"}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado \bar{F} ? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F ? Qual?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).





Eventos independentes

Dois eventos A e B são **independentes** se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Independência dos complementares

Se dois eventos A e B são independentes seus complementares também serão.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})$$

Três eventos independentes

Três eventos A , B e C são **independentes** se, e somente se:

- 1 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- 2 $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
- 3 $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
- 4 $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são **mutuamente independentes**.

Exemplo: Amostragem **com** reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de dois itens é selecionada a partir dos 50 itens. **Os itens selecionados são repostos.** Ou seja, cada item pode ser sorteado mais de uma vez.

- a Qual a probabilidade do segundo item selecionado ser defeituoso, dado que o primeiro item a ser selecionado é defeituoso?
- b Qual a probabilidade de que ambas as peças sejam defeituosas?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Considere os eventos:

$$A = \{\text{"O primeiro item é defeituoso"}\} \quad \text{e} \quad B = \{\text{"O segundo item é defeituoso"}\}$$

Precisamos determinar $\mathbb{P}(B|A)$ e $\mathbb{P}(A \cap B)$. Num sorteio com reposição os sucessivos sorteios sempre ocorrem nas mesmas condições, portanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) = 3/50$. E pela Regra do Produto temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{3}{50} \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{2500}$$

Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retiramos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição? (Faça um diagrama de árvores)

Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição? (Faça um diagrama de árvores)

Dados os eventos A , B e C em um mesmo espaço amostral, mostre que as chamadas *regras da cadeia* de probabilidades

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$$

e

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C).$$

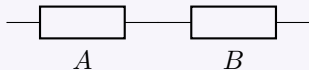
Exemplo: Circuito em Série

O seguinte circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

A = “O dispositivo A funcionou normalmente”

B = “O dispositivo B funcionou normalmente”

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 8/9$ e $\mathbb{P}(B) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B . Há somente uma rota que depende do funcionamento de ambos os dispositivos. Então a probabilidade do circuito operar é:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}.$$

Exemplo: Circuito em Paralelo

O seguinte circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

A = “O dispositivo A funcionou normalmente”

B = “O dispositivo B funcionou normalmente”

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 8/9$ e $\mathbb{P}(B) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B . Nesse caso haverá uma rota se ao menos um dos dispositivos funcionar, ou seja o circuito opera quando o evento $A \cup B$ ocorre, então a probabilidade do circuito operar é $\mathbb{P}(A \cup B)$, mas não é tão simples calcular essa probabilidade diretamente. Lembre-se que da **Regra dos Complementares** e das **Leis de Morgan** temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) \quad \text{e} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Mas se os eventos A e B são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = 8/9 \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = 1/9$ e $\mathbb{P}(B) = 9/10 \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = 1/10$. Portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{89}{90}$$

Portando o circuito opera com probabilidade $89/90$.

Exemplo: Circuito “Avançado”

O seguinte circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

A = “O dispositivo A funcionou normalmente”

B = “O dispositivo B funcionou normalmente”

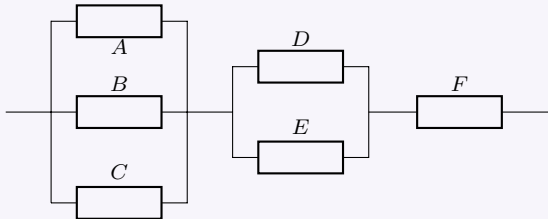
C = “O dispositivo C funcionou normalmente”

D = “O dispositivo D funcionou normalmente”

E = “O dispositivo E funcionou normalmente”

F = “O dispositivo F funcionou normalmente”

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 6/7$, $\mathbb{P}(B) = 4/5$, $\mathbb{P}(C) = 2/3$, $\mathbb{P}(D) = 5/6$, $\mathbb{P}(E) = 7/8$ e $\mathbb{P}(F) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento de todos os dispositivos seja independente. Para resolver esse problema é necessário separar o circuito em módulos. Vamos definir o módulo M_1 como sendo formado pelos componentes A , B e C . O módulo M_2 como sendo formado pelos componentes D , E . Note que os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série.



Portanto a solução desse exercício será composta de três etapas:

- ① Analisar a probabilidade do módulo M_1 funcionar;
- ② Analisar a probabilidade do módulo M_2 funcionar;
- ③ Analisar a probabilidade do circuito formado pelos módulos M_1 e M_2 e a componente F operar.

Note que o módulo 1 é composto por três componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_1 = A \cup B \cup C$ ocorrer.



Lembre-se que da **Regra dos Complementares** e das **Leis de Morgan** temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) \quad \text{e} \quad \overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

Mas se os eventos A , B e C são independentes os seus complementares também serão:

$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{C})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = 6/7 \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = 1/7$, $\mathbb{P}(B) = 4/5 \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = 1/5$ e $\mathbb{P}(C) = 2/3 \implies \mathbb{P}(\bar{C}) = 1/3$.

Portanto:

$$\mathbb{P}(M_1) = 1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{104}{105}.$$

Note que o módulo 2 é composto por duas componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_2 = D \cup E$ ocorrer.



Lembre-se que da **Regra dos Complementares** e das **Leis de Morgan** temos que:

$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) \quad \text{e} \quad \overline{D \cup E} = \bar{D} \cap \bar{E}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D} \cap \bar{E})$$

Mas se os eventos D e E são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D}) \cdot \mathbb{P}(\bar{E})$$

Note que $\mathbb{P}(D) = 5/6 \implies \mathbb{P}(\bar{D}) = 1/6$ e $\mathbb{P}(E) = 7/8 \implies \mathbb{P}(\bar{E}) = 1/8$. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{47}{48}.$$



Como comentado anteriormente os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série. Dessa forma temos que o circuito funcionará se o evento $M_1 \cap M_2 \cap F$ ocorrer. Portanto:

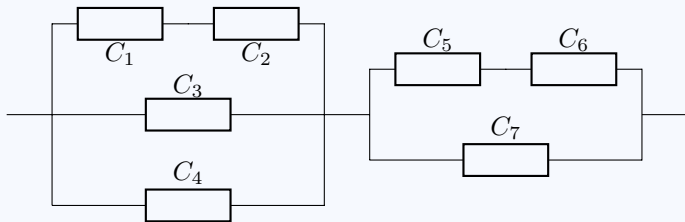
$$\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap F) = \mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(M_2) \cdot \mathbb{P}(F) = \frac{104}{105} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{9}{10} = \frac{611}{700}$$

Logo o circuito funcionará com probabilidade $\frac{611}{700} \approx 0.872857 \dots$

O seguinte circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$C_i = \text{"A componente } i \text{ funcionou normalmente"}$

Sabe-se que $\mathbb{P}(C_i) = \frac{100 - i}{100}$. Qual a probabilidade do circuito operar?



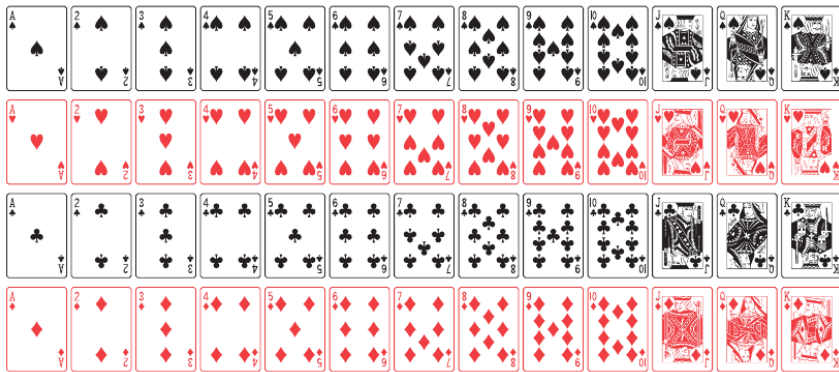
Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela? (Faça um diagrama de probabilidades)

Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequência amarela-verde-roxa considerando que:

- a o sorteio é sem reposição (Faça um diagrama de probabilidades)
- b o sorteio é com reposição (Faça um diagrama de probabilidades)

Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento “O ás de copas está entre as treze cartas” e B o evento “As treze cartas são do mesmo naipe”. Verifique se A e B são independentes.

Morgado et al. (1991, p 166)



Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B . Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $1/3$ e $2/3$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador ABA ou BAB?

Morgado et al. (1991, p 169)

Resp.: Surpreendentemente é a sequência ABA!!!

Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:

- a) escolhermos aleatoriamente as sete respostas;
- b) escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas “verdadeiro” do que “falso”.

Morgado et al. (1991, p 157)

Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $\frac{9}{10}$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

Morgado et al. (1991, p 162)

Resp.: $\frac{25}{44}$

Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total

Seja B um evento contido numa união de eventos disjuntos A_1, A_2, \dots, A_n em um espaço amostral Ω tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \dots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

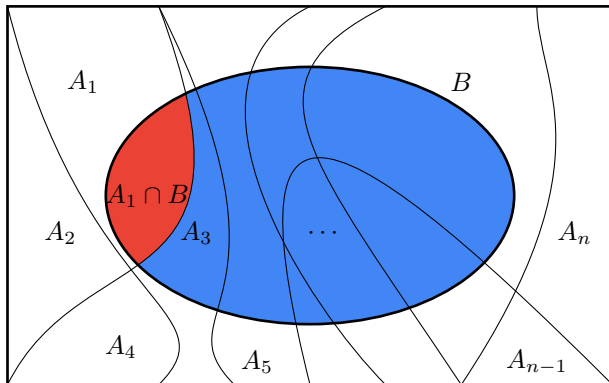
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)$$

Caso o evento B esteja numa união de apenas dois eventos disjuntos A e \bar{A} , então:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}(B|\bar{A})$$

Dessa forma se $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B|\bar{A}) = p$ então $\mathbb{P}(B) = p$ e, conseqüentemente, os eventos A e B são independentes, pois $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$

Para demonstrarmos o Teorema da Probabilidade Total note que B pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em Ω da seguinte forma:



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \dots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

Portando o teorema da probabilidade total está demonstrado:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

O evento B está contido numa união de eventos disjuntos compostos por A e \bar{A} .



$$B = (\textcolor{red}{A} \cap \textcolor{red}{B}) \cup (\textcolor{blue}{\bar{A}} \cap \textcolor{blue}{B})$$

Exemplo: Contaminação de Semicondutores

Considere a tabulação que relaciona o nível de contaminação com suas respectivas probabilidades de falha do nível correspondente. A informação é resumida aqui:

Probabilidade de Falha	Nível de Contaminação	Probabilidade do Nível
0,1	Alto	0,2
0,005	Não Alto	0,8

Qual a probabilidade do item falhar?

Sejam os eventos:

$$A = \{\text{"O chip é exposto a altos níveis de contaminação"}\} \quad \text{e} \quad F = \{\text{"O chip falha"}\}$$

Pela tabulação acima temos as seguintes probabilidades: $\mathbb{P}(F|A) = 0,1$, $\mathbb{P}(F|\bar{A}) = 0,005$, $\mathbb{P}(A) = 0,2$ e $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,8$.



O Teorema da Probabilidade Total nos permite escrever:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,005 \cdot 0,8 = 0,024$$

Note que esse valor coincide com a média ponderada das duas probabilidades de falha.

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de dois itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Sejam os eventos:

A = “O primeiro item sorteado é defeituoso”

B = “O segundo item sorteado é defeituoso”

Determine a probabilidade de que o segundo item selecionado seja defeituoso.

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 28) (Adaptado).

Desejamos encontrar $\mathbb{P}(B)$. Note que o evento B é dependente do evento A , ou seja $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B|\bar{A})$. Pelo Teorema da Probabilidade Total temos que:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B|\bar{A})$$



Desse modo:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} + \frac{47}{50} \cdot \frac{3}{49} = \frac{144}{1225} \approx 0.11755102\dots$$

Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida? (Faça um diagrama de árvores)

Resp.: 0,325

Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano. (Faça um diagrama de árvores)

- a Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano? Resp.: 0,26
- b Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade desse ser seu primeiro acidente? Resp.: 0,54

Ross (2010, p. 66)

Três candidatos: João, Maria e Leonel, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição? (Faça um diagrama de árvores) Resp.: 0,71

Ross (2010, p. 66)

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1 , 30% de uma fazenda F_2 e 50% de F_3 . Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3 , essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado? (Faça um diagrama de árvores) Resp.: 6,5%

Magalhães & Lima (2015, p. 58)

Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado. Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido? (Faça um diagrama de árvores) Resp.: 0,32.

Morgado et al. (1991, p 159)

Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $\frac{4}{10}$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $\frac{6}{10}$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $\frac{4}{10}$. Qual a probabilidade da equipe ganhar? (Faça um diagrama de árvores) Resp.: 0,48

Morgado et al. (1991, p. 164)

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos A_1, \dots, A_n e $\mathbb{P}(A_1) > 0, \dots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então, para $i = 1, \dots, n$:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}$$



Pelo fato de um novo procedimento médico ter se mostrado efetivo na detecção prévia de uma doença, propôs-se um rastreamento médico da população. A probabilidade de o teste identificar corretamente alguém com a doença, dando positivo, é 0,99, e a probabilidade de o teste identificar corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é de 0,95. A incidência da doença na população em geral é 0,0001. Você fez o teste e o resultado foi positivo. Qual a probabilidade de você ter a doença?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 30) (Adaptado).

Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado: (Faça um diagrama de árvores)

- a Qual a probabilidade do pênalti ser convertido? Resp.: 0,46.
- b Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense? Resp.: 0,88.

Morgado et al. (1991, p 159)

Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A chance de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A chance de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico? (Faça um diagrama de árvores)

Resp.: $2/3$

Considere três eventos A , B e C tais que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ e $\mathbb{P}(C) > 0$. Demonstre o Teorema de Bayes com condicionamento:

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)}.$$

Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $\frac{1}{3}$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame. (Faça um diagrama de árvores)

- a Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular? R.: $\frac{8}{15}$
- b Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.: 0,44

Morgado et al. (1991, p. 165)

Três urnas I , II e III contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna I ? (Faça um diagrama de árvores) R.: $5/24$

Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:

- a) A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro? R.: 0,0792
- b) A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato. R.: 0,264

(Faça um diagrama de árvores)

Ross (2010, p. 102)

Duas máquinas A e B produzem 3 mil peças em um dia. A máquina A produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A ? (Faça um diagrama de árvores) R.: $\frac{3}{5}$

Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo A e dez amostras de solo tipo B . Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.

- a) Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo B que são selecionadas e quais suas probabilidades. R.: $X \in \{5, \dots, 10\}$
- b) Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo A ou todas as dez amostras do tipo B ? R.: 0,0326
- c) Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo B selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média? R.: 0,6966

Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $\frac{4}{10}$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $\frac{6}{10}$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $\frac{4}{10}$. (Faça um diagrama de árvores)

- a Qual a probabilidade da equipe ganhar? Resp.: 0,48
- b Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia? Resp.: $\frac{1}{2}$

Morgado et al. (1991, p. 164)

Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta? (Faça um diagrama de árvores) R.: $\frac{4}{7}$

Os colégios A , B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se a sequência de escolhidos for $RRRMMMMM$ (R para rapaz e M para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C ? (Faça um diagrama de árvores). Resp.: 0,072

Bussab & Morettin (2013, p. 128)

Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que o número de caras superou o de coroas, calcule a probabilidade de que no primeiro lançamento tenhamos obtido uma coroa. (Construa um diagrama de árvores)

Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com $\mathbb{P}\{1\} = 1/2$ e $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Resp.: $9/10$

Morgado et al. (1991, p 161)

Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Bussab & Morettin (2013, p. 126)

Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha n alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é p . Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente?

$$\text{R.: } \frac{np}{1 + (n - 1)p}$$

Ross (2010, p. 67)

Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas, A , B e C : atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe A , mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta C e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

Selvin et al. (1975)



Considere k pessoas numa sala.

- 1 Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
- 2 A partir de qual valor de k essa probabilidade é maior que 0,5?

Mckinney (1966)



Variáveis Aleatórias

Variável Aleatória

Seja Ω um espaço amostral definido para um determinado experimento aleatório. Uma **variável aleatória** associada à esse experimento é uma função real com domínio em Ω .



A figura acima define um espaço amostral Ω composto por sete eventos elementares:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_7\}.$$

Também define uma variável aleatória X que associa um número real a cada um desses eventos elementares de Ω .

A associação feita é a seguinte:

$$\{\omega_1, \omega_2\} \rightarrow x_1$$

$$\{\omega_3\} \rightarrow x_2$$

$$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \rightarrow x_3$$

$$\{\omega_7\} \rightarrow x_4$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2)$$

$$\mathbb{P}(X = x_2) = \mathbb{P}(\omega_3)$$

$$\mathbb{P}(X = x_3) = \mathbb{P}(\omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6) = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(X = x_4) = \mathbb{P}(\omega_7)$$

Variável Aleatória Discreta

Uma variável aleatória é discreta quando seu conjunto de valores possíveis (que apresentam probabilidade positiva) é **finito** ou **enumerável**.

- Número de dias com chuva no próximo ano.
- Número de alunos que concluirão o curso no próximo período.
- Número de vezes que uma pessoa escolhida ao acaso caiu de bicicleta durante a vida.

Variável Aleatória Contínua

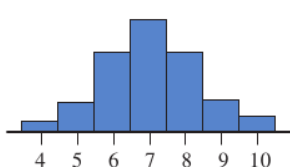
Uma variável aleatória é contínua quando assume valores em um **intervalo da reta real**.

- Tempo para o tanque de gasolina de um carro ficar vazio após ter abastecido.
- Altura de um edifício escolhido aleatoriamente.
- Peso de um boi escolhido ao acaso na véspera do abate.

Exemplo: Medições de Espigas de Milho

Um agricultor está medindo o tamanho das espigas de milho de sua fazenda. Ele dispõe de três réguas diferentes. Ele possui uma régua onde:

- a A unidade de medida mínima é o centímetro;
- b A unidade de medida mínima é o milímetro;
- c Consegue medir o valor real do tamanho da espiga.



(a)



(b)



(c)

As medições feitas com as réguas (a) e (b) são discretas. A medição feita com a régua (c) é contínua.

Função de Distribuição de Probabilidade (FDP)

Seja X uma variável aleatória **discreta** assumindo valores num conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \dots\}$. Uma **função de distribuição de probabilidade** para X é qualquer função $f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$ onde:

- 1 $0 \leq f(x_i) \leq 1$ para todo x_i
- 2 $\sum_i f(x_i) = 1$

Função de Densidade de Probabilidade (FDP)

Seja X uma variável aleatória **contínua** assumindo valores num intervalo da reta real. A **função de densidade de probabilidade** para X é uma função real onde:

- 1 $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Essas funções costumam ser chamadas, respectivamente, por **distribuição** e **densidade**.

Como calcular probabilidade em um modelo contínuo?

A probabilidade de que $X \in B \subset \mathbb{R}$ é dada por:

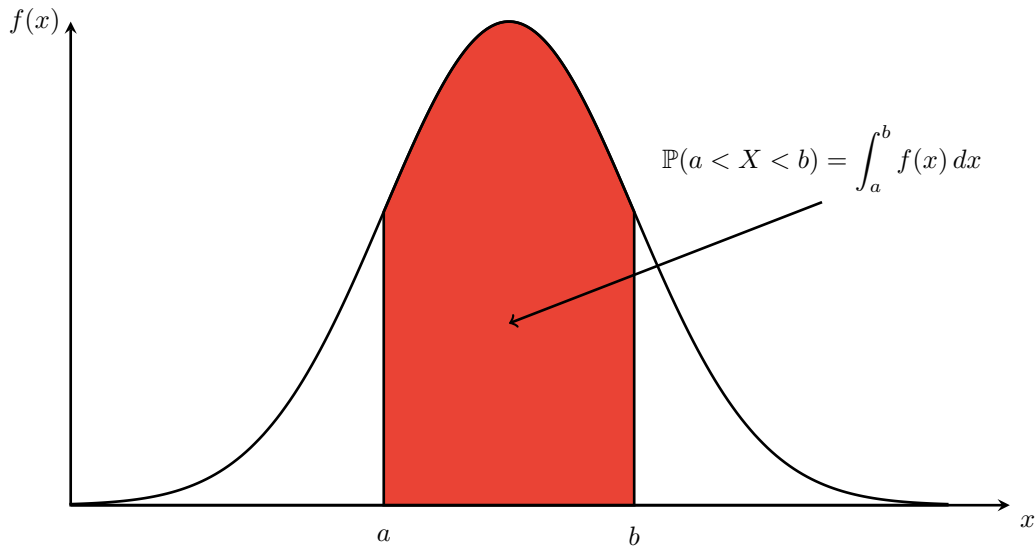
$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx.$$

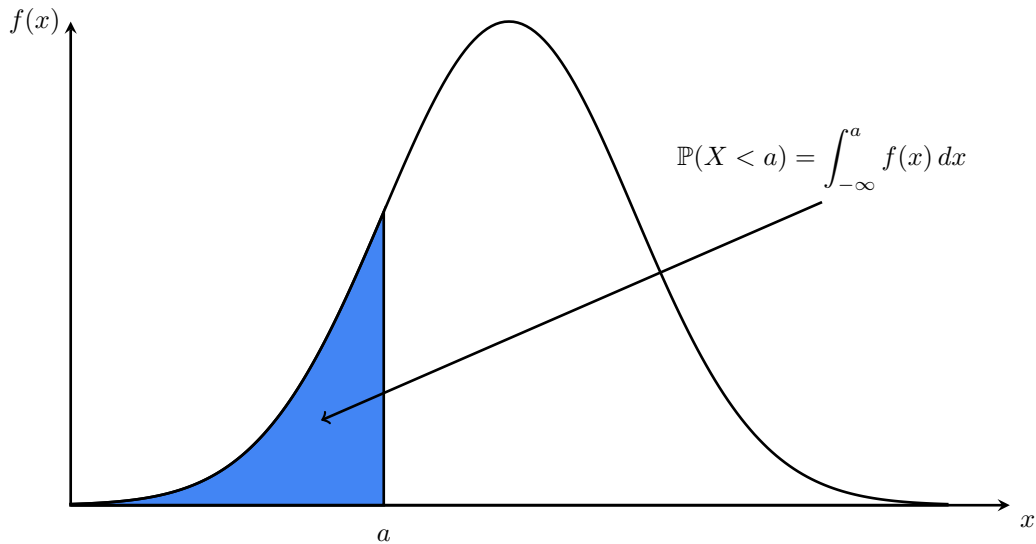
Caso B seja um intervalo real (a, b) então:

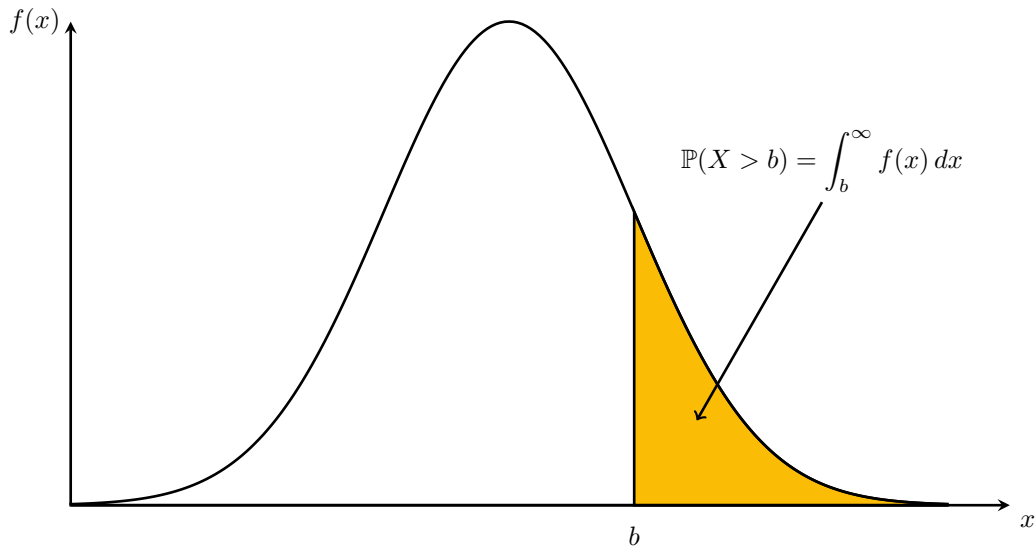
$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Se X for uma variável aleatória contínua, então para qualquer a e b ,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$







Suponha o experimento de jogar três moedas honestas. Seja X o número de caras que apareceram ao final dos três lançamentos. Defina um espaço amostral para esse experimento aleatório e calcule $\mathbb{P}(X = i)$ para $i \in \mathbb{R}$.

Ross (2010, p. 117)

Duas bolas são retiradas aleatoriamente sem reposição de uma urna contendo 8 bolas numeradas de 1 à 8. Determine a FDP da variável aleatória:

$$X = \text{"Maior número sorteado."}$$

Se fizermos uma aposta que ao menos uma das bolas tenha um número maior ou igual à 6, qual é a probabilidade de vencermos essa aposta, ou seja $\mathbb{P}(X \geq 6)$? Repita o exercício assumindo sorteio com reposição.

Um experimento consiste em jogar sucessivamente uma moeda honesta até a ocorrência da primeira cara ou até o n -ésimo lançamento da moeda. Seja X o total de lançamentos feitos nesse experimento. Determine:

- a $\mathbb{P}(X = 1)$
- b $\mathbb{P}(X = k), \quad k < n$
- c $\mathbb{P}(X = n)$

Um experimento consiste em jogar sucessivamente uma moeda com probabilidade de sair cara igual à p até a ocorrência da primeira cara ou até o n -ésimo lançamento da moeda. Seja X o total de lançamentos feitos nesse experimento. Determine:

- a $\mathbb{P}(X = 1)$
- b $\mathbb{P}(X = k), \quad k < n$
- c $\mathbb{P}(X = n)$

Dois dados honestos são jogados. Seja X o produto das duas faces obtidas. Calcule $\mathbb{P}(X = i)$ para $i \in \{1, \dots, 36\}$.

Ross (2010, p. 172)

Verifique se as funções a seguir são FDPs e ilustre seus gráficos:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{se } x = 1 \\ 3/8 & \text{se } x = 2 \\ 1/4 & \text{se } x = 3 \\ 1/4 & \text{se } x = 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } x = 1 \\ 2/3 & \text{se } x = 0 \\ 1/3 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1/2^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2/3^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 1/2^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Existe k para que as funções a seguir sejam FDPs?

- a $f(x) = \begin{cases} k/4 & \text{se } x = 10 \\ k/2 & \text{se } x = 12 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
- b $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } x = 3, \dots, 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
- c $f(x) = \begin{cases} k/2 & \text{se } x = 0 \\ -k/3 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

(Rathie & Zörnig, 2012, p. 102)

Com os dados do último censo, a assistente social de um Centro de Saúde constatou que para as famílias da região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Suponha que uma família será escolhida, aleatoriamente, nessa região e o número de filhos averiguado. Qual a FDP da variável aleatória número de filhos?

(Magalhães & Lima, 2015, p. 70)

Considere um jogo onde se lançam dois tetraedros (dados de quatro faces, com faces enumeradas de 1 à 4) distintos e não-viciados. Suponha que nesse jogo você ganhe R\$5,00 quando a soma dos dados for superior à 6. Ganhe R\$3,00 quando a soma for 5 ou 6 e perca R\$4,00 quando a soma for menor que 5. Qual é a distribuição dos ganhos possíveis?

Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos, na resistência do subsolo. Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra. Com base em evidências geológicas admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0,1 para cada 5 metros. O custo básico inicial é de 100UPCs (unidade padrão de construção) e será acrescido de $50k$, com k representando o número de alterações observadas. Assumindo que as alterações ocorrem independentemente entre cada um dos três intervalos de 5 metros, qual a função de distribuição de probabilidade da variável custo das obras de fundação?

Magalhães & Lima (2015, p. 71)

Verifique se as expressões a seguir são FDP (assuma que elas se anulam fora dos intervalos especificados).

a $f(x) = 2x$ se $0 \leq x \leq 1$.

b $f(x) = (x-3)/2$ se $3 \leq x \leq 5$.

c $f(x) = \begin{cases} (4+x)/6 & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ (4-x)/6 & \text{se } 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$

d $f(x) = -\pi$, se $-\pi < x < 0$.

Mostre que se X é uma variável aleatória contínua com FDP $f(x)$ então:

- a $\mathbb{P}(X = a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$;
- b $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$;
- c $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a)$.

Verifique se as expressões a seguir são FDP (assuma que elas se anulam fora dos intervalos especificados).

- a $f(x) = 3x$ se $0 \leq x \leq 1$.
- b $f(x) = x^2/2$ se $x \geq 0$.
- c $f(x) = 2$ se $0 \leq x \leq 2$.
- d $f(x) = \begin{cases} (2+x)/4 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/4 & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Suponha que X seja uma variável aleatória contínua definida em um intervalo de tempo (em minutos) relacionada ao tempo que um escrivão gasta para realizar uma determinada tarefa num escritório. Suponha que a variável aleatória X tenha função de distribuição de probabilidade com a densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 4 < x < 6 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ilustre a função de densidade e determine:

- a $\mathbb{P}(4, 5 < X < 5, 5)$ e $\mathbb{P}(4, 5 \leq X \leq 5, 5)$;
- b $\mathbb{P}(X > 5)$ e $\mathbb{P}(X \geq 5)$;
- c $\mathbb{P}(X = 5)$.

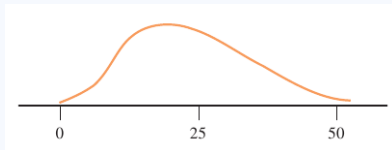
Suponha que X é uma variável aleatória contínua cuja FDP é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & 0 < x < 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a Qual é o valor de C ?
- b Encontre $\mathbb{P}(X > 1)$.

Ross (2010, p. 187)

Se X denotar a vida útil (em milhares de horas) de uma fonte para refrigeração de motores. A curva de densidade é dada pela figura:



Pinte a área sob a curva que corresponda à cada uma das probabilidades:

- a $\mathbb{P}(10 < X < 25)$;
- b $\mathbb{P}(10 \leq X \leq 25)$;
- c $\mathbb{P}(X < 30)$;
- d A probabilidade de que a vida útil seja de no mínimo 25 mil horas;
- e A probabilidade de que a vida útil exceda 25 mil horas.

Arqueólogos estudaram uma certa região e estabeleceram um modelo teórico para a variável C , *comprimento de fósseis da região* (em cm). Suponha que C é uma variável contínua com a seguinte FDP:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40} \left(\frac{c}{10} + 1 \right) & 0 \leq c \leq 20 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a Ilustre graficamente a FDP da variável aleatória C .
- b Qual a probabilidade de um fóssil escolhido ao acaso apresentar comprimento inferior à 12?
Resp.: 0,48
- c $\mathbb{P}(C > 12|C > 5)$?
Resp.: 0,62

A quantidade de horas que um computador funciona antes de falhar é uma variável aleatória contínua com FDP dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-x/100) & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que:

- a um computador esteja funcionando entre 50 e 150 horas após ser ligado.
- b funcione por ao menos 100 horas.

Ross (2010, p. 188)

Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera T , *tempo de teste em minutos*, como uma variável aleatória contínua com FDP dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1/40 (t - 4), & 8 \leq t < 10; \\ 3/20, & 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a Qual a probabilidade de uma criança demorar entre 9 e 12 minutos para resolver o teste?
- b Qual a probabilidade de uma criança demorar mais 4 minutos para terminar o teste dado que já se passaram 3 minutos do início do teste?

Estudos revelam a existência de um grande lençol de água no subsolo de uma região. No entanto sua profundidade ainda não foi determinada. Sabe-se apenas que o lençol pode estar situado em qualquer ponto entre 20 e 100 metros.

- a) Encontre a FDP para a variável aleatória profundidade do lençol de água;
- b) Qual a probabilidade de que o lençol tenha profundidade
 - 1 entre 50 e 70 metros?
 - 2 maior que 50 metros?
 - 3 menor que 50 metros?

Magalhães & Lima (2015, p. 177)

Se X representar a quantidade de grãos vendidos (em toneladas) durante uma semana qualquer em um determinado distribuidor. Suponha que a função de densidade seja dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ilustre a curva de densidade e calcule:

- a $\mathbb{P}(X < 1/2)$;
- b $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$;
- c $\mathbb{P}(X < 1/4)$;
- d $\mathbb{P}(1/4 < X < 1/2)$;
- e $\mathbb{P}(X > 3/4 | X > 1/4)$;
- f $\mathbb{P}(X < 1/4 | X < 1/2)$;
- g $\mathbb{P}(1/4 < X < 3/4 | 1/4 < X < 1/2)$.

Verifique se função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -3 \text{ ou } x > 4 \\ x/12 + 1/4 & \text{se } -3 < x \leq 0 \\ x/4 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 1/16 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

é uma FDP e esboce seu gráfico.

Verifique se função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (3-x)/4 & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma FDP e esboce seu gráfico.

Verifique se função

$$f(x) = \begin{cases} 2(2 - x) & \text{se } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma FDP e esboce seu gráfico.

Verifique se função

$$f(x) = \begin{cases} 4(x - 1) & \text{se } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma FDP e esboce seu gráfico.

Seja $\theta > 0$ uma constante qualquer. Verifique se função

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{se } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma FDP e esboce seu gráfico para diferentes valores de θ .

Determine k para que a função a seguir sejam uma FDP:

$$f(x) = \begin{cases} k(2 - x) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine k para que a função a seguir sejam uma FDP:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sejam α e β constantes. Determine k para que a função a seguir sejam uma FDP:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\beta - \alpha} & \text{se } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função densidade de probabilidade do peso líquido, em libras, de um pacote de herbicida químico é $f(x) = 2$, para $49,75 < x < 50,25$ libras.

- a) Determine a probabilidade de um pacote pesar mais de 50 libras.
- b) Quanto herbicida químico está contido em 90% de todos os pacotes?

Montgomery & Runger (2018)

A função densidade de probabilidade do comprimento de um bastão metálico é $f(x) = 2$ para $2,3 < x < 2,8$ metros.

- a Se as especificações para esse processo forem de 2,25 a 2,75 metros, que proporção das barras não se ajustará às especificações?
- b Suponha que a função densidade de probabilidade seja $f(x) = 2$, para um intervalo de comprimento de 0,5 metro. Sobre qual valor a densidade deveria ser centrada, de modo a atingir a maior proporção de bastões dentro das especificações?

Montgomery & Runger (2018)

Função de Distribuição Acumulada

Função de Distribuição Acumulada (FDA)

Para qualquer variável aleatória X define-se a **função de distribuição acumulada** (FDA) como:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A FDA pode ser expressa como:

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \mathbb{P}(X = k)$$

se X for uma variável aleatória discreta e

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

se X for uma variável aleatória contínua.

A FDA também é frequentemente chamada apenas por **distribuição acumulada**.

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Caso X seja uma variável aleatória contínua com uma distribuição acumulada $F(x)$ dada, é possível obter sua densidade derivando a FDA em relação à x :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

desde que a derivada exista.

Exercício Canal Digital

Há uma chance de que um *bit* transmitido por meio de um canal de transmissão digital seja recebido com um erro. Seja X o número de *bits* com erro nos quatro próximos bits transmitidos. Os valores possíveis para X são $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Baseando-se em um modelo para os erros (que será apresentado na seção seguinte), as probabilidades para esses valores serão determinadas. Suponha que as probabilidades sejam:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0,6561$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0,2916$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 0,0486$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = 0,0036$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = 0,0001$$

Qual a FDP da variável aleatória X e sua FDA? Faça um gráfico para cada uma dessas funções.

Exemplo: Tempo de recarga de *flash*

O tempo para recarregar o *flash* é testado em três câmeras de celulares. A probabilidade de uma câmera passar no teste é de $\frac{4}{5}$; as câmeras trabalham independentemente. Seja a variável aleatória X como sendo a quantidade de câmeras que passam no teste. O espaço amostral para o experimento e as probabilidades associadas são mostrados à seguir:

Câmera	Câmera	Câmera	Probabilidade	X
Passa	Passa	Passa	0,512	3
Passa	Passa	Falha	0,128	2
Falha	Passa	Passa	0,128	2
Passa	Falha	Passa	0,128	2
Passa	Falha	Falha	0,032	1
Falha	Passa	Falha	0,032	1
Falha	Falha	Passa	0,032	1
Falha	Falha	Falha	0,008	0

A última coluna da tabela mostra os possíveis valores assumidos pela variável aleatória X . Qual a FDP da variável aleatória X e sua FDA? Faça um gráfico para cada uma dessas funções.

Suponha o experimento de jogar três moedas tais que a probabilidade de sair cara é p . Seja X o número de caras que apareceram ao final dos três lançamentos. Defina um espaço amostral para esse experimento aleatório e calcule $\mathbb{P}(X = i)$ para $i \in \mathbb{R}$. Faça um gráfico para a FDP e FDA de X assumindo que $p = 1/2$.

Duas bolas são retiradas aleatoriamente sem reposição de uma urna contendo 8 bolas numeradas de 1 à 8. Determine a FDP da variável aleatória:

$$X = \text{“Maior número sorteado.”}$$

Se fizermos uma aposta que ao menos uma das bolas tenha um número maior ou igual à 6, qual é a probabilidade de vencermos essa aposta, ou seja $\mathbb{P}(X \geq 6)$? Repita o exercício assumindo sorteio com reposição.

Determine a função de distribuição acumulada $F(x)$ para a seguinte densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{se } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a função de distribuição acumulada $F(x)$ para a seguinte densidade:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a função de distribuição acumulada $F(x)$ para a seguinte densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 4x/5 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{5}(3 - x) & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Um artigo em *Electric Power Systems Research* [“*Modeling Real-Time Balancing Power Demands in Wind Power Systems Using Stochastic Differential Equations*” (2010, Vol. 80(8), pp. 966-974)] considerou um novo modelo probabilístico para equilibrar a demanda de energia com grande quantidade de energia eólica. Nesse modelo, a perda de energia causada por desligamentos é considerada ter uma distribuição triangular com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} -5,56 \times 10^{-4} + 5,56 \times 10^{-6}x, & x \in [100, 500] \\ 4,44 \times 10^{-3} - 4,44 \times 10^{-6}x, & x \in (500, 1000] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine o seguinte:

- a $\mathbb{P}(X < 90)$
- b $\mathbb{P}(100 < X \leq 200)$
- c $\mathbb{P}(X > 800)$
- d Valor excedido com probabilidade 0,1.

Montgomery & Runger (2018)

O tempo (em horas) de espera para o atendimento em uma emergência de hospital segue uma distribuição cuja função de densidade de probabilidade é igual a

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \quad \text{para } 0 < x.$$

Determine o seguinte:

- a) $\mathbb{P}(X < 0,5)$
- b) $\mathbb{P}(X > 2)$
- c) O valor de x (em horas) excedido com probabilidade igual a 0,05.

Montgomery & Runger (2018)

A distribuição de X é aproximada por uma função densidade de probabilidade triangular:

$$f(x) = \begin{cases} 0,0025x - 0,075, & 30 < x < 50 \\ -0,0025x + 0,175, & 50 < x < 70 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine o seguinte:

- a $\mathbb{P}(X \leq 40)$
- b $\mathbb{P}(40 < X \leq 60)$
- c O valor de x excedido com probabilidade igual a 0,99.

Montgomery & Runger (2018)

Determine a função de distribuição acumulada $F(x)$ para a seguinte densidade:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3 - x/4 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1/4 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Duas bolas são simultaneamente sorteadas de uma urna contendo 3 bolas azuis, 3 vermelhas e 5 amarelas. Suponha que eu ganhe \$1 por cada bola azul sorteada e perca \$1 por cada bola vermelha. Seja X o ganho obtido com a retirada de duas bolas dessa urna. Determine:

- a Os possíveis valores que a variável aleatória X pode assumir.
- b As probabilidades de que X assuma cada um desses valores.
- c Determine a FDP e a FDA da variável aleatória X
- d Faça o gráfico da FDP e da FDA.

Ross (2010, p. 119)

Duas bolas são simultaneamente sorteadas de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 pretas e 2 laranjas. Suponha que eu ganhe \$2 por cada bola preta sorteada e perca \$1 por cada bola branca. Seja X o ganho obtido com a retirada de duas bolas dessa urna. Determine:

- a Os possíveis valores que a variável aleatória X pode assumir.
- b As probabilidades de que X assuma cada um desses valores.
- c Determine a FDP e a FDA da variável aleatória X
- d Faça o gráfico da FDP e da FDA.

Obter a FDA para as FDPs à seguir e ilustrar os seus gráficos:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } x = -1 \\ 1/4 & \text{se } x = 0 \\ 2/4 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0,2 & \text{se } x = -15 \\ 0,4 & \text{se } x = -10 \\ 0,3 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1/2^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere os experimento aleatório de lançar três moedas distintas e observar o número de caras. Determine a FDP a FDA e do número de caras.

Considere o experimento aleatório de sortear duas bolas em uma urna contendo 3 bolas azuis, 4 bolas verdes e 5 bolas roxas e observar o número de bolas azuis. Determine a FDP e a FDA do número de bolas azuis considerando que o sorteio é sem reposição. Refaça o exercício considerando que o sorteio pe com reposição.

Considere o experimento aleatório de lançar dois tetraedros (dados de quatro faces, com faces enumeradas de 1 à 4) distintos e não-viciados e observar a soma das faces. Determine a FDP e a FDA da soma das faces que saem para cima?

Considere dois lançamentos independentes de uma moeda equilibrada. Defina X como o número de caras nos dois lançamentos. Quais são as FDP e FDA associadas a essa variável aleatória? Exiba os gráficos correspondentes.

Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No estudo, as crianças recebiam uma dose de vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem alguma reação alérgica, recebiam outra dose da vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas. Os resultados completos estão na tabela a seguir.

Doses	1	2	3	4	5
freq.	245	288	256	145	66

Determine a FDP e a FDA para a variável aleatória número de doses recebidas. Qual a probabilidade de uma criança receber:

- a) três doses?
- b) no máximo duas doses?
- c) no mínimo três doses?

(Magalhães & Lima, 2015, p. 75)

Média e variância de variáveis aleatórias

Média de uma variável aleatória discreta

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição $f(x)$. Sua média é dada por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x f(x).$$

Média de uma variável aleatória contínua

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade $f(x)$. Sua média é dada por:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

A *diferença básica* entre essas relações e as equivalentes para as variáveis discretas é que aqui “trocamos” o somatório por uma integral.

A média de uma variável aleatória também é chamada de valor esperado.

Média de uma função de uma variável aleatória discreta

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição $f(x)$ e seja $h(x)$ uma função qualquer. A média variável transformada $h(X)$ é dada por:

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_x h(x)f(x).$$

Média de uma função de uma variável aleatória contínua

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade $f(x)$ e seja $h(x)$ uma função qualquer. A média variável transformada $h(X)$ é dada por:

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx$$

Variância de uma variável aleatória discreta

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição $f(x)$:

$$\text{var}(X) = \sum_x [x - \mathbb{E}(X)]^2 f(x)$$

Variância de uma variável aleatória contínua

Seja X uma variável aleatória contínua com densidade $f(x)$:

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathbb{E}(X)]^2 f(x) dx$$

Variância de uma variável aleatória

Seja X uma variável aleatória, então:

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

Variância de uma variável aleatória

Seja X uma variável aleatória e $h(X) = aX + b$, onde a e b são constantes, então:

- a $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- b $\text{var}(aX + b) = a^2\text{var}(X)$

Desvio padrão de uma variável aleatória

O desvio padrão de uma variável aleatória X é dado por:

$$dp(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$$

Moda de uma variável aleatória

A moda Mo de uma variável aleatória X com densidade/distribuição $f(x)$ é definida como:

$$Mo = \arg \max_x f(x).$$

Nas variáveis aleatórias contínuas a moda é a abscissa do ponto de máximo global da densidade e nas discretas é o ponto do espaço amostral com maior probabilidade.

Uma variável aleatória X pode ser

unimodal quando só há uma moda

multimodal quando só há mais de uma moda (modas locais)

amodal quando não há uma moda

Mediana de uma variável aleatória

A mediana Me dessa mesma variável é definida como:

$$\mathbb{P}(X > Me) = 0,5.$$

Há uma chance de que um *bit* transmitido por meio de um canal de transmissão digital seja recebido com um erro. Seja X o número de *bits* com erro nos quatro próximos bits transmitidos. Os valores possíveis para X são $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Baseando-se em um modelo para os erros, as probabilidades para esses valores serão determinadas. Suponha que as probabilidades sejam:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0,6561$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0,2916$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 0,0486$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = 0,0036$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = 0,0001$$

Calcule a média e a variância de X .

Montgomery & Runger (2018, p. 37)

Dois novos projetos de um produto devem ser comparados, baseando-se no seu potencial de retorno. O setor de comercialização (*marketing*) sente que o retorno do Projeto A pode ser previsto bem acuradamente como US\$ 3 milhões de dólares. O potencial de retorno do Projeto B é mais difícil de estimar. O setor de comercialização conclui que há uma probabilidade de 0,3 de que o retorno do Projeto B seja de US\$ 7 milhões de dólares, mas há uma probabilidade de igual à 0,7 de que o retorno seja de apenas US\$ 2 milhões.

- a Calcule a média e a variância do retorno de cada um dos projetos.
- b Qual a interpretação para a média e a variância nesse problema?
- c Qual projeto é o mais “arriscado”?
- d Suponha que os retornos possíveis para o projeto B tenha sido recalculados e reduzidos em 15%. Como ficam as novas medidas da média e da variância nesse caso?

Montgomery & Runger (2018, p. 37)

Obter $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}|X|$, $\mathbb{E}(3X - 5)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(3X - 5)$ para a função de distribuição de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } x = -1 \\ 1/4 & \text{se } x = 0 \\ 2/4 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obter $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}|X|$, $\mathbb{E}(3X - 5)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(3X - 5)$ para a função de distribuição de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & \text{se } x = -15 \\ 0,4 & \text{se } x = -10 \\ 0,3 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obter $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}|X|$, $\mathbb{E}(3X - 5)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(3X - 5)$ para a função de distribuição de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obter $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}|X|$, $\mathbb{E}(3X - 5)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(3X - 5)$ para a função de distribuição de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere X como o número de caras obtidas no lançamento de quatro moedas, onde cada uma delas foi cunhada de modo que a probabilidade de dar cara seja quatro vezes menor do que de dar coroa. Determine:

- a A função de distribuição de probabilidade para X .
- b A função de distribuição acumulada para X .
- c A probabilidade de obtermos
 - i exatamente uma cara;
 - ii pelo menos uma cara;
 - iii no máximo três caras.
- d A probabilidade de que X não diste mais de um desvio padrão em torno da média.

Um florista fez estoque de uma flor que lhe custa R\$0,50 e que ele vende à R\$1,50 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses compram em um dia casualmente escolhido. O florista descobriu que a FDP de X é dada pela tabela abaixo:

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Quantas flores o florista deveria ter em estoque a fim de maximizar o seu lucro? R.:
2 flores

Seja X uma variável aleatória que assuma apenas os valores -1 , 0 e 1 . Sabendo que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/5$ e $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$. Determine:

- a $\mathbb{P}(X = 1)$
- b $\mathbb{E}(X^2)$
- c $\mathbb{P}(X = 1|X > 0)$

Ross (2010, p. 66)

Considere o experimento de lançar três moedas distintas (cada moeda é lançada apenas uma vez) e observar o número de caras. Encontre a FDP a FDA a média e a variância para a variável número de caras.

Considere o experimento de sortear (sem reposição) duas bolas em uma urna contendo 3 bolas azuis, 4 bolas verdes e 5 bolas roxas e observar o número de bolas azuis. Encontre a FDP a FDA a média e a variância para a variável número de bolas azuis obtidas. Refaça o exercício assumindo sorteio com reposição e compare os valores das médias. A que conclusão você chega?

Considere o experimento de lançar dois tetraedros (dados de quatro faces, com faces enumeradas de 1 à 4) distintos e não-viciados e observar a soma das faces. Encontre a FDP a FDA a média e a variância para a variável soma das faces dos tetraedros.

Uma moeda honesta é lançada três vezes. Considere as seguintes variáveis aleatórias observadas nesse experimento:

- Ⓐ número de caras
- Ⓑ número de sequências de resultados iguais consecutivos

Calcule os valores esperados de A , B e $A + B$.

Carvalho (2016, p. 19)

Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, num dia, um ou dois clientes, com probabilidade de $1/3$ ou $2/3$, respectivamente. De cada contato pode resultar a venda de um equipamento por R\$50.000,00 (com probabilidade $1/10$) ou nenhuma venda (com probabilidade $9/10$).

- a Qual a FDP do número de vendas diárias?
- b Qual o valor médio do número de vendas?
- c Qual a variância e o desvio padrão do número de vendas?

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes, e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definido pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. O empresário quer ter uma ideia da distribuição do lucro por peça montada. Cada componente pode ser classificado como bom, longo ou curto, conforme sua medida esteja dentro da especificação, maior ou menor que a especificada, respectivamente. Cada componente tem custo igual à R\$5,00. As probabilidades de cada componente ter as características bom, longo e curto estão tabuladas abaixo. Se no produto final algum componente tiver a característica curto este será vendido como sucata por R\$5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de R\$5,00. O preço de venda de cada unidade é R\$25,00. Seja X o valor do lucro por conjunto montado. (Bussab & Morettin, 2013, p. 133)

Produto	Cilindro	Esfera
bom (B)	0,80	0,70
longo (L)	0,10	0,20
curto (C)	0,10	0,10

- a) Como seria a distribuição de frequência do lucro por conjunto montado?
- b) Encontre a FDA correspondente e calcule $\mathbb{P}(X \leq 13)$ e $\mathbb{P}(X \geq 7)$.
- c) Obtenha a média, a variância e o desvio padrão para a variável lucro por conjunto montado no problema do empresário?
- d) Suponha que nesse problema tenha ocorrido uma alteração em todos os preços orçados, todos passam a custar o triplo acrescidos de R\$2,00. Qual será a nova esperança de lucro do empresário? E a nova distribuição do lucro?

Exercício

Ref.:M1K4

Em um famoso jogo popular, o acertador deve apontar um dentre 25 resultados possíveis para um sorteio. Se acertar, ele recebe 18 vezes o valor apostado.

- Qual é o lucro (ou prejuízo) médio diário que deve ser esperado por alguém que aposte diariamente 1 real nesse jogo por um longo período de tempo?
- Qual deveria ser o valor mínimo a ser recebido ao acertar uma aposta, para que o valor esperado fosse positivo?

01  AVESTRUZ 01 02 03 04	02  ÁGUIA 05 06 07 08	03  BURRO 09 10 11 12	04  BORBOLETA 13 14 15 16	05  CACHORRO 17 18 19 20
06  CABRA 21 22 23 24	07  CARNEIRO 25 26 27 28	08  CAMELO 29 30 31 32	09  COBRA 33 34 35 36	10  COELHO 37 38 39 40
11  CAVALO 41 42 43 44	12  ELEFANTE 45 46 47 48	13  GALO 49 50 51 52	14  GATO 53 54 55 56	15  JACARÉ 57 58 59 60
16  LEÃO 61 62 63 64	17  MACACO 65 66 67 68	18  PORCO 69 70 71 72	19  PAVÃO 73 74 75 76	20  PERU 77 78 79 80
21  TOURO 81 82 83 84	22  TIGRE 85 86 87 88	23  URSO 89 90 91 92	24  VEADO 93 94 95 96	25  VACA 97 98 99 00

Carvalho (2016, p. 18)

Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo A e dez amostras de solo tipo B . Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.

- a) Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo B que são selecionadas e quais suas probabilidades. R.: $X \in \{5, \dots, 10\}$
- b) Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo A ou todas as dez amostras do tipo B ? R.: 0,0326
- c) Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo B selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média? R.: 0,6966

Um poema de um autor desconhecido possui frases intrigantes. Este autor usa apenas 5 palavras do dicionário para compor as estrofes de seu poema, são elas $\{“a”, “da”, “dama”, “cama”, “ela”\}$ com as probabilidades de ocorrências em uma estrofe $\mathbb{P}(“a”) = 0,3$; $\mathbb{P}(“da”) = \mathbb{P}(“dama”) + \mathbb{P}(“cama”)$; $\mathbb{P}(“dama”) = 0,15$; $\mathbb{P}(“cama”) = 0,1$. Qual o número médio de caracteres que cada palavra de uma estrofe deste poema possui ?

Considere a FDP:

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{se } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- a $\mathbb{E}(X)$
- b $\mathbb{E}(X^2)$
- c $\mathbb{E}(|X|)$
- d $\mathbb{E}(3X - 5)$
- e $\text{var}(X)$
- f $\text{var}(3X - 5)$
- g $F(x)$
- h moda
- i mediana

Considere a FDP:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- a $\mathbb{E}(X)$
- b $\mathbb{E}(X^2)$
- c $\mathbb{E}(|X|)$
- d $\mathbb{E}(3X - 5)$
- e $\text{var}(X)$
- f $\text{var}(3X - 5)$
- g $F(X)$
- h moda
- i mediana

Considere a FDP:

$$f(x) = \begin{cases} 4x/5 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{5}(3 - x) & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- a $\mathbb{E}(X)$
- b $\mathbb{E}(X^2)$
- c $\mathbb{E}(|X|)$
- d $\mathbb{E}(3X - 5)$
- e $\text{var}(X)$
- f $\text{var}(3X - 5)$
- g $F(X)$
- h moda
- i mediana

Considere a FDP:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3 - x/4 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1/4 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- a $\mathbb{E}(X)$
- b $\mathbb{E}(X^2)$

Considere a FDP:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3 - x/4 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1/4 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- a $\mathbb{E}(|X|)$
- b $\mathbb{E}(3X - 5)$

Considere a FDP:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3 - x/4 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1/4 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- a $\text{var}(X)$
- b $\text{var}(3X - 5)$

Considere a FDP:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3 - x/4 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1/4 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- a) moda
- b) mediana

O tempo em minutos, de digitação de um texto por secretárias experientes é uma variável aleatória contínua X . Sua densidade é apresentada a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } 0 \leq x < 2; \\ 1/8 & \text{se } 2 \leq x < 6; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine:

- a $\mathbb{P}(X > 3)$.
- b $\mathbb{P}(1 < X \leq 4)$.
- c $\mathbb{P}(X < 3 | X \geq 1)$.
- d Um número b tal que $\mathbb{P}(X > b) = 0,6$.
- e O valor esperado, a variância, o desvio padrão, a moda e a mediana da X .

Magalhães & Lima (2015, p. 187)

Arqueólogos estudaram uma certa região e estabeleceram um modelo teórico para a variável C , *comprimento de fósseis da região* (em cm). Suponha que C é uma variável contínua com a seguinte FDP:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40} \left(\frac{c}{10} + 1 \right), & 0 \leq c \leq 20; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ❶ Ilustre graficamente a FDP da variável aleatória C .
- ❷ Qual a probabilidade de um fóssil escolhido ao acaso apresentar comprimento inferior à 12? Resp.: 0,48
- ❸ $\mathbb{P}(C > 12|C > 5)$? Resp.: 0,62
- ❹ Determine a média, a variância e o desvio padrão de C .

Magalhães & Lima (2015, p. 181)

A quantia gasta anualmente, em milhões de reais, na manutenção do asfalto em uma cidade do interior é representada pela variável Y com densidade dada por:

$$f(y) = \begin{cases} 4/9(2y - 1) & 0,5 \leq y < 2; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obtenha:

- ① $\mathbb{P}(Y < 0,8)$. R.: 0,04
- ② $\mathbb{P}(Y > 1,5 | Y \geq 1)$. R.: $5/8$
- ③ $\mathbb{P}(Y > 0,75 | Y \geq 1)$. R.: 1
- ④ O valor esperado e a variância de Y . R.: $\mathbb{E}(Y) = 3/2$ e $\text{var}(Y) = 1/8$.
- ⑤ A mediana e a moda de Y . R.: A densidade é amodal e a mediana é $\frac{1+\sqrt{7/2}}{2}$.

Magalhães & Lima (2015, p. 188)

Numa certa região, fósseis de pequenos animais são frequentemente encontrados e um arqueólogo estabeleceu o seguinte modelo de probabilidade para o comprimento, em centímetros, desses fósseis.

$$f(x) = \begin{cases} x/40, & 4 \leq x < 8 \\ -x/20 + 3/5, & 8 \leq x < 10 \\ 1/10, & 10 \leq x < 11 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ① Faça o gráfico da FDP e da FDA.
- ② Para um fóssil encontrado nessa região, determine a probabilidade de o comprimento ser inferior a 6 cm? E de ser superior a 5 mas inferior a 10,5 cm?
- ③ Encontre o valor esperado para o comprimento dos fósseis da região?

Magalhães & Lima (2015, p. 189)

Certa liga é formada pela mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém uma porcentagem de chumbo X , que pode ser considerada uma variável aleatória com FDP

$$f(x) = \frac{3}{5} 10^{-5} x(100 - x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que L , o lucro obtido na venda dessa liga (por unidade de peso), seja dado por $L = C_1 + C_2 X$. Calcule o lucro esperado por unidade.

Bussab & Morettin (2013, p. 177)

O acréscimo anual na área atingida por uma certa praga, numa região produtora de frutas, pode ser modelado por uma variável aleatória contínua, medida em hectares (10 mil m^2), com densidades:

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3 & 0 < x < 1 \\ 1 - x/3 & 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ① Construa o gráfico dessa densidade.
- ② Qual seria a probabilidade de a praga atingir entre 2 e 3 hectares esse ano?
- ③ Que área será atingida com 50% de certeza?
- ④ Determine o acréscimo médio anual na área atingida pela praga.

Magalhães & Lima (2015, p. 213)

Suponha que estamos atirando dardos num alvo circular de raio 10 cm, e seja X a distância do ponto atingido pelo dardo ao centro do alvo. A FDP de X é:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- 1 Qual a probabilidade de acertar o centro do alvo, se esse for o círculo de 1 cm de raio?
- 2 Mostre que a probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico e proporcional a sua área.

Bussab & Morettin (2013, p. 172)

A vida útil em horas de um tubo de rádio é uma variável aleatória com FDP

$$f(x) = \begin{cases} 100/x^2 & x \leq 100 \\ 0 & x > 100. \end{cases}$$

Qual a probabilidade de que exatamente dois de um total de cinco tubos no rádio precisem ser repostos nas primeiras 150 horas de operação?

Dica.: Considere os eventos E_i com $i = 1, 2, 3, 4, 5$ para indicar que o i -ésimo tubo precisará ser substituído. Considere os eventos E_i independentes.

Ross (2010, p. 188)

O tempo de corrosão, em anos, de uma certa peça metálica é uma variável com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq 1 \\ a & 1 < x \leq 2 \\ -ax + 3a & 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- 1 Calcule a constante a .
- 2 Uma peça é considerada como tendo boa resistência à corrosão se dura mais que 1,5 anos. Em que um lote de 3 peças, qual a probabilidade de termos exatamente 1 delas com boa resistência?

Magalhães & Lima (2015, p. 215)

A espessura, em micrômetros, de um revestimento condutivo tem uma função densidade de $600x^{-2}$ para $100\mu m < x < 120\mu m$.

- 1 Determine a média e a variância da espessura do revestimento.
- 2 Se o revestimento custar US\$ 0,50 por micrômetro de espessura em cada peça, qual será o custo médio de revestimento por peça?

Montgomery & Runger (2018)

O escore em um teste internacional de proficiência na língua inglesa varia de 0 à 700 pontos, com mais pontos indicando um melhor desempenho. Informações, coletadas durante vários anos, permitem estabelecer o seguinte modelo para o desempenho no teste.

Pontos	[0, 200)	[200, 300)	[300, 400)	[400, 500)	[500, 600)	[600, 700]
p_i	0,06	0,15	0,16	0,25	0,28	0,1

Várias universidades americanas, exigem um escore mínimo de 600 pontos para aceitar candidatos de países de língua não inglesa. De um grande grupo de estudantes brasileiros que prestaram o último exame, escolhemos ao acaso 20 deles. Qual seria a probabilidade de no máximo três atenderem ao requisito mínimo exigido?

Magalhães & Lima (2015, p. 88)

Modelos Uniformes

Modelo Uniforme Discreto

Seja X uma variável aleatória que assume valores no conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$, diremos que possui distribuição uniforme discreta se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$:

$$f(x) = \frac{1}{n}.$$

Notação: $X \sim U_D\{x_1, \dots, x_n\}$.

Modelo Uniforme Contínuo

Seja X uma variável aleatória que assume valores no intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, se sua densidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U_C(a, b)$

Se $X \sim U_C(a, b)$ todos os subintervalos de (a, b) com mesmo comprimento apresentarem a mesma probabilidade.

Propriedades da Uniforme Discreta

Se $X \sim U_D\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$, para $a \leq b$, então:

$$\textcircled{1} \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{var}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

$$\textcircled{3} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a+1}{b-a+1} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

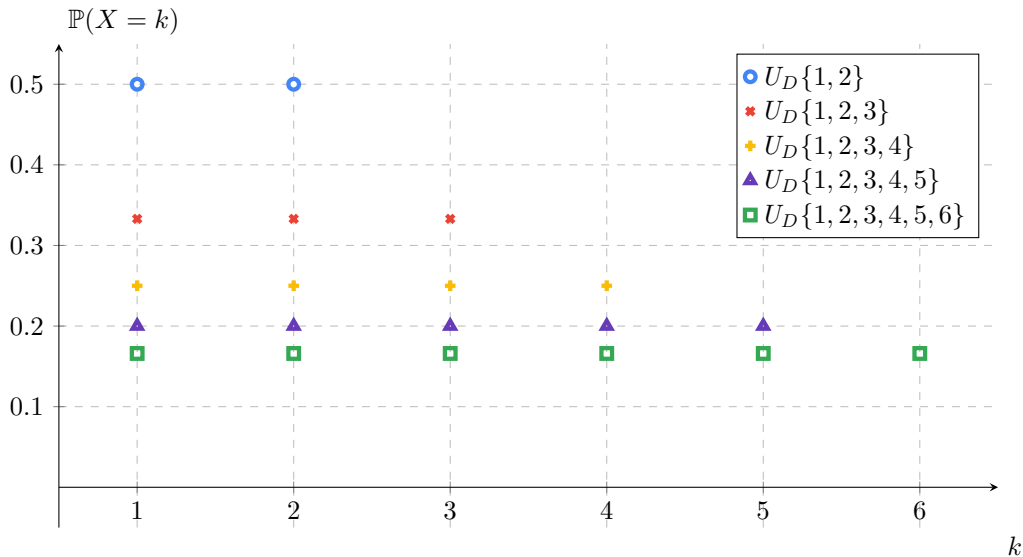
Propriedades da Uniforme Contínua

Se $X \sim U_C(a, b)$, para $a \leq b$, então:

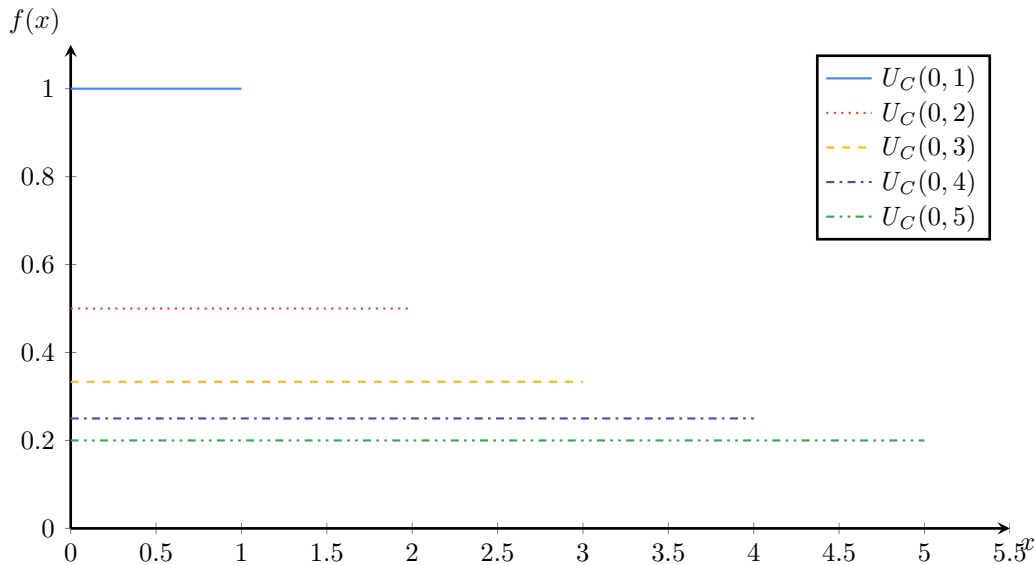
$$\textcircled{1} \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\textcircled{3} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$



Interpretação gráfica do parâmetro n



Interpretação gráfica do parâmetro b da $U_C(0, b)$.

Mostre que se $X \sim U_D\{1, \dots, n\}$. Então:

① $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$

② $\text{var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Exemplo: Número Serial

O primeiro dígito de um número serial de uma peça é igualmente provável de ser um dos dígitos de 0 a 9. Se uma peça for selecionada de uma grande batelada e X for o primeiro dígito do número serial, então X terá uma distribuição discreta uniforme, com probabilidade discreta uniforme 0,1 para cada valor no conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Exemplo: Número de linhas com vozes

Seja a variável aleatória X o número das 48 linhas telefônicas que estão em uso em certo tempo. Considere que X seja uma variável aleatória discreta uniforme no conjunto $\{1, 48\}$. Qual seria a média e a variância de X ?

Discuta a validade do modelo Uniforme Discreto nos seguintes casos:

- a O número sorteado numa rifa com 100 números.
- b A escolha de um aluno que vai representar a classe junto à direção da escola.
- c O dia da semana em que ocorrem mais acidentes de trabalho numa indústria.
- d O mês do ano com maior número de enchentes na cidade de Goiânia.

Sendo X uma variável seguindo o modelo Uniforme Discreto, com valores no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$, pergunta-se:

- a $\mathbb{P}(X = 5)$;
- b $\mathbb{P}(X \leq 35)$;
- c $\mathbb{P}(5 \leq X \leq 25)$;
- d $\mathbb{P}(X > 5)$;
- e $\mathbb{E}(X)$;
- f $\text{var}(X)$.

No lançamento de um dado equilibrado observa-se o valor da face que ficou voltada para cima. Sendo X essa variável, é fácil verificar que $X \sim U_D(1, \dots, 6)$ e sua FDP é:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \quad \text{para } k = 1, \dots, 6$$

- a Esboce o gráfico da FDP de x ;
- b Determine e esboce o gráfico da FDA de x ;
- c Calcule a esperança e a variância de x .

Considere que os comprimentos de onda de radiações fotos-sinteticamente ativas (RFA) estejam distribuídos uniformemente em nanômetros inteiros no espectro do vermelho de 675 a 700 nm.

- a Qual é a média e qual a variância da distribuição de comprimento de onda para essa radiação?
- b Se os comprimentos de onda estão uniformemente distribuídos em nanômetros inteiros de 75 a 100 nm, como podemos comparar a média e a variância da distribuição de comprimento de onda com o item anterior? Explique.

Montgomery & Runger (2018)

Considere que a variável aleatória X tem uma distribuição discreta uniforme nos inteiros $0 \leq x \leq 99$. Determine a média e a variância de X .

Montgomery & Runger (2018)

Medidas de espessura em um processo de revestimento são feitas com a precisão de centésimo de milímetro. As medidas de espessura estão uniformemente distribuídas, com valores 0,15; 0,16; 0,17; 0,18 e 0,19. Determine a média e a variância da espessura de revestimento para esse processo.

Montgomery & Runger (2018)

Cada questão de múltipla escolha em um exame tem quatro escolhas. Suponha que haja dez questões, e que a escolha seja selecionada aleatoriamente e independentemente para cada questão. Seja X o número de questões respondidas corretamente. X tem uma distribuição uniforme discreta? Por que sim ou por que não?

Montgomery & Runger (2018)

Em um teste internacional para verificar a qualidade da educação envolvendo 65 países o Brasil ficou na 58^o colocação. Escolhe-se um desses países ao acaso e seja X o valor da variável aleatória que represente a posição desse país nesse ranking.

- ① Qual a FDP da variável X ?
- ② Qual o valor médio que essa variável assume?
- ③ Qual a probabilidade de sortearmos um país que esteja acima do Brasil no ranking?

Montgomery & Runger (2018)

Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos de 21 a 25 e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

Magalhães & Lima (2015, p. 81)

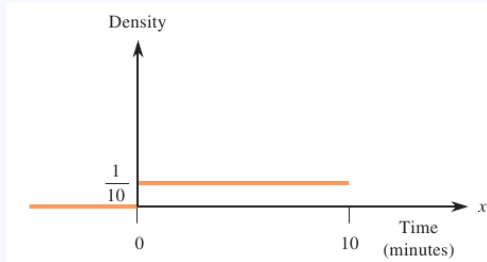
Ilustre o gráfico de $f(x)$ e $F(x)$ para $X \sim U_C [\alpha, \beta]$ e mostre que:

$$\textcircled{1} \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\textcircled{2} \text{var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12};$$

$$\textcircled{3} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{se } x > \beta \end{cases}$$

Um professor nunca dispensa a turma mais cedo. Se X representar a quantidade de tempo que a turma fica retida após o final da aula, assuma que X tenha uma distribuição uniforme no intervalo de $(0, 10)$. A curva de densidade é:



- 1 Ordene as probabilidades: $\mathbb{P}(2 < X < 3)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$, $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X > 7)$.
- 2 Qual a probabilidade de que:
 - a a turma seja retida por mais de cinco minutos?
 - b a retenção fique entre 3 e 5 minutos?

Suponha que X tenha distribuição uniforme em $[-a, 3a]$. Determine a média e a variância de X .

Bussab & Morettin (2013, p. 203)

A quantidade X de sedimentos depositados por dia em uma certa região marítima segue uma distribuição uniforme no intervalo 7,5 à 20 toneladas.

- ① Desenhe a curva de densidade da variável X .
- ② Qual a altura da curva de densidade?
- ③ Qual a probabilidade de que até o final do dia sejam depositadas no máximo 12 toneladas de sedimento nessa região?
- ④ Qual a probabilidade de que X esteja no intervalo $(10, 15)$? E de estar no intervalo $(12, 17)$? Porque as duas probabilidades são iguais?
- ⑤ Qual a probabilidade de até o final do dia serem depositadas no máximo mais 5 toneladas de sedimento nessa região dado que até o presente momento já foram depositadas mais de 9 toneladas?

Se $X \sim U_C(0, 10)$ calcule:

- ① $\mathbb{P}(X < 3)$
- ② $\mathbb{P}(X > 6)$
- ③ $\mathbb{P}(3 < X < 8)$

Um programa de TV dura 1 hora e um telespectador impaciente inicia assistindo, mas vai trocar de canal a qualquer momento, com igual probabilidade, durante o programa.

- 1 Qual a probabilidade de ele assistir à maior parte do programa?
- 2 Se ele assistiu à maior parte, qual seria a probabilidade de ele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos?

Considere uma corda escolhida aleatoriamente em um círculo dado. Qual a probabilidade que essa corda tenha comprimento maior que o lado do triângulo (equilátero) inscrito à esse círculo?

Dicas.: Pense nas seguintes estratégias:

- 1 Escolha aleatoriamente as extremidades da corda. Resp.: $1/3$
- 2 Escolha um raio para o círculo, escolha aleatoriamente um ponto sobre o raio escolhido e construa uma corda perpendicular ao raio passando por esse ponto. Resp.: $1/2$
- 3 Escolha um ponto aleatório dentro do círculo. Considere a corda tal que esse ponto seja o ponto médio da corda. Resp.: $1/4$

Qual é a resposta correta?

Num ponto de parada saem ônibus a cada 15 minutos a partir das 7h. Se um passageiro chega num ponto de parada em um instante de tempo uniformemente distribuído entre às 7h e 7h30min. Encontre a probabilidade de que o passageiro espere:

- a) menos de 5 minutos? Resp.: $\frac{1}{3}$
- b) mais do que 10 minutos? Resp.: $\frac{1}{3}$

Ross (2010, p. 196)

Seja $X \sim U_C(-\alpha, \alpha)$, determine o valor do parâmetro α de modo que:

- a $\mathbb{P}(-1 < X < 2) = 3/4$
- b $\mathbb{P}(|X| < 1) = \mathbb{P}(|X| > 2)$

Magalhães (2011, p. 106)

A espessura de um flange em um componente de espaçonave é uniformemente distribuída entre 0,95 e 1,05 milímetro. Determine o seguinte:

- a A função de distribuição cumulativa da espessura do flange.
- b A proporção de flanges que excedem 1,02 milímetro.
- c A espessura excedida por 90% dos flanges.
- d A média e a variância da espessura do flange.

Montgomery & Runger (2018)

A espessura de um filme fotorresistente aplicado a pastilhas na fabricação de semicondutores, em certa localização na pastilha, é uniformemente distribuída entre 0,2050 e 0,2150 micrômetro. Determine o seguinte:

- a) A função de distribuição cumulativa da espessura do filme fotorresistente.
- b) A proporção de pastilhas que excedem 0,2125 micrômetro na espessura do filme fotorresistente.
- c) A espessura excedida por 10% das pastilhas.
- d) A média e a variância da espessura do filme fotorresistente.

Montgomery & Runger (2018)

Um adulto pode ganhar ou perder duas libras de água durante o dia. Considere que as mudanças na massa de água sejam distribuídas uniformemente entre menos duas e mais duas libras em um dia. Qual é o desvio-padrão do peso dessa pessoa ao longo do dia?

Montgomery & Runger (2018)

Um show de golfinhos está marcado para começar às 9 horas, 9h30min e 10 horas. Quando o show começa, o portão é fechado. Um visitante chegará ao portão no tempo uniformemente distribuído entre 8h30min e 10 horas. Determine o seguinte:

- a A função de distribuição cumulativa do tempo (em minutos) entre a chegada do visitante e 8h30min.
- b A média e a variância da distribuição do item anterior.
- c A probabilidade de o visitante esperar menos de dez minutos para o início do show.
- d A probabilidade de o visitante esperar mais de 20 minutos para o início do show.

Montgomery & Runger (2018)

O volume de um xampu dentro de um frasco está uniformemente distribuído entre 374 e 380 mililitros.

- a) Quais são a média e o desvio-padrão do volume de xampu?
- b) Qual é a probabilidade de o frasco estar cheio com menos do que o valor nominal de 375 mililitros?
- c) Qual é o volume de xampu que está em excesso em 95% dos frascos?
- d) Cada mililitro de xampu custa US\$ 0,002 ao produtor. Mais de 375 mililitros representam um custo extra para ele. Qual é o custo extra médio?

Montgomery & Runger (2018)

Uma mensagem de e-mail chegará em um tempo uniformemente distribuído entre 9 e 11 horas. Você verifica seu e-mail às 9h15min e a cada meia hora depois desse tempo.

- a Qual é o desvio-padrão do tempo de chegada (em minutos)?
- b Qual é a probabilidade de que a mensagem chegue menos de dez minutos antes de você vê-la?
- c Qual é a probabilidade de que a mensagem chegue mais de 15 minutos antes de você vê-la?

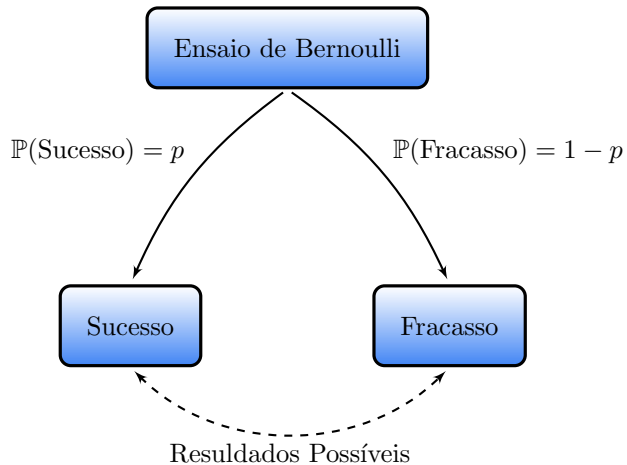
Montgomery & Runger (2018)

Um emissor de elétrons produz raios de elétrons com energia cinética variável que está uniformemente distribuída entre 3 e 7 joules. Suponha que seja possível ajustar o limite superior da energia cinética (correntemente estabelecido em 7 joules).

- a Qual é a energia cinética média?
- b Qual é a variância da energia cinética?
- c Qual é a probabilidade de um raio de elétron ter uma energia cinética de exatamente 3,2 joules?
- d Qual deve ser o limite superior de modo que a energia cinética média aumente para 8 joules?
- e Qual deve ser o limite superior de modo que a variância da energia cinética diminua para 0,75 joule?

Montgomery & Runger (2018)

Modelo Bernoulli



Modelo Bernoulli

Uma variável aleatória X segue o modelo Bernoulli com parâmetro $p \in (0, 1)$, se assume apenas os valores 0 (**fracasso**) e 1 (**sucesso**) com probabilidades $1 - p$ e p , respectivamente. Sua FDP é:

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 1 - p, & k = 0 \\ p, & k = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Notação: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

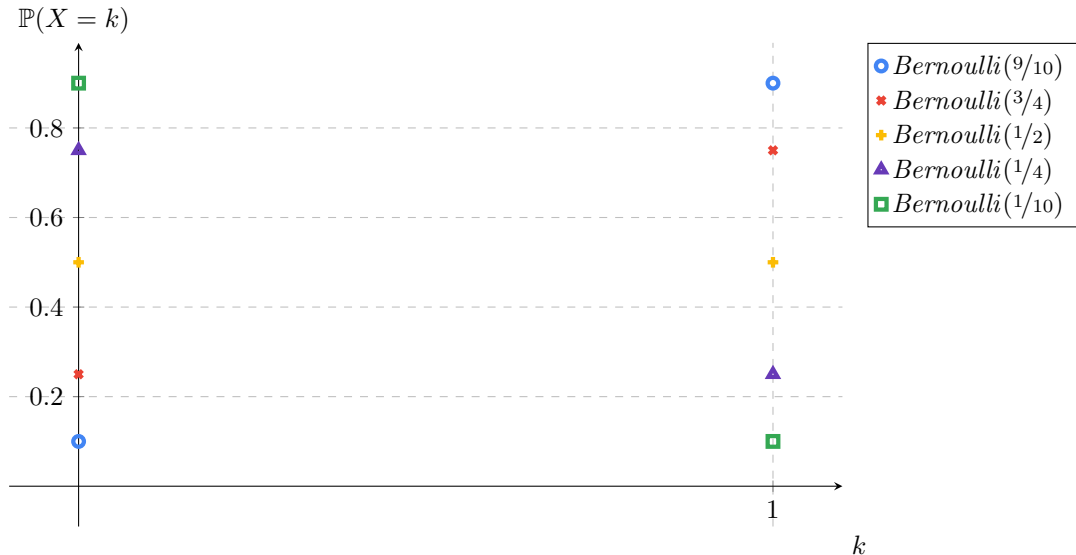
Propriedades do Modelo Bernoulli

Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$:

① $\mathbb{E}(X) = p$

② $\text{var}(X) = p(1 - p)$

③
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Interpretação gráfica do parâmetro p

Em uma turma de alunos, 30% possuem mais de um celular e 70% não possuem ou possuem apenas um celular. Sorteamos ao acaso um aluno dessa turma e observamos se ele tem mais de um celular. Seja X a variável indicadora dos alunos que possuem mais de um celular. Determine:

- a a FDP e a ilustre graficamente;
- b a média;
- c a variância;
- d a FDA e a ilustre graficamente.

Considere o experimento de escolhermos ao acaso uma bola em uma urna que tenha 2 bolas azuis e 3 bolas vermelhas. Seja a variável aleatória X “A cor da bola sorteada é azul”. Calcule para X :

- a a FDP e a ilustre graficamente;
- b a média;
- c a variância;
- d a FDA e a ilustre graficamente.

Modelo Binomial

Experimento binomial

Um experimento binomial é aquele em que

- 1 se realizam n ensaios de Bernoulli;
- 2 os ensaios são independentes entre si;
- 3 a probabilidade de sucesso em cada ensaio é sempre igual à $p \in (0, 1)$.

Ao final conta-se a quantidade de sucessos obtidos.

Um caso particular de experimento binomial consiste em selecionar n objetos, **com reposição**, a partir de um conjunto com N objetos ($n \leq N$) onde:

- 1 K objetos são rotulados como “sucessos”;
- 2 $N - K$ objetos são rotulados como “fracassos” ($K \leq N$).

Ao final conta-se a quantidade de sucessos obtidos. Nesse caso a probabilidade de sucesso em cada sorteio é:

$$p = \frac{K}{N}$$

Modelo Binomial

Seja X o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes e com probabilidade de sucesso igual à p (**experimento binomial**). Essa variável aleatória segue o modelo binomial com parâmetros $n \in \mathbb{Z}_+$ e $p \in (0, 1)$ com FDP dada por:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Notação: $X \sim \text{Binomial}(n, p)$.

Expansão Binomial

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Propriedades do Modelo Binomial

Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então:

- 1 $\mathbb{E}(X) = np$
- 2 $\text{var}(X) = np(1 - p)$

Discuta a validade do modelo Binomial nos seguintes casos. Se o modelo binomial for adequado forneça ou “estime” os parâmetros.

- a Dos alunos de uma grande universidade, sorteamos cinco, com reposição, e contamos quantos se declaram indígenas.
- b Escolhemos 20 lâmpadas, sem reposição, ao acaso na prateleira de um supermercado, sendo 10 de uma fábrica e 10 de outra. Contamos o número total de defeituosas.
- c Quinze automóveis 0 km de uma mesma marca são submetidos a um teste antipoluição e contamos o número deles que passaram no teste.
- d Um motorista é submetido a um teste em que deve estacionar seu veículo num pequeno espaço (isto é popularmente chamado de *fazer balista*). Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o motorista estacionou corretamente.

Magalhães & Lima (2015, p. 88)

Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais dando seus parâmetros, quando julgar que a variável não é binomial aponte os motivos.

- a De uma urna com dez bolas brancas e vinte bolas pretas, vamos extrair, **com** reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.
- b De uma urna com dez bolas brancas e vinte bolas pretas, vamos extrair, **sem** reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.
- c Temos cinco urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.
- d Vamos realizar uma pesquisa em dez cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró, contra ou indiferente a um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.
- e Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

Para cada cenário descrito, estabeleça se a distribuição binomial é ou não um modelo razoável para a variável e por quê. Estabeleça qualquer suposição que você fizer.

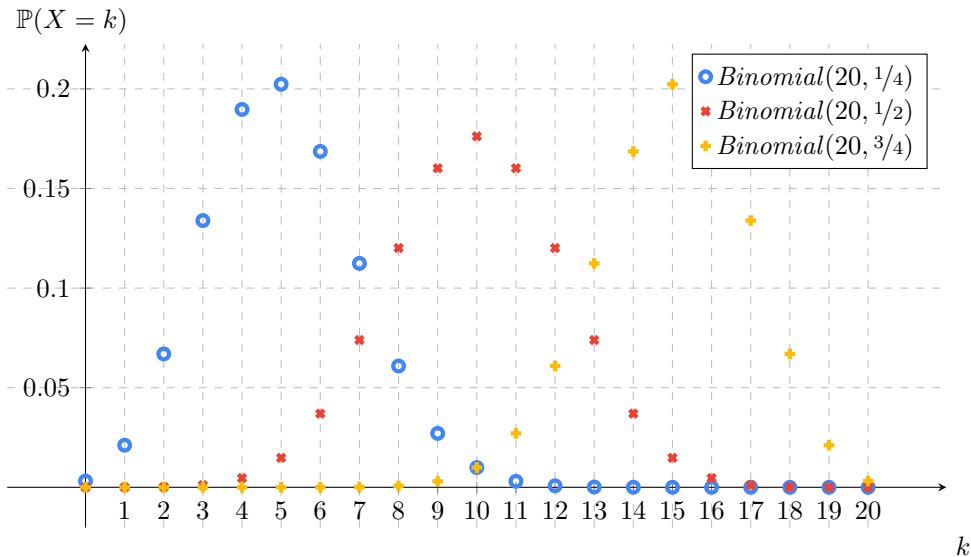
- a Um processo de produção gera milhares de transdutores de temperatura. Seja X o número de transdutores não conformes em uma amostra de tamanho 30, selecionada ao acaso a partir do processo.
- b De uma batelada de 50 transdutores de temperatura, uma amostra de tamanho 30 é selecionada, sem reposição. Seja X o número de transdutores não conformes na amostra.
- c Quatro componentes eletrônicos idênticos são ligados a um controlador que pode permutar entre um componente defeituoso e um dos sobressalentes restantes. Seja X o número de componentes que falharam depois de um período especificado de operação.
- d Seja X o número de acidentes que ocorrem ao longo de uma autoestrada federal no Arizona, durante o período de um mês.

Montgomery & Runger (2018)

Para cada cenário descrito, estabeleça se a distribuição binomial é ou não um modelo razoável para a variável e por quê. Estabeleça qualquer suposição que você fizer.

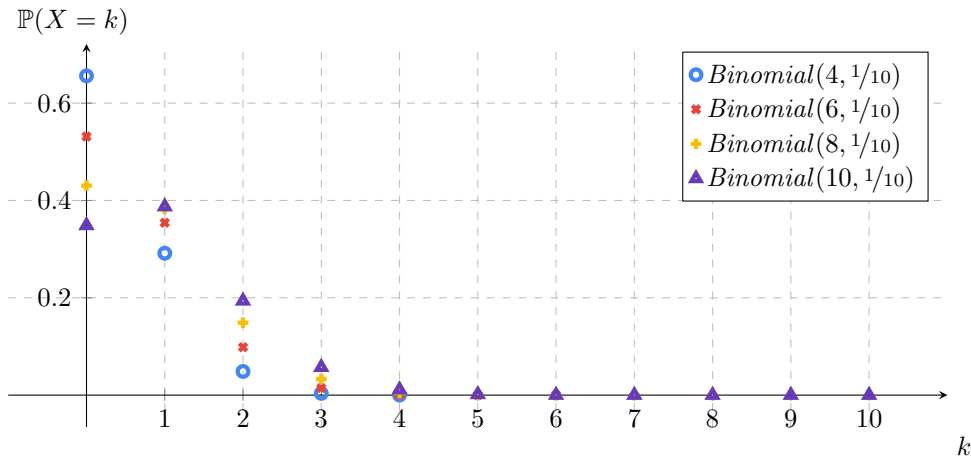
- a) Seja X o número de respostas corretas dadas por um estudante ao fazer um teste de múltipla escolha, em que ele pode eliminar algumas das opções como incorretas em algumas questões e todas as opções incorretas nas outras questões.
- b) Defeitos ocorrem aleatoriamente sobre a superfície de um chip semicondutor. Entretanto, somente 80% dos defeitos podem ser encontrados por meio de testes. Uma amostra de 40 chips, cada um com um defeito, é testada. Seja X o número de chips em que o teste encontra um defeito.
- c) Erros em um canal digital de comunicação ocorrem em cascatas que afetam vários bits consecutivos. Seja X o número de bits com erro em uma transmissão de 100.000 bits.
- d) Seja X o número de falhas na superfície de uma grande serpentina de aço galvanizado.

Montgomery & Runger (2018)

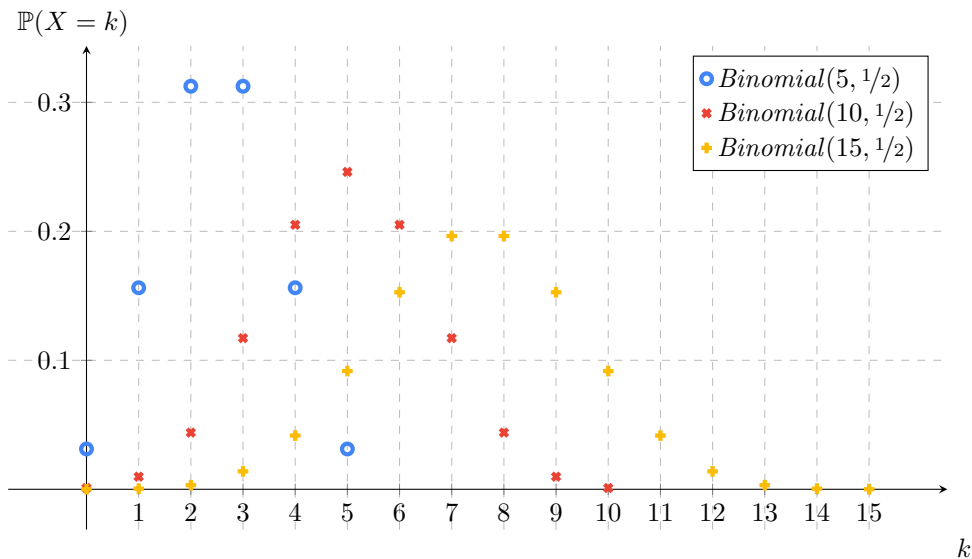


Interpretação gráfica do parâmetro p

Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p)$. A FDP de X é decrescente quando $\mathbb{E}(X) < 1$.



Interpretação gráfica do parâmetro p



Interpretação gráfica do parâmetro n

Mostre que se $n = 2k - 1$ com $k \in \mathbb{Z}_+$, $p = 1/2$ e $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então a distribuição é simétrica em relação à reta $x = k + 1$.

Joga-se uma moeda não-viciada 10 vezes. Qual a probabilidade de obtermos:

- a exatamente 5 caras? Resp.: 0,25
- b menos de três caras? Resp.: 0,17
- c mais de três caras? Resp.: 0,83

Morgado et al. (1991, p. 182)

Um dado honesto é lançado 10 vezes.

- 1 Qual o número esperado de lançamentos em que o resultado obtido é 6?
- 2 E a variância?
- 3 Qual a probabilidade de obtermos exatamente 3 vezes a face seis?
- 4 Qual a probabilidade de obtermos a face 6 menos de três vezes?

Carvalho (2016, p. 20)



A taxa de imunização de uma vacina é de 80%. Se um grupo de 20 pessoas foi vacinado, desejamos saber o comportamento probabilístico do número de pessoas imunizadas desse grupo.

- 1 Qual a probabilidade de que 15 pessoas tenham sido imunizadas? Resp.: 0,17
- 2 Em média quantas pessoas são imunizadas pela vacina? Resp.: 16 pessoas

Uma movimentada loja de departamentos aceita pagamentos com cartão de crédito (CR), com cheques (CH) e dinheiro (D). A forma de pagamento é independente entre os clientes e sabe-se que as probabilidades de uso dessas formas de pagamento são $\mathbb{P}(CR) = 0,5$, $\mathbb{P}(CH) = 0,2$ e $\mathbb{P}(D) = 0,3$.

- 1 Para os próximos 100 clientes qual é a média e a variância do número de pagamentos efetuados com cheque? Resp.: 20, 16.
- 2 E para o número de pagamentos com cheque ou cartão de crédito? Resp.: 70, 21.

Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, sabendo-se que $\mathbb{E}(X) = 12$ e $\text{var}(X) = 3$, determinar:

- | | |
|--|--|
| ① n | Resp.: 16 |
| ② p | Resp.: 0,75 |
| ③ $\mathbb{P}(X < 12)$ | Resp.: 0,375 |
| ④ $\mathbb{P}(X \geq 14)$ | Resp.: 0,197 |
| ⑤ $\mathbb{E}(Z)$ e $\text{var}(Z)$, em que $Z = (X-12)/\sqrt{3}$ | Resp.: $\mathbb{E}(Z) = 0$ e $\text{var}(Z) = 1$ |
| ⑥ $\mathbb{E}(Y)$ em que $Y = X/n$ | Resp.: $\mathbb{E}(Y) = 3/4$ |

Uma vacina, com taxa de imunização de 80% segundo o fabricante, foi aplicada num conjunto de crianças de um certo bairro. As autoridades de saúde desejam se certificar se a taxa de imunização tem efetivamente o valor indicado. Para tal, 20 crianças foram sorteadas dentre as que receberam a vacina e foram submetidas a testes rigorosos para avaliar sua imunização.

- 1 Sendo a afirmação do fabricante verdadeira, qual seria a probabilidade de obter três crianças não imunizadas, no grupo das 20 crianças?

R.: 0,205

- 2 Suponha que apenas oito crianças tenham sido imunizadas. O que você pode concluir sobre a veracidade da taxa de imunização do fabricante?

Morgado et al. (1991, p. 182)

O aluno marca ao acaso as respostas em um teste de múltipla escolha com 10 questões e cinco alternativas por questão. Qual a probabilidade dele acertar exatamente 4 questões?

Os colégios A , B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se a amostra de alunos sorteados contiver 3 rapazes e 5 moças, qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C ? (Faça um diagrama de probabilidades)

Dois adversários A e B disputam uma série de 10 partidas. A probabilidade de A ganhar uma partida é 0,6 e não há empates. Qual é a probabilidade de A ganhar a série?

Suponha que a probabilidade de uma bomba acertar o seu objetivo seja 0,7. Admitindo-se os lançamentos das bombas sejam independentes, qual a probabilidade de que, dentre dez bombas, exatamente duas acertem o alvo? Resp.: 0,0014

Estima-se que 5% das pessoas com reservas em uma companhia aérea não compareçam na hora do embarque. Se a companhia faz 102 reservas para um voo cuja aeronave comporta 100 passageiros, qual a probabilidade de que a companhia acomode todos os passageiros? Resp.: 0,966

Em um experimento binomial com três provas, a probabilidade de exatamente dois sucessos é 12 vezes a probabilidade de três sucessos. Encontre p .

Joga-se uma moeda não-viciada. Qual a probabilidade de serem obtidas 5 caras antes de 3 coroas?

Morgado et al. (1991, p. 183)

Se lançarmos uma moeda não viciada quatro vezes, qual a probabilidade de obtermos:

① exatamente uma cara

Resp.: 0,25

② pelo menos uma cara

Resp.: 0,9375

③ no máximo três caras

Resp.: 0,9375

Em um jogo, um dos adversários deve dar pelo menos quatro respostas corretas dentre cinco questões, para vencer a disputa. As questões são dadas com quatro alternativas cada, sendo que apenas uma delas é a correta. Um jogador que não sabe nenhuma das questões, responde ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele seja o vencedor?

Resp.: 0,015625

Estima-se que em uma pequena cidade 40% dos assaltos não sejam reportados à polícia. A delegacia tem policiais suficientes para atender até 10 ocorrências diárias. Num certo dia ocorrem 14 assaltos, qual a probabilidade de todas as denúncias serem atendidas nesse dia? Resp.: 0,88

Um produto eletrônico contém 40 circuitos integrados. A probabilidade de que qualquer circuito integrado seja defeituoso é de 0,01. Os circuitos integrados são independentes. O produto opera somente se não houver circuitos integrados defeituosos. Qual é a probabilidade de que o produto opere?

Montgomery & Runger (2018)

As linhas telefônicas em um sistema de reservas de uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Suponha que sejam independentes os eventos em que as linhas estejam ocupadas em sucessivas ligações. Considere que dez ligações aconteçam para a companhia aérea.

- a Qual é a probabilidade de que, para exatamente três ligações, as linhas estejam ocupadas?
- b Qual é a probabilidade de que, para no mínimo uma ligação, as linhas não estejam ocupadas?
- c Qual é o número esperado de chamadas em que as linhas estejam todas ocupadas?

Montgomery & Runger (2018)

As amostras de mitocôndrias rejuvenescidas são mutantes (defeituosas) em 1% dos casos. Suponha que 15 amostras sejam estudadas e que elas possam ser consideradas independentes para mutação. Determine as seguintes probabilidades:

- a) Nenhuma amostra é mutante.
- b) No máximo uma amostra é mutante.
- c) Mais da metade das amostras é mutante.

Montgomery & Runger (2018)

Falhas no coração são provenientes de ocorrências naturais (87%) ou de fatores externos (13%). Fatores externos são relativos a substâncias induzidas ou a objetos alheios. Ocorrências naturais são causadas por bloqueio arterial, doença e infecção. Suponha que 20 pacientes vão a uma emergência por causa de falha no coração. Suponha que as causas de falha no coração entre os indivíduos sejam independentes.

- a Qual é a probabilidade de três indivíduos terem condições causadas por fatores externos?
- b Qual é a probabilidade de três ou mais indivíduos terem condições causadas por fatores externos?
- c Quais são a média e o desvio-padrão do número de indivíduos com condições causadas por fatores externos?

Montgomery & Runger (2018)

Modelo Geométrico

Experimento Geométrico

O experimento geométrico consiste na repetição de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de *sucesso* p até que ocorra o primeiro *sucesso*. Ao final conta-se a quantidade de ensaios (*fracassos*) que precederam o primeiro *sucesso*.

Modelo Geométrico

Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Geométrica de parâmetro p , se sua FDP tem a forma:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Notação: $X \sim \text{Geo}(p)$

Propriedades do Modelo Geométrico

Se $X \sim \text{Geo}(p)$, então:

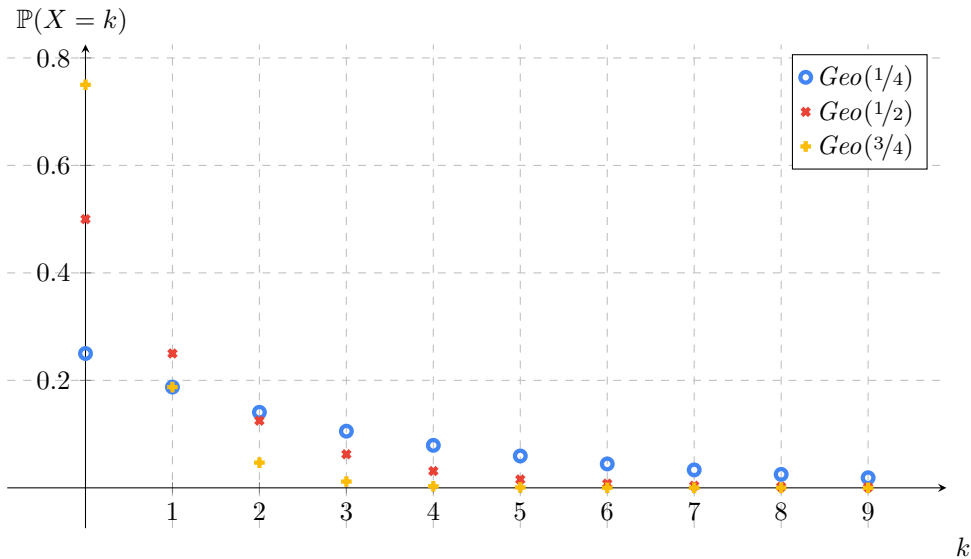
$$\textcircled{1} \mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$\textcircled{2} \text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\textcircled{3} \mathbb{P}(X \geq k) = (1-p)^k$$

$$\textcircled{4} \mathbb{P}(X < k) = 1 - (1-p)^k$$

$$\textcircled{5} \text{Falta de memória: } \mathbb{P}(X \geq m+k | X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq k)$$



Interpretação gráfica do parâmetro p

Termo Geral de uma P.G. de razão q

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Soma dos n primeiros termos de uma P.G. de razão q

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Soma dos termos de uma P.G. de razão q

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \quad q \in (-1, 1)$$

Sendo $X \sim Geo(0, 4)$, calcule:

a $\mathbb{P}(X = 3)$

b $\mathbb{P}(X < 3)$

c $\mathbb{P}(X \leq 3)$

d $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$

e $\mathbb{P}(X \geq 5 | X \geq 2)$

f $\mathbb{E}(X)$

g $\text{var}(X)$

Sendo $X \sim Geo(0,75)$, calcule:

- a $\mathbb{P}(X = 4)$
- b $\mathbb{P}(X < 4)$
- c $\mathbb{P}(X \leq 4)$
- d $\mathbb{P}(6 \leq X < 9)$
- e $\mathbb{P}(X \geq 10 | X \geq 6)$
- f $\mathbb{E}(X)$
- g $\text{var}(X)$

A probabilidade de que um *bit* transmitido por um canal digital de transmissão seja recebido com erro é de $1/10$. Considere que as transmissões sejam eventos independentes, e seja a variável aleatória X o número de *bits* transmitido antes que o primeiro seja encontrado com erro.

- a $\mathbb{P}(X = 3)$
- b $\mathbb{P}(X < 3)$
- c $\mathbb{E}(X)$
- d $\text{var}(X)$
- e Determine o menor valor de k tal que $\mathbb{P}(X = k) \leq 3/100$. Resp.: $k = 12$

Um jogo para duas pessoas consiste em uma urna com duas bolas vermelhas e uma azul. Ganha o jogo quem retirar da urna a bola azul. Caso um jogador retire uma bola vermelha, essa volta para a urna, e o outro jogador faz sua retirada. Os jogadores vão alternando suas retiradas até que saia a bola azul. Todas as bolas têm a mesma probabilidade de serem sorteadas. Qual é a probabilidade do primeiro jogador ganhar o jogo? Resp.: $\frac{3}{5}$

Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle de qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se a probabilidade de obtermos uma peça defeituosa é igual à 1%.

- a Qual é a probabilidade de que sejam fabricadas 1000 peças boas antes da ocorrência de uma peça defeituosa? Resp.: $4,317 \times 10^{-7}$
- b Qual seria o intervalo ideal (em quantidade de peças fabricadas) para uma manutenção preventiva se desejamos uma probabilidade de, pelo menos, 70% que não ocorra uma peça defeituosa antes da próxima manutenção? Resp.: 35
- c Refaça o item anterior assumindo pelo menos, 99,9% que não ocorra uma peça defeituosa antes da próxima manutenção? O que você conclui nesse caso?

Magalhães & Lima (2015, p. 90, Adaptado)

Se $X \sim Geo(p)$, então $\mathbb{P}(X \geq k) = (1 - p)^k$.

Um apostador faz seguidas apostas em um jogo em que ele tem probabilidade $1/2$ de ganhar. Se ganhar ele recebe o dobro do valor apostado. Ele adota a seguinte estratégia: Se ganhar, se retira do jogo com um lucro de 1 real. Se perder, joga 2 reais; se ganhar, se retira do jogo com um lucro de 1 real. Se perder, joga 4 reais, e assim por diante, sempre dobrando a aposta em caso de derrota, assegurando que quando finalmente ganhar terá um saldo de 1 real.

- a Qual é o valor esperado do número N de apostas até ganhar?
- b Qual é o valor esperado do investimento total X que terá que ser feito para ganhar?
- c Refaça os itens anteriores assumindo que o jogador tem probabilidade $1/3$ de ganhar em cada rodada e caso ganhe ele receba o triplo do valor apostado.

Carvalho (2016, p. 21, Adaptado)

A duração (**em centenas de horas**) de uma lâmpada especial segue o modelo Geométrico com parâmetro $p = 7/10$. Determine a probabilidade da lâmpada:

- a Durar menos de 500 horas.
- b Durar no mínimo 200 e no máximo 400 horas.
- c Sabendo-se que vai durar mais de 300 horas, durar mais de 800 horas.

Magalhães & Lima (2015, p. 103, Adaptado)

As cinco primeiras repetições de um experimento custam R\$10,00 cada. Todas as repetições subsequentes custam R\$5,00 cada. Suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro sucesso ocorra. Se a probabilidade de fracasso de uma repetição é igual à 0,9 e se as repetições são independentes, qual é o custo esperado da operação?

Modelo Hipergeométrico

Experimento Hipergeométrico

Um experimento hipergeométrico consiste em selecionar n objetos, **sem reposição**, a partir de um conjunto com N objetos ($n \leq N$) onde:

- ① K objetos são rotulados como *sucessos*;
- ② $N - K$ objetos são rotulados como *fracassos* ($K \leq N$).

Ao final conta-se o número de *sucessos*.

Note que se esse experimento fosse **com reposição** teríamos um experimento binomial com probabilidade de *sucesso* $p = K/N$.

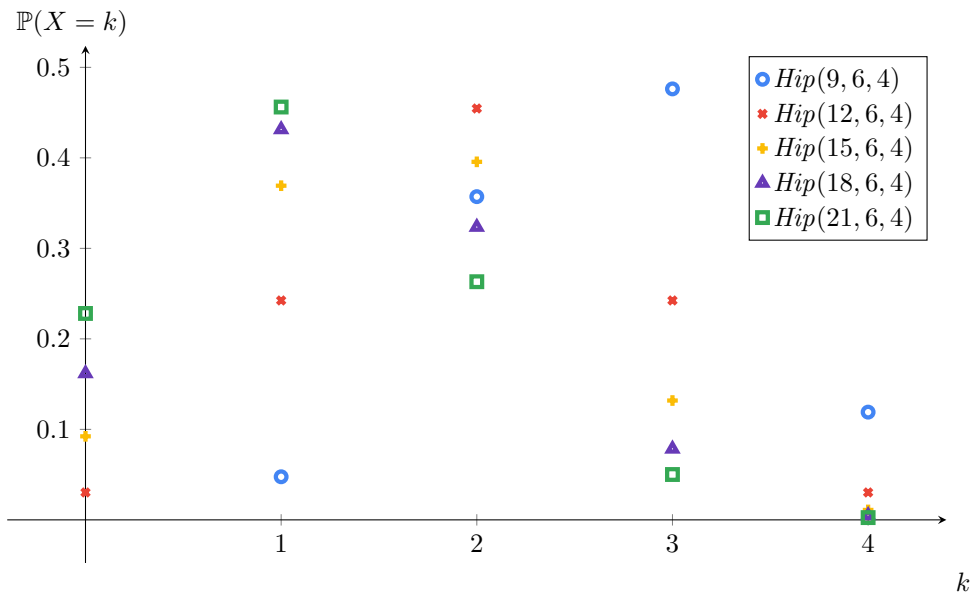
Modelo Hipergeométrico

Seja um conjunto de N objetos dos quais K são rotulados como *sucessos* e $N - K$ são rotulados como *fracassos* ($K \leq N$). Uma amostra aleatória **sem reposição** com tamanho $n \leq N$ é sorteada. Seja X o número de sucessos na amostra obtida a partir desse conjunto. Portanto, X tem distribuição Hipergeométrica com parâmetros N , K e n , e sua FDP é dada por:

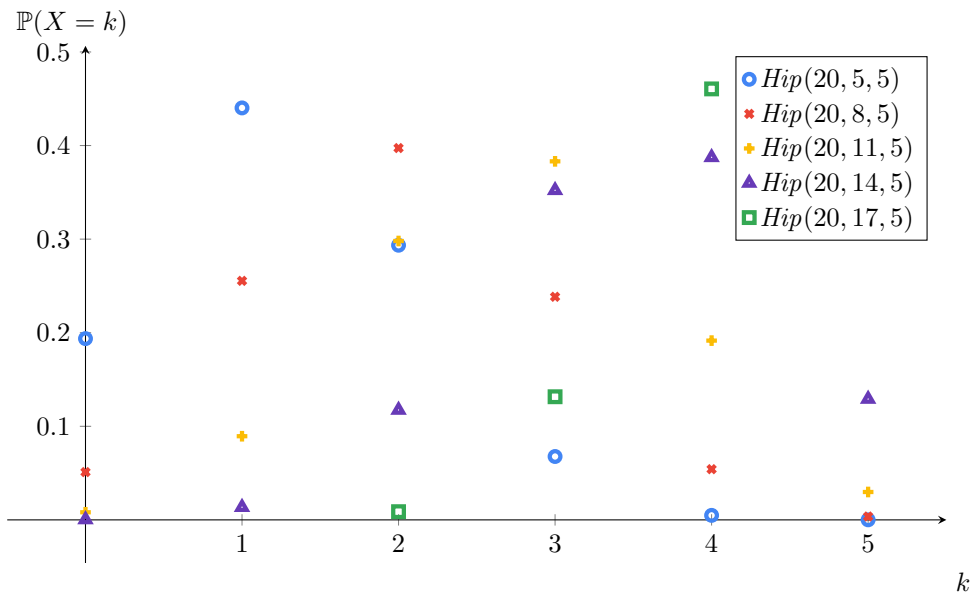
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N - K}{n - k}}{\binom{N}{n}}$$

onde $k \in \mathbb{Z}_+$ e $\max\{0, n - (N - K)\} \leq k \leq \min\{n, K\}$.

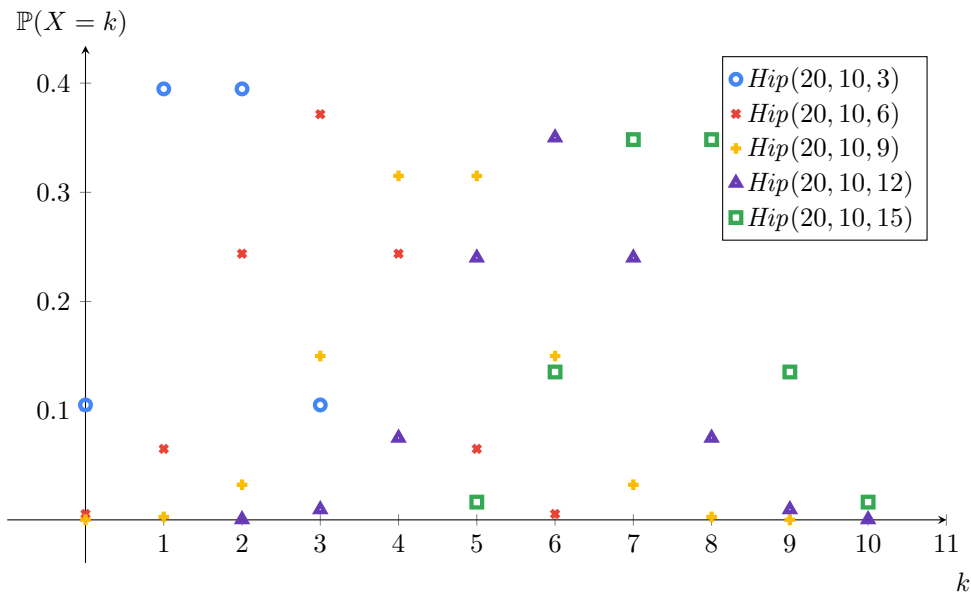
Notação: $X \sim \text{Hip}(N, K, n)$.



Interpretação gráfica do parâmetro N (Total de objetos no conjunto)



Interpretação gráfica do parâmetro K (Total objetos rotulados como *sucessos*)



Interpretação gráfica do parâmetro n (Quantidade de objetos selecionados)

Propriedades do Modelo Hipergeométrico

Se $X \sim \text{Hip}(N, K, n)$, então:

$$\textcircled{1} \mathbb{E}(X) = \frac{Kn}{N}$$

$$\textcircled{2} \text{var}(X) = \frac{Kn}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-K}{N-1}$$

Propriedades do Modelo Hipergeométrico

Se $X \sim \text{Hip}(N, K, n)$, então:

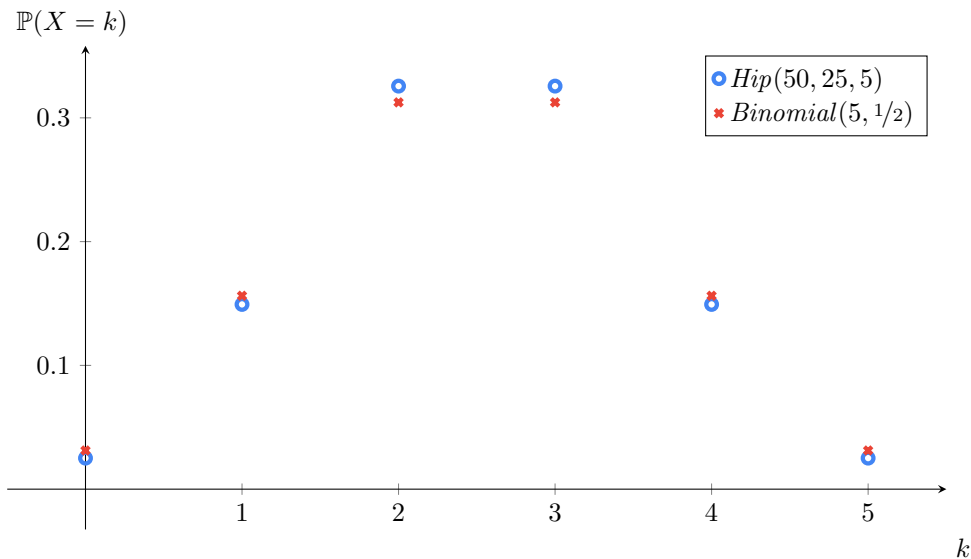
- 1 $\mathbb{E}(X) = np$
- 2 $\text{var}(X) = np(1-p)F$

Proporção de sucessos

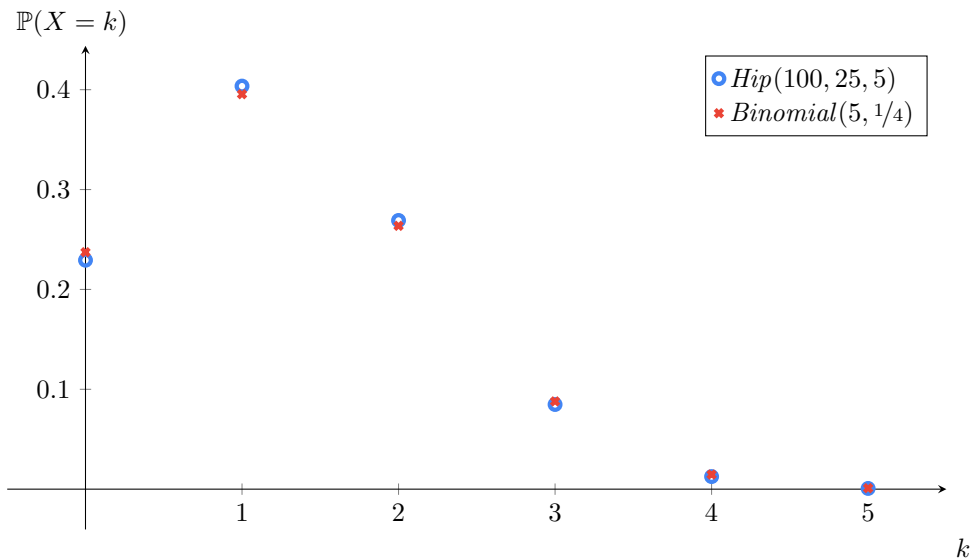
$$p = \frac{K}{N}$$

Fator de correção da população finita

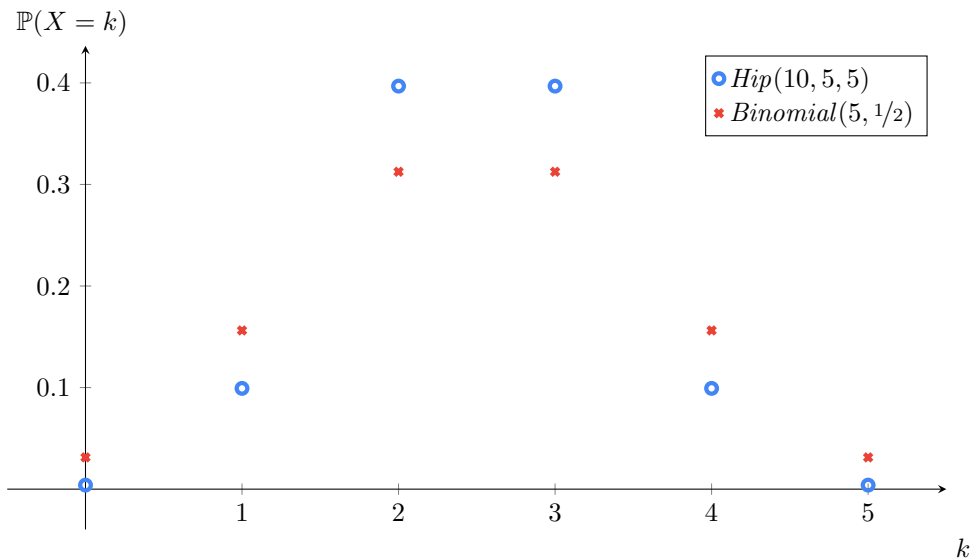
$$F = \frac{N-K}{N-1}$$



Aproximação entre $Binomial(n, p)$ e $Hip(N, K, n)$ quando $p = \frac{K}{N}$



Aproximação entre $Binomial(n, p)$ e $Hip(N, K, n)$ quando $p = \frac{K}{N}$



Aproximação entre $Binomial(n, p)$ e $Hip(N, K, n)$ quando $p = \frac{K}{N}$

Mostre que se $X \sim Hip(N, K, n)$, então:

a $\mathbb{E}(X) = \frac{Kn}{N}$

b $\text{var}(X) = \frac{Kn}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{N-K}{N-1}$

$$n \binom{N}{n} = N \binom{N-1}{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^N \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$$

Suponha que X tenha uma distribuição hipergeométrica com $N = 100$, $K = 4$ e $n = 20$. Determine o seguinte:

- a $\mathbb{P}(X = 1)$
- b $\mathbb{P}(X = 6)$
- c $\mathbb{P}(X = 4)$
- d Média e a variância de X
- e Calcule $\mathbb{P}(X = 1)$ e $\mathbb{P}(X = 4)$, considerando que X tenha uma distribuição binomial, e compare esses resultados aos resultados derivados da distribuição hipergeométrica.

Montgomery & Runger (2018)

Suponha que X tenha uma distribuição hipergeométrica com $N = 50$, $K = 5$ e $n = 30$. Determine o seguinte:

- a $\mathbb{P}(X = 2)$
- b $\mathbb{P}(X = 4)$
- c $\mathbb{P}(X = 5)$
- d Média e a variância de X
- e Calcule $\mathbb{P}(X = 2)$ e $\mathbb{P}(X = 5)$, considerando que X tenha uma distribuição binomial, e compare esses resultados aos resultados derivados da distribuição hipergeométrica.

Considere que, num lote de 20 peças, existam 4 defeituosas. Selecionando-se 5 dessas peças, sem reposição, qual seria a probabilidade de selecionar

- a) 2 defeituosas?
- b) pelo menos uma defeituosa?
- c) nenhuma defeituosa?

Magalhães (2011, p. 87)

Suponha que X tenha uma distribuição hipergeométrica com $N = 10$, $K = 3$ e $n = 4$. Esquematize a função de probabilidade de X . Determine a função de distribuição cumulativa para X .

Montgomery & Runger (2018)

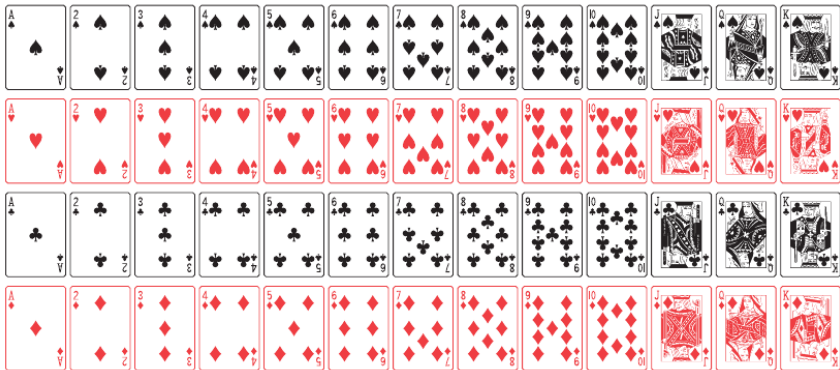
Um estudo usa 800 homens com menos de 55 anos. Suponha que 30% carreguem um marcador no cromossomo masculino, que indique um risco crescente de pressão sanguínea alta.

- a Se dez homens forem selecionados aleatoriamente e testados em relação ao marcador, qual será a probabilidade de exatamente um homem ter esse marcador?
- b Se dez homens forem selecionados aleatoriamente e testados em relação ao marcador, qual será a probabilidade de mais de um homem ter esse marcador?

Montgomery & Runger (2018)

Duas cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho bem embaralhado de 52 cartas. Qual a probabilidade de que elas sejam ases?

Rathie & Zörnig (2012, p. 158)



Cartões de circuito integrado são verificados em um teste funcional depois de serem preenchidos com chips semicondutores. Um lote contém 140 cartões, e 20 são selecionados sem reposição para o teste funcional.

- a Se 20 cartões forem defeituosos, qual será a probabilidade de no mínimo um cartão defeituoso estar na amostra?
- b Se cinco cartões forem defeituosos, qual será a probabilidade de no mínimo um cartão defeituoso aparecer na amostra?
- c Qual a aproximação da distribuição binomial para a distribuição hipergeométrica nas probabilidades dos itens anteriores. Qual é a correção para a população finita nesse caso?

Montgomery & Runger (2018)

A análise dos resultados de um experimento de transmutação de uma folha (a folha se transforma em uma pétala) é resumida pelo tipo de transformação completada:

		Transformação Total da Textura	
		Sim	Não
Transformação da cor total	Sim	243	26
	Não	13	18

Um naturalista seleciona aleatoriamente, sem reposição, três folhas desse conjunto. Determine as seguintes probabilidades:

- a Exatamente uma folha sofreu ambos os tipos de transformação.
- b No mínimo uma folha sofreu ambos os tipos de transformação.
- c Exatamente uma folha sofreu um tipo, mas não ambos os tipos de transformação.
- d Pelo menos uma folha sofreu no mínimo um tipo de transformação.

Um estado tem uma loteria em que seis números são selecionados aleatoriamente de 40, sem reposição. Um jogador escolhe seis números antes de a amostra da loteria ser selecionada.

- a Qual é a probabilidade de que os seis números escolhidos pelo jogador coincidam com todos os seis números do resultado da loteria?
- b Qual é a probabilidade de que cinco dos seis números escolhidos pelo jogador apareçam no resultado da loteria?
- c Qual é a probabilidade de que quatro dos seis números escolhidos pelo jogador apareçam no resultado da loteria?
- d Se um jogador for a uma loteria toda semana, qual é o número esperado de semanas até que o jogador ganhe na loteria?

Montgomery & Runger (2018)

Uma talhadeira contém 48 lâminas. Cinco lâminas são selecionadas ao acaso e avaliadas a cada dia em relação ao afiamento. Se alguma lâmina não afiada for encontrada, o arranjo será trocado por um novo conjunto de lâminas afiadas.

- a Se dez das lâminas em uma talhadeira não estiverem afiadas, qual será a probabilidade de que a talhadeira seja trocada no primeiro dia de sua avaliação?
- b Se dez das lâminas em uma talhadeira não estiverem afiadas, qual será a probabilidade de que a talhadeira não seja trocada até o terceiro dia de avaliação? [Sugestão: suponha que as decisões diárias sejam independentes. Use a distribuição geométrica.]
- c Considere que no primeiro dia de avaliação duas das lâminas não estejam afiadas; no segundo dia de avaliação, seis não estejam afiadas; e no terceiro dia de avaliação, dez não estejam afiadas. Qual é a probabilidade de que a talhadeira não seja trocada até o terceiro dia de avaliação? [Sugestão: suponha que as decisões diárias sejam independentes. No entanto, a probabilidade de troca muda a cada dia.]

Montgomery & Runger (2018)

De uma caixa contendo dez peças, das quais três são defeituosas, selecionam-se duas peças ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que:

a) pelo menos uma seja defeituosa?

Resp.: 0,5333

b) nenhuma seja defeituosa?

Resp.: 0,4666

Um revendedor de componentes elétricos compra lotes de tamanho 10. Em sua política de inspeção de qualidade ele testa três componentes escolhidos aleatoriamente, o lote é considerado com padrão de qualidade adequado se os três componentes testados funcionarem. Se 30% dos lotes tem 4 componentes defeituosos e 70% dos lotes tem somente 1 qual proporção dos lotes será rejeitada pelo fabricante?

Ross (2010, p. 161)

Suponha que uma companhia de seguro-saúde selecione 20 pacientes aleatoriamente (sem reposição) entre 500 para avaliar a adesão a um horário de medicação. Suponha que 10% dos 500 pacientes falhem nessa adesão ao horário. Determine o seguinte:

- a A probabilidade de que exatamente 10% dos pacientes na amostra falhem em aderir.
- b A probabilidade de que menos de 10% dos pacientes na amostra falhem em aderir.
- c A probabilidade de que mais de 10% dos pacientes na amostra falhem em aderir.
- d Média e variância do número de pacientes na amostra que falharam em aderir.

Montgomery & Runger (2018)

Uma companhia elétrica pode cobrar taxas, baseadas no consumo diário, de modo a aumentar o pico de demanda em um dia. Um número suficiente de clientes precisa aceitar o plano para terem sucesso. Suponha que, em um grupo de 50 clientes, 15 estejam dispostos à aceitar o plano. A companhia seleciona ao acaso (sem reposição) dez clientes desse grupo para entrar em contato e promover o plano.

- a Qual a probabilidade de exatamente dois clientes selecionados aceitarem o plano?
- b Qual a probabilidade de no mínimo um dos clientes selecionados aceitar o plano?
- c Em vez de 15 consumidores, qual é o número mínimo de clientes do grupo que necessitariam aceitar o plano de modo a encontrar o objetivo a seguir? *A probabilidade de que no mínimo um cliente do grupo selecionado aceite o plano é maior do que ou igual a 0,95.*

Montgomery & Runger (2018)

Suponha que lesões estejam presentes em cinco locais entre 50 em um paciente. Uma biópsia seleciona aleatoriamente oito locais (sem reposição).

- a Qual é a probabilidade de que lesões estejam presentes em, no mínimo, um local selecionado?
- b Qual é a probabilidade de que lesões estejam presentes em dois ou mais locais selecionados?
- c Em vez de oito locais, qual é o número mínimo de locais que necessitam ser selecionados para encontrar o objetivo seguinte? A probabilidade de que no mínimo um local tenha lesões presentes é maior do que ou igual a 0,9.

Montgomery & Runger (2018)

Um professor leciona em duas turmas, a turma 1 com vinte e a turma 2 com trinta alunos. Na hora de corrigir as provas finais, ele as agrupou e as ordenou aleatoriamente e selecionou 15 delas para serem corrigidas pelo monitor da disciplina.

- a Qual a probabilidade de que exatamente dez dos selecionados sejam da turma 1? Resp.: 0,2070
- b Qual a probabilidade de que pelo menos dez sejam da turma 2? Resp.: 0,3798
- c Qual a probabilidade de que pelo menos dez sejam de uma mesma turma? Resp.: 0,3938
- d Calcule a média e a variância de X = “Número de provas selecionadas da turma 2” Resp.: 9 e 2,5714
- e Calcule a média e a variância de Y = “Número de provas selecionadas da turma 1” Resp.: 6 e 2,5714

O álbum oficial da copa do mundo é formado por 649 cromos. Supondo que cada pacotinho de figura contenha cinco figuras distintas entre si.

- a Se o álbum já possui K figurinhas coladas. Qual a probabilidade de que c figurinhas do próximo pacote a ser aberto ainda não estejam no álbum?
- b Se o álbum já possui K figurinhas coladas. Qual o número médio de pacotinhos devemos comprar para completar o álbum?
- c Se o álbum foi recém comprado. Qual o número médio de pacotinhos devemos comprar para completar o álbum?

Peixoto (2014, p. 46)



Um estudante sai de casa todos os dias com duas caixas de fósforos, cada uma com n palitos. Toda vez que ele quer acender um cigarro, ele pega (ao acaso) uma das caixas e retira daí um palito. O estudante é meio distraído, de modo que quando ele retira o último palito de uma caixa, ele não percebe que a caixa fica vazia. Como ele fuma muito, em certa hora ele pega uma caixa e constata que ela está vazia. Qual a probabilidade de nesse momento a outra caixa conter exatamente k ($0 \leq k \leq n$) palitos?

Feller (1968, p. 238)



Modelo Binomial Negativo

Experimento Binomial Negativo

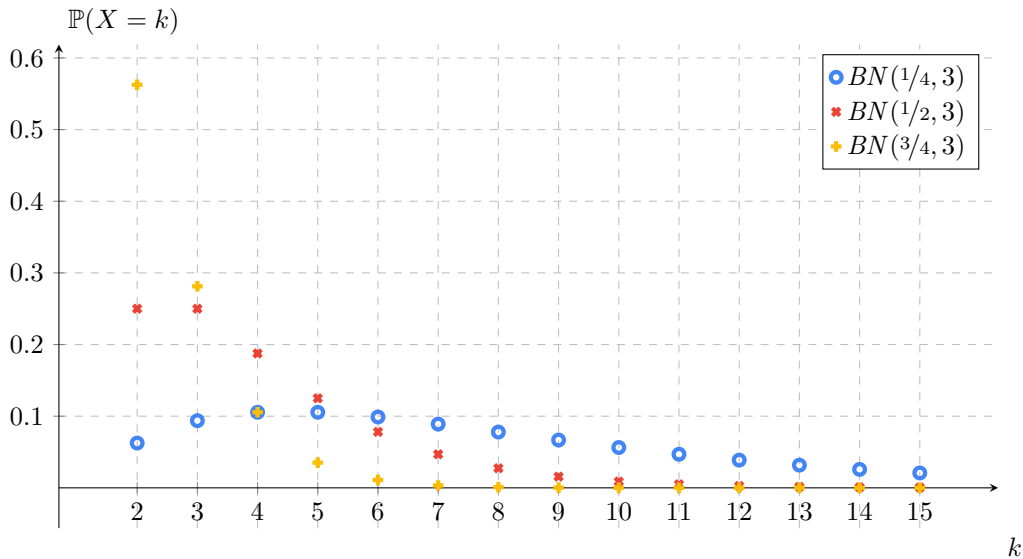
O experimento binomial negativo é caracterizado pela repetição de um ensaio de Bernoulli com probabilidade de *sucesso* p até que ocorram r *sucessos*. Ao final conta-se a quantidade de ensaios (*fracassos* e *sucessos*) que precederam o r -ésimo *sucesso*.

Modelo Binomial Negativo

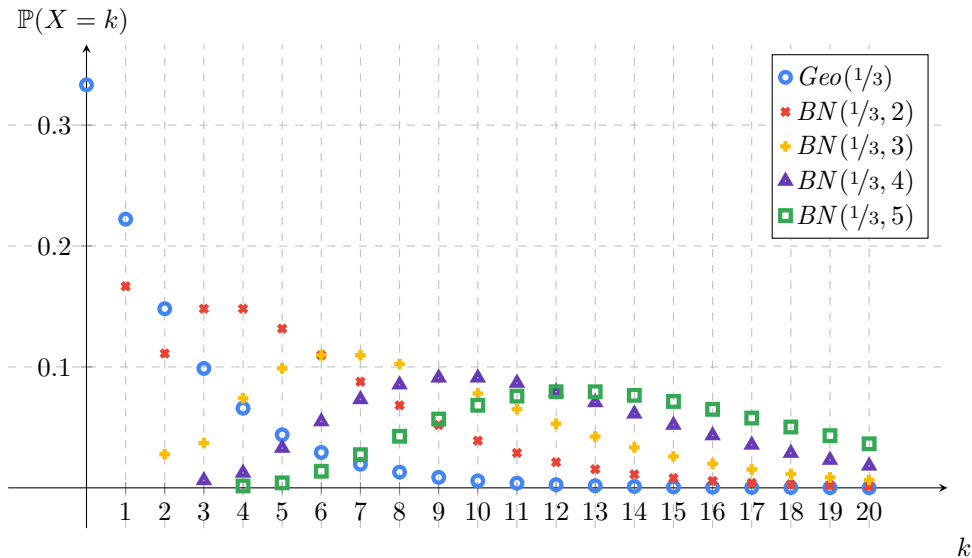
Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Binomial Negativa de parâmetros p e r , se sua FDP tem a forma:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad k = r, r+1, r+2, \dots$$

Notação: $X \sim BN(p, r)$



Interpretação gráfica do parâmetro p (Probabilidade de sucesso em cada ensaio de Bernoulli)



Interpretação gráfica do parâmetro r (Número de sucessos para o fim do experimento)

Propriedades do Modelo Binomial Negativo

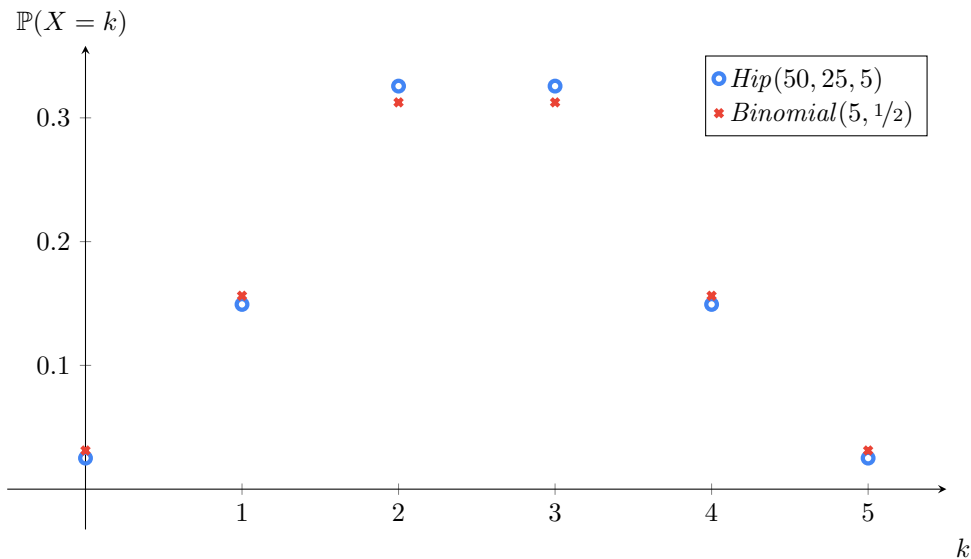
Se $X \sim BN(p, r)$, então:

$$\textcircled{1} \mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}$$

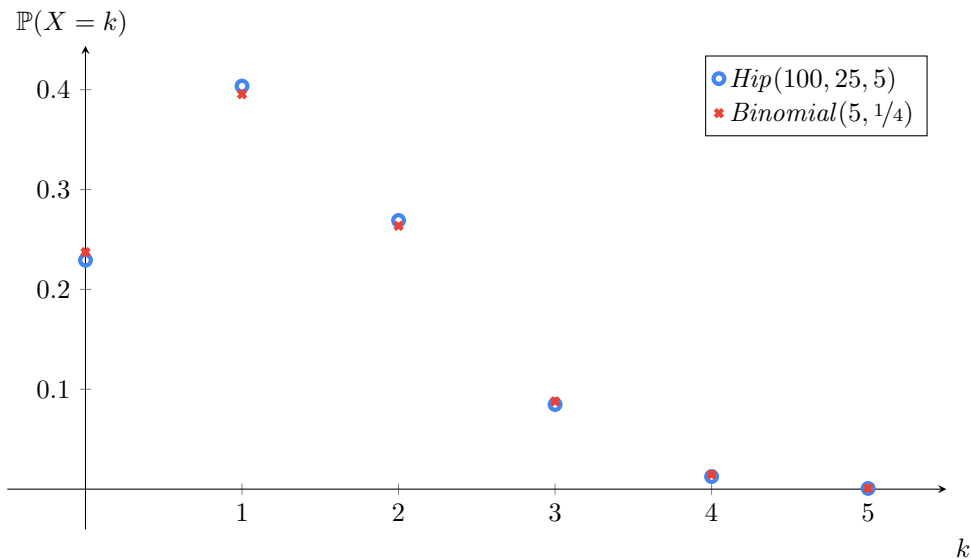
$$\textcircled{2} \text{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\textcircled{3} \mathbb{P}(X \geq k) = (1-p)^k$$

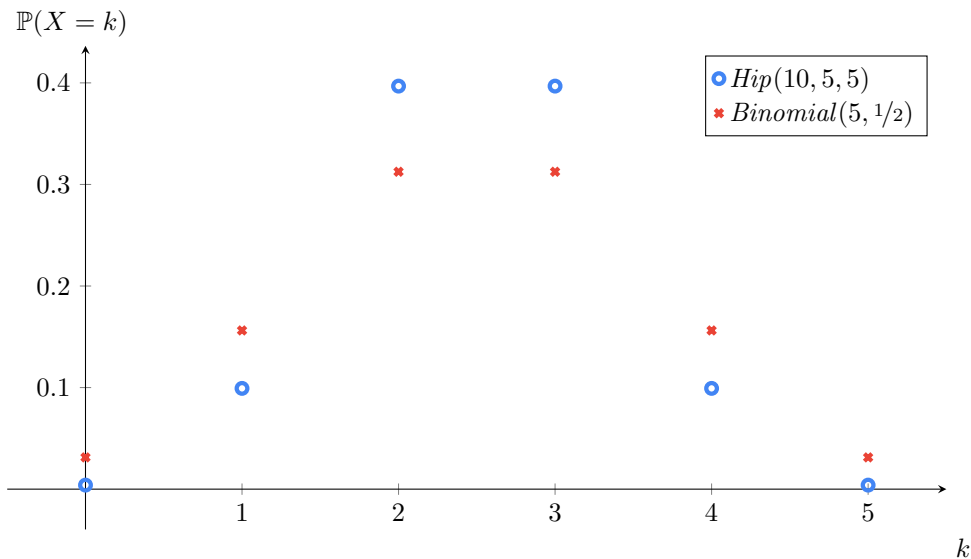
$$\textcircled{4} \mathbb{P}(X < k) = 1 - (1-p)^k$$



Aproximação entre $Binomial(n, p)$ e $Hip(N, K, n)$ quando $p = \frac{K}{N}$



Aproximação entre $Binomial(n, p)$ e $Hip(N, K, n)$ quando $p = \frac{K}{N}$



Aproximação entre $Binomial(n, p)$ e $Hip(N, K, n)$ quando $p = \frac{K}{N}$

Em um estudo clínico, voluntários são testados em relação a um gene que aumentou o risco de uma doença. A probabilidade de uma pessoa carregar o gene é igual a 0,1. As pessoas são supostamente independentes em relação ao gene.

- a Qual é a probabilidade de exatamente quatro pessoas terem de ser testadas para detectar duas com o gene?
- b Qual é a probabilidade de quatro ou mais pessoas terem de ser testadas para detectar duas com o gene?
- c Qual o número esperado de pessoas que devem ser testadas para detectar duas com o gene?

Montgomery & Runger (2018)

Um arranjo de 30 lâmpadas de LED é usado nas luzes de automóveis. A probabilidade de uma lâmpada ser defeituosa é de 0,001 e lâmpadas defeituosas ocorrem independentemente. Determine o seguinte:

- a A probabilidade de que uma luz automotiva tenha uma ou mais lâmpadas defeituosas.
- b O número esperado de luzes automotivas de modo a se obter uma com duas ou mais lâmpadas defeituosas.

Montgomery & Runger (2018)

Suponha que cada uma das suas ligações para uma estação popular de rádio tenha probabilidade de 0,02 de se completar; ou seja, de não obter um sinal de ocupado. Considere que suas ligações sejam independentes.

- a Qual é a probabilidade de que sua primeira ligação a se completar seja sua décima tentativa?
- b Qual é a probabilidade de se necessitar mais de cinco ligações para que você se conecte?
- c Qual é o número médio necessário de ligações para que você se conecte?

Montgomery & Runger (2018)

Um jogador de videogame é confrontado com uma série de oponentes e tem uma probabilidade de 80% de derrotar cada um deles. O sucesso com cada oponente é independente de confrontos prévios. O jogador continua a enfrentar oponentes até ser derrotado.

- a Qual é a função de probabilidade do número de oponentes enfrentados em um jogo?
- b Qual é a probabilidade de o jogador derrotar no mínimo dois oponentes em um jogo?
- c Qual é o número esperado de oponentes enfrentados em um jogo?
- d Qual é a probabilidade de o jogador enfrentar quatro ou mais oponentes em um jogo?
- e Qual é o número esperado de jogos até que um jogador enfrente quatro ou mais oponentes?

Montgomery & Runger (2018)

Falha no coração é causada por ocorrências naturais (87%) ou por fatores externos (13%). Fatores externos são relativos a substâncias induzidas ou a objetos alheios. Ocorrências naturais são causa das por bloqueio arterial, doença e infecção. Suponha que as causas de falha no coração entre os indivíduos sejam independentes.

- a Qual é a probabilidade de o primeiro paciente com falha no coração que entre na emergência ter a condição por causa de fatores externos?
- b Qual é a probabilidade de o terceiro paciente com falha no coração que entre na emergência ser o primeiro por causa de fatores externos?
- c Qual é o número médio de pacientes, com falha no coração por causas naturais, que entram na emergência antes de o primeiro paciente com falha no coração causada por fatores externos entrar?

Montgomery & Runger (2018)

Suponha que 20 peças sejam verificadas a cada hora e que X seja o número de peças na amostra de 20 que requeiram retrabalho. Peças são consideradas independentes com relação a retrabalho.

- a Se a porcentagem de peças que requerem conserto permanecer 1%, qual será a probabilidade de que na décima hora apareça a primeira amostra em que X excede 1?
- b Se a porcentagem de conserto aumentar para 4%, qual será a probabilidade de que na décima hora apareça a primeira amostra em que X excede 1?
- c Se a porcentagem de retrabalho aumentar para 4%, qual será o número esperado de horas até que X exceda 1?

Montgomery & Runger (2018)

Uma companhia de comércio tem oito computadores que ela usa para negociar na Bolsa de Nova York. A probabilidade de um computador falhar em um dia é igual a 0,005, e os computadores falham independentemente. Computadores são reparados à noite e cada dia é uma tentativa independente.

- a Qual é a probabilidade de todos os oito computadores falharem em um dia?
- b Qual é o número médio de dias até que um computador específico falhe?
- c Qual é o número médio de dias até que todos os oito computadores falhem no mesmo dia?

Montgomery & Runger (2018)

No processo de meiose, uma célula diploide simples passa por oito fases diferentes. No entanto, somente 60% dos processos passam pelas seis primeiras fases e somente 40% passam por todas as oito fases. Considere que os resultados de cada fase sejam independentes.

- a Se a probabilidade de uma passagem com sucesso de cada uma das **seis primeiras** fases for constante, qual será a probabilidade de uma passagem com sucesso de uma única dessas fases?
- b Se a probabilidade de uma passagem com sucesso de cada uma das **duas últimas** fases for constante, qual será a probabilidade de uma passagem com sucesso de uma única dessas fases?

Montgomery & Runger (2018)

Todo dia, uma página na internet seleciona aleatoriamente dez produtos para oferecer desconto. A impressora colorida de seu interesse está hoje com desconto.

- a Qual é o número esperado de dias até que esse produto tenha novamente desconto?
- b Qual é a probabilidade de que esse produto seja o primeiro a ter desconto novamente, exatamente daqui a dez dias?
- c Se o produto não tiver desconto nos próximos cinco dias, qual será a probabilidade de que seja o primeiro a ter desconto novamente daqui a 15 dias?
- d Qual é a probabilidade de que esse produto seja o primeiro a ter desconto novamente dentro de três ou menos dias?

Montgomery & Runger (2018)

Consumidores visitam um site da internet e existe probabilidade de 0,01 de uma compra ser realizada, se um consumidor vir cinco ou menos páginas. Entretanto, se um consumidor vir mais de cinco páginas, a probabilidade de uma compra é de 0,1. A probabilidade de um consumidor ver cinco ou mais páginas é de 0,25. Os consumidores se comportam de forma independente.

- a O número de consumidores que visitam o site até que uma compra seja realizada é uma variável aleatória geométrica? Por que sim ou por que não?
- b Qual é a probabilidade de que a primeira compra realizada seja do décimo consumidor a visitar o site?

Montgomery & Runger (2018)

Modelo de Poisson

Modelo de Poisson

Uma variável X segue a distribuição de **Poisson** com parâmetro $\lambda > 0$ se sua FDP for a seguinte:

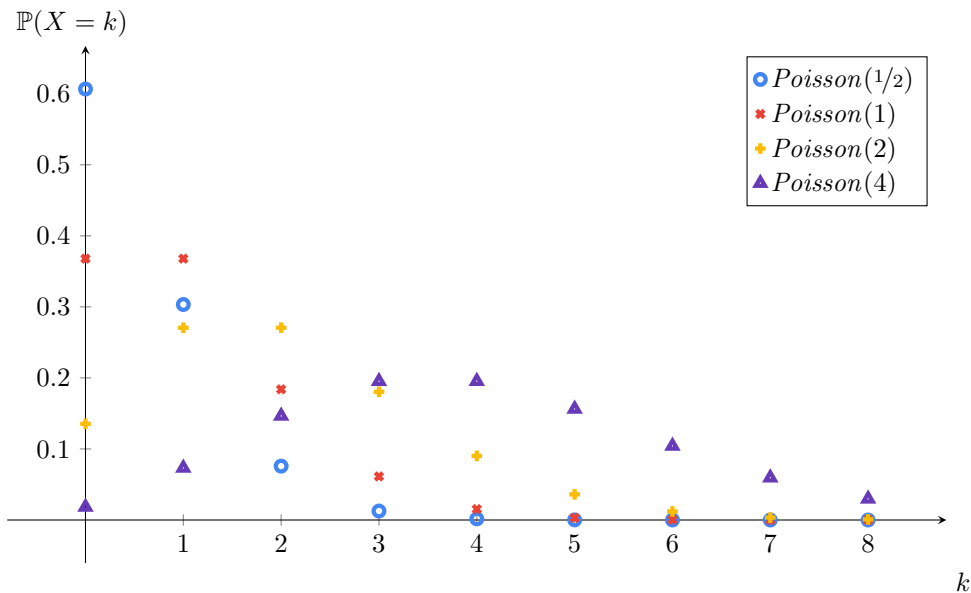
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Notação: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Propriedades do Modelo de Poisson

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$:

- 1 $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- 2 $\text{var}(X) = \lambda$



Interpretação gráfica do parâmetro λ

Mostre que se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então:

- ① $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- ② $\text{var}(X) = \lambda$
- ③ Se $\lambda = 1$, então $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1)$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Suponha que o número de erros tipográficos em uma única página de um livro siga a distribuição de *Poisson* com média $\lambda = 1/2$. Se abrirmos o livro em uma página qualquer, qual a probabilidade de termos:

- a exatamente dois erros tipográficos.
- b nenhum erro tipográfico.
- c menos de dois erros tipográficos.
- d mais de dois erros tipográficos.

Ross (2010, p. 148)

Uma fonte radioativa emite em média cinco partículas alfa num intervalo de 20 minutos. Admitindo-se que o modelo de *Poisson* seja adequado, qual a probabilidade de que em um determinado intervalo de 20 minutos haja

- a) exatamente duas emissões?

$$\text{R.: } \frac{25e^{-5}}{2}$$

- b) pelos duas emissões?

$$\text{R.: } 1 - 6e^{-5}$$

Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Se $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2)$ qual o valor de $\mathbb{P}(X < 4)$?

Resp.: $\frac{19e^{-2}}{3}$

O número de mensagens eletrônicas (em centenas) recebidas por um provedor em horário comercial foi modelado por uma variável Poisson com média de 1,5 por dia. As instalações disponíveis podem atender, com o padrão de qualidade desejado, até 200 mensagens diárias. Qual a probabilidade de que esse limite seja excedido?

Suponha que uma impressora de alta qualidade cometa erros segundo um modelo Poisson com taxa de 2 erros por página.

- a Qual é a probabilidade de encontrar pelo menos 1 erro em uma página escolhida ao acaso?
- b Se 5 páginas são sorteadas, ao acaso e de forma independente, qual é a probabilidade de pelo menos 1 página com pelo menos 1 erro por página?
- c Dentro das condições do item anterior, considere a variável que conta o número de páginas com pelo menos um erro. Você identifica o modelo dessa variável?

O número de chegadas a um posto de informações turísticas é modelado por um modelo Poisson com taxa de 2 pessoas por hora. Para uma hora qualquer, qual a probabilidade de ocorrer:

- a Pelo menos uma chegada?
- b Mais de duas chegadas, dado que chegaram menos de 5 pessoas?

Suponha que X tenha uma distribuição de Poisson. Determine as seguintes probabilidades quando a média de X for quatro, e repita quando a média for 0, 4:

- a $\mathbb{P}(X = 0)$
- b $\mathbb{P}(X \leq 2)$
- c $\mathbb{P}(X = 4)$
- d $\mathbb{P}(X = 8)$

Montgomery & Runger (2018)

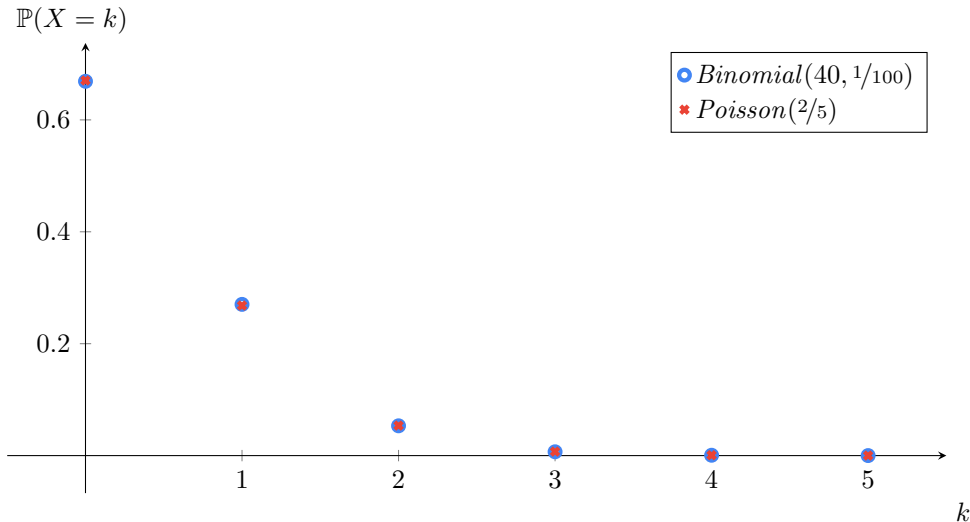
Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

- | | |
|--|---------------|
| a) dez ou mais chamadas. | Resp.: 0,2834 |
| b) menos que nove chamadas. | Resp.: 05925 |
| c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas. | Resp.: 0,2792 |

Considere um dado equilibrado. Para cada uma das situações abaixo, obtenha a FDP da variável de interesse e identifique o modelo se possível.

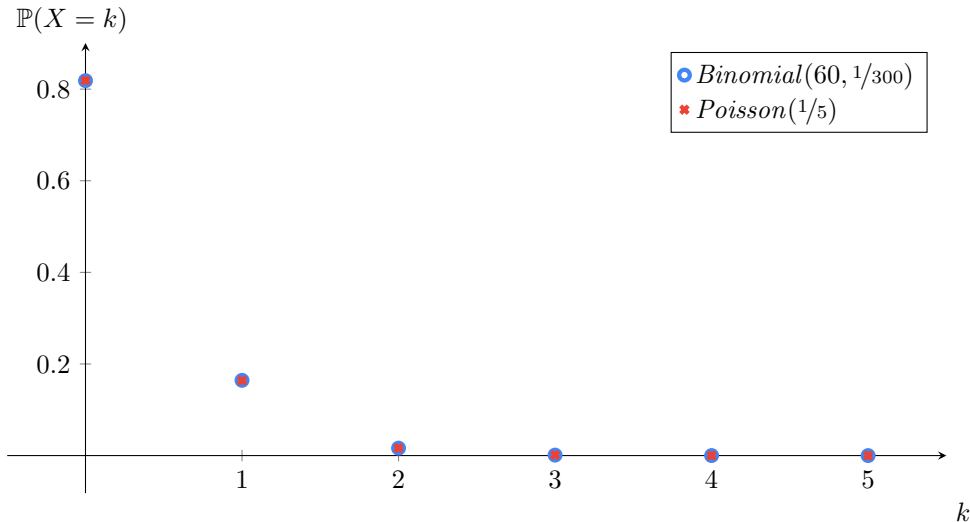
- a O dado é lançado três vezes, de forma independente. Estamos interessados no número de vezes em que ocorreu a face 1.
- b O dado equilibrado é lançado três vezes. Estamos interessados no número de repetições das faces observadas.
- c O dado é lançado sucessivamente, de forma independente, até ocorrer a face 6. Estamos interessados em quantos lançamentos foram necessários.
- d O dado é lançado 3 vezes, mas a face ocorrida num lançamento é “retirada” para próximo lançamento. Estamos interessados no número de faces ímpares obtidas.

Considere $X \sim \text{Binomial}(40, 1/100)$ e $Y \sim \text{Poisson}(2/5)$. Note que: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.



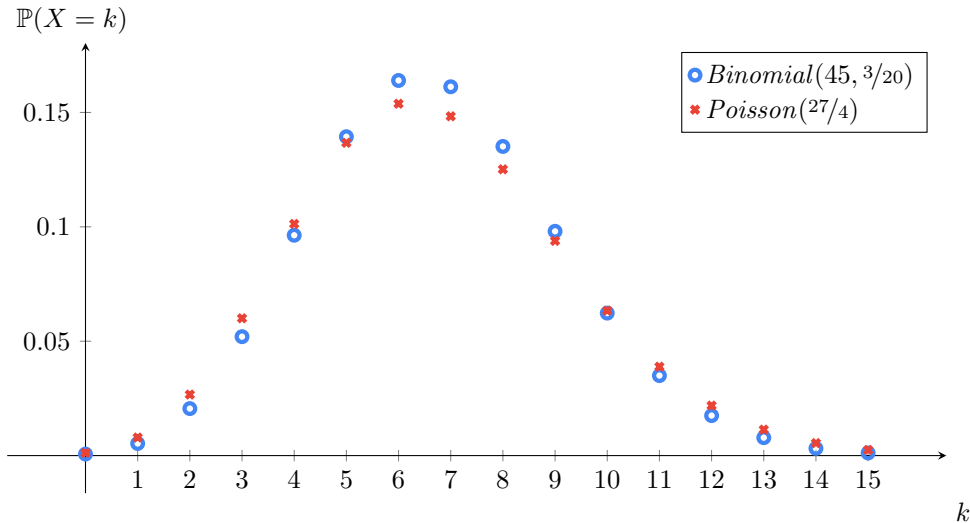
Aproximação da Binomial pela Poisson - Exemplo 1

Considere $X \sim \text{Binomial}(60, 1/300)$ e $Y \sim \text{Poisson}(1/5)$. Note que: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.



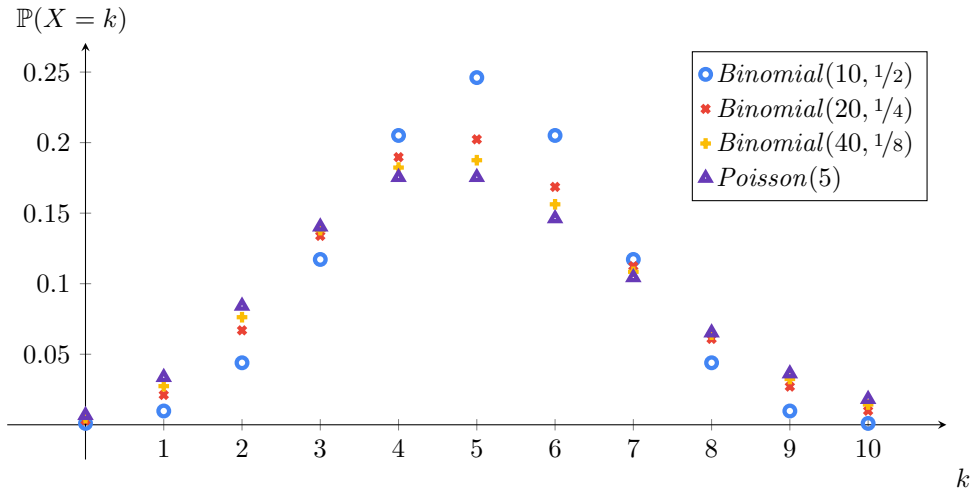
Aproximação da Binomial pela Poisson - Exemplo 2

Considere $X \sim \text{Binomial}(45, 3/20)$ e $Y \sim \text{Poisson}(27/4)$. Note que: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.



Aproximação da Binomial pela Poisson - Exemplo 3

Considere $X_1 \sim \text{Binomial}(10, 1/2)$, $X_2 \sim \text{Binomial}(20, 1/4)$, $X_3 \sim \text{Binomial}(40, 1/8)$ e $Y \sim \text{Poisson}(5)$. Note que: $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = \mathbb{E}(Y)$.



Aproximação da Binomial pela Poisson - Exemplo 4

Aproximação entre Poisson e Binomial

A variável aleatória $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ tem distribuição aproximadamente igual à variável aleatória $Y \sim \text{Binomial}(n, p)$ quando:

- 1 $\lambda = np$, ou seja, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$
- 2 n é “muito grande”
- 3 p é “muito pequeno”
- 4 $\mathbb{E}(X) = np < 7$

Suponha que $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ então sua FDP será:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Se $\lambda = np$, então $p = \lambda/n$, assim podemos reescrever:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\&= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$ e $\lambda = np$ a distribuição *Binomial*(n, p) se aproxima da distribuição *Poisson*(λ).

$$\exp(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

O número de chamadas telefônicas que chegam a uma central é frequentemente modelado como uma variável aleatória de Poisson. Considere que, em média, haja dez chamadas por hora. Determine as seguintes probabilidades:

- a Exatamente cinco chamadas em uma hora.
- b Três ou menos chamadas em uma hora.
- c Exatamente 15 chamadas em duas horas.
- d Exatamente cinco chamadas em 30 minutos.

Montgomery & Runger (2018)

Uma amostra de 1000 peças é retirada de uma máquina que produz 0,5% de peças defeituosas.

- a Qual é a distribuição do número de peças defeituosas nessa amostra?
- b Qual a probabilidade de encontrarmos 3 peças defeituosas nessa amostra?

Uma companhia de seguros afirma que 0.1% da população tem certo tipo de acidentes cada ano. Se os 10000 segurados da companhia foram selecionados aleatoriamente desta população. Qual será a probabilidade de que no máximo de 5 destes clientes, tenham um acidente o próximo ano?

Suponha que o número de clientes que entrem em um banco em uma hora seja uma variável aleatória de Poisson. Suponha também que $\mathbb{P}(X = 0) = 0,05$. Determine a média e a variância de X .

Montgomery & Runger (2018)

Dados provenientes de www.centralhudsonlabs.com determinaram que o número médio de fragmentos de insetos em uma barra de 225 gramas de chocolate foi igual a 14,4; porém, três marcas apresentaram contaminação por inseto maior que duas vezes a média. Veja o *U.S. Food and Drug Administration – Center for Food Safety and Applied Nutrition for Defect Action Levels* para produtos alimentícios. Considere que o número de fragmentos (contaminantes) siga a distribuição de Poisson.

- a Se você consumir uma barra de 225 gramas de uma marca com um nível médio de contaminação, qual será a probabilidade de não ocorrer contaminação por insetos?
- b Suponha que você consuma uma barra que tem um quinto do tamanho testado (45 gramas) de uma marca com um nível médio de contaminação. Qual é a probabilidade de não ocorrer contaminação por insetos?
- c Se você consumir sete barras de 28,35 gramas, essa semana, de uma marca com um nível médio de contaminação, qual será a probabilidade de você consumir um ou mais fragmentos de inseto em mais de uma barra?
- d A probabilidade de uma contaminação ser maior do que duas vezes a média de 14,4 não é usual, ou pode ser considerada uma variação típica? Explique.

Montgomery & Runger (2018)

Astrônomos tratam o número de estrelas em determinado volume do espaço como uma variável aleatória de Poisson. A densidade na Via Láctea, na vizinhança de nosso sistema solar, é uma estrela por 16 anos-luz 3 .

- a Qual é a probabilidade de duas ou mais estrelas em 16 anos-luz 3 ?
- b Quantos anos-luz 3 de espaço têm de ser estudados de modo que a probabilidade de uma ou mais estrelas exceda(m) 0,95?

Montgomery & Runger (2018)

Em uma seção de autoestrada, o número de buracos, que é bastante significativo para requerer reparo, pressupõe seguir uma distribuição de Poisson, com uma média de dois buracos por milha.

- a Qual é a probabilidade de que não haja buracos que requeiram reparo em cinco milhas de autoestrada?
- b Qual é a probabilidade de que no mínimo um buraco requeira reparo em 0,5 milha de autoestrada?
- c Se o número de buracos estiver relacionado com a carga do veículo na autoestrada e algumas seções dessa autoestrada estiverem sujeitas a uma carga pesada de veículos, enquanto outras seções estiverem sujeitas a uma carga leve de veículos, como você se sente a respeito da suposição de distribuição de Poisson para o número de buracos que requerem reparo?

Montgomery & Runger (2018)

Em 1898, L. J. Bortkiewicz publicou um livro intitulado *The Law of Small Numbers* e empregou dados coletados ao longo de 20 anos, para mostrar que o número de soldados mortos por coices de cavalo em cada ano em cada corporação na cavalaria prussiana seguia uma distribuição de Poisson com média de 0,61.

- a Qual é a probabilidade de mais de uma morte na corporação em um ano?
- b Qual é a probabilidade de nenhuma morte na corporação ao longo de cinco anos?

Montgomery & Runger (2018)

O número de visualizações a uma página da internet segue a distribuição de Poisson, com uma média de 1,5 por minuto.

- a Qual é a probabilidade de nenhuma visualização em um minuto?
- b Qual é a probabilidade de duas ou menos visualizações em dez minutos?
- c A resposta do item anterior depende do fato de o período de dez minutos ser um intervalo ininterrupto? Explique.
- d Determine o intervalo de tempo de modo que a probabilidade de nenhuma visualização nesse intervalo seja de 0,001.

Montgomery & Runger (2018)

Se a média é 1,5 por minuto a média em um intervalo de T minutos é $1,5T$.

O número de falhas na superfície de painéis de plástico, usados no interior de automóveis, tem uma distribuição de Poisson, com uma média de 0,05 falha por pé quadrado de painel plástico. Considere que o interior de um automóvel contenha dez pés quadrados de painel plástico.

- a Qual é a probabilidade de não haver falha na superfície do interior do automóvel?
- b Se dez carros forem vendidos para uma companhia de aluguel de carros, qual será a probabilidade de que nenhum dos dez carros tenha qualquer falha na superfície?

Montgomery & Runger (2018)

Inclusões são defeitos em um metal vertido causados por contaminantes. O número de inclusões (grandes) em um ferro fundido segue uma distribuição de Poisson, com uma média de 2,5 por milímetro cúbico. Determine o seguinte:

- a A probabilidade de no mínimo uma inclusão em um milímetro cúbico.
- b A probabilidade de no mínimo cinco inclusões em 5,0 milímetros cúbicos.
- c O volume de material para inspecionar, de modo que a probabilidade de existir pelo menos uma inclusão seja igual a 0,99.
- d Em vez de uma média de 2,5 por milímetro cúbico, determine as inclusões médias por milímetro cúbico, de modo que a probabilidade de existir no mínimo uma inclusão seja igual a 0,95.

Montgomery & Runger (2018)

O artigo “An Association Between Fine Particles and Asthma Emergency Department Visits for Children in Seattle” [Environmental Health Perspectives, junho 1999, Vol. 107(6)] usou modelos de Poisson para o número de atendimentos diários ao Departamento de Asma (DA). Para os CEPs (Código de Endereçamento Postal) estudados, o número médio de atendimentos ao DA foi de 1,8 por dia. Determine o seguinte:

- a Probabilidade de mais de cinco atendimentos em um dia.
- b Probabilidade de menos de cinco atendimentos em uma semana.
- c Número de dias, de modo que a probabilidade de existir pelo menos um atendimento seja igual a 0,99.
- d Em vez de uma média de 1,8 por dia, determine o número médio de atendimentos diários, de modo que a probabilidade de haver mais de cinco atendimentos em um dia seja igual a 0,1.

Montgomery & Runger (2018)

Modelo Uniforme Contínuo

Modelo Uniforme Contínuo

Diremos que X segue o modelo **Uniforme Contínuo**, no intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, se todos os subintervalos de $[\alpha, \beta]$ com mesmo comprimento apresentarem a mesma probabilidade. Sua FDP é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{se } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U_C(\alpha, \beta)$

Propriedades do Modelo Uniforme Contínuo

① $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2};$

② $\text{var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12};$

③ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{se } x > \beta \end{cases}$

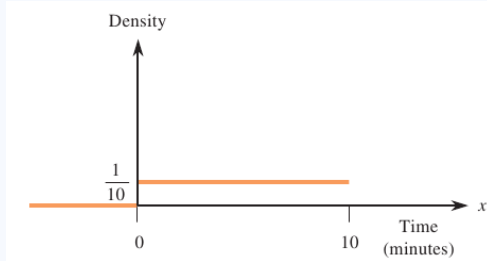
Ilustre o gráfico de $f(x)$ e $F(x)$ para $X \sim U_C [\alpha, \beta]$ e mostre que:

$$\textcircled{1} \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\textcircled{2} \text{var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12};$$

$$\textcircled{3} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{se } x > \beta \end{cases}$$

Um professor nunca dispensa a turma mais cedo. Se X representar a quantidade de tempo que a turma fica retida após o final da aula, assuma que X tenha uma distribuição uniforme no intervalo de $(0, 10)$. A curva de densidade é:



- 1 Ordene as probabilidades: $\mathbb{P}(2 < X < 3)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$, $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X > 7)$.
- 2 Qual a probabilidade de que:
 - a a turma seja retida por mais de cinco minutos?
 - b a retenção fique entre 3 e 5 minutos?

Suponha que X tenha distribuição uniforme em $[-a, 3a]$. Determine a média e a variância de X .

Bussab & Morettin (2013, p. 203)

A quantidade X de sedimentos depositados por dia em uma certa região marítima segue uma distribuição uniforme no intervalo 7,5 à 20 toneladas.

- 1 Desenhe a curva de densidade da variável X .
- 2 Qual a altura da curva de densidade?
- 3 Qual a probabilidade de que até o final do dia sejam depositadas no máximo 12 toneladas de sedimento nessa região?
- 4 Qual a probabilidade de que X esteja no intervalo $(10, 15)$? E de estar no intervalo $(12, 17)$? Porque as duas probabilidades são iguais?
- 5 Qual a probabilidade de até o final do dia serem depositadas no máximo mais 5 toneladas de sedimento nessa região dado que até o presente momento já foram depositadas mais de 9 toneladas?

Se $X \sim U_C(0, 10)$ calcule:

- ① $\mathbb{P}(X < 3)$
- ② $\mathbb{P}(X > 6)$
- ③ $\mathbb{P}(3 < X < 8)$

Um programa de TV dura 1 hora e um telespectador impaciente inicia assistindo, mas vai trocar de canal a qualquer momento, com igual probabilidade, durante o programa.

- 1 Qual a probabilidade de ele assistir à maior parte do programa?
- 2 Se ele assistiu à maior parte, qual seria a probabilidade de ele desligar a TV ou mudar de canal nos últimos 10 minutos?

Considere uma corda escolhida aleatoriamente em um círculo dado. Qual a probabilidade que essa corda tenha comprimento maior que o lado do triângulo (equilátero) inscrito à esse círculo?

Dicas.: Pense nas seguintes estratégias:

- 1 Escolha aleatoriamente as extremidades da corda. Resp.: $1/3$
- 2 Escolha um raio para o círculo, escolha aleatoriamente um ponto sobre o raio escolhido e construa uma corda perpendicular ao raio passando por esse ponto. Resp.: $1/2$
- 3 Escolha um ponto aleatório dentro do círculo. Considere a corda tal que esse ponto seja o ponto médio da corda. Resp.: $1/4$

Qual é a resposta correta?

Num ponto de parada saem ônibus a cada 15 minutos a partir das 7h. Se um passageiro chega num ponto de parada em um instante de tempo uniformemente distribuído entre às 7h e 7h30min. Encontre a probabilidade de que o passageiro espere:

- a) menos de 5 minutos? Resp.: $\frac{1}{3}$
- b) mais do que 10 minutos? Resp.: $\frac{1}{3}$

Ross (2010, p. 196)

Seja $X \sim U_C(-\alpha, \alpha)$, determine o valor do parâmetro α de modo que:

- a $\mathbb{P}(-1 < X < 2) = 3/4$
- b $\mathbb{P}(|X| < 1) = \mathbb{P}(|X| > 2)$

Magalhães (2011, p. 106)

A espessura de um flange em um componente de espaçonave é uniformemente distribuída entre 0,95 e 1,05 milímetro. Determine o seguinte:

- a A função de distribuição cumulativa da espessura do flange.
- b A proporção de flanges que excedem 1,02 milímetro.
- c A espessura excedida por 90% dos flanges.
- d A média e a variância da espessura do flange.

Montgomery & Runger (2018)

A espessura de um filme fotorresistente aplicado a pastilhas na fabricação de semicondutores, em certa localização na pastilha, é uniformemente distribuída entre 0,2050 e 0,2150 micrômetro. Determine o seguinte:

- a A função de distribuição cumulativa da espessura do filme fotorresistente.
- b A proporção de pastilhas que excedem 0,2125 micrômetro na espessura do filme fotorresistente.
- c A espessura excedida por 10% das pastilhas.
- d A média e a variância da espessura do filme fotorresistente.

Montgomery & Runger (2018)

Um adulto pode ganhar ou perder duas libras de água durante o dia. Considere que as mudanças na massa de água sejam distribuídas uniformemente entre menos duas e mais duas libras em um dia. Qual é o desvio-padrão do peso dessa pessoa ao longo do dia?

Montgomery & Runger (2018)

Um show de golfinhos está marcado para começar às 9 horas, 9h30min e 10 horas. Quando o show começa, o portão é fechado. Um visitante chegará ao portão no tempo uniformemente distribuído entre 8h30min e 10 horas. Determine o seguinte:

- a A função de distribuição cumulativa do tempo (em minutos) entre a chegada do visitante e 8h30min.
- b A média e a variância da distribuição do item anterior.
- c A probabilidade de o visitante esperar menos de dez minutos para o início do show.
- d A probabilidade de o visitante esperar mais de 20 minutos para o início do show.

Montgomery & Runger (2018)

O volume de um xampu dentro de um frasco está uniformemente distribuído entre 374 e 380 mililitros.

- a) Quais são a média e o desvio-padrão do volume de xampu?
- b) Qual é a probabilidade de o frasco estar cheio com menos do que o valor nominal de 375 mililitros?
- c) Qual é o volume de xampu que está em excesso em 95% dos frascos?
- d) Cada mililitro de xampu custa US\$ 0,002 ao produtor. Mais de 375 mililitros representam um custo extra para ele. Qual é o custo extra médio?

Montgomery & Runger (2018)

Uma mensagem de e-mail chegará em um tempo uniformemente distribuído entre 9 e 11 horas. Você verifica seu e-mail às 9h15min e a cada meia hora depois desse tempo.

- a Qual é o desvio-padrão do tempo de chegada (em minutos)?
- b Qual é a probabilidade de que a mensagem chegue menos de dez minutos antes de você vê-la?
- c Qual é a probabilidade de que a mensagem chegue mais de 15 minutos antes de você vê-la?

Montgomery & Runger (2018)

Um emissor de elétrons produz raios de elétrons com energia cinética variável que está uniformemente distribuída entre 3 e 7 joules. Suponha que seja possível ajustar o limite superior da energia cinética (correntemente estabelecido em 7 joules).

- a Qual é a energia cinética média?
- b Qual é a variância da energia cinética?
- c Qual é a probabilidade de um raio de elétron ter uma energia cinética de exatamente 3,2 joules?
- d Qual deve ser o limite superior de modo que a energia cinética média aumente para 8 joules?
- e Qual deve ser o limite superior de modo que a variância da energia cinética diminua para 0,75 joule?

Montgomery & Runger (2018)

Referências

- Bertrand, J. (1889). *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars et fils.
- Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.
- Carvalho, P. C. P. (2016). O valor esperado de uma quantidade aleatória. *Revista do Professor de Matemática* (89), 18–23.
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability and its Applications*, Volume 1. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, & David Degenszajn ans Roberto Périgo (2002). *Matemática - Volume único* (2 ed.). Atual.
- Magalhães, M. N. (2011). *Probabilidade e Variáveis Aleatórias* (3 ed.). São Paulo: EdUSP.
- Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.
- Mckinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly* 73(4), 385–387.
- Montgomery, D. C. & G. C. Runger (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.

- Morgado, A. C., J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, & P. Fernandez (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade* (9 ed.). Coleção do Professor de Matemática. SBM.
- Peixoto, C. (2014). Álbum oficial da copa do mundo. *Revista do Professor de Matemática* (85), 46–48.
- Rathie, P. N. & P. Zörnig (2012). *Teoria da Probabilidade*. Editora UnB.
- Ross, S. M. (2010). *A First Course in Probability* (8 ed.). New York: Pearson Hall.
- Selvin, S., M. Bloxham, A. I. Khuri, M. Moore, R. Coleman, G. R. Bryce, J. A. Hagans, T. C. Chalmers, E. A. Maxwell, & G. N. Smith (1975). Letters to the editor. *The American Statistician* 29(1), 67–71.
- Weiss, N. A. (2012). *Introductory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.