Exercício 87: (Magalhães & Lima, 2015, p. 71). Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos, na resistência do subsolo. Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra. Com base em evidências geológicas admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0,1 para cada 5 metros. O custo básico inicial e de 100UPCs (unidade padrão de construção) e será acrescido de $50k$, com k representando o número de alterações observadas. Assumindo que as alterações ocorrem independentemente entre cada um dos três intervalos de 5 metros, qual a função de distribuição de probabilidade da variável custo das obras de fundação?

Exercício 88: Considere dois lançamentos independentes de uma moeda equilibrada. Defina X como o número de caras nos dois lançamentos. Quais são as FDP e FDA associadas a essa variável aleatória? Exiba os gráficos correspondentes.

Exercício 89: (Magalhães & Lima, 2015, p. 75) Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No estudo, as crianças recebiam uma dose de vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem alguma reação alérgica, recebiam outra dose da vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas. Os resultados completos estão na tabela a seguir.

Doses	1	2	3	4	5
freq.	245	288	256	145	66

Determine a FDP e a FDA para a variável aleatória número de doses recebidas. Qual a probabilidade de uma criança receber:

a) três doses?

b) no máximo duas doses?

c) no mínimo três doses?

2.3 Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição 26 (Curva de Densidade)

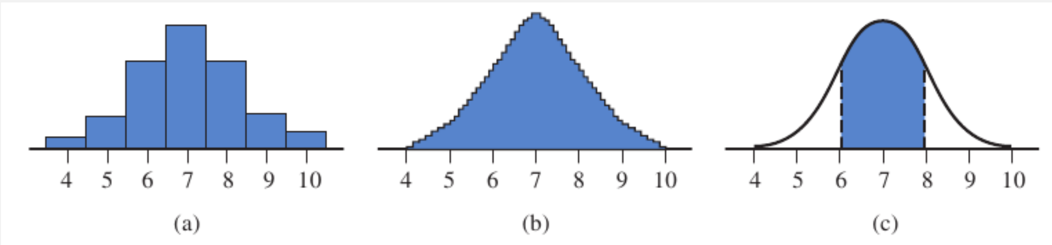
Uma *distribuição de probabilidade* para uma variável aleatória contínua X é especificada pela sua *curva de densidade*. A função $f(x)$ que define essa curva é a *função de densidade de probabilidade* (FDP).

Exercício 90: Um agricultor está medindo o tamanho das espigas de milho de sua fazenda. Ele dispõe de três réguas diferentes. Ele possui uma régua onde:

(a) A unidade de medida mínima é o centímetro.

(b) A unidade de medida mínima é o milimetro.

(c) Consegue medir o valor real do tamanho da espiga.



As medições feitas com as réguas (a) e (b) são discretas. A medição feita com a régua (c) é contínua.

Teorema 12 (Propriedades da FDP)

Uma FDP contínua é uma função real que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Essas propriedades implicam que a área total sob a curva da FDP é 1.
A probabilidade de que $X \in B \subset \mathbb{R}$ é dada por:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x.$$

O cálculo de probabilidades para uma variável aleatória X pode ser resumido em três eventos nos quais a variável aleatória X assume valores:

$a < x < b$ entre dois números dados, a e b

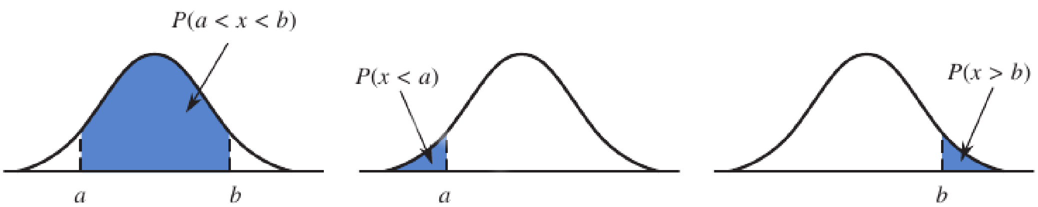
$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$x < a$ menores do que um número a

$$\mathbb{P}(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$x > b$ maiores do que um número b

$$\mathbb{P}(X > b) = \int_b^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Exercício 91: Mostre que se X é uma variável aleatória contínua com FDP $f(x)$ então:

a) $\mathbb{P}(X = a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$.

c) $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a)$.

Exercício 92: Magalhães & Lima (2015, p. 187). Verifique se as expressões a seguir são FDP (assuma que elas se anulam fora dos intervalos especificados). Se forem determine a moda e a mediana.

a) $f(x) = 3x$ se $0 \leq x \leq 1$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ se $x \geq 0$.

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$ se $3 \leq x \leq 5$.

d) $f(x) = 2$ se $0 \leq x \leq 2$.

e) $f(x) = \begin{cases} (2+x)/4 \text{ se } & -2 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/4 \text{ se } & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

f) $f(x) = -\pi, se - \pi < x < 0$.

Exercício 93: Suponha que X seja uma variável aleatória contínua definida em um intervalo de tempo (em minutos) relacionada ao tempo que um escriturário gasta para realizar uma determinada tarefa num escritório. Suponha que a variável aleatória X tenha função de distribuição de probabilidade com a densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 4 < x < 6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ilustre a função de densidade e determine:

a) $\mathbb{P}(4,5 < X < 5,5)$ e $\mathbb{P}(4,5 \leq X \leq 5,5)$.

b) $\mathbb{P}(X > 5)$ e $\mathbb{P}(X \geq 5)$.

c) $\mathbb{P}(X = 5)$.

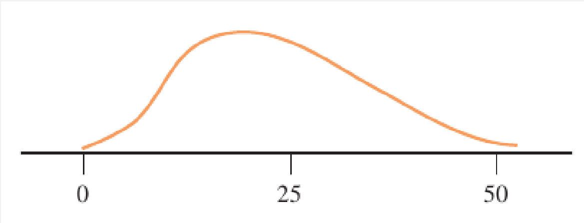
Exercício 94: Ross (2010, p. 187). Suponha que X é uma variável aleatória contínua cuja FDP é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Qual é o valor de C?

2. Encontre $\mathbb{P}(X > 1)$.

Exercício 95: Se X denotar a vida útil (em milhares de horas) de uma fonte para refrigeração de motores. A curva de densidade é dada pela figura:



Pinte a área sob a curva que corresponda à cada uma das probabilidades:

a) $\mathbb{P}(10 < X < 25)$.

b) $\mathbb{P}(10 \leq X \leq 25)$.

c) $\mathbb{P}(X < 30)$.

d) A probabilidade de que a vida útil seja de no mínimo 25 mil horas.

e) A probabilidade de que a vida útil exceda 25 mil horas.

Exercício 96: Magalhães & Lima (2015, p. 181). Arqueólogos estudaram uma certa região e estabeleceram um modelo teórico para a variável C, *comprimento de fósseis da região* (em cm). Suponha que C é uma variável contínua com a seguinte FDP:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40}\left(\frac{c}{10} + 1\right), & 0 \leq c \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Ilustre graficamente a FDP da variável aleatória C.

b) Qual a probabilidade de um fóssil escolhido ao acaso apresentar comprimento inferior à 12?

c) $\mathbb{P}(C > 12 | C > 5)$?

Exercício 97: Ross (2010, p. 188). A quantidade de horas que um computador funciona antes de falhar é uma variável aleatória contínua com FDP dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp\left(-\frac{x}{100}\right), & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que:

a) um computador esteja funcionado entre 50 e 150 horas após ser ligado.

b) funcione por ao menos 100 horas.

Exercício 98: Magalhães & Lima (2015, p. 183). Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera T, *tempo de teste em minutos*, como uma variável aleatória contínua com FDP dada por:

$$f(t) = \begin{cases} (t-4)/40, & 8 \leq t < 10 \\ 3/20, & 10 \leq t \leq 15 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Qual a probabilidade de uma criança demorar entre 9 e 12 minutos para resolver o teste?

b) Qual a probababiliade de uma criança demorar mais 4 minutos para terminar o teste dado que já se passaram 3 minutos do início do teste?

Exercício 99: Magalhães & Lima (2015, p. 177). Estudos revelam a existência de um grande lençol de água no subsolo de uma região. No entanto sua profundidade ainda não foi determinada. Sabe-se apenas que o lençol pode estar situado em qualquer ponto entre 20 e 100 metros.

a) Encontre a FDP para a variável aleatória profundidade do lençol de água;

b) Qual a probabilidade de que o lençol tenha profundidade

   i) entre 50 e 70 metros?

   ii) maior que 50 metros?

   iii) menor que 50 metros?

Exercício 100: Se X representar a quantidade de grãos vendidos (em toneladas) durantes uma semana qualquer em um determinado distribuidor. Suponha que a função de densidade seja dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ilustre a curva de densidade e calcule:

a) $\mathbb{P}(X < 1/2)$.

b) $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$.

c) $\mathbb{P}(X < 1/4)$.

d) $\mathbb{P}(1/4 < X < 1/2)$.

e) $\mathbb{P}(X > 3/4 | X > 1/4)$.

f) $\mathbb{P}(X < 1/4 | X < 1/2)$.

g) $\mathbb{P}(1/4 < X < 3/4 | 1/4 < X < 1/2)$.

Exercício 101: Verifique se as seguintes funções são funções de densidade de probabilidade, ilustre seus gráficos e determine suas

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -3 \text{ ou } x > 4 \\ x/12 + 1/4 & \text{se } -3 < x \leq 0 \\ x/4 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 1/16 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (3-x)/4 & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} 2(2-x) & \text{se } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

4. $i(x) = \begin{cases} 4(x-1) & \text{se } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

5. $j(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{se } 0 < x < \theta, \theta > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Exercício 102: Determine k para que as funções a seguir sejam funções de densidade:

1. $f(x) = \begin{cases} k(2-x) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} \frac{k}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

2.4 Esperança matemática

Definição 27 (Esperança)

A *esperança* da variável aleatória discreta X é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \end{aligned}$$

onde $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é o conjunto dos valores possíveis de X cujas probabilidades são, respectivamente, $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$.

De acordo com essa definição a esperança da variável aleatória X pode ser interpretada como a média de seus possíveis valores ponderados por suas respectivas probabilidades.