Curso de Estatística e Probabilidade

DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

Data da Atualização: 27 de abril de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso de Probabilidade e Estatística no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Espaços Amostrais e Eventos

Variável de interesse

É a variável observada em um experimento.

Experimento aleatório

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) não pode ser previsto.

Um experimento aleatório é também dito não determinístico.

Experimento determinístico

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) pode ser previsto.

Em um experimento é comum considerar mais de uma variável de interesse e, portanto um mesmo experimento pode ser aleatório ou não dependendo da variável de interesse observada.

Espaço Amostral

É o conjunto de *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. O espaço amostral é dito *enumerável* quando existir uma bijeção entre ele e os números naturais. Se tal bijeção não existir diremos que o espaço amostral é *não enumerável*.

Espaço Amostral Discreto Consiste em um conjunto finito ou infinito enumerável de resultados.

Espaço Amostral Contínuo Contém um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais.

O espaço amostral será denotado por Ω.

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Considere um experimento em que você seleciona uma câmera de um telefone celular e registra o tempo de recarga de um *flash* (o tempo necessário para aprontar a câmera para outro *flash*). Os valores possíveis para esse tempo dependem da resolução do temporizador e dos tempos máximo e mínimo de recarga. Há várias formas de definir o espaço amostral desse experimento:

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga, podemos definir:

$$\Omega = \mathbb{R}^{+} = \{t | t > 0\}$$

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga e soubermos que ele sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\Omega = \{t | 1,5 < t < 5\}$$

Se o objetivo de estudo consiste em verificar se o tempo é *baixo*, *médio* ou *alto*, então:

$$\Omega = \{baixo, médio, alto\}$$

Se o objetivo é verificar se a câmera satisfaz os requisitos mínimos de tempo de recarga então:

$$\Omega = \{sim, não\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 15) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Evento

São os subconjuntos do espaço amostral Ω.

Evento Nulo

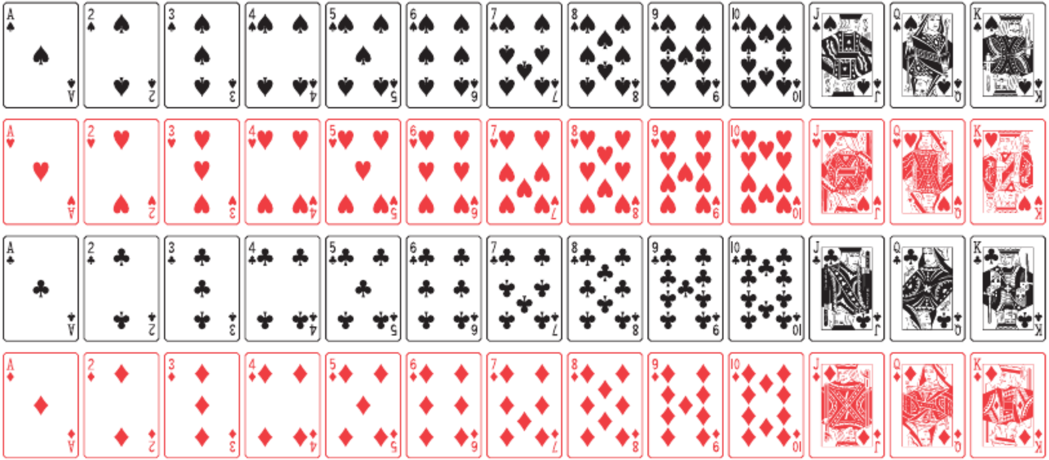
É o evento associado a todo *subconjunto vazio* do espaço amostral Ω.

Produto Cartesiano

Sejam dois eventos A e B, o *produto cartesiano* $A \times B$ será o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence à A e o segundo pertence à B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

O baralho inglês possui um total de 4 naipes que podem ser descritos pelo conjunto:

$$\mathcal{N} = \{\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}.$$

Cada um dos naipes em $\mathcal{N}$ o baralho inglês possui 13 elementos que podem ser descritos como:

$$\mathcal{E} = \{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}.$$

Assim o baralho inglês possui um total de 52 cartas que podem ser descritas como:

$$\mathcal{C} = \mathcal{E} \times \mathcal{N} = \{(A, \spadesuit), (K, \spadesuit), \ldots, (3, \heartsuit), (3, \heartsuit)\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas.

Se não temos qualquer conhecimento sobre o mecanismo de funcionamento de uma câmera fotográfica podemos definir:

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 > 0, t_2 > 0\}\end{aligned}$$

Se soubermos que o tempo de recarga de cada lâmpada sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{t_1 | 1,5 < t_1 < 5\} \\ \Omega_2 &= \{t_2 | 1,5 < t_2 < 5\} \\ \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 \in \Omega_1, t_2 \in \Omega_2\}\end{aligned}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar se as câmeras atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso reaproveitando os espaços amostrais anteriores

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{sim, não\} \\
\Omega_2 &= \{sim, não\} \\
\Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\
&= \{(não, não), (sim, não), (não, sim), (sim, sim)\}
\end{aligned}
$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar o número de câmeras que atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso o espaço amostral será simplesmente

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Estamos interessados em estudar a quantidade de disparos do flash até que a câmera pare de estar dentro das especificações mínimas de qualidade.

$$\Omega = \mathbb{Z}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 1

Considere o experimento de sortear uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Quais as cartas compõem os seguintes eventos?

a. Seleciona-se o rei de copas.
b. Seleciona-se um rei.
c. Seleciona-se uma carta de copas.
d. Seleciona-se uma carta de figura.

Fonte: Weiss (2012, p. 153) (Adaptado).

Exercício

Semana 1 - Exercício 2

Considere os experimentos descritos abaixo. Defina um objetivo para cada um deles. Defina um espaço amostral e uma variável de interesse considerando o objetivo proposto. A variável de interesse é contínua ou discreta? Quais são experimentos aleatórios?

a. Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.
b. Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.
c. Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.
d. Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.
e. Colocamos um litro de água no fogo e medimos a sua temperatura após vinte minutos.
f. Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.
g. Olho pela janela do meu quarto e conto a quantidade de carros que passam na rua pela próxima hora.

Fonte: Bussab & Morettin (2013, p. 108) (Adaptado).

Exercício

Semana 1 - Exercício 3

Para cada um dos experimentos abaixo, defina um objetivo, apresente um espaço amostral adequado e conte seus eventos elementares.

a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.

b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.

c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.

d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.

e) Em uma cidade, famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.

f) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.

g) Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

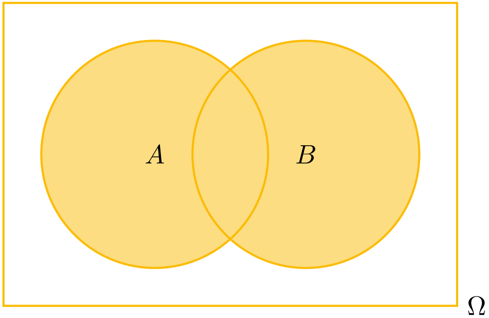
Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 52) (Adaptado).

União de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cup B$ denota a *união* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência de ao menos um deles. Em notação de conjuntos:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

A operação de união também é chamada de reunião



Comutatividade da união de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in B \vee \omega \in A\} && \text{Comutatividade do operador lógico } \vee \\ &= B \cup A && \text{união de eventos} \end{aligned}$$

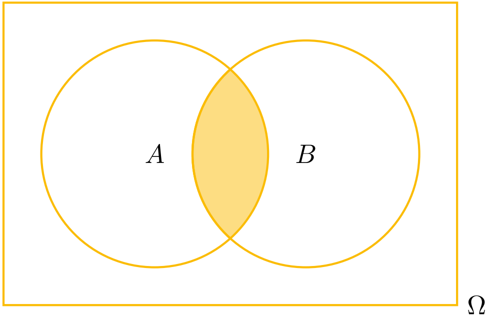
E assim fica justificada a comutatividade da união.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Interseção de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cap B$ denota a *interseção* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência simultânea desses eventos. Em notação de conjuntos:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$



Comutatividade da interseção de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap B = B \cap A.$$

A demonstração é análoga ao que já fizemos para a união de eventos.

Distributividade da união relativa a interseção

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$(\implies)$ Vamos mostrar primeiramente que:

$$\omega \in A \cup (B \cap C) \implies \omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1}$$

Assuma que $\omega \in A \cup (B \cap C)$, deste modo há dois casos a considerar:

- i Se $\omega \in A$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, portanto, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- ii Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B \cap C$ e, consequentemente, $\omega \in B$ e $\omega \in C$, e desses dois fatos concluímos que $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, finalmente, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dessa forma, a condição (1) está provada.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

($\Longleftarrow$) Agora vamos provar a recíproca:

$$\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies \omega \in A \cup (B \cap C). \tag{2}$$

Seja $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$. Novamente, temos dois casos à considerar:

- ❶ Se $\omega \in A$, então é fácil ver que $\omega \in A \cup (B \cap C)$.
- ❷ Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B$ e $\omega \in C$, consequentemente, $\omega \in B \cap C$ e, finalmente, $\omega \in A \cup (B \cap C)$.

Mostra-se aqui a condição (2). E assim fica justificada a comutatividade da união. A prova é semelhante para o caso da comutatividade da interseção.

Distributividade da interseção relativa à união

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

A demonstração desse resultado é análoga ao que fizemos para a distributividade da união relativa a interseção.

Eventos elementares

São os *elementos* do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de Ω.

Cardinal de um conjunto

Seja um evento A. O cardinal de A é número de eventos elementares de A.

Cardinal do produto

Sejam os conjuntos A e B. O cardinal do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto dos cardinais dos conjuntos individuais:

$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

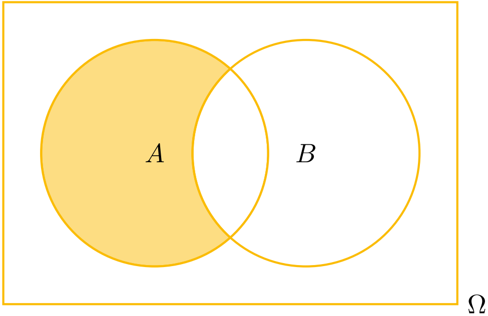
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Diferença de eventos

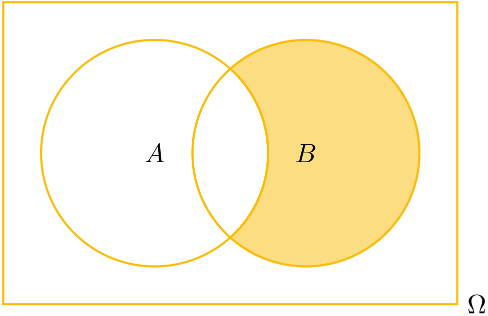
Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A - B$ denota a *diferença* do evento A em relação ao evento B, ou seja, a ocorrência exclusiva de A. Em notação de conjuntos:

$$A - B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

$A - B = A \cap \overline{B}$



$B - A = B \cap \overline{A}$

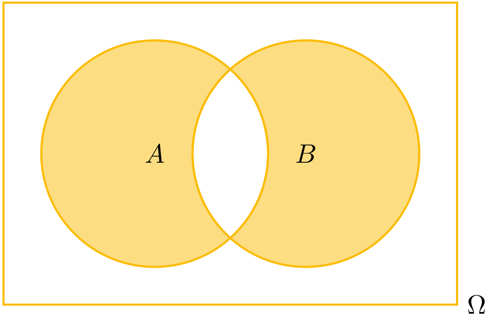


INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Diferença simétrica

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \Delta B$ denota a *diferença simétrica* entre os eventos A e B, ou seja, a ocorrência exclusiva de ao menos um dos eventos. Em notação de conjuntos:

$$A \Delta B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in (A - B) \wedge \omega \in (B - A)\}.$$

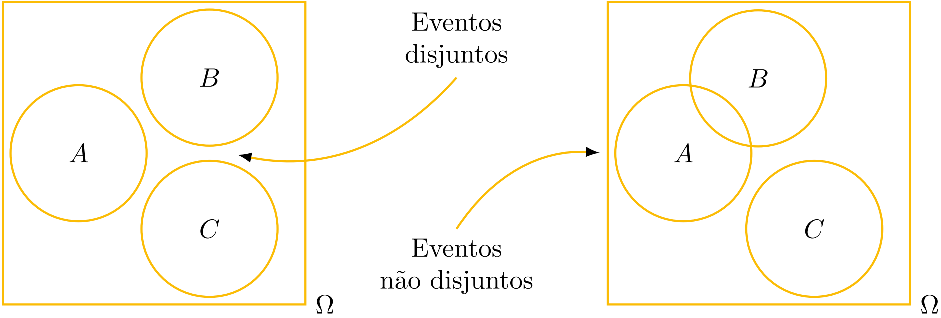


Eventos Disjuntos

Os eventos $A_1, \dots, A_n$ são disjuntos (mutuamente excludentes) se

$$A_i \cap A_j = \varnothing$$

para quaisquer i e j distintos.



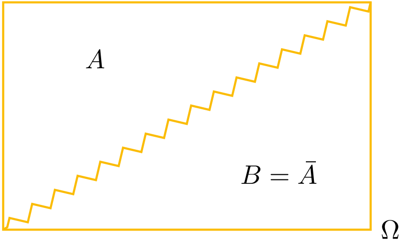
Eventos Complementares

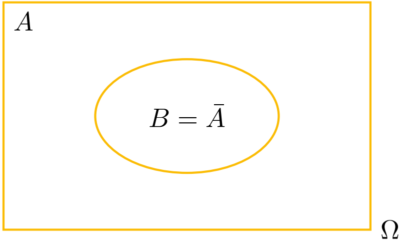
Dois eventos A e B no espaço amostral Ω são complementares se:

1. $A \cap B = \varnothing$
2. $A \cup B = \Omega$

O complementar de A será denotado por $\bar{A}$.

As notações para o evento complementar de A costumam variar entre $\bar{A}$, A' e A^c.





Outras propriedades operacionais dos eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

1. $\overline{\varnothing} = \Omega$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cap \Omega = A$
4. $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cup \Omega = \Omega$
6. $A \cap \bar{A} = \varnothing$
7. $A \cup \bar{A} = \Omega$
8. $A - B = A \cap \bar{B}$
9. $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Leis de Morgan

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

e

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercício

Semana 1 - Exercício 4

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, “traduza” para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:

1. Pelo menos um dos eventos ocorre.
2. O evento A ocorre mas B não.
3. Nenhum deles ocorre.
4. Exatamente um dos eventos ocorre.

Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 53)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 1 - Exercício 5**

No experimento de sortear aleatoriamente uma carta de um baralho, considere os eventos:

- (A) Seleciona-se o rei de copas.
- (B) Seleciona-se um rei.
- (C) Seleciona-se uma carta de copas.
- (D) Seleciona-se uma carta de figura.

Determine adequadamente os eventos:

- (a) $A \cap B$
- (b) $A \cup B$
- (c) $A - B$
- (d) $B - A$
- (e) $\bar{D}$
- (f) $B \cap C$
- (g) $B \cup C$
- (h) $C \cap D$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 6

No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

- A) seleciona-se uma carta de copas;
- B) seleciona-se uma figura;
- C) seleciona-se um Ás;
- D) seleciona-se um oito;
- E) seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

- a) C e D;
- b) D, E e A;
- c) C e E;
- d) D, E, A e B;
- e) D e E

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Técnicas de Contagem

Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Suponhamos que uma ação seja constituída de k etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n_1 maneiras distintas. A 2ª etapa pode ser realizada de n_2 maneiras distintas para cada uma das n_1 maneiras de completar a 1ª etapa. A k-ésima etapa pode ser realizada de n_k maneiras distintas para cada uma das n_{k-1} maneiras de completar a $(k-1)$-ésima etapa . Então o número de maneiras de se efetuar a ação completa é $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Projeto de um site da internet

O projeto de um site na internet consiste em quatro cores, três fontes e três posições para uma imagem. Quantos projetos diferentes são possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Pelo PFC o número de projetos diferentes será

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

Ou seja 36 projetos.

Fatorial de um número natural

Dado um número natural n, $n \geq 2$, o fatorial de n (denota-se por $n!$) é o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fatoriais de alguns números:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Arranjo

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos tomados k a k, a qualquer sequência ordenada de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

Número de arranjos

Seja um conjunto com n elementos distintos. O número A_k^n de arranjos de n elementos tomados k à k é:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \geq k.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Placa de circuito impresso

Uma placa de circuito impresso tem oito localizações diferentes em que um componente pode ser colocado. Se quatro componentes diferentes forem colocados na placa, quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Cada projeto consiste em selecionar uma localização das oito localizações para o primeiro componente, uma localização das sete resultantes para o segundo componente, uma localização das seis resultantes para o terceiro componente e uma localização das cinco resultantes para o quarto componente. Portanto,

$$A_4^8 = \frac{8!}{4!} = 1680$$

Logo temos 1680 projetos diferentes possíveis.

Anagrama

Um anagrama de uma palavra é obtido quando trocamos a ordem das suas letras, sem repeti-las, de modo que se forma uma nova sequencia de letras, com ou sem sentido.

Permutação

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se permutação dos n elementos todo arranjo desses n elementos tomados n à n.

Número de permutações

Seja um conjunto com n elementos distintos, o número P_n de permutações dos n elementos é:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Anagramas da palavra AZUL

Qual é a quantidade de anagramas da palavra AZUL?

O cálculo do número de anagramas de uma palavra (que não tenha letras repetidas) pode ser entendido como um problema de cálculo do número de permutações dos elementos de um conjunto. Note que a palavra azul pode ser interpretada como um conjunto de quatro letras. Desse modo o número total de anagrama será

$$P_4 = 4! = 24$$

Ou seja temos 24 anagramas para a palavra AZUL.

Número de permutações com elementos repetidos

O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ objetos dos quais n_1 são do tipo 1, n_2 são do tipo 2, … e n_k são do tipo k é:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Exemplo: Programação de um hospital

Um centro cirúrgico de um hospital necessita programar três cirurgias de joelho e duas cirurgias de quadris em um dia. Denominamos uma cirurgia de joelhos e de quadris como j e q, respectivamente. Qual o número de sequências possíveis das três cirurgias de joelho e das duas cirurgias de quadris?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Note que nesse caso podemos interpretar a cirurgia como um conjunto de 5 elementos (cirurgias) sendo duas de um tipo (cirurgia de joelho) e três de outro (cirurgia de quadril). Desse modo se trata de um problema de permutações com elementos repetidos.

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

É possível enumerar as sequências:

$$\{jjjqq, jjqjq, jjqqj, jqjjq, jqjqj, jqqjj, qjjjq, qjjqj, qjqjj, qqjjj\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Combinação

Uma combinação é todo subconjunto de tamanho k de um conjunto de tamanho $n \geq k$ com elementos distintos.

Número de combinações

O número C_k^n de combinações de tamanho k que podem ser selecionadas a partir de um conjunto de n elementos distintos é

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemplo: Disposição de Placa de Circuito Impresso

Um componente pode ser colocado em oito localizações diferentes em uma placa de circuito impresso. Se cinco componentes idênticos forem colocados na placa quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Cada projeto é um subconjunto de oito localizações que devem conter os componentes, portanto se trata de um problema de combinação.

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Temos ao todo 56 projetos diferentes.

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Quantas amostras diferentes existem, de tamanho seis, que contêm exatamente dois itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Um subconjunto contendo exatamente dois itens defeituosos pode ser formado escolhendo primeiro os dois itens defeituosos a partir dos três itens defeituosos. Portanto, um problema de combinação:

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Na segunda etapa sorteamos os quatro itens não defeituosos dentre os 47 não defeituosos. Novamente um problema de combinação:

$$C_4^{47} = \binom{47}{4} = \frac{47!}{4!43!} = 178365$$

Aplicando agora o TFC temos que quantidade de amostras que contém exatamente dois itens defeituosos será

$$3 \cdot 178365 = 535095$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 2 - Exercício 1**

Quantos múltiplos de 3, compostos de 3 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 7?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

Exercício **Semana 2 - Exercício 2**

Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

Exercício **Semana 2 - Exercício 3**

Pretende-se selecionar quatro pessoas de um grupo constituído de três professores e cinco alunos, para tirar uma fotografia. Se pelo menos um dos professores deve aparecer na foto, de quantos modos poderá ser feita a seleção?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 372) (Adaptado).

Interpretações e Axiomas de Probabilidade

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Definição frequentista de probabilidade

Considere o número limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Seja n_A o número de ocorrências do evento A em n repetições independentes do experimento em questão. Então:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}.$$

Essa definição nos permite interpretar a probabilidade como frequência relativa.

Probabilidade não existe!!! A probabilidade não se trata de um grandeza física que pode ser mensurável por meio de alguma “régua” ou “balança”.

Definição clássica de probabilidade

Seja um espaço amostral Ω composto por um número finito de eventos elementares equiprováveis:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

A probabilidade de ocorrência do evento $A \subset \Omega$ é dada por:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde $n(A)$ é o número de eventos elementares contidos em A e $n(\Omega)$ é o número de eventos elementares no espaço amostral.

O caso onde o espaço amostral possui um número infinito de elementos (enumerável ou não) não será foco desse curso introdutório.

Em caso de um número infinito enumerável de eventos usamos limites para obter essa probabilidade e no caso de um espaço amostral composto por um número infinito não enumerável de eventos elementares será preciso associar o cálculo das probabilidades à medidas de intervalos, áreas e volumes.

Nesse caso teremos a chamada probabilidade geométrica que não será focada desse curso.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Diodos a laser

Considere que 30% dos diodos a *laser* em uma batelada de 100 satisfazem os requerimentos mínimos de potência de um consumidor específico. Se um diodo à *laser* for selecionado ao acaso, isto é, se cada diodo a *laser* for igualmente provável de ser selecionado, nosso sentimento intuitivo será de que a probabilidade de satisfazer os requerimentos do consumidor é 0,30. Seja E o evento em que o diodo selecionado satisfaça os requerimentos do consumidor. Então E é o subconjunto de 30 diodos que satisfaz os requerimentos do consumidor. Visto que E contém 30 resultados e cada um deles tem probabilidade igual a 0,01, concluímos que a probabilidade de E é 0,3. A conclusão coincide com a nossa intuição.

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 21) (Adaptado).

Exemplo: Lançamento de Moedas

Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de:

a. Obter exatamente 2 caras?
b. Obter pelo menos 2 caras?

Para resolver esse exercício vamos construir inicialmente os espaços amostrais. Seja $\Omega_1 = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ um espaço amostral para o lançamento de apenas uma moeda. Dessa forma no lançamento de três moedas podemos considerar o espaço amostral:

$$\begin{aligned}\Omega =&\Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1\\ =&\{(\text{cara}, \text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{cara}, \text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{cara}),\\ &(\text{coroa}, \text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{cara}, \text{coroa}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{coroa}, \text{coroa})\}\end{aligned}$$

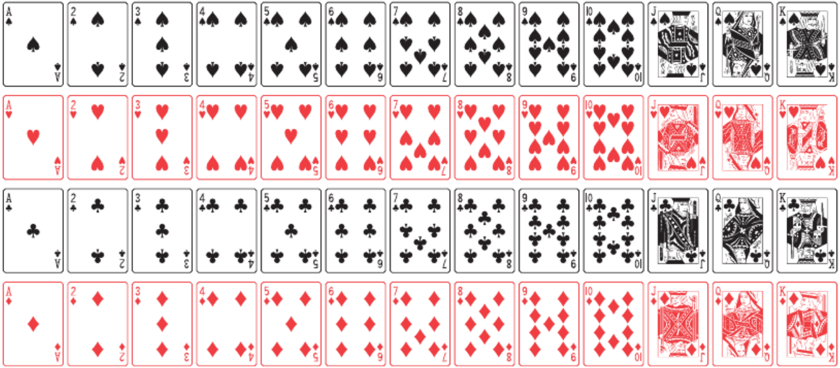
1. Considere o evento: $A =$ "Obter exatamente 2 caras?". Logo: $\mathbb{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$
2. Considere o evento: $B =$ "Obter pelo menos 2 caras?". Logo: $\mathbb{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício Ref.:BN6G

Seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum. Qual a probabilidade da carta ser:

- (a) Um ás e vermelha?
- (b) Um ás ou vermelha?



Exercício **Ref.:KZ4C**

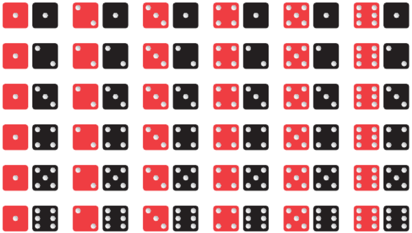
Suponhamos que eu lance simultaneamente um tetraedro (dado de quatro faces) e uma moeda. Qual é a probabilidade de ocorrer uma face par no tetraedro e sair coroa na moeda?

Exercício
Ref.:KJ56

Dois dados de cores diferentes são jogados simultaneamente.

(a) Qual a probabilidade de que a soma deles seja maior que sete?

(b) Qual a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual à três?



Exercício

Semana 2 - Exercício 4

De um grupo de n objetos escolhemos r ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de não sortearmos objetos repetidos?

Exercício **Ref.:BG5R**

Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos 1 cara e 1 coroa?

Exercício **Ref.:H5F3**

Uma urna contém 10 bolas identificadas como $B_1 \ldots B_{10}$. Qual a probabilidade de que a bola sorteada tenha índice par? E do índice ser primo?

Exercício **Semana 2 - Exercício 5**

Cinco homens e cinco mulheres estão dispostas em fila indiana. Qual a probabilidade de que:

a. A primeira pessoa da fila seja homem?

b. A primeira e a última pessoas da fila sejam homens?

Exercício

Semana 2 - Exercício 6

Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Definição axiomática de probabilidade

Uma função $\mathbb{P}(\cdot)$, com domínio no espaço amostral Ω, é denominada probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega;$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1;$
3. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Os exercícios não determinam probabilidades; as probabilidades são atribuídas de acordo com o conhecimento que temos do contexto de aplicação.

Conseguências da definição

- $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$. Portanto, usando as propriedades 2 e 3, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonicidade);
- E da monotonicidade vem naturalmente que $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Regra da Adição de Probabilidades

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Regra da Adição - Dois Eventos

Sejam A e B dois eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Regra da Adição - Três Eventos

Sejam A, B e C três eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:23JK**

Numa classe de 55 alunos, 21 praticam vôlei e basquete, 39 praticam vôlei e 33 praticam basquete. Um aluno da classe é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de o aluno escolhido praticar um e somente um desses esportes?

Exercício Ref.:BF5Z

Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais?

Exercício **Ref.:NJYG**

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = {}^2/_5$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^4/_5$. Determine $\mathbb{P}(B)$ tais que A e B sejam disjuntos.

Exercício **Ref.:N543**

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = 1/5$, $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/10$. Determine o valor de p.

Magalhães & Lima (2015, p. 53) (Adaptado)

Exercício **Ref.:N72G**

Sejam A e B eventos em um espaço amostral Ω, onde B é três vezes mais provável que A. Sabendo que $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^{4}/_{5}$ determine $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ quando:

- (a) A e B são disjuntos
- (b) $\mathbb{P}(A \cap B) = {}^{1}/_{8}$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:NB78**

Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É três vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que B. Quais as probabilidades de cada time vencer?

Morgado et al. (1991, p. 143) (Adaptado)

Exercício **Ref.:N65I**

Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7. Resp.: $^{63}/_{200}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ref.:NT53

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a) ser brasileira?

b) preferir futebol?

c) ser estrangeira e preferir natação?

d) ser estrangeira ou preferir queimada?

A Regra dos Complementares

Para quaisquer eventos A e B:

1. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Provas:

1. Note que A e $\overline{A}$ são eventos disjuntos e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Aplicando a segunda e a terceira propriedades das funções de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}).$$

2. Note que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, logo $A \cap B$ e $\overline{A} \cup \overline{B}$ são complementares, logo esse resultado decorre diretamente do resultado 1.
3. Note que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, mas $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ são disjuntos, logo $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

Exemplo: Probabilidade de Eventos

Um experimento aleatório pode resultar em um dos resultados $\{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0,1; 0,3; 0,5 e 0,1, respectivamente. Seja A o evento $\{a, b\}$, seja B o evento $\{a, b, c\}$ e seja C o evento $\{d\}$. Então,

$$\mathbb{P}(A) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$
$$\mathbb{P}(B) = 0,3 + 0,5 + 0,1 = 0,9$$
$$\mathbb{P}(C) = 0,1$$

Além disso:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,6$$
$$\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,1$$
$$\mathbb{P}(\bar{C}) = 0,9$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Existe uma confusão muito grande entre os conceitos de *chance* e *probabilidade*, o senso comum trata esses dois conceitos como sinônimos, mas não o são.

Chance de um evento

A chance de um evento A qualquer ocorrer é definida como:

$$r(A) = \frac{n(A)}{n(\overline{A})}.$$

Relação entre Chance e Probabilidade

A chance de um evento A qualquer ocorrer pode ser representada como:

$$r(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

1. Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?
2. Dois dados são lançados independentemente. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares?
3. A probabilidade de um cavalo vencer três ou menos corridas é de 58%; a probabilidade de ele vencer três ou mais corridas é de 71%. Qual é a probabilidade do cavalo vencer exatamente três corridas?
4. Uma caixa contém nove peças das quais três são defeituosas. Sorteamos duas peças. Qual a probabilidade de não escolhermos duas peças defeituosas?

Exercício - Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Ref.:Z3L5

Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 20 são esportistas e da biologia noturno.Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

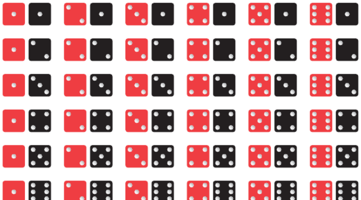
1. Ser esportista.
2. Ser esportista e aluno da biologia e noturno.
3. Não ser da biologia.
4. Ser esportista ou aluno da biologia.
5. Não ser esportista, nem aluno da biologia.

Exercícios - Weiss (2012, p. 147)

Ref.:K3X8

Em um jogo de dados são jogados dois dados honestos de seis faces. Considere os eventos:

- A A soma das faces é 7;
- B A soma das faces é 11;
- C A soma das faces é 2;
- D A soma das faces é 3;
- E A soma das faces é 12;
- F A soma das faces é 8;
- G As faces são iguais.



- a Determine a probabilidade de todos os eventos.
- b O jogador vence esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 7 ou 11. Calcule a probabilidade desse evento.
- c O jogador perde esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 2, 3 ou 12. Calcule a probabilidade desse evento.
- d Qual a probabilidade das faces serem diferentes?
- e Qual a probabilidade da soma ser 8 ou das faces serem iguais?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. não ser brasileira e preferir de futebol?
2. não ser estrangeira e nem preferir de vôlei?
3. não ser estrangeira ou não preferir de queimada?

Probabilidade Condicional

Dados os eventos A e B a probabilidade condicional de A dado B, $\mathbb{P}(A|B)$, é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{se } \mathbb{P}(B) > 0$$

e

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \quad \text{se } \mathbb{P}(B) = 0$$

Onde:

$\mathbb{P}(B)$ é a probabilidade à priori e

$\mathbb{P}(A|B)$ é a probabilidade à posteriori

Regra do Produto de Probabilidades

Dados os eventos A e B:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

Exercício

Ref.:C7L3

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

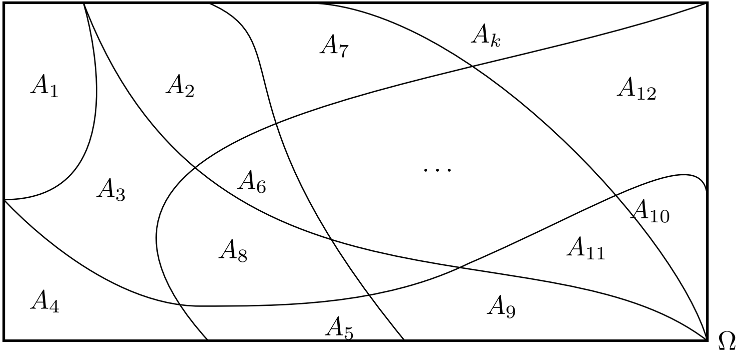
1. sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?
2. sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?
3. sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Partição do Espaço Amostral

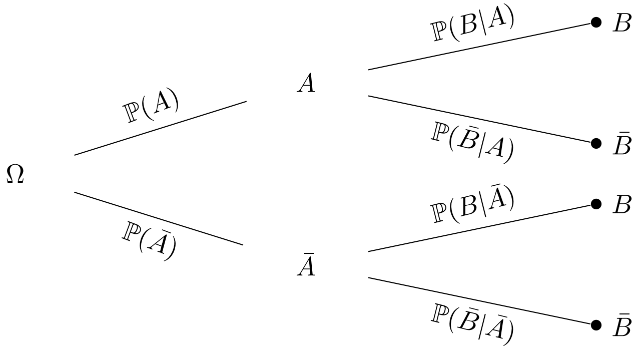
O conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ é uma partição do espaço amostral se seus elementos não têm interseção entre si e se a união de seus elementos é o espaço amostral. Isto é,

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$



Árvore de Probabilidades

Sejam $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2 \ldots B_m\}$ duas partições de Ω. Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por um diagrama de árvores. No caso particular onde $\mathcal{P}_1 = \{A, \overline{A}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B, \overline{B}\}$, um diagrama adequado seria:



Exercício - Morgado et al. (1991, p 161)

Ref.:BT1L

Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com $\mathbb{P}\{1\} = 1/2$ e $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Resp.: $9/10$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Eventos Independentes

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Três eventos A, B e C são independentes se, e somente se:

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
3. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são mutuamente independentes.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

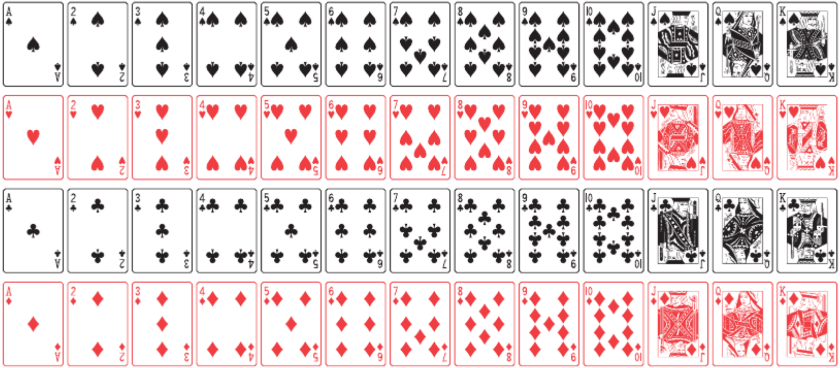
Exercício

Ref.:NBF9

1. Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição?
2. Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retiramos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição?
3. Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela?
4. Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequencia amarela-verde-roxa considerando que:
   a. o sorteio é sem reposição
   b. o sorteio é com reposição

Exercício - Morgado et al. (1991, p 166)

Ref.:NX4L



Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento “O ás de copas está entre as treze cartas” e B o evento “As treze cartas são do mesmo naipe”. Verifique se A e B são independentes.

Resp.: Os eventos A e B são independentes.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ref.:MZ20

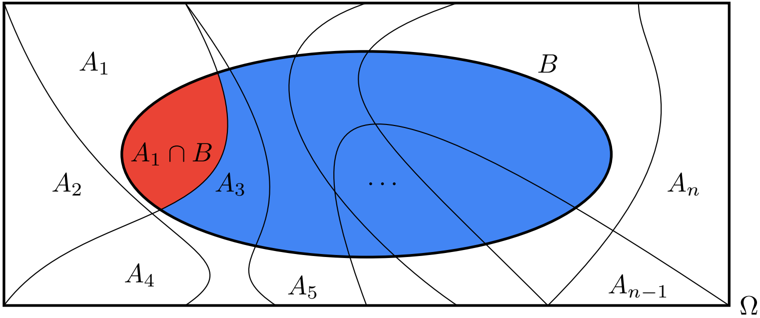
1. (Morgado et al., 1991, p 169) Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $1/3$ e $2/3$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador ABA ou BAB?
   Resp.: Surpreendentemente é a sequência ABA!!!
2. (Morgado et al., 1991, p 157) Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:
   a. escolhermos aleatoriamente as sete respostas;
   b. escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas “verdadeiro” do que “falso”.
3. (Morgado et al., 1991, p 162) Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $8/10$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $9/10$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $9/10$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?
   Resp.: $25/44$

Teorema da Probabilidade Total

Seja B um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em um espaço amostral Ω tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

Para demonstrarmos esse resultado note B pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em Ω da seguinte forma:



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

Portando o teorema da probabilidade total está demonstrado:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercícios - Teorema da Probabilidade Total I

1. Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida? Resp.: 0,325
2. (Ross, 2010, p. 66) Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano.
   - a. Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano? Resp.: 0,26
   - b. Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade de que o indivíduo tenha sofrido seu primeiro acidente? Resp.: 0,46

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercícios - Teorema da Probabilidade Total II

3. Três candidatos: João, Maria e Pedro, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição? Resp.: 0,71

4. (Magalhães & Lima, 2015, p. 58) Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma fazenda F_2 e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado?
Resp.:

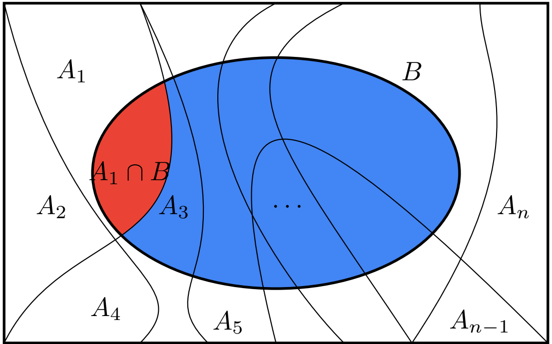
Teorema de Bayes

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e $\mathbb{P}(A_1) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então, para $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i|B) &= \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)} \end{aligned}$$



Exercícios - Teorema de Bayes I

1. (Morgado et al., 1991, p 159) Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:
   a. Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido? R.: $0,32$.
   b. Qual a probabilidade do pênalti ser convertido? R.: $0,46$.
   c. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense? R.: $0,88$.
2. Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A chance de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A chance de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico? R.: $^2/_3$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

3. (Morgado et al., 1991, p. 164) Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $4/10$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $6/10$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $4/10$.
   a. Qual a probabilidade da equipe ganhar? R.: 0,48
   b. Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia? R.: $1/2$
4. (Morgado et al., 1991, p. 165) Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $1/3$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame.
   a. Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular? R.: $8/15$
   b. Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.: 0,44
5. Três urnas I, II e III contém respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna e escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna I? R.: $5/24$

Exercícios - Teorema de Bayes III

6. (Ross, 2010, p. 102) Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:
   a. A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro? R.: 0,0792
   b. A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato. R.: 0,264
7. Duas máquinas A e B produzem 3 mil peças em um dia. A máquina A produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A? R.: $^3/_5$
8. Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta? R.: $^4/_7$

Exercícios - Teorema de Bayes IV

9. Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo A e dez amostras de solo tipo B. Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.
   a. Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo B que são selecionadas e quais suas probabilidades. R.: $X \in \{5, \ldots, 10\}$
   b. Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo A ou todas as dez amostras do tipo B? R.: 0,0326
   c. Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo B selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média? R.: 0,6966
10. Dentre os estudantes João, Pedro e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas. qual a probabilidade de:
    a. Manuel nunca ser escolhido?
    b. Um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?

Exercícios - Teorema de Bayes V

11. (Bussab & Morettin, 2013, p. 128) Os colégios A, B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se o resultado for $RRRMMMMM$ (R para rapaz e M para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C?
12. Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.
13. (Bussab & Morettin, 2013, p. 126) Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Exercícios - Teorema de Bayes VI

14. (Ross, 2010, p. 67) Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha n alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é p. Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente? R.: $\dfrac{np}{1+(n-1)p}$

Problema de Monty Hall - Selvin et al. (1975)

Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas, P_1, P_2 e P_3: atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe P_1, mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta P_3 e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

Considere k pessoas numa sala.

1. Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
2. A partir de qual valor de k essa probabilidade é maior que 0,5?

Referências

Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, & David Degenszajn ans Roberto Périgo (2002). *Matemática - Volume único* (2 ed.). Atual.

Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.

Mckinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly 73*(4), 385–387.

Montgomery, D. C. & G. C. Runger (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.

Morgado, A. C., J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, & P. Fernandez (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade* (9 ed.). Coleção do Professor de Matemática. SBM.

Ross, S. M. (2010). *A First Course in Probability* (8 ed.). New York: Pearson Hall.

Selvin, S., M. Bloxham, A. I. Khuri, M. Moore, R. Coleman, G. R. Bryce, J. A. Hagans, T. C. Chalmers, E. A. Maxwell, & G. N. Smith (1975). Letters to the editor. *The American Statistician 29*(1), 67–71.

Weiss, N. A. (2012). *Introdutory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás