Teorema 2 (Propriedades operacionais dos eventos)

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

a) $\overline{\varnothing} = \Omega$

b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

c) $A \cap \Omega = A$

d) $A \cup \varnothing = A$

e) $A \cup \Omega = \Omega$

f) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

g) $A \cup \overline{A} = \Omega$

h) $A - B = A \cap \overline{B}$

i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

j) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

k) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

l) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.2 Definições de probabilidade

A probabilidade não é uma grandeza física mensurável, ou seja, não existe um instrumento capaz de "medir" a probabilidade de ocorrência de um evento. Por isso temos várias formas de definir probabilidade, cada uma com um conceito diferente sobre como podemos "medir" a probabilidade de um evento ocorrer. Em geral a percepção da probabilidade de ocorrência de um evento está associada ao conhecimento que temos do experimento (aleatório) no que o evento está inserido. Lembre-se, probabilidade não existe!!!

A primeira definição que estudaremos baseia-se no princípio de que podemos obter a probabilidade de ocorrência de um evento A repetindo-se o experimento um número "infinito" sempre em iguais condições.

Definição 14 (Definição frequentista de probabilidade)

A probabilidade do evento A é dada por

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n},$$

onde n_A o número de ocorrências do evento A em n repetições independentes do experimento em questão

Como visto na definição 14 o princípio frequentista estabelece que a probabilidade $\mathbb{P}(A)$ seria a *proporção limite* de ocorrência do evento A.

Definição 15 (*Definição clássica de probabilidade* (DCP))

Seja um espaço amostral Ω composto por um número *finito* de eventos elementares *equiprováveis*:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

A probabilidade de ocorrência do evento $A \subset \Omega$ é dada por:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde $n(A)$ é o número de eventos elementares contidos em A e $n(\Omega)$ é o número de eventos elementares no espaço amostral.

Em caso de um número *infinito enumerável* de eventos usamos limites para obter essa probabilidade e no caso de um espaço amostral composto por um número *infinito não enumerável* de eventos elementares será preciso associar o cálculo das probabilidades à medidas de intervalos, áreas e volumes. Nesse caso teremos a chamada *probabilidade geométrica.*

Teorema 3 (Princípio da Inclusão e Exclusão)

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de Ω, então:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{i<j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} n\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

É interessante enunciar alguns casos particulares do princípio. Sejam A e B dois eventos de Ω, então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Sejam A e B e C três eventos de Ω, então:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Exercício 6: Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de:

a) Obter exatamente 2 caras?

b) Obter pelo menos 2 caras?

Exercício 7: Seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum. Qual a probabilidade de que:

a) A carta seja um ás e seja vermelha?

b) A carta seja um ás ou seja vermelha?

Exercício 8: Suponhamos que eu lance simultaneamente um tetraedro (dado de quatro faces) e uma moeda. Qual é a probabilidade de ocorrer uma face par no tetraedro e sair coroa na moeda?

Exercício 9: Dois dados de cores diferentes são jogados simultaneamente.

a) Qual a probabilidade de que a soma deles seja maior que sete?

b) Qual a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual à três?

Exercício 10: De um grupo de n objetos escolhemos r ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de não sortearmos objetos repetidos?

Exercício 11: Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos 1 cara e 1 coroa?

Exercício 12: Uma urna contém 10 bolas identificadas como $B_1 \dots B_{10}$. Qual a probabilidade de que a bola sorteada tenha índice par? E qual a probabilidade do índice ser primo?

Exercício 13: Numa classe de 55 alunos, 21 praticam vôlei e basquete, 39 praticam vôlei e 33 praticam basquete. Um aluno da classe é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de o aluno escolhido praticar um e somente um desses esportes?

Exercício 14: Cinco homens e cinco mulheres estão dispostas em fila indiana. Qual a probabilidade de que:

a) A primeira pessoa da fila seja homem?

b) A primeira e a última pessoas da fila sejam homens?

Exercício 15: Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Definição 16 (Definição axiomática de probabilidade)

Uma função $\mathbb{P}(\cdot)$, com domínio no espaço amostral Ω, é denominada probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

i) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega$;

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

iii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, com $A_i \cap A_j = \varnothing$ sempre que $i \neq j$.

Algumas consequências dessa definição são:

- $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$. Portanto, usando as propriedades ii e iii, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonicidade);
- E da monotonicidade vem naturalmente que $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Teorema 4 (Regra da Adição de Probabilidades)

Sejam $A_1, \dots, A_n$ eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Sejam A e B dois eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Tabela 1.1: Preferências esportivas de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros

Sejam A e B e C três eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Exercício 16: Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais?

Exercício 17: Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = 2/5$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$. Determine $\mathbb{P}(B)$ tais que A e B sejam disjuntos.

Exercício 18: (Magalhães & Lima, 2015, p. 53). Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = 1/5$, $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/10$. Determine o valor de p.

Exercício 19: Sejam A e B eventos em um espaço amostral Ω, onde ocorrer B é três vezes mais provável que ocorrer A. Sabendo que $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$ determine $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ quando:

a) A e B são disjuntos

b) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.

Exercício 20: Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais?

Exercício 21: (Morgado et al., 1991, p. 143). Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É três vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que B. Quais as probabilidades de cada time vencer?

Exercício 22: Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7.

Exercício 23: Considere os dados da section 1.2. Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a) ser brasileira?

b) preferir futebol?

c) ser estrangeira e preferir natação?

d) ser estrangeira ou preferir queimada?

1.2.1 Chance e probabilidade

Existe uma confusão muito grande entre os conceitos de *chance* e *probabilidade*, o senso comum trata esses dois conceitos como sinônimos, mas não o são. O conceito de chance de um evento A ocorrer remete à razão do número de eventos elementares contidos em A sobre o total de eventos elementares não contidos em A, fica implícito aqui que todos os eventos elementares contidos no espaço amostral composto por A são *equiprováveis*. Por exemplo, ao lançarmos um dado honesto a chance de ocorrer a face ⚂ é de 1 para 5, ou seja, para evento onde ocorre o evento de A temos 5 eventos onde A não ocorre. A seguir apresentamos uma definição formal do conceito de chance.

Definição 17 (Chance de um evento)

A chance de um evento A qualquer ocorrer é definida como:

$$r(A) = \frac{n(A)}{n(\overline{A})}.$$

Teorema 5

A chance de um evento A qualquer ocorrer pode ser representada como:

$$r(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

A demonstração do teorema 5 é bastante simples e ficará a cargo do leitor como sugerido no exercício 24.

Exercício 24: Verifique o resultado apresentado no teorema 5.

Exercício 25: Considere um evento A tal que $\mathbb{P}(A) = 0.3$. Qual é a chance de A ocorrer?

Exercício 26: Considere um evento A tal que a sua chance de ocorrer é de 3 para 1. Qual é a probabilidade de A?

1.3 A Regra dos Complementares

Teorema 6 (A Regra dos Complementares)

Para quaisquer eventos A e B:

i) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$

ii) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$

iii) $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Demonstração. Para quaisquer eventos A e B:

1. Note que A e $\overline{A}$ são eventos disjuntos e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Aplicando a segunda e a terceira propriedades das funções de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}).$$