# Curso de Estatística e Probabilidade

## DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

18 de fevereiro de 2020

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Informações sobre a disciplina

## Avaliação

A nota final $M_F$ será obtida da seguinte forma:

$$M_F = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{2} A_i + \sum_{i=1}^{12} T_i\right),$$

onde $A_i \in [0, 10]$ é a nota obtida na $i$-ésima avaliação e $T_i \in [0, 1]$ é a nota obtida no $i$-ésimo trabalho. Cada avaliação terá valor de 10 pontos e cada trabalho terá valor de 1 ponto.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Informações sobre a disciplina

## Livros Recomendados

- Bussab & Morettin (2013)
- Magalhães & Lima (2015)

## Entrega dos Trabalhos

1. As datas de entrega dos trabalhos são divulgadas no q-acadêmico.
2. A entrega dos trabalhos deve ser feita exclusivamente por meio digital (email: thiago.vedovatto@ifg.edu.br) com o assunto:
   `Trabalho N° - Aluno`.
   Exemplo: `Trabalho 3 - Joãozinho da Silva Sauro`.
   Os trabalhos devem ser entregues em um único arquivo no formato pdf.
3. Não serão considerados trabalhos entregues
   a. fora do prazo.
   b. fisicamente ou por outros meios digitais como whatsapp, telegram, etc.

FEDERAL
Goiás

# Introdução à Probabilidade

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Probabilidades

## Experimento Aleatório

É qualquer ação cujo resultado não pode ser previsto com certeza (não determinístico).

## Variável de Interesse

É a variável que se deseja observar num determinado experimento aleatório.

## Espaço Amostral

É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Notação: $\Omega$.

## Eventos

São os subconjuntos do espaço amostral $\Omega$.

## Eventos Elementares

São os elementos do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de $\Omega$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercício - Magalhães & Lima (2015, p. 52)

Ref.:LG3L

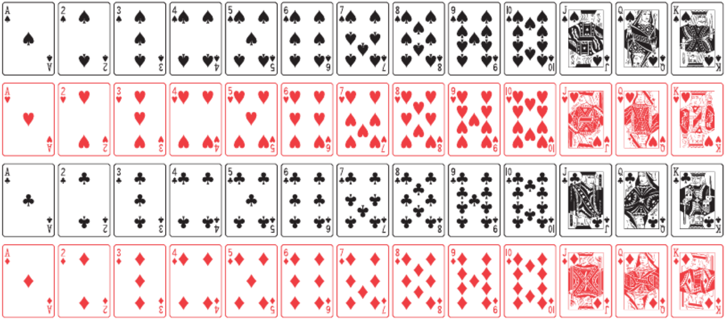
Para cada um dos casos abaixo, escreva o espaço amostral correspondente e conte seus eventos elementares.

1. Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.
2. Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.
3. Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.
4. Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
5. Em uma cidade, famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.
6. Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.
7. Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercício - Weiss (2012, p. 153)

Ref.:4F22



Considere o experimento aleatório de sortear uma carta de baralho. Quais as cartas compõem os eventos:

a. Seleciona-se o rei de copas (coração).
b. Seleciona-se um rei.
c. Seleciona-se uma carta de copas (coração).
d. Seleciona-se uma carta de figura.

# Exercício - Bussab & Morettin (2013, p. 108)

Ref.:BG1Z

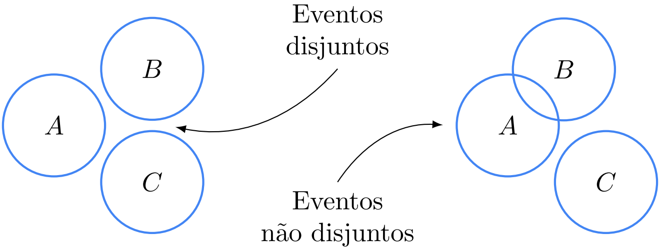
Qual é o espaço amostral e a variável de interesse nos seguintes experimentos? Quais são experimentos aleatórios?

1. Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.
2. Jogamos um dado e observamos a face que ficou virada para cima.
3. Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.
4. Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.
5. Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.
6. Colocamos 1 litro de água no fogo e medimos a sua temperatura depois de 20 minutos.
7. Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Eventos disjuntos e complementares

Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são disjuntos (mutuamente excludentes) se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para quaisquer $i$ e $j$ distintos.




Dois eventos $A$ e $B$ no espaço amostral $\Omega$ são complementares se:

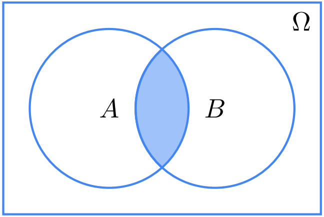
1. $A \cap B = \emptyset$
2. $A \cup B = \Omega$

O complementar de $A$ será denotado por $\overline{A}$.

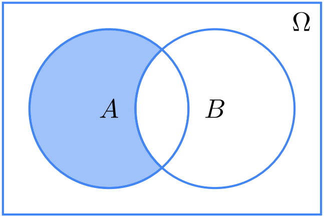
# Operações entre eventos

Sejam $A$ e $B$ eventos em um mesmo espaço amostral $\Omega$. Definimos as seguintes operações entre os eventos $A$ e $B$:

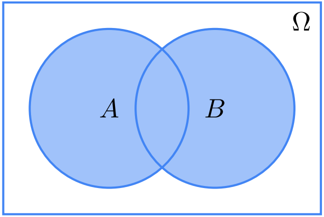
Interseção: $A \cap B$



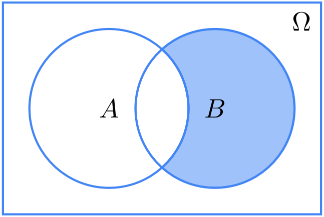

Diferença: $A - B = A \cap \overline{B}$




União: $A \cup B$




Diferença: $B - A = B \cap \overline{A}$



# Exercício - Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Ref.:HZ9W

Sendo $A$ e $B$ eventos de um mesmo espaço amostral, "traduza" para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:

1. Pelo menos um dos eventos ocorre.
2. O evento $A$ ocorre mas $B$ não.
3. Nenhum deles ocorre.
4. Exatamente um dos eventos ocorre.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercício

## Ref.:BGC1

No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

- *A* Seleciona-se o rei de copas.
- *B* Seleciona-se um rei.
- *C* Seleciona-se uma carta de copas.
- *D* Seleciona-se uma carta de figura.

Determine adequadamente os eventos:

a. $A \cap B$
b. $A \cup B$
c. $A - B$
d. $B - A$
e. $\bar{D}$
f. $B \cap C$
g. $B \cup C$
h. $C \cap D$

# Exercício

## Ref.:NGT5

No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

- $A$ seleciona-se uma carta de copas;
- $B$ seleciona-se uma figura;
- $C$ seleciona-se um Ás;
- $D$ seleciona-se um oito;
- $E$ seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

- a $C$ e $D$;
- b $D$, $E$ e $A$;
- c $C$ e $E$;
- d $D$, $E$, $A$ e $B$;
- e $D$ e $E$

# Definição frequentista de probabilidade

Considere o número limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Seja $n_A$ o número de ocorrências do evento $A$ em $n$ repetições independentes do experimento em questão. Então:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}.$$

**Lembre-se!!!**

Probabilidade não existe!!!

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Definição clássica de probabilidade

Seja um espaço amostral $\Omega$ composto por um número finito de eventos elementares equiprováveis:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

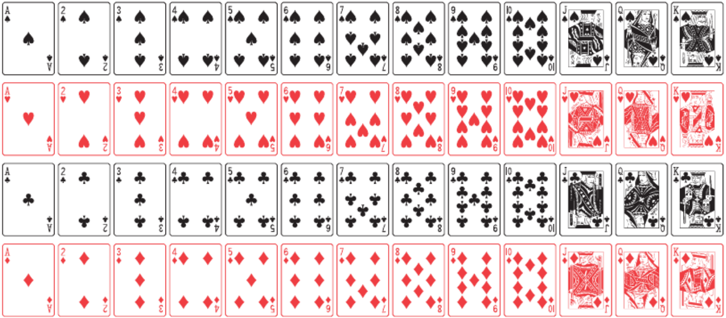
A probabilidade de ocorrência do evento $A \subset \Omega$ é dada por:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}},$$

onde $n(A)$ é o número de eventos elementares contidos em $A$ e $n(\Omega)$ é o número de eventos elementares no espaço amostral. O caso onde o espaço amostral possui um número infinito de elementos (enumerável ou não) não será foco desse curso introdutório.

# Exercícios

Ref.:BN6G



1. Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de:
   a. Obter exatamente 2 caras?
   b. Obter pelo menos 2 caras?
2. Seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum. Qual a probabilidade de que:
   a. A carta seja um ás e seja vermelha?
   b. A carta seja um ás ou seja vermelha?

INSTITUTO FEDERAL Goiás

# Exercícios
Ref.:KZ4C

1. Suponhamos que eu lance simultaneamente um tetraedro (dado de quatro faces) e uma moeda. Qual é a probabilidade de ocorrer uma face par no tetraedro e sair coroa na moeda?
2. Dois dados de cores diferentes são jogados simultaneamente.
   a. Qual a probabilidade de que a soma deles seja maior que sete?
   b. Qual a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual à três?
3. De um grupo de $n$ objetos escolhemos $r$ ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de não sortearmos objetos repetidos?

INSTITUTO FEDERAL Goiás

# Exercícios

## Ref.:BG5R

1. Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos 1 cara e 1 coroa?
2. Uma urna contém 10 bolas identificadas como $B_1 \ldots B_{10}$. Qual a probabilidade de que a bola sorteada tenha índice par? E do índice ser primo?
3. Numa classe de 55 alunos, 21 praticam vôlei e basquete, 39 praticam vôlei e 33 praticam basquete. Um aluno da classe é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de o aluno escolhido praticar um e somente um desses esportes?
4. Cinco homens e cinco mulheres estão dispostas em fila indiana. Qual a probabilidade de que:
   a. A primeira pessoa da fila seja homem?
   b. A primeira e a última pessoas da fila sejam homens?
5. Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

# Função de probabilidade - axiomas da probabilidade

Uma função $\mathbb{P}(\cdot)$, com domínio no espaço amostral $\Omega$, é denominada probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Consequências:

- $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$. Portanto, usando as propriedades 2 e 3, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonicidade);
- E da monotonicidade vem naturalmente que $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

INSTITUTO FEDERAL Goiás

# Regra da Adição de Probabilidades

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos de $\Omega$, então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

## Regra da Adição - Casos Particulares

Sejam $A$ e $B$ dois eventos de $\Omega$, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Sejam $A$ e $B$ e $C$ três eventos de $\Omega$, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) + \\ - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

# Exercício

Ref.:BF5Z

1. Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais?
2. Sejam $A$ e $B$ eventos em um dado espaço amostral $\Omega$, tais que $\mathbb{P}(A) = {}^{2}/_{5}$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^{4}/_{5}$. Determine $\mathbb{P}(B)$ tais que $A$ e $B$ sejam disjuntos.
3. Sejam $A$ e $B$ eventos em um dado espaço amostral $\Omega$, tais que $\mathbb{P}(A) = {}^{1}/_{5}$, $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^{1}/_{2}$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = {}^{1}/_{10}$. Determine o valor de $p$. (Magalhães & Lima, 2015, p. 53)
4. Sejam $A$ e $B$ eventos em um espaço amostral $\Omega$, onde ocorrer $B$ é três vezes mais provável que ocorrer $A$. Sabendo que $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^{4}/_{5}$ determine $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ quando:
   a. $A$ e $B$ são disjuntos
   b. $\mathbb{P}(A \cap B) = {}^{1}/_{8}$.
5. Um torneio é disputado por 4 times $A$, $B$, $C$ e $D$. É três vezes mais provável que $A$ vença do que $B$, 2 vezes mais provável que $B$ vença do que $C$ e é 3 vezes mais provável que $C$ vença do que $B$. Quais as probabilidades de cada time vencer? (Morgado et al., 1991, p. 143)
6. Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7. Resp.: ${}^{63}/_{200}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercício

## Ref.:NT53

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

| | Brasileiro | Estrangeiro | Total |
|---|---|---|---|
| Futebol | 70 | 15 | 85 |
| Vôlei | 25 | 30 | 55 |
| Queimada | 10 | 50 | 60 |
| Natação | 15 | 70 | 85 |
| Total | 120 | 165 | 285 |

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a. ser brasileira?
b. preferir futebol?
c. ser estrangeira e preferir natação?
d. ser estrangeira ou preferir queimada?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# A Regra dos Complementares

Para quaisquer eventos $A$ e $B$:

1. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Provas:

1. Note que $A$ e $\overline{A}$ são eventos disjuntos e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Aplicando a segunda e a terceira propriedades das funções de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}).$$

2. Note que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, logo $A \cap B$ e $\overline{A} \cup \overline{B}$ são complementares, logo esse resultado decorre diretamente do resultado 1.
3. Note que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, mas $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ são disjuntos, logo $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

# Exercícios
Ref.:M36Q

1. Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?
2. Dois dados são lançados independentemente. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares?
3. A probabilidade de um cavalo vencer três ou menos corridas é de 58%; a probabilidade de ele vencer três ou mais corridas é de 71%. Qual é a probabilidade do cavalo vencer exatamente três corridas?
4. Uma caixa contém nove peças das quais três são defeituosas. Sorteamos duas peças. Qual a probabilidade de não escolhermos duas peças defeituosas?

# Exercício - Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Ref.:Z3L5

Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 20 são esportistas e da biologia noturno.Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

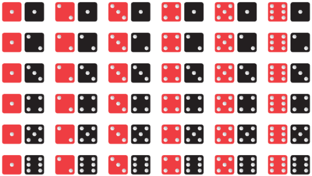
1. Ser esportista.
2. Ser esportista e aluno da biologia e noturno.
3. Não ser da biologia.
4. Ser esportista ou aluno da biologia.
5. Não ser esportista, nem aluno da biologia.

# Exercícios - Weiss (2012, p. 147)

Ref.:K3X8

Em um jogo de dados são jogados dois dados honestos de seis faces. Considere os eventos:

- A) A soma das faces é 7;
- B) A soma das faces é 11;
- C) A soma das faces é 2;
- D) A soma das faces é 3;
- E) A soma das faces é 12;
- F) A soma das faces é 8;
- G) As faces são iguais.



- a) Determine a probabilidade de todos os eventos.
- b) O jogador vence esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 7 ou 11. Calcule a probabilidade desse evento.
- c) O jogador perde esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 2, 3 ou 12. Calcule a probabilidade desse evento.
- d) Qual a probabilidade das faces serem diferentes?
- e) Qual a probabilidade da soma ser 8 ou das faces serem iguais?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercícios

Ref.:N7R2

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

| | Brasileiro | Estrangeiro | Total |
|---|---|---|---|
| Futebol | 70 | 15 | 85 |
| Vôlei | 25 | 30 | 55 |
| Queimada | 10 | 50 | 60 |
| Natação | 15 | 70 | 85 |
| Total | 120 | 165 | 285 |

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. não ser brasileira e preferir de futebol?
2. não ser estrangeira e nem preferir de vôlei?
3. não ser estrangeira ou não preferir de queimada?

# Probabilidade Condicional

Dados os eventos $A$ e $B$ a probabilidade condicional de $A$ dado $B$, $\mathbb{P}(A|B)$, é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{se } \mathbb{P}(B) > 0$$

e

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \quad \text{se } \mathbb{P}(B) = 0$$

Onde:

$\mathbb{P}(B)$ é a probabilidade à priori e

$\mathbb{P}(A|B)$ é a probabilidade à posteriori

**Regra do Produto de Probabilidades**

Dados os eventos $A$ e $B$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

| | Brasileiro | Estrangeiro | Total |
|---|---|---|---|
| Futebol | 70 | 15 | 85 |
| Vôlei | 25 | 30 | 55 |
| Queimada | 10 | 50 | 60 |
| Natação | 15 | 70 | 85 |
| Total | 120 | 165 | 285 |

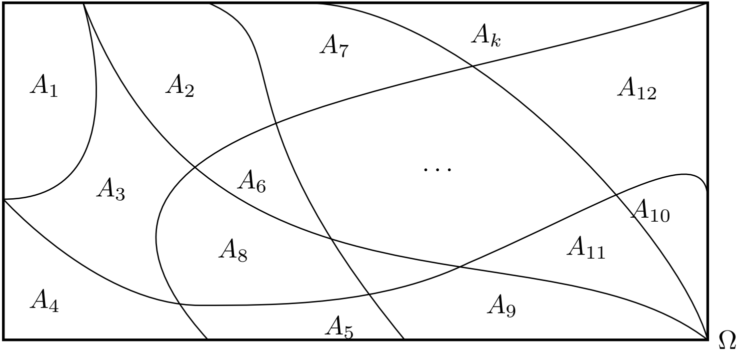
Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?
2. sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?
3. sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?

# Partição do Espaço Amostral

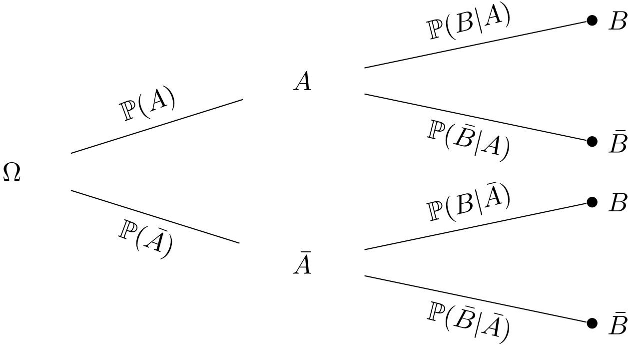
O conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ é uma partição do espaço amostral se seus elementos não têm interseção entre si e se a união de seus elementos é o espaço amostral. Isto é,

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$



# Árvore de Probabilidades

Sejam $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2 \dots A_n\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2 \dots B_m\}$ duas partições de $\Omega$. Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por um diagrama de árvores. No caso particular onde $\mathcal{P}_1 = \{A, \overline{A}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B, \overline{B}\}$, um diagrama adequado seria:



# Exercício - Morgado et al. (1991, p 161)

Ref.:BT1L

Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com $\mathbb{P}\{1\} = 1/2$ e $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Resp.: $9/10$

# Eventos Independentes

Dois eventos $A$ e $B$ são independentes se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Três eventos $A$, $B$ e $C$ são independentes se, e somente se:

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
3. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são mutuamente independentes.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercício

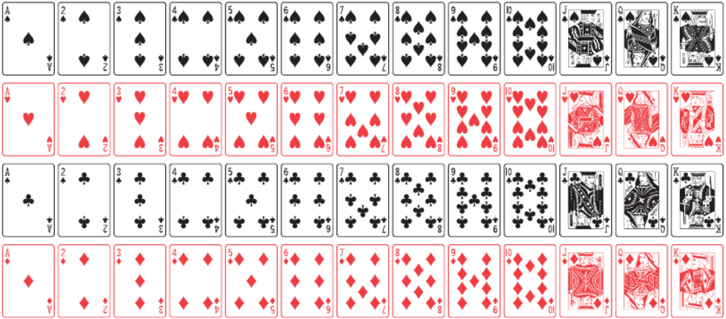
Ref.:NBF9

1. Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição?
2. Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retiramos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição?
3. Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela?
4. Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequencia amarela-verde-roxa considerando que:
   a. o sorteio é sem reposição
   b. o sorteio é com reposição

INSTITUTO FEDERAL Goiás

# Exercício - Morgado et al. (1991, p 166)

Ref.:NX4L



Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja $A$ o evento "O ás de copas está entre as treze cartas" e $B$ o evento "As treze cartas são do mesmo naipe". Verifique se $A$ e $B$ são independentes.

Resp.: Os eventos $A$ e $B$ são independentes.

# Exercício
Ref.:MZ2O

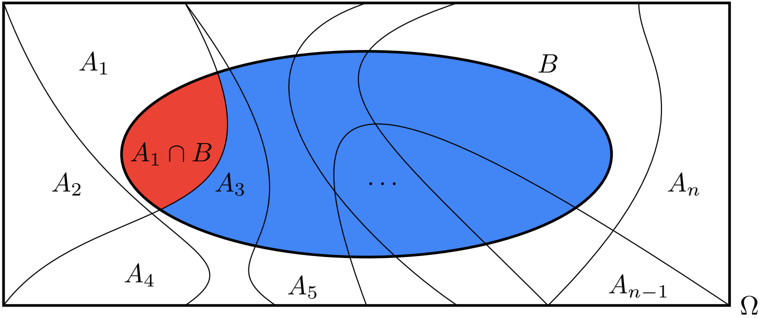
1. (Morgado et al., 1991, p 169) Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros $A$ e $B$. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de $A$ e de $B$ são $1/3$ e $2/3$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador ABA ou BAB? Resp.: Surpreendentemente é a sequência ABA!!!
2. (Morgado et al., 1991, p 157) Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:
   a. escolhermos aleatoriamente as sete respostas;
   b. escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas "verdadeiro" do que "falso".
3. (Morgado et al., 1991, p 162) Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $8/10$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $9/10$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $9/10$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito? Resp.: $25/44$

# Teorema da Probabilidade Total

Seja $B$ um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ em um espaço amostral $\Omega$ tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \dots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

Para demonstrarmos esse resultado note $B$ pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em $\Omega$ da seguinte forma:




$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

Portando o teorema da probabilidade total está demonstrado:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

# Exercícios - Teorema da Probabilidade Total I

1. Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida? Resp.: 0,325
2. (Ross, 2010, p. 66) Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano.
   a. Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano? Resp.: 0,26
   b. Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade de que o indivíduo tenha sofrido seu primeiro acidente? Resp.: 0,46

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercícios - Teorema da Probabilidade Total II

3. Três candidatos: João, Maria e Pedro, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição? Resp.: 0,71
4. (Magalhães & Lima, 2015, p. 58) Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda $F_1$, 30% de uma fazenda $F_2$ e 50% de $F_3$. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por $F_1$ estava adulterado por adição de água, enquanto que para $F_2$ e $F_3$, essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado?
   Resp.:

INSTITUTO FEDERAL Goiás

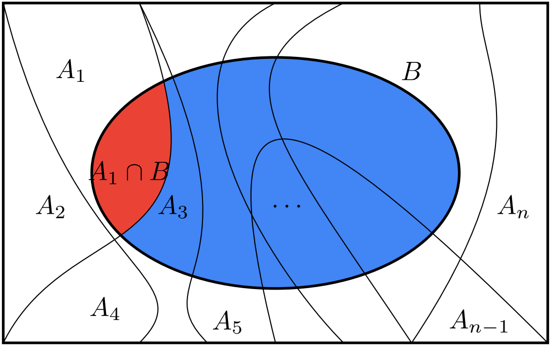
# Teorema de Bayes

Se $B$ é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e $\mathbb{P}(A_1) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então, para $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i|B) &= \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)} \end{aligned}$$



# Exercícios - Teorema de Bayes I

1. (Morgado et al., 1991, p 159) Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:

    a. Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido? R.: $0,32$.
    b. Qual a probabilidade do pênalti ser convertido? R.: $0,46$.
    c. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense? R.: $0,88$.

2. Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A chance de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A chance de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico? R.: $^2/_3$

# Exercícios - Teorema de Bayes II

3. (Morgado et al., 1991, p. 164) Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $4/10$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $6/10$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $4/10$.
   a. Qual a probabilidade da equipe ganhar? R.: 0,48
   b. Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia? R.: $1/2$
4. (Morgado et al., 1991, p. 165) Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $1/3$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame.
   a. Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular? R.: $8/15$
   b. Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.: 0,44

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

5. Três urnas $I$, $II$ e $III$ contém respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna e escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna $I$? R.: $5/24$
6. (Ross, 2010, p. 102) Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:
   a. A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro? R.: 0,0792
   b. A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato. R.: 0,264
7. Duas máquinas $A$ e $B$ produzem 3 mil peças em um dia. A máquina $A$ produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina $B$ produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina $A$? R.: $3/5$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

8. Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta? R.: $^4/_7$
9. Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo $A$ e dez amostras de solo tipo $B$. Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.
   a. Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo $B$ que são selecionadas e quais suas probabilidades. R.: $X \in \{5, \ldots, 10\}$
   b. Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo $A$ ou todas as dez amostras do tipo $B$? R.: 0,0326
   c. Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo $B$ selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média? R.: 0,6966
10. Dentre os estudantes João, Pedro e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas. qual a probabilidade de:
    a. Manuel nunca ser escolhido?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercícios - Teorema de Bayes V

   b. Um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?

11. (Bussab & Morettin, 2013, p. 128) Os colégios $A$, $B$ e $C$ têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se o resultado for $RRRMMMMM$ ($R$ para rapaz e $M$ para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio $C$?
12. Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.
13. (Bussab & Morettin, 2013, p. 126) Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Exercícios - Teorema de Bayes VI

14. (Ross, 2010, p. 67) Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha $n$ alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é $p$. Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente? R.: $\dfrac{np}{1+(n-1)p}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

# Problema de Monty Hall - Selvin et al. (1975)


Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas, $P_1$, $P_2$ e $P_3$: atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe $P_1$, mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta $P_3$ e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

# Problema do Aniversário - Mckinney (1966)

Considere $k$ pessoas numa sala.

1. Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
2. A partir de qual valor de $k$ essa probabilidade é maior que 0,5?

# Referências

# Referências I


Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.

Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.

Mckinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly 73*(4), 385–387.

Morgado, A. C., J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, & P. Fernandez (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade* (9 ed.). Coleção do Professor de Matemática. SBM.

Ross, S. M. (2010). *A First Course in Probability* (8 ed.). New York: Pearson Hall.

Selvin, S., M. Bloxham, A. I. Khuri, M. Moore, R. Coleman, G. R. Bryce, J. A. Hagans, T. C. Chalmers, E. A. Maxwell, & G. N. Smith (1975). Letters to the editor. *The American Statistician 29*(1), 67–71.

Weiss, N. A. (2012). *Introdutory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.


INSTITUTO FEDERAL Goiás