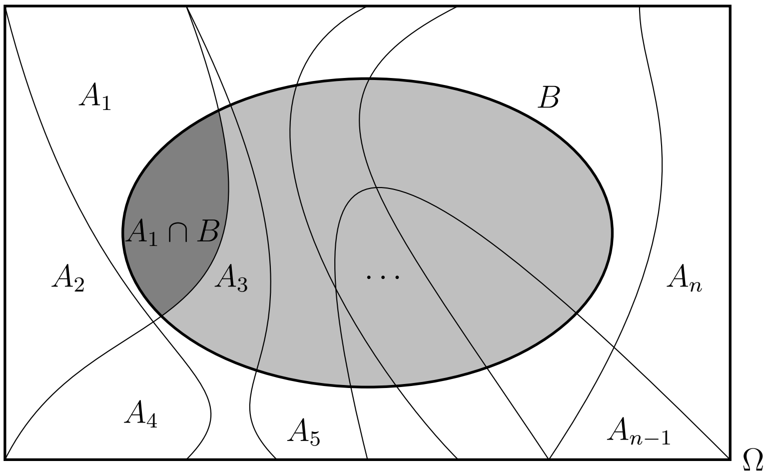

Figura 1.6: Decomposição do evento B como união disjunta dos eventos $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$.

Exercício 43: (Morgado et al., 1991, p 157). Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:

a) escolhermos aleatoriamente as sete respostas;

b) escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas "verdadeiro" do que "falso".

Exercício 44: (Morgado et al., 1991, p 162) Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $8/10$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $9/10$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $9/10$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

1.5 Teorema da probabilidade total

No Teorema 10 será apresentado um método que nos permite calcular a probabilidade de ocorrência de um evento sempre que for possível decompor esse evento em uma união finita de eventos disjuntos. A Figura 1.6 ilustra esse conceito. Um evento B pode ser *decomposto* numa união finita de eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ quando poder ser expresso na forma:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B). \tag{1.29}$$

Teorema 10 (Teorema da probabilidade total)

Seja B um evento contido numa união finita de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em um espaço amostral Ω tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i). \tag{1.30}$$

Demonstração. Para demonstrarmos esse resultado note que B pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em Ω da forma (1.29). Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)\right]\\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B).\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).\end{aligned}$$

E o resultado está demonstrado. □

Exercício 45: Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

Exercício 46: (Ross, 2010, p. 66) Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano.

a) Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano?

b) Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade de que o indivíduo tenha sofrido seu primeiro acidente?

Exercício 47: Três candidatos: João, Maria e Pedro, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas probabilidade de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição?

Exercício 48: (Magalhães & Lima, 2015, p. 58) Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma fazenda F_2 e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado?