Curso de Estatística e Probabilidade

DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

Data da Atualização: 20 de abril de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso de Probabilidade e Estatística no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Espaços Amostrais e Eventos

Variável de interesse

É a variável observada em um experimento.

Experimento aleatório

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) não pode ser previsto.

Um experimento aleatório é também dito não determinístico.

Experimento determinístico

É qualquer ação cujo resultado (valor da variável de interesse) pode ser previsto.

Em um experimento é comum considerar mais de uma variável de interesse e, portanto um mesmo experimento pode ser aleatório ou não dependendo da variável de interesse observada.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Espaço Amostral

É o conjunto de *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. O espaço amostral é dito *enumerável* quando existir uma bijeção entre ele e os números naturais. Se tal bijeção não existir diremos que o espaço amostral é *não enumerável*.

Espaço Amostral Discreto Consiste em um conjunto finito ou infinito enumerável de resultados.

Espaço Amostral Contínuo Contém um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais.

O espaço amostral será denotado por Ω.

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Considere um experimento em que você seleciona uma câmera de um telefone celular e registra o tempo de recarga de um *flash* (o tempo necessário para aprontar a câmera para outro *flash*). Os valores possíveis para esse tempo dependem da resolução do temporizador e dos tempos máximo e mínimo de recarga. Há várias formas de definir o espaço amostral desse experimento:

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga, podemos definir:

$$\Omega = \mathbb{R}^+ = \{t|t > 0\}$$

Se o objetivo de estudo for estudar o tempo de recarga e soubermos que ele sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\Omega = \{t|1,5 < t < 5\}$$

Se o objetivo de estudo consiste em verificar se o tempo é *baixo*, *médio* ou *alto*, então:

$$\Omega = \{baixo, médio, alto\}$$

Se o objetivo é verificar se a câmera satisfaz os requisitos mínimos de tempo de recarga então:

$$\Omega = \{sim, não\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 15) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Evento

São os subconjuntos do espaço amostral Ω.

Evento Nulo

É o evento associado a todo *subconjunto vazio* do espaço amostral Ω.

Produto Cartesiano

Sejam dois eventos A e B, o *produto cartesiano* $A \times B$ será o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence à A e o segundo pertence à B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas.

Se não temos qualquer conhecimento sobre o mecanismo de funcionamento de uma câmera fotográfica podemos definir:

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 > 0, t_2 > 0\}\end{aligned}$$

Se soubermos que o tempo de recarga de cada lâmpada sempre fica entre 1,5 e 5 segundos:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{t_1 | 1,5 < t_1 < 5\} \\ \Omega_2 &= \{t_2 | 1,5 < t_2 < 5\} \\ \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\ &= \{(t_1, t_2) | t_1 \in \Omega_1, t_2 \in \Omega_2\}\end{aligned}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar se as câmeras atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso reaproveitando os espaços amostrais anteriores

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{sim, não\} \\
\Omega_2 &= \{sim, não\} \\
\Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\
&= \{(não, não), (sim, não), (não, sim), (sim, sim)\}
\end{aligned}
$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Duas Câmeras com Flash

Estamos interessados em estudar os tempos de recarga de duas câmeras fotográficas, com o objetivo de verificar o número de câmeras que atendem aos requisitos mínimos de tempo de recarga.

Nesse caso o espaço amostral será simplesmente

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

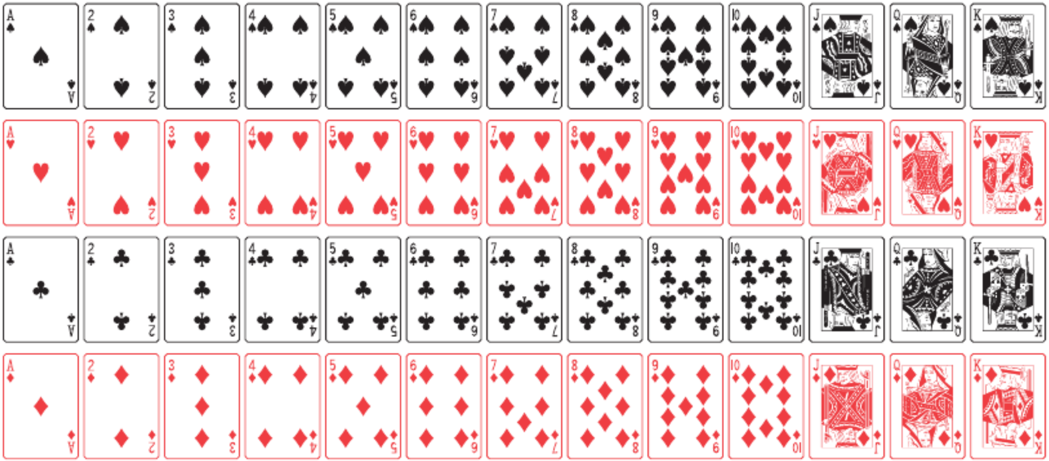
Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).

Exemplo: Uma Câmera com Flash

Estamos interessados em estudar a quantidade de disparos do flash até que a câmera pare de estar dentro das especificações mínimas de qualidade.

$$\Omega = \mathbb{Z}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 16) (Adaptado).



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 1

Considere o experimento de sortear uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Quais as cartas compõem os seguintes eventos?

a) Seleciona-se o rei de copas.

b) Seleciona-se um rei.

c) Seleciona-se uma carta de copas.

d) Seleciona-se uma carta de figura.

Fonte: Weiss (2012, p. 153) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 2

Considere os experimentos descritos abaixo. Defina um objetivo para cada um deles. Defina um espaço amostral e uma variável de interesse considerando o objetivo proposto. A variável de interesse é contínua ou discreta? Quais são experimentos aleatórios?

a. Sorteamos um aluno da classe ao acaso e medimos o valor de sua altura.
b. Jogamos um dado de uma determinada altura e observamos o tempo que gasta até chegar ao solo.
c. Jogamos um dado e observamos o número de vezes que ele quica até parar.
d. Em uma escola de futebol observamos um jogador cobrar faltas e contamos a quantidade de vezes que ele acerta.
e. Colocamos um litro de água no fogo e medimos a sua temperatura após vinte minutos.
f. Jogamos uma moeda e verifica-se o seu valor.
g. Olho pela janela do meu quarto e conto a quantidade de carros que passam na rua pela próxima hora.

Fonte: Bussab & Morettin (2013, p. 108) (Adaptado).

Exercício

Semana 1 - Exercício 3

Para cada um dos experimentos abaixo, defina um objetivo, apresente um espaço amostral adequado e conte seus eventos elementares.

a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.

b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.

c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.

d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.

e) Em uma cidade, famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.

f) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.

g) Uma moeda é lançada consecutivamente até o lançamento da primeira cara.

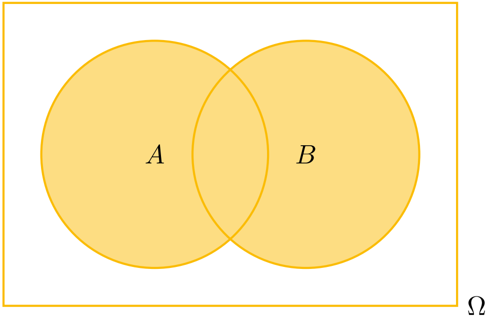
Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 52) (Adaptado).

União de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cup B$ denota a *união* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência de ao menos um deles. Em notação de conjuntos:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

A operação de união também é chamada de reunião



Comutatividade da união de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \vee \omega \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in B \vee \omega \in A\} && \text{Comutatividade do operador lógico } \vee \\ &= B \cup A && \text{união de eventos} \end{aligned}$$

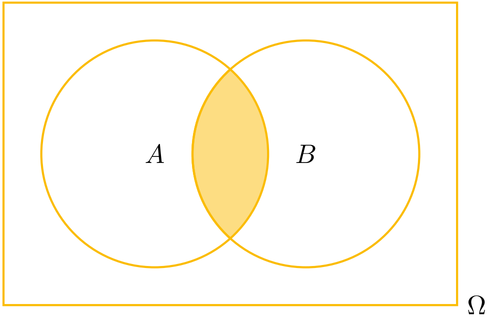
E assim fica justificada a comutatividade da união.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Interseção de eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A \cap B$ denota a *interseção* dos eventos A e B, ou seja, a ocorrência simultânea desses eventos. Em notação de conjuntos:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$



Comutatividade da interseção de eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap B = B \cap A.$$

A demonstração é análoga ao que já fizemos para a união de eventos.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Distributividade da união relativa a interseção

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$(\implies)$ Vamos mostrar primeiramente que:

$$\omega \in A \cup (B \cap C) \implies \omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1}$$

Assuma que $\omega \in A \cup (B \cap C)$, deste modo há dois casos a considerar:

- i Se $\omega \in A$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, portanto, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- ii Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B \cap C$ e, consequentemente, $\omega \in B$ e $\omega \in C$, e desses dois fatos concluímos que $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$ e, finalmente, $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dessa forma, a condição (1) está provada.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

($\Longleftarrow$) Agora vamos provar a recíproca:

$$\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies \omega \in A \cup (B \cap C). \tag{2}$$

Seja $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $\omega \in A \cup B$ e $\omega \in A \cup C$. Novamente, temos dois casos à considerar:

- **i** Se $\omega \in A$, então é fácil ver que $\omega \in A \cup (B \cap C)$.
- **ii** Se $\omega \notin A$, então $\omega \in B$ e $\omega \in C$, consequentemente, $\omega \in B \cap C$ e, finalmente, $\omega \in A \cup (B \cap C)$.

Mostra-se aqui a condição (2). E assim fica justificada a comutatividade da união. A prova é semelhante para o caso da comutatividade da interseção.

Distributividade da interseção relativa à união

Sejam três eventos A, B e C quaisquer em Ω. Então:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

A demonstração desse resultado é análoga ao que fizemos para a distributividade da união relativa a interseção.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Eventos elementares

São os *elementos* do espaço amostral que não podem ser expressos como união de outros dois eventos não vazios de Ω.

Cardinal de um conjunto

Seja um evento A. O cardinal de A é número de eventos elementares de A.

Cardinal do produto

Sejam os conjuntos A e B. O cardinal do produto cartesiano de dois conjuntos é o produto dos cardinais dos conjuntos individuais:

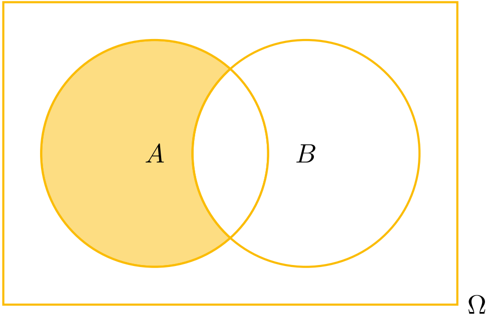
$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

Diferença de eventos

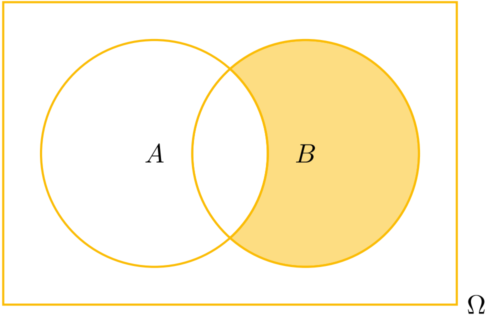
Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A - B$ denota a *diferença* do evento A em relação ao evento B, ou seja, a ocorrência exclusiva de A. Em notação de conjuntos:

$$A - B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

$A - B = A \cap \overline{B}$



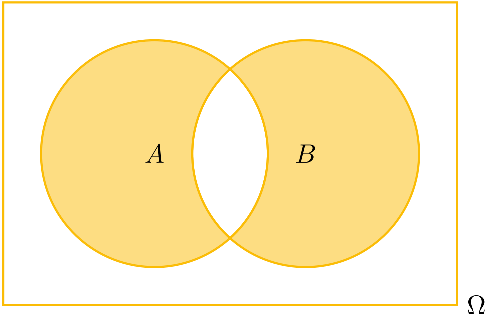
$B - A = B \cap \overline{A}$



Diferença simétrica

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. O evento $A\Delta B$ denota a *diferença simétrica* entre os eventos A e B, ou seja, a ocorrência exclusiva de ao menos um dos eventos. Em notação de conjuntos:

$$A\Delta B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in (A - B) \wedge \omega \in (B - A)\}.$$

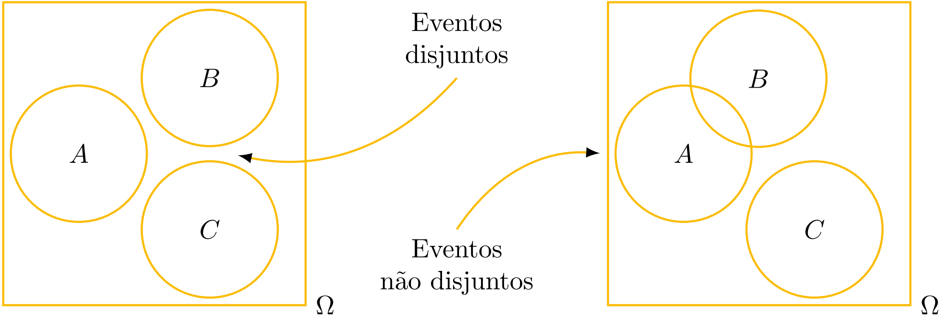


Eventos Disjuntos

Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são disjuntos (mutuamente excludentes) se

$$A_i \cap A_j = \varnothing$$

para quaisquer i e j distintos.



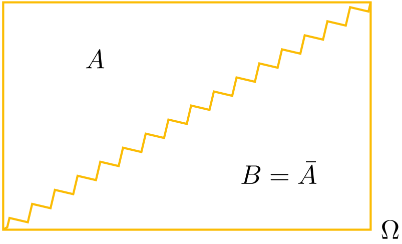
Eventos Complementares

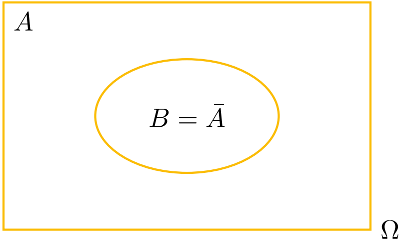
Dois eventos A e B no espaço amostral Ω são complementares se:

1. $A \cap B = \varnothing$
2. $A \cup B = \Omega$

O complementar de A será denotado por $\bar{A}$.

As notações para o evento complementar de A costumam variar entre $\bar{A}$, A' e A^c.





INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Outras propriedades operacionais dos eventos

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

1. $\overline{\varnothing} = \Omega$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cap \Omega = A$
4. $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cup \Omega = \Omega$
6. $A \cap \bar{A} = \varnothing$
7. $A \cup \bar{A} = \Omega$
8. $A - B = A \cap \bar{B}$
9. $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Leis de Morgan

Sejam dois eventos A e B quaisquer em Ω. Então:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

e

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 4

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, "traduza" para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:

1. Pelo menos um dos eventos ocorre.
2. O evento A ocorre mas B não.
3. Nenhum deles ocorre.
4. Exatamente um dos eventos ocorre.

Fonte: Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Exercício

Semana 1 - Exercício 5

No experimento de sortear aleatoriamente uma carta de um baralho, considere os eventos:

- A) Seleciona-se o rei de copas.
- B) Seleciona-se um rei.
- C) Seleciona-se uma carta de copas.
- D) Seleciona-se uma carta de figura.

Determine adequadamente os eventos:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $A - B$
- d) $B - A$
- e) $\bar{D}$
- f) $B \cap C$
- g) $B \cup C$
- h) $C \cap D$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 6

No experimento de selecionar aleatoriamente uma carta de um baralho comum, considere os eventos:

- Ⓐ seleciona-se uma carta de copas;
- Ⓑ seleciona-se uma figura;
- Ⓒ seleciona-se um Ás;
- Ⓓ seleciona-se um oito;
- Ⓔ seleciona-se um dez ou um valete

Qual das seguintes coleções de eventos são disjuntos:

- ⓐ C e D;
- ⓑ D, E e A;
- ⓒ C e E;
- ⓓ D, E, A e B;
- ⓔ D e E

Referências

Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, & David Degenszajn ans Roberto Périgo (2002). *Matemática - Volume único* (2 ed.). Atual.

Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.

Montgomery, D. C. & G. C. Runger (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.

Weiss, N. A. (2012). *Introdutory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás