Curso de Estatística e Probabilidade

DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

Data da Atualização: 20 de abril de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso de Probabilidade e Estatística no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Espaços Amostrais e Eventos

Variável de interesse

É a variável observada em um experimento.

Experimento aleatório

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) não pode ser previsto.

Um experimento aleatório é também dito não determinístico.

Experimento determinístico

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) pode ser previsto.

Em um experimento é comum considerar mais de uma variável de interesse e, portanto um mesmo experimento pode ser aleatório ou não dependendo da variável de interesse observada.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Espaço Amostral

É o conjunto de *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. O espaço amostral é dito *enumerável* quando existir uma bijeção entre ele e os números naturais. Se tal bijeção não existir diremos que o espaço amostral é *não enumerável*.

Espaço Amostral Discreto Consiste em um conjunto finito ou infinito enumerável de resultados.

Espaço Amostral Contínuo Contém um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais.

O espaço amostral será denotado por Ω.

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Considere um experimento em que você seleciona uma câmera de um telefone celular e registra o tempo de recarga de um *flash* (o tempo necessário para aprontar a câmera para outro *flash*). Os valores possíveis para esse tempo dependem da resolução do temporizador e dos tempos máximo e mínimo de recarga. Há várias formas de definir o espaço amostral desse experimento:

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga, podemos definir:

$$\Omega = \mathbb{R}^+ = \{t|t > 0\}$$

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga e soubermos que ele sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\Omega = \{t|1,5 < t < 5\}$$

Se o objetivo de estudo consiste em verificar se o tempo é *baixo*, *médio* ou *alto*, então:

$$\Omega = \{baixo, médio, alto\}$$

Se o objetivo é verificar se a câmera satisfaz os requisitos mínimos de tempo de recarga então:

$$\Omega = \{sim, não\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 15) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Evento

São os subconjuntos do espaço amostral Ω.

Evento Nulo

É o evento associado a todo *subconjunto vazio* do espaço amostral Ω.

Produto Cartesiano

Sejam dois eventos A e B, o *produto cartesiano* $A \times B$ será o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence à A e o segundo pertence à B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas.

Se não temos qualquer conhecimento sobre o mecanismo de funcionamento de uma câmera fotográfica podemos definir:

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 > 0, t_2 > 0\} \end{aligned}$$

Se soubermos que o tempo de recarga de cada lâmpada sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{t_1 | 1,5 < t_1 < 5\} \\ \Omega_2 &= \{t_2 | 1,5 < t_2 < 5\} \\ \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 \in \Omega_1, t_2 \in \Omega_2\} \end{aligned}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar se as câmeras atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso reaproveitando os espaços amostrais anteriores

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{sim, não\}\\ \Omega_2 &= \{sim, não\}\\ \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2\\ &= \{(não, não), (sim, não), (não, sim), (sim, sim)\}\end{aligned}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar o número de câmeras que atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso o espaço amostral será simplesmente

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

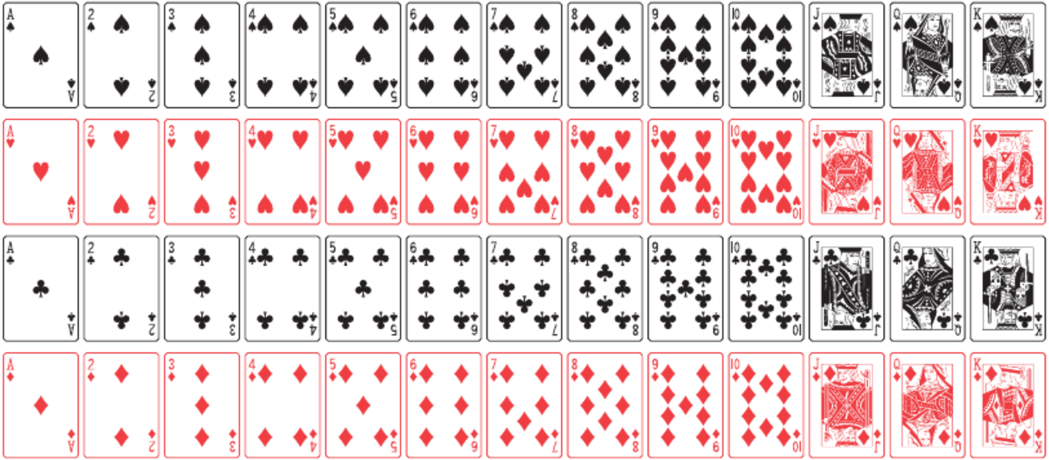
Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Estamos interessados em estudar a quantidade de disparos do flash até que a câmera pare de estar dentro das especificações mínimas de qualidade.

$$\Omega = \mathbb{Z}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).



Exercício **Semana 1 - Exercício 1**

Considere o experimento de sortear uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Quais as cartas compõem os seguintes eventos?

a) Seleciona-se o rei de copas.
b) Seleciona-se um rei.
c) Seleciona-se uma carta de copas.
d) Seleciona-se uma carta de figura.

Fonte: Weiss (2012, p. 153) (Adaptado).

Exercício

Semana 1 - Exercício 2

Considere os experimentos descritos abaixo. Defina um objetivo para cada um deles. Defina um espaço amostral e uma variável de interesse considerando o objetivo proposto. A variável de interesse é contínua ou discreta? Quais são experimentos aleatórios?

a. Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.
b. Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.
c. Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.
d. Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.
e. Colocamos um litro de água no fogo e medimos a sua temperatura após vinte minutos.
f. Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.
g. Olho pela janela do meu quarto e conto a quantidade de carros que passam na rua pela próxima hora.

Fonte: Bussab & Morettin (2013, p. 108) (Adaptado).

Exercício **Ref.:LG3L**

Para cada um dos experimentos abaixo, defina um objetivo, apresente um espaço amostral adequado e conte seus eventos elementares.

a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.

b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.

c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.

d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.

e) Em uma cidade, famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.

f) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.

g) Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

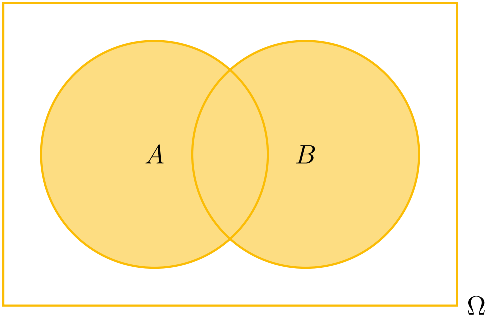
Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 52) (Adaptado).

União de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cup B$ denota a *união* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência de ao menos um deles. Em notação de conjuntos:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

A operação de união também é chamada de reunião



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Comutatividade da união de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in B \vee \omega \in A\} && \text{Comutatividade do operador lógico } \vee \\ &= B \cup A && \text{união de eventos} \end{aligned}$$

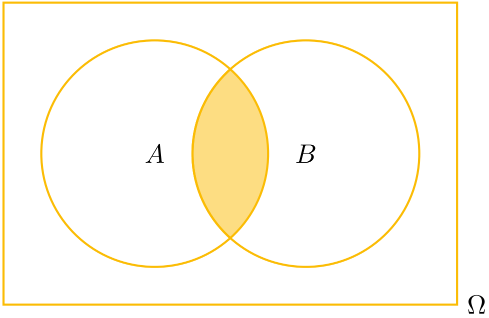
E assim fica justificada a comutatividade da união.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Interseção de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cap B$ denota a *interseção* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência simultânea desses eventos. Em notação de conjuntos:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$



Comutatividade da interseção de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap B = B \cap A.$$

A demonstração é análoga ao que já fizemos para a união de eventos.

Distributividade da união relativa a interseção

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$(\implies)$ Vamos mostrar primeiramente que:

$$\omega \in A \cup (B \cap C) \implies \omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1}$$

Assuma que $\omega \in A \cup (B \cap C)$, deste modo há dois casos a considerar:

- **i** Se $\omega \in A$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, portanto, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- **ii** Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B \cap C$ e, consequentemente, $\omega \in B$ e $\omega \in C$, e desses dois fatos concluímos que $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, finalmente, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dessa forma, a condição (1) está provada.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$(\Longleftarrow)$ Agora vamos provar a recíproca:

$$\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies \omega \in A \cup (B \cap C). \tag{2}$$

Seja $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$. Novamente, temos dois casos à considerar:

- **i** Se $\omega \in A$, então é fácil ver que $\omega \in A \cup (B \cap C)$.
- **ii** Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B$ e $\omega \in C$, consequentemente, $\omega \in B \cap C$ e, finalmente, $\omega \in A \cup (B \cap C)$.

Mostra-se aqui a condição (2). E assim fica justificada a comutatividade da união. A prova é semelhante para o caso da comutatividade da interseção.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Distributividade da interseção relativa à união

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

A demonstração desse resultado é análoga ao que fizemos para a distributividade da união relativa a interseção.

Eventos elementares

São os *elementos* do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de Ω.

Cardinal de um conjunto

Seja um evento A. O cardinal de A é número de eventos elementares de A.

Cardinal do produto

Sejam os conjuntos A e B. O cardinal do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto dos cardinais dos conjuntos individuais:

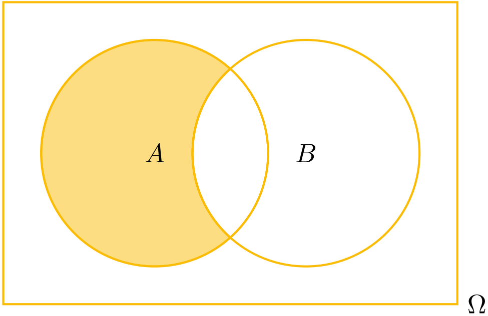
$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

Diferença de eventos

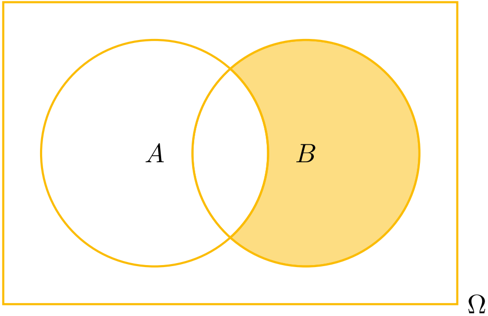
Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A - B$ denota a *diferença* do evento A em relação ao evento B, ou seja, a ocorrência exclusiva de A. Em notação de conjuntos:

$$A - B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

$A - B = A \cap \overline{B}$



$B - A = B \cap \overline{A}$

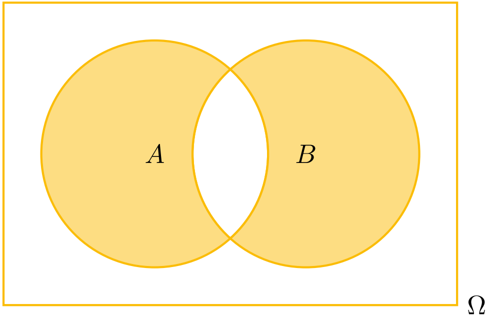


INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Diferença simétrica

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \Delta B$ denota a *diferença simétrica* entre os eventos A e B, ou seja, a ocorrência exclusiva de ao menos um dos eventos. Em notação de conjuntos:

$$A \Delta B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in (A - B) \wedge \omega \in (B - A)\}.$$

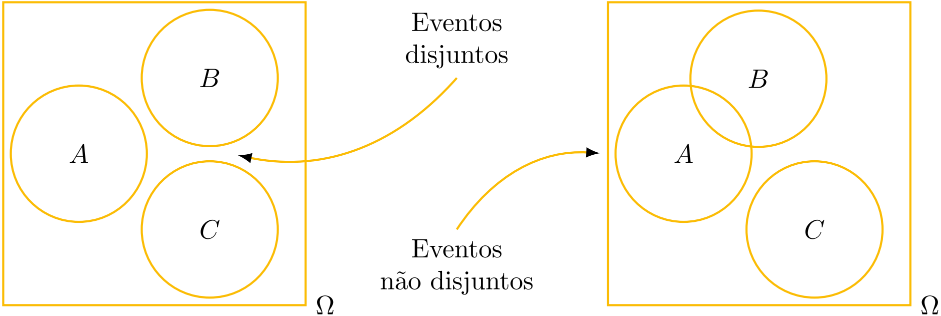


Eventos Disjuntos

Os eventos $A_1, \dots, A_n$ são disjuntos (mutuamente excludentes) se

$$A_i \cap A_j = \varnothing$$

para quaisquer i e j distintos.



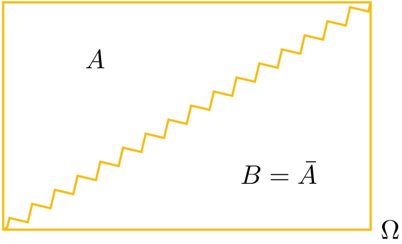
Eventos Complementares

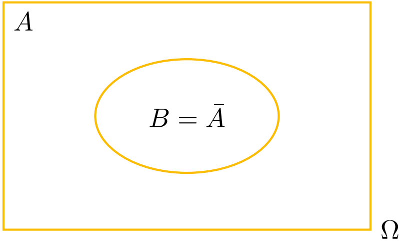
Dois eventos A e B no espaço amostral Ω são complementares se:

1. $A \cap B = \varnothing$
2. $A \cup B = \Omega$

O complementar de A será denotado por $\bar{A}$.

As notações para o evento complementar de A costumam variar entre $\bar{A}$, A' e A^c.





Outras propriedades operacionais dos eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

1. $\overline{\varnothing} = \Omega$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cap \Omega = A$
4. $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cup \Omega = \Omega$
6. $A \cap \bar{A} = \varnothing$
7. $A \cup \bar{A} = \Omega$
8. $A - B = A \cap \bar{B}$
9. $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Leis de Morgan

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

e

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercício

Semana 1 - Exercício 3

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, "traduza" para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:

1. Pelo menos um dos eventos ocorre.
2. O evento A ocorre mas B não.
3. Nenhum deles ocorre.
4. Exatamente um dos eventos ocorre.

Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Exercício **Ref.:BGC1**

No experimento de sortear aleatoriamente uma carta de um baralho, considere os eventos:

- A Seleciona-se o rei de copas.
- B Seleciona-se um rei.
- C Seleciona-se uma carta de copas.
- D Seleciona-se uma carta de figura.

Determine adequadamente os eventos:

- a $A \cap B$
- b $A \cup B$
- c $A - B$
- d $B - A$
- e $\bar{D}$
- f $B \cap C$
- g $B \cup C$
- h $C \cap D$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ref.:NGT5

No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

- A seleciona-se uma carta de copas;
- B seleciona-se uma figura;
- C seleciona-se um Ás;
- D seleciona-se um oito;
- E seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

- a C e D;
- b D, E e A;
- c C e E;
- d D, E, A e B;
- e D e E

Técnicas de Contagem

Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Suponhamos que uma ação seja constituída de k etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n_1 maneiras distintas. A 2ª etapa pode ser realizada de n_2 maneiras distintas para cada uma das n_1 maneiras de completar a etapa 1. A k-ésima etapa pode ser realizada de n_k maneiras distintas para cada uma das n_{k-1} maneiras de completar a etapa k. Então o número de maneiras de se efetuar a ação completa é $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Exemplo: Projeto de um site da internet

O projeto de um site na internet consiste em quatro cores, três fontes e três posições para uma imagem. Quantos projetos diferentes são possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Pelo PFC o número de projetos diferentes será

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

Ou seja 36 projetos.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Fatorial de um número natural

Dado um número natural n, $n \geq 2$, o fatorial de n (denota-se por $n!$) é o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fatoriais de alguns números:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Arranjo

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos tomados k a k, a qualquer sequência ordenada de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

Número de arranjos

Seja um conjunto com n elementos distintos. O número A_k^n de arranjos de n elementos tomados k à k é:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \geq k.$$

Exemplo: Placa de circuito impresso

Uma placa de circuito impresso tem oito localizações diferentes em que um componente pode ser colocado. Se quatro componentes diferentes forem colocados na placa, quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Cada projeto consiste em selecionar uma localização das oito localizações para o primeiro componente, uma localização das sete resultantes para o segundo componente, uma localização das seis resultantes para o terceiro componente e uma localização das cinco resultantes para o quarto componente. Portanto,

$$A_4^8 = \frac{8!}{4!} = 1680$$

Logo temos 1680 projetos diferentes possíveis.

Anagrama

Um anagrama de uma palavra é obtido quando trocamos a ordem das suas letras, sem repeti-las, de modo que se forma uma nova sequencia de letras, com ou sem sentido.

Permutação

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se permutação dos n elementos todo arranjo desses n elementos tomados n à n.

Número de permutações

Seja um conjunto com n elementos distintos, o número P_n de permutações dos n elementos é:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Anagramas da palavra AZUL

Qual é a quantidade de anagramas da palavra AZUL?

O cálculo do número de anagramas de uma palavra (que não tenha letras repetidas) pode ser entendido como um problema de cálculo do número de permutações dos elementos de um conjunto. Note que a palavra azul pode ser interpretada como um conjunto de quatro letras. Desse modo o número total de anagrama será

$$P_4 = 4! = 24$$

Ou seja temos 24 anagramas para a palavra AZUL.

Número de permutações com elementos repetidos

O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ objetos dos quais n_1 são do tipo 1, n_2 são do tipo 2, ... e n_k são do tipo k é:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Programação de um hospital

Um centro cirúrgico de um hospital necessita programar três cirurgias de joelho e duas cirurgias de quadris em um dia. Denominamos uma cirurgia de joelhos e de quadris como j e q, respectivamente. Qual o número de sequências possíveis das três cirurgias de joelho e das duas cirurgias de quadris?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 19) (Adaptado).

Note que nesse caso podemos interpretar a cirurgia como um conjunto de 5 elementos (cirurgias) sendo duas de um tipo (cirurgia de joelho) e três de outro (cirurgia de quadril). Desse modo se trata de um problema de permutações com elementos repetidos.

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

É possível enumerar as sequências:

$$\{jjjqq, jjqjq, jjqqj, jqjjq, jqjqj, jqqjj, qjjjq, qjjqj, qjqjj, qqjjj\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Combinação

Uma combinação é todo subconjunto de tamanho k de um conjunto de tamanho $n \geq k$ com elementos distintos.

Número de combinações

O número de combinações C_k^n que podem ser selecionadas a partir de um conjunto de n elementos distintos

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Exemplo: Disposição de Placa de Circuito Impresso

Um componente pode ser colocado em oito localizações diferentes em uma placa de circuito impresso. Se cinco componente diferentes forem colocados na placa quantos projetos diferentes serão possíveis?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Cada projeto é um subconjunto de oito localizações que devem conter os componentes, portanto se trata de um problema de combinação.

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Temos ao todo 56 projetos diferentes.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Quantas amostras diferentes existem, de tamanho seis, que contêm exatamente dois itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 20) (Adaptado).

Um subconjunto contendo exatamente dois itens defeituosos pode ser formado escolhendo primeiro os dois itens defeituosos a partir dos três itens defeituosos. Portanto, um problema de combinação:

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Na segunda etapa sorteamos os quatro itens não defeituosos dentre os 47 não defeituosos. Novamente um problema de combinação:

$$C_4^{47} = \binom{47}{4} = \frac{47!}{4!43!} = 178365$$

Aplicando agora o TFC temos que quantidade de amostras que contém exatamente dois itens defeituosos será

$$3 \cdot 178365 = 535095$$

Exercício

Semana 1 - Exercício 4

Quantos múltiplos de 3, compostos de 3 algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 7?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 1 - Exercício 5**

Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 374) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício **Semana 1 - Exercício 6**

Pretende-se selecionar quatro pessoas de um grupo constituído de três professores e cinco alunos, para tirar uma fotografia. Se pelo menos um dos professores deve aparecer na foto, de quantos modos poderá ser feita a seleção?

Fonte: Gelson Iezzi et al. (2002, p. 372) (Adaptado).

Referências

Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, & David Degenszajn ans Roberto Périgo (2002). *Matemática - Volume único* (2 ed.). Atual.

Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.

Montgomery, D. C. & G. C. Runger (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.

Weiss, N. A. (2012). *Introdutory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás