Capítulo 1

Probabilidade básica

1.1 Conceitos básicos

Algumas definições que serão necessárias ao longo de todo o nosso curso serão dadas e discutidas à seguir.

Definição 1 (Variável de interesse)

É a variável observada em um experimento.

Definição 2 (Experimento aleatório)

É qualquer ação cujo resultado (valor variável de interesse) não pode ser previsto.

O conceito de variável de interesse e experimento aleatório serão fortemente associados nesse texto. Um experimento aleatório é também dito não determinístico. Aqui é importante frisar que o adjetivo *aleatório* na definição acima é herdado da variável de interesse. Em um experimento é comum considerar mais de uma variável de interesse e, portanto um mesmo experimento pode ser aleatório ou não dependendo da variável de interesse observada.

Definição 3 (Espaço amostral)

É o conjunto de *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. O espaço amostral é dito *enumerável* quando existir uma bijeção entre ele e os números naturais. Quando tal bijeção não existir diremos que o espaço amostral é *não enumerável*.

O espaço amostral será denotado por Ω. Um espaço amostral enumerável pode ser finito ou infinito. Todo espaço amostral finito é enumerável.

Um baralho comum possui 52 cartas divididas em quatro naipes: espadas $\spadesuit$, ouros $\diamondsuit$, bastos $\clubsuit$ e copas $\heartsuit$. Cada naipe possui um ás, cartas numeradas de 2 à 10, um valete, uma dama e um rei. Ao sortearmos aleatoriamente uma carta de um baralho como esse o espaço amostral será formado por todas as 52 cartas.

Definição 4 (Evento)

É qualquer *subconjunto* do espaço amostral Ω.

Normalmente os eventos são denotados por letras alfabéticas maiúsculas, ex.: A, B, C.

Definição 5 (Evento nulo)

É o evento associado a todo *subconjunto vazio* do espaço amostral Ω.

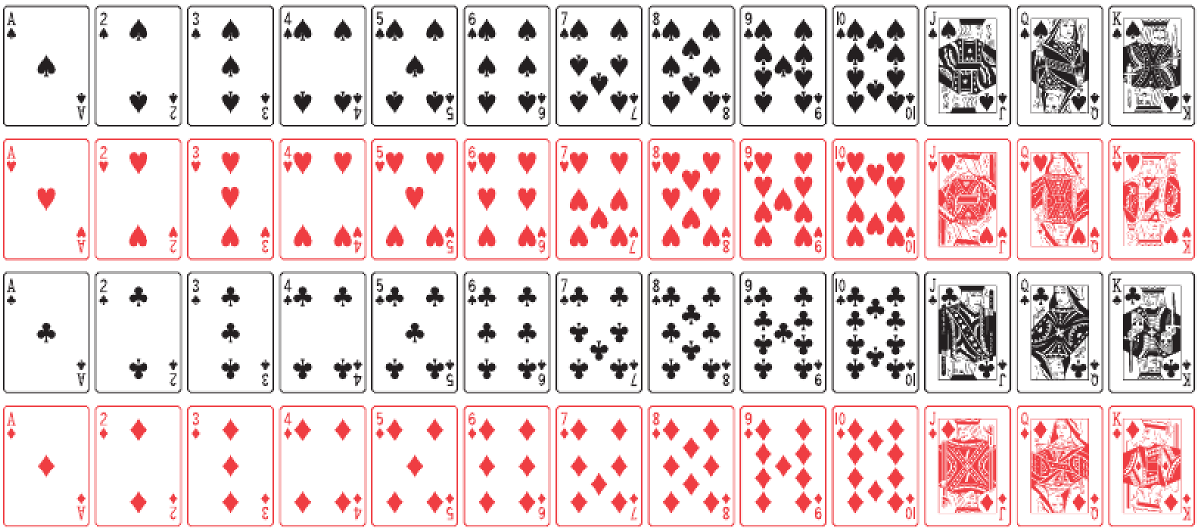


Figura 1.1: Baralho comum

Exercício 1: Weiss (2012, p. 153). Considere o experimento de sortear uma carta de baralho comum de 52 cartas como apresentado na fig. 1.1. Quais as cartas compõem os eventos:

a) Seleciona-se o rei de copas.

b) Seleciona-se um rei.

c) Seleciona-se uma carta de copas.

d) Seleciona-se uma carta de figura.

Exercício 2: Bussab & Morettin (2013, p. 108). Qual é o espaço amostral e a variável de interesse nos seguintes experimentos? Quais são experimentos aleatórios?

a) Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.

b) Jogamos um dado e observamos a face que ficou virada para cima.

c) Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.

d) Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.

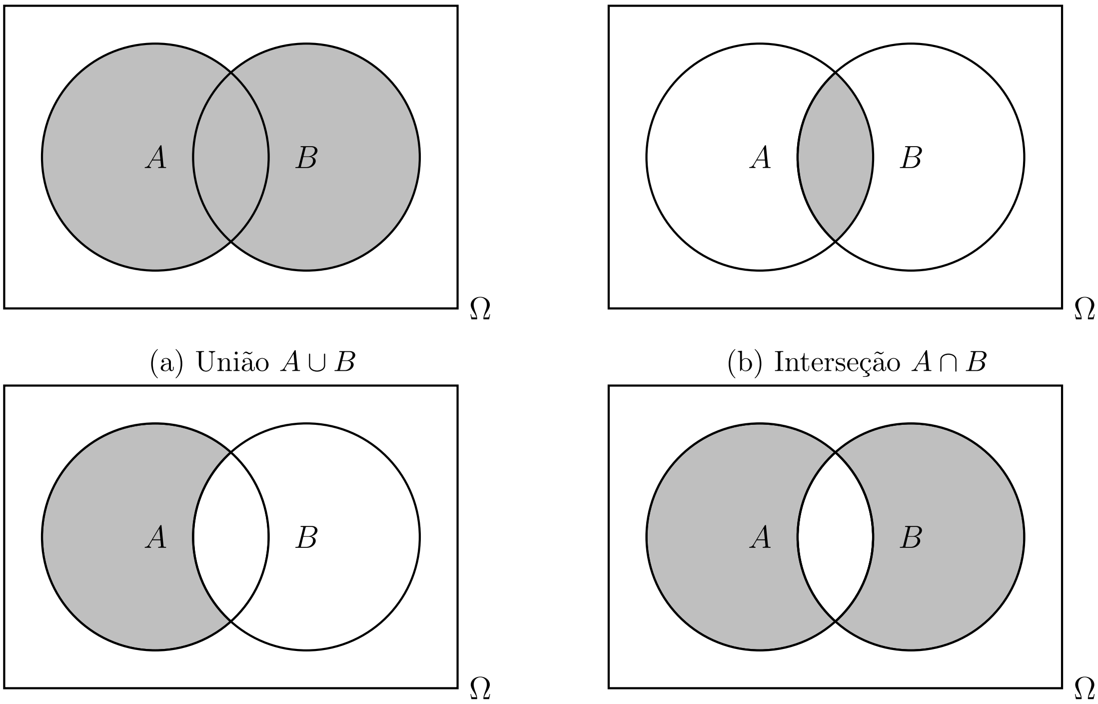
e) Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.

f) Colocamos um litro de água no fogo e medimos a sua temperatura depois de vinte minutos.

g) Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.

h) Olho pela janela do meu quarto e conto a quantidade de carros que passam na rua pela próxima hora.

Nas definições a seguir considere A e B eventos em um mesmo espaço amostral Ω. Aqui definiremos quatro operações básicas com eventos. Todas essas operações resultam



(a) União $A \cup B$ (b) Interseção $A \cap B$ (c) Diferença $A - B$ (d) Diferença simétrica $A \Delta B$

Figura 1.2: Operações entre dois eventos A e B.

em novos eventos que são funções de A e B.

Definição 6 (União de eventos)

O evento $A \cup B$ denota a *união* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência de ao menos um deles.

A operação de união também é chamada de reunião

Definição 7 (Interseção de eventos)

O evento $A \cap B$ denota a *interseção* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência simultânea desses eventos.

Definição 8 (Diferença de eventos)

O evento $A - B$ denota a *diferença* do evento A em relação ao evento B, ou seja, a ocorrência exclusiva de A.

Definição 9 (Diferença simétrica)

O evento $A \Delta B$ denota a *diferença simétrica* entre os eventos A e B, ou seja, a ocorrência exclusiva de ao menos um dos eventos.

Nas figs. 1.2a to 1.2d usamos diagramas de Venn para ilustrar as quatro operações básicas entre eventos. Os diagramas de Veen normalmente são usados para representar conjuntos. Note que os eventos de um espaço amostral são conjuntos, logo as operações definidas são operações entre conjuntos.

Definição 10 (Eventos elementares)

São os *elementos* do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de Ω.

Uma conceito muito útil na construção de alguns espaços amostrais será a de produto cartesiano:

Definição 11 (Produto Cartesiano)

Sejam dois conjuntos A e B, o *produto cartesiano* $A \times B$ será o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence à A e o segundo pertence à B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

O baralho inglês na fig. 1.1 possui um total de 4 naipes que podem ser descritos pelo conjunto:

$$\mathcal{N} = \{\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}. \tag{1.1}$$

Para cada um dos naipes em $\mathcal{N}$ o baralho inglês possui 13 elementos que podem ser descritos pelo conjunto:

$$\mathcal{E} = \{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}. \tag{1.2}$$

Assim sendo o baralho inglês possui um total de 52 cartas que podem ser descritas pelo conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{E} \times \mathcal{N}$, ou seja:

$$\mathcal{C} = \{(A, \spadesuit), (K, \spadesuit), \ldots, (3, \heartsuit), (3, \heartsuit)\} \tag{1.3}$$

Um conceito que será fundamental nesse texto é o de cardinal, ou seja, o número de elementos de um conjunto. O seguinte teorema estabelece uma relação matemática bastante intuitiva para obtermos a quantidade de elementos de um produto cartesiano.

Teorema 1 (Cardinal)

Sejam os conjuntos A e B. O cardinal do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto dos cardinais dos conjuntos individuais:

$$n(A \times B) = n(A)n(B). \tag{1.4}$$

Exercício 3: Magalhães & Lima (2015, p. 52). Para cada um dos casos a seguir, escreva um espaço amostral adequado e conte seus eventos elementares.

a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.

b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.

c) Uma urna contém dez bolas azuis e dez vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.

d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.

e) Vou ao quintal de casa e conto a quantidade de mangas que caem da mangueira que lá está plantada na próxima hora.

f) Em uma cidade, famílias com três crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.

g) Uma máquina produz vinte peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.

h) Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

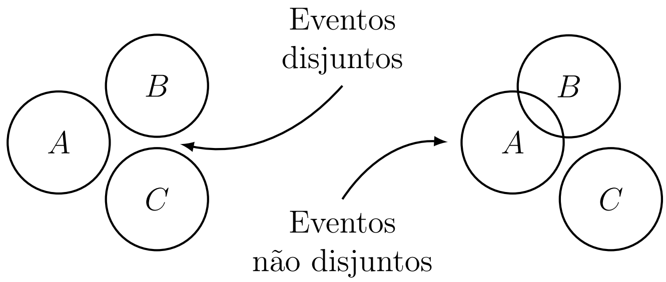


Figura 1.3: Coleções de eventos disjuntos e não disjuntos.

Exercício 4: No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

A: Seleciona-se o rei de copas

B: Seleciona-se um rei

C: Seleciona-se uma carta de copas

D: Seleciona-se uma carta de figura

Determine adequadamente os eventos:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A - B$

d) $B - A$

e) $B \Delta A$

f) $B \cap C$

g) $B \cup C$

h) $C \cap D$

i) $B \Delta D$

Definição 12 (Eventos disjuntos)

Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são *disjuntos* se $A_i \cap A_j = \varnothing$ para quaisquer i e j distintos.

Eventos disjuntos também são chamados de mutuamente excludentes. Na fig. 1.3 os diagramas de Venn são usados novamente para ilustrar conjuntos de eventos disjuntos e não disjuntos.

Exercício 5: Num experimento seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

A: seleciona-se uma carta de copas

B: seleciona-se uma figura

C: seleciona-se um ás

D: seleciona-se um oito

E: seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

a) C e D

b) D e E

c) C e E

d) D, E e A

e) D, E, A e B

f) A e B

Definição 13 (Eventos complementares)

Dois eventos A e B contidos em um espaço amostral Ω são *complementares* se:

1. $A \cap B = \varnothing$
2. $A \cup B = \Omega$

O complementar de A será denotado por $\overline{A}$.

Teorema 2 (Propriedades operacionais dos eventos)

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

a) $\overline{\varnothing} = \Omega$

b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

c) $A \cap \Omega = A$

d) $A \cup \varnothing = A$

e) $A \cup \Omega = \Omega$

f) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

g) $A \cup \overline{A} = \Omega$

h) $A - B = A \cap \overline{B}$

i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

j) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

k) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

l) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.2 Definições de probabilidade

A probabilidade não é uma grandeza física mensurável, ou seja, não existe um instrumento capaz de "medir" a probabilidade de ocorrência de um evento. Por isso temos várias formas de definir probabilidade, cada uma com um conceito diferente sobre como podemos "medir" a probabilidade de um evento ocorrer. Em geral a percepção da probabilidade de ocorrência de um evento está associada ao conhecimento que temos do experimento (aleatório) no que o evento está inserido. Lembre-se, probabilidade não existe!!!

A primeira definição que estudaremos baseia-se no princípio de que podemos obter a probabilidade de ocorrência de um evento A repetindo-se o experimento um número "infinito" sempre em iguais condições.

Definição 14 (Definição frequentista de probabilidade)

A probabilidade do evento A é dada por

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n},$$

onde n_A o número de ocorrências do evento A em n repetições independentes do experimento em questão

Como visto na definição 14 o princípio frequentista estabelece que a probabilidade $\mathbb{P}(A)$ seria a *proporção limite* de ocorrência do evento A.