Curso de Estatística e Probabilidade

DPAA-2.339 - Estatística e Probabilidade

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

Data da Atualização: 11 de maio de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso de Probabilidade e Estatística no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Interpretações e Axiomas de Probabilidade

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Definição frequentista de probabilidade

Considere o número limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Seja n_A o número de ocorrências do evento A em n repetições independentes do experimento em questão. Então:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}.$$

Essa definição nos permite interpretar a probabilidade como frequência relativa.

Probabilidade não existe!!! A probabilidade não se trata de um grandeza física que pode ser mensurável por meio de alguma “régua” ou “balança”.

Definição clássica de probabilidade

Seja um espaço amostral Ω composto por um número finito de eventos elementares equiprováveis:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

A probabilidade de ocorrência do evento $A \subset \Omega$ é dada por:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde $n(A)$ é o número de eventos elementares contidos em A e $n(\Omega)$ é o número de eventos elementares no espaço amostral.

O caso onde o espaço amostral possui um número infinito de elementos (enumerável ou não) não será foco desse curso introdutório.

Em caso de um número infinito enumerável de eventos usamos limites para obter essa probabilidade e no caso de um espaço amostral composto por um número infinito não enumerável de eventos elementares será preciso associar o cálculo das probabilidades à medidas de intervalos, áreas e volumes.

Nesse caso teremos a chamada probabilidade geométrica que não será focada desse curso.

Exemplo: Diodos a laser

Considere que 30% dos diodos a *laser* em uma batelada de 100 satisfazem os requerimentos mínimos de potência de um consumidor específico. Se um diodo à *laser* for selecionado ao acaso, isto é, se cada diodo a *laser* for igualmente provável de ser selecionado, nosso sentimento intuitivo será de que a probabilidade de satisfazer os requerimentos do consumidor é 0,30. Seja E o evento em que o diodo selecionado satisfaça os requerimentos do consumidor. Então E é o subconjunto de 30 diodos que satisfaz os requerimentos do consumidor. Visto que E contém 30 resultados e cada um deles tem probabilidade igual a 0,01, concluímos que a probabilidade de E é 0,3. A conclusão coincide com a nossa intuição.

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 21) (Adaptado).

Exemplo: Lançamento de Moedas

Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de:

a. Obter exatamente 2 caras?
b. Obter pelo menos 2 caras?

Para resolver esse exercício vamos construir inicialmente os espaços amostrais. Seja $\Omega_1 = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ um espaço amostral para o lançamento de apenas uma moeda. Dessa forma no lançamento de três moedas podemos considerar o espaço amostral:

$$\begin{aligned}\Omega =& \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \\ =& \{(\text{cara}, \text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{cara}, \text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{cara}), \\ & (\text{coroa}, \text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{cara}, \text{coroa}), (\text{cara}, \text{coroa}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{coroa}, \text{coroa})\}\end{aligned}$$

Note que Ω é finito e todos os seus eventos elementares são equiprováveis.

1. Considere o evento: $A =$ "Obter exatamente 2 caras?". Logo: $\mathbb{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$
2. Considere o evento: $B =$ "Obter pelo menos 2 caras?". Logo: $\mathbb{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade da amostra selecionada conter exatamente dois itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Inicialmente vamos definir

$$\Omega = \{\text{“Amostras de tamanho seis selecionadas a partir do total de 50 itens.”}\}$$

Note que Ω é finito, todos os seus eventos elementares são equiprováveis e além disso:

$$n(\Omega) = C_6^{50} = \binom{50}{6} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = 15.890.700$$

Seja o evento:

$$A = \{\text{“A amostra de seis itens contêm exatamente dois defeituosos”}\}$$

Em aulas anteriores vimos que $n(A) = 535.095$. Portando:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{535.095}{15.890.700} = \frac{33}{980}$$

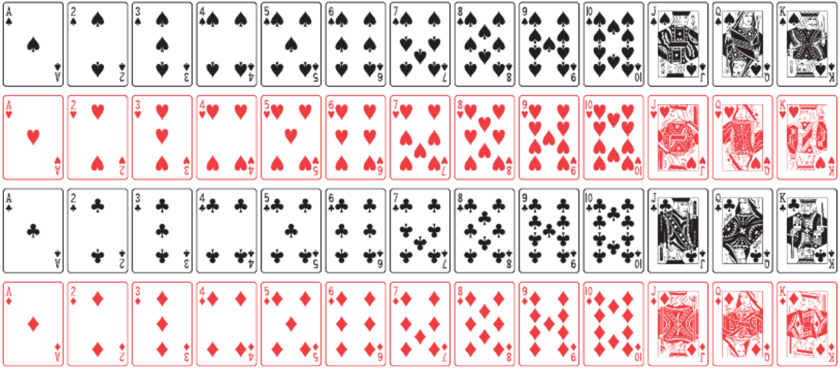
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício Ref.:BN6G

Seleciona-se aleatoriamente uma carta de um baralho comum. Qual a probabilidade da carta ser:

(a) Um ás e vermelha?

(b) Um ás ou vermelha?



INSTITUTO FEDERAL Goiás

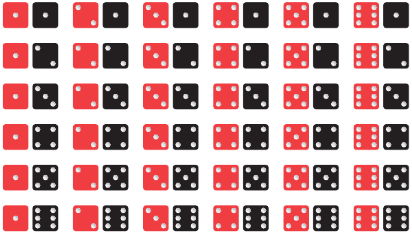
Exercício **Ref.:KZ4C**

Suponhamos que eu lance simultaneamente um tetraedro (dado de quatro faces) e uma moeda. Qual é a probabilidade de ocorrer uma face par no tetraedro e sair coroa na moeda?

Exercício Ref.:KJ56

Dois dados de cores diferentes são jogados simultaneamente.

a. Qual a probabilidade de que a soma deles seja maior que sete?
b. Qual a probabilidade de que o máximo seja maior ou igual à três?



Exercício

Semana 2 - Exercício 4

De um grupo de n objetos escolhemos r ao acaso com reposição. Qual a probabilidade de não sortearmos objetos repetidos?

Exercício **Ref.:BG5R**

Uma moeda é lançada duas vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos 1 cara e 1 coroa?

Exercício **Ref.:H5F3**

Uma urna contém 10 bolas identificadas como $B_1 \dots B_{10}$. Qual a probabilidade de que a bola sorteada tenha índice par? E do índice ser primo?

Exercício

Semana 2 - Exercício 5

Cinco homens e cinco mulheres estão dispostas em fila indiana. Qual a probabilidade de que:

- (a) A primeira pessoa da fila seja homem?
- (b) A primeira e a última pessoas da fila sejam homens?

Exercício Ref.:H7J6

Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Exercício **Semana 2 - Exercício 6**

Considere um polígono regular de n lados. Tome uma das retas determinadas por dois vértices quaisquer. Qual a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos?

Definição axiomática de probabilidade

Uma função $\mathbb{P}(\cdot)$, com domínio no espaço amostral Ω, é denominada probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega;$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1;$
3. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Essa definição não determina probabilidades; as probabilidades são atribuídas de acordo com o conhecimento que temos do contexto de aplicação.

Conseguências da definição

- $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$. Portanto, usando as propriedades 2 e 3, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonicidade);
- E da monotonicidade vem naturalmente que $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Regra da Adição de Probabilidades

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Regra da Adição - Dois Eventos

Sejam A e B dois eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Regra da Adição - Três Eventos

Sejam A, B e C três eventos de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 1

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

Seja Ω o espaço amostral composto por todas as pastilhas e H o evento no qual a pastilha contém altos níveis de contaminação. Note que o espaço amostral Ω é finito e todas as pastilhas tem a mesma probabilidade de ser sorteadas. Desse modo podemos aplicar a DCP.

$$\mathbb{P}(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{358}{940} = \frac{179}{470}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 2

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

Seja Ω o espaço amostral composto por todas as pastilhas e C o evento no qual a pastilha esta localizada no centro da ferramenta. Note que o espaço amostral Ω é finito e todas as pastilhas tem a mesma probabilidade de ser sorteadas. Desse modo podemos aplicar a DCP.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{626}{940} = \frac{313}{470}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 3

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação e estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

$$\mathbb{P}(C \cap H) = \frac{n(C \cap H)}{n(\Omega)} = \frac{112}{940} = \frac{28}{235}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Pastilhas de supercondutores - parte 4

A tabulação a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores.

	Localização na Ferramenta		
Contaminação	Centro	Borda	Total
Baixa	514	68	582
Alta	112	246	358
Total	626	314	940

Qual a probabilidade da pastilha ter um alto grau de contaminação ou estar localizada no centro da ferramenta?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 23) (Adaptado).

$$\mathbb{P}(C \cup H) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(C \cap H) = \frac{313}{470} + \frac{179}{470} - \frac{28}{235} = \frac{218}{235}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 3 - Exercício 1

Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter:

a) Soma dos pontos igual a oito?
   Resp.: $^{5}/_{36}$

b) Dois números iguais?
   Resp.: $^{1}/_{6}$

c) Soma dos pontos igual a oito ou dois números iguais (Use a regra da adição)?
   Resp.: $^{5}/_{18}$

Exercício **Ref.:NJYG**

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = {}^2\!/_5$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^4\!/_5$. Determine $\mathbb{P}(B)$ tais que A e B sejam disjuntos.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 3 - Exercício 2

Sejam A e B eventos em um dado espaço amostral Ω, tais que $\mathbb{P}(A) = {}^{1}/_{5}$, $\mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^{1}/_{2}$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = {}^{1}/_{10}$. Determine o valor de p.
Resp.: $p = {}^{2}/_{5}$

Magalhães & Lima (2015, p. 53) (Adaptado)

Exercício **Ref.:N72G**

Sejam A e B eventos em um espaço amostral Ω, onde B é três vezes mais provável que A. Sabendo que $\mathbb{P}(A \cup B) = {}^4\!/\!_5$ determine $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ quando:

(a) A e B são disjuntos

(b) $\mathbb{P}(A \cap B) = {}^1\!/\!_8$.

Exercício **Semana 3 - Exercício 3**

Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É três vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de cada time vencer?
Resp.: $\mathbb{P}(A) = {}^{9}/_{14}$, $\mathbb{P}(B) = {}^{3}/_{14}$, $\mathbb{P}(C) = {}^{3}/_{28}$ e $\mathbb{P}(D) = {}^{1}/_{28}$

Morgado et al. (1991, p. 143) (Adaptado)

Exercício

Ref.:N65I

Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou por 7. Resp.: $^{63}/_{200}$

Exercício Ref.:NT53

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a) ser brasileira?

b) preferir futebol?

c) ser estrangeira e preferir natação?

d) ser estrangeira ou preferir queimada?

Regra dos Complementares

Para quaisquer eventos A e B:

1. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$
3. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Demonstrações:

1. Note que A e $\overline{A}$ são eventos disjuntos e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Aplicando a segunda e a terceira propriedades das funções de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}).$$

2. Note que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, logo $A \cap B$ e $\overline{A} \cup \overline{B}$ são complementares, logo esse resultado decorre diretamente do resultado 1.

3. Note que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, mas $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ são disjuntos, logo $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Probabilidade de Eventos

Um experimento aleatório pode resultar em um dos resultados $\{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0,1; 0,3; 0,5 e 0,1, respectivamente. Seja A o evento $\{a, b\}$, seja B o evento $\{a, b, c\}$ e seja C o evento $\{d\}$. Então,

$$\mathbb{P}(A) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$
$$\mathbb{P}(B) = 0,3 + 0,5 + 0,1 = 0,9$$
$$\mathbb{P}(C) = 0,1$$

Além disso aplicando a Regra dos Complementares

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,6$$
$$\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,1$$
$$\mathbb{P}(\bar{C}) = 0,9$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade da amostra selecionada conter no máximo dois itens defeituosos? Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Inicialmente vamos definir o espaço amostral:

$$\Omega = \{\text{“Amostras de tamanho seis selecionadas a partir do total de 50 itens.”}\}$$

Note que Ω é finito, todos os seus eventos elementares são equiprováveis e além disso:

$$n(\Omega) = C_6^{50} = \binom{50}{6} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = 15.890.700$$

Sejam os eventos:

$$A = \{\text{“A amostra de seis itens contêm exatamente três defeituosos”}\}$$
$$B = \{\text{“A amostra de seis itens contêm no máximo dois defeituosos”}\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que $B = \bar{A}$. Além disso:

$$n(A) = C_3^{47} = \binom{47}{3} = \frac{47!}{3! \cdot 44!} = 16.215$$

Portando:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16.215}{15.890.700} = \frac{1}{980}$$

Aplicando a Regra dos Complementares obtemos que:

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{980} = \frac{979}{980}$$

Exercício

Semana 3 - Exercício 4

Dois dados são lançados independentemente. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares? (Dica.: Use a regra dos complementares)
Resp.: $^3/_4$

Exercício **Ref.:J6G8**

Considere duas urnas tais que a primeira contenha bolas numeradas de 1 até 1000 e a segunda contenha bolas numeradas de 10 até 500. Uma bola é sorteada de cada uma das urnas. Qual a probabilidade de não obtermos dois números ímpares? (Dica.: Use a regra dos complementares)

Exemplo: **Ref.:23JK**

Numa classe de 55 alunos, 21 praticam vôlei e basquete, 39 praticam vôlei e 33 praticam basquete. Um aluno da classe é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de o aluno escolhido praticar um e somente um desses esportes?

Considere o espaço amostral

$$\Omega = \{\text{“Todos os alunos na classe”}\}$$

Note que Ω é finito e assuma que os alunos tem igual probabilidade de serem sorteados e os eventos.

$$\begin{aligned} B &= \{\text{“O aluno escolhido pratica basquete”}\} \\ V &= \{\text{“O aluno escolhido pratica vôlei”}\} \end{aligned}$$

Pelo enunciado temos que: $n(\Omega) = 55$, $n(B \cap V) = 21$, $n(V) = 39$ e $n(B) = 33$.

Desejamos determinar:

$$\mathbb{P}(B \triangle V) = \mathbb{P}\left[(B \cap \bar{V}) \cup (\bar{B} \cap V)\right]$$

Veja que os eventos $(B \cap \bar{V})$ e $(\bar{B} \cap V)$ são eventos disjuntos, portanto podemos aplicar a Definição Axiomática de Probabilidade

$$\mathbb{P}(B \triangle V) = \mathbb{P}(B \cap \bar{V}) + \mathbb{P}(\bar{B} \cap V)$$

A Regra dos Complementares estabelece que:

$$\mathbb{P}(B \cup \bar{V}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap V) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\bar{B} \cup V) = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(B \cap V).$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(B \triangle V) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V) - 2\mathbb{P}(B \cap V).$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Aplicando a Definição Clássica de Probabilidade:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{33}{55} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{39}{55}$$

$$\mathbb{P}(B \cap V) = \frac{n(B \cap V)}{n(\Omega)} = \frac{21}{55}$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(B \triangle V) = \frac{3}{5} + \frac{39}{55} - 2 \cdot \frac{21}{55} = \frac{6}{11}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:Z3L5**

Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 20 são esportistas e da biologia noturno.Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

1. Ser esportista.
2. Ser esportista e aluno da biologia e noturno.
3. Não ser da biologia.
4. Ser esportista ou aluno da biologia.
5. Não ser esportista, nem aluno da biologia.

Magalhães & Lima (2015, p. 53)

Exercício **Ref.:MK23**

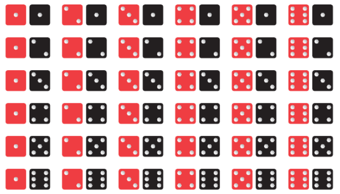
Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:K3X8**

Em um jogo de dados são jogados dois dados honestos de seis faces. Considere os eventos:

- (A) A soma das faces é 7;
- (B) A soma das faces é 11;
- (C) A soma das faces é 2;
- (D) A soma das faces é 3;
- (E) A soma das faces é 12;
- (F) A soma das faces é 8;
- (G) As faces são iguais.



- (a) Determine a probabilidade de todos os eventos.
- (b) O jogador vence esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 7 ou 11. Calcule a probabilidade desse evento.
- (c) O jogador perde esse jogo na primeira rodada se a soma dos dados for 2, 3 ou 12. Calcule a probabilidade desse evento.
- (d) Qual a probabilidade das faces serem diferentes?
- (e) Qual a probabilidade da soma ser 8 ou das faces serem iguais?

Weiss (2012, p. 147)

Exercício **Ref.:N7R2**

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

1. não ser brasileira e preferir de futebol?
2. não ser estrangeira e nem preferir de vôlei?
3. não ser estrangeira ou não preferir de queimada?

Exercício **Ref.:M36Q**

Uma caixa contém nove peças das quais três são defeituosas. Sorteamos duas peças. Qual a probabilidade de não escolhermos duas peças defeituosas?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Chance de um evento

A chance de um evento A é definida como:

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

Existe uma confusão muito grande entre os conceitos de *chance* (em inglês *odds*) e *probabilidade*, o senso comum trata esses dois conceitos como sinônimos, mas não o são.

A chance e a probabilidade são medidas que assumem valores em intervalos diferentes:

$$\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$$
$$\mathbb{C}h(A) \in [0, \infty)$$

Desigualdade entre Chance e Probabilidade

Para todo evento A:

$$\mathbb{C}h(A) \geq \mathbb{P}(A).$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 3 - Exercício 5**

Sabendo que a chance de um evento A é definida como:

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

Mostre que:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{C}h(A)}{1 + \mathbb{C}h(A)}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Lançamento de um dado

Considere o experimento de lançarmos um dado e observarmos a face que ficou voltada pra cima. Seja A o evento no qual a face ⚂ fica voltada para cima. A chance de ocorrer o evento A é de 1 para 5, ou seja, o evento A possui 5 eventos elementares contrários {⚀, ⚁, ⚃, ⚄, ⚅} e 1 evento elementar favorável {⚂}. Portanto nesse caso:

$$\mathbb{C}h(A) = 0,2 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A) = {}^{1}/_{6} \approx 0.1666\dots$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exemplo: Apostas Esportivas

Em um site de apostas esportivas é dito que a chance da seleção brasileira de futebol vencer a seleção espanhola é de 3 para 1. Qual a probabilidade da seleção brasileira vencer?

Considere o evento:

$$A = \text{“A seleção brasileira vence a seleção espanhola.”}$$

Se a chance da seleção brasileira de futebol vencer a seleção espanhola são de 3 para 1 então

$$\mathbb{C}h(A) = \frac{3}{1} = 3$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem sem reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de seis itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados não são repostos. Ou seja, cada item pode ser somente selecionado uma única vez e a amostra é um subconjunto dos 50 itens. Qual a probabilidade e a chance da amostra selecionada não conter itens defeituosos?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 3 - Exercício 6

A probabilidade de um cavalo vencer três ou menos corridas é de 58%; a probabilidade de ele vencer três ou mais corridas é de 71%.

1. Qual é a probabilidade do cavalo vencer exatamente três corridas?
   Resp.:29%
2. Qual é a chance do cavalo vencer exatamente três corridas?
   Resp.:As chances são de aproximadamente 41 para 100.

Probabilidade Condicional e Independência

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Probabilidade Condicional

Dados os eventos A e B a probabilidade condicional de A dado B, $\mathbb{P}(A|B)$, é definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A), & \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(B)$ é a probabilidade à priori

$\mathbb{P}(A|B)$ é a probabilidade à posteriori

Regra do Produto de Probabilidades

Dados os eventos A e B:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

$$D = \{\text{“O item é defeituoso”}\}$$
$$F = \{\text{“O item tem falhas na superfície”}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado $\bar{F}$? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F? Qual? Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).

Note que $\mathbb{P}(F) > 0$. Desse modo temos que:

$$\mathbb{P}(D|F) = \frac{10}{40} = 0,25 = 25\% \qquad \text{e} \qquad \mathbb{P}(D|\bar{F}) = \frac{18}{360} = 0,05 = 5\%$$

Pelo resultado obtido fica sugerida uma possível relação entre falhas na superfície e itens funcionalmente defeituosos que deveria ser investigada. Há indícios de que a presença de falhas na superfície aumenta a probabilidade do item ser defeituoso.

Exercício

Semana 4 - Exercício 1

Considere os dados tabulados referentes a preferencia esportiva de 285 pessoas entre brasileiros e estrangeiros.

	Brasileiro	Estrangeiro	Total
Futebol	70	15	85
Vôlei	25	30	55
Queimada	10	50	60
Natação	15	70	85
Total	120	165	285

Se que uma pessoa for sorteada ao acaso qual a probabilidade de:

a) sabendo que a pessoa é estrangeira, prefira futebol?

b) sabendo que a pessoa prefere vôlei, seja estrangeira?

c) sabendo que a pessoa não prefere queimada, seja brasileira?

d) sabendo que a pessoa não é estrangeira, prefira futebol? Que conclusão você pode tirar comparando esse item com o item a)?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Estágios de Usinagem

A probabilidade de que o primeiro estágio de uma operação numericamente controlada, de usinagem para pistões com alta rpm atenda as especificações é igual à 0,90. Falhas são causadas por variações no metal, alinhamento de acessórios, condição de lâmina de corte, vibração e condições ambientais. Dado que o primeiro estágio atende as especificações, a probabilidade de que o segundo estágio atenda as especificações é de 0,95. Qual é a probabilidade de ambos os estágios atenderem as especificações?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 26) (Adaptado).

Considere os eventos:

$$A = \{\text{“O primeiro estágio atende as especificações”}\}$$
$$B = \{\text{“O segundo estágio atende as especificações”}\}$$

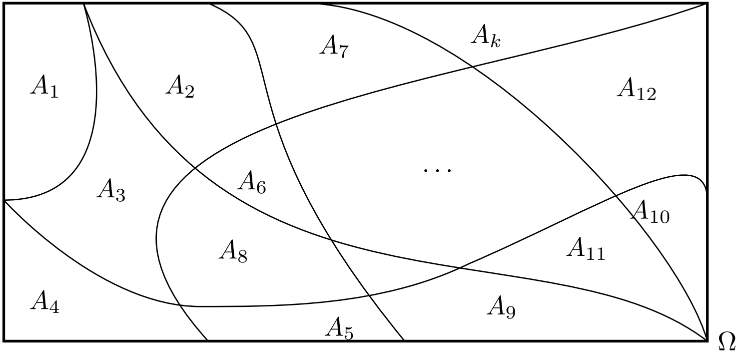
Pelo enunciado do problema temos que: $\mathbb{P}(A) = 0,9$ e $\mathbb{P}(B|A) = 0,95$. Desejamos encontrar $\mathbb{P}(A \cap B)$. Note que a regra do produto estabelece que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855$$

Partição do Espaço Amostral

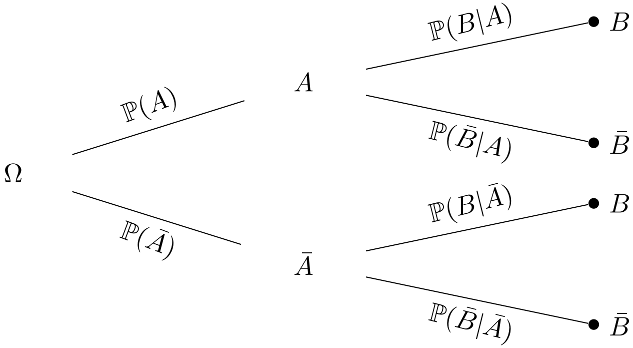
O conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ de eventos do espaço amostral Ω é uma partição do espaço amostral se:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Sejam $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2 \dots A_n\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2 \dots B_m\}$ duas partições de Ω. Podemos esquematizar as probabilidades associadas aos eventos que compõem as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por um diagrama de árvores. No caso particular onde $\mathcal{P}_1 = \{A, \overline{A}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{B, \overline{B}\}$, um diagrama adequado seria:



Exemplo: Falhas e defeitos na superfície

A tabela fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente). Sejam os eventos:

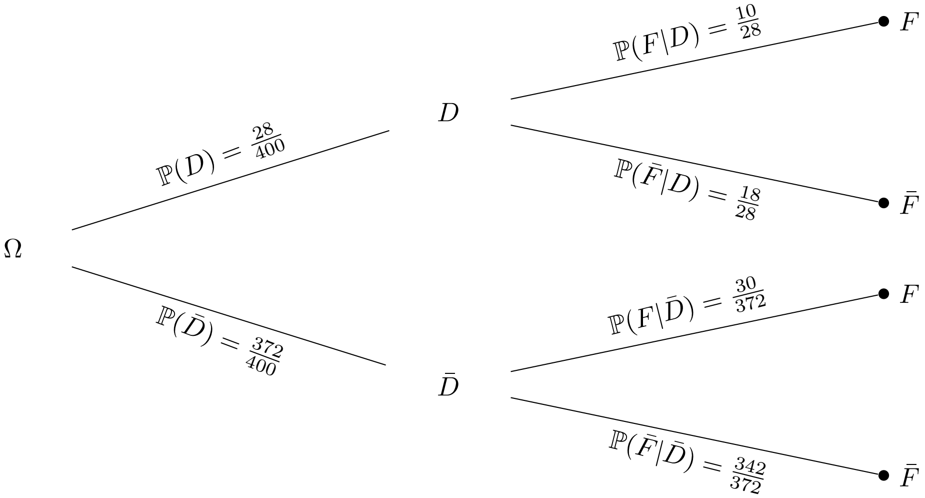
$$D = \{\text{“O item é defeituoso”}\}$$
$$F = \{\text{“O item tem falhas na superfície”}\}$$

	Com Falhas	Sem Falhas	Total
Defeituoso	10	18	28
Não Defeituoso	30	342	372
Total	40	360	400

Qual a probabilidade condicional de D dado F e de D dado $\bar{F}$? É sugerida alguma relação entre os eventos D e F? Qual?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 25) (Adaptado).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás



INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 2**

Consideremos dois dados: um deles equilibrado e outro viciado com $\mathbb{P}\{1\} = {}^1\!/_2$ e $\mathbb{P}\{2\} = \mathbb{P}\{3\} = \mathbb{P}\{4\} = \mathbb{P}\{5\} = \mathbb{P}\{6\} = {}^1\!/_{10}$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Resp.: ${}^9\!/_{10}$ Morgado et al. (1991, p 161)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Intuitivamente dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Independência dos complementares

Se dois eventos A e B são independentes seus complementares também serão.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})$$

Três eventos independentes

Três eventos A, B e C são independentes se, e somente se:

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
3. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Se apenas as três primeiras condições forem satisfeitas os eventos são mutuamente independentes.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Amostragem com reposição

Um silo com 50 itens fabricados contém três itens defeituosos e 47 itens não defeituosos. Uma amostra de dois itens é selecionada a partir dos 50 itens. Os itens selecionados são repostos. Ou seja, cada item pode ser sorteado mais de uma vez.

- (a) Qual a probabilidade do segundo item selecionado ser defeituoso, dado que o primeiro item a ser selecionado é defeituoso?
- (b) Qual a probabilidade de que ambas as peças sejam defeituosas?

Fonte: Montgomery & Runger (2018, p. 22) (Adaptado).

Considere os eventos:

$$A = \{\text{“O primeiro item é defeituoso”}\} \qquad \text{e} \qquad B = \{\text{“O segundo item é defeituoso”}\}$$

Precisamos determinar $\mathbb{P}(B|A)$ e $\mathbb{P}(A \cap B)$. Num sorteio com reposição os sucessivos sorteios sempre ocorrem nas mesmas condições, portanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) = {}^{3}/{}_{50}$. E pela Regra do Produto temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{3}{50} \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{2500}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 3**

Em uma gaveta temos 12 camisas, das quais, quatro são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo? E se retirarmos com reposição?

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:HN3L**

Dados os eventos A, B e C em um mesmo espaço amostral, mostre que as chamadas *regras da cadeia* de probabilidades

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$$

e

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C).$$

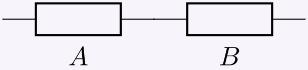
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exemplo: Circuito em Série

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$A = \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}$$
$$B = \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = {}^{8}/_{9}$ e $\mathbb{P}(B) = {}^{9}/_{10}$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B. Há somente uma rota que depende do funcionamento de ambos os dispositivos. Então a probabilidade do circuito operar é:

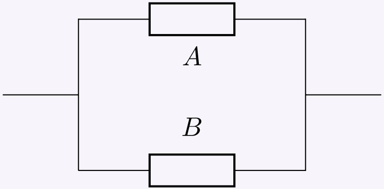
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}.$$

Exemplo: Circuito em Paralelo

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$A = \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}$$
$$B = \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 8/9$ e $\mathbb{P}(B) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Assuma que o funcionamento do dispositivo A é independente do dispositivo B. Nesse caso haverá uma rota se ao menos um dos dispositivos funcionar, ou seja o circuito opera quando o evento $A \cup B$ ocorre, então a probabilidade do circuito operar é $\mathbb{P}(A \cup B)$, mas não é tão simples calcular essa probabilidade diretamente. Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) \qquad \text{e} \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Mas se os eventos A e B são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = {}^{8}/_{9} \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = {}^{1}/_{9}$ e $\mathbb{P}(B) = {}^{9}/_{10} \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = {}^{1}/_{10}$. Portanto:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{89}{90}$$

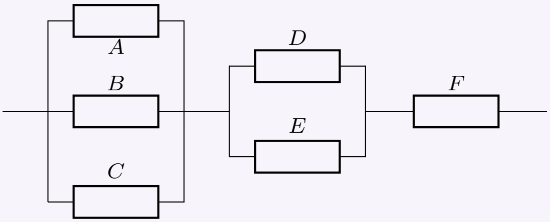
Portando o circuito opera com probabilidade ${}^{89}/_{90}$.

Exemplo: Circuito “Avançado”

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

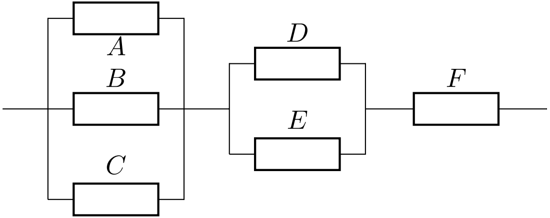
$$
\begin{aligned}
A &= \text{“O dispositivo } A \text{ funcionou normalmente”}\\
B &= \text{“O dispositivo } B \text{ funcionou normalmente”}\\
C &= \text{“O dispositivo } C \text{ funcionou normalmente”}\\
D &= \text{“O dispositivo } D \text{ funcionou normalmente”}\\
E &= \text{“O dispositivo } E \text{ funcionou normalmente”}\\
F &= \text{“O dispositivo } F \text{ funcionou normalmente”}
\end{aligned}
$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(A) = 6/7$, $\mathbb{P}(B) = 4/5$, $\mathbb{P}(C) = 2/3$, $\mathbb{P}(D) = 5/6$, $\mathbb{P}(E) = 7/8$ e $\mathbb{P}(F) = 9/10$. Qual a probabilidade do circuito operar?



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Assuma que o funcionamento de todos os dispositivos seja independente. Para resolver esse problema é necessário separar o circuito em módulos. Vamos definir o módulo M_1 como sendo formado pelos componentes A, B e C. O módulo M_2 como sendo formado pelos componentes D, E. Note que os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série.

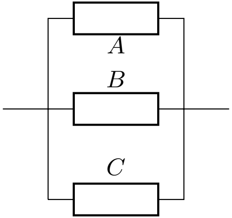


Portanto a solução desse exercício será composta de três etapas:

1. Analisar a probabilidade do módulo M_1 funcionar;
2. Analisar a probabilidade do módulo M_2 funcionar;
3. Analisar a probabilidade do circuito formado pelos módulos M_1 e M_2 e a componente F operar.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que o módulo 1 é composto por três componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_1 = A \cup B \cup C$ ocorrer.



Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) \qquad \text{e} \qquad \overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

Mas se os eventos A, B e C são independentes os seus complementares também serão:

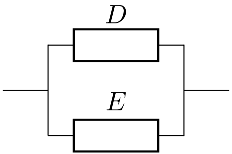
$$\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{C})$$

Note que $\mathbb{P}(A) = 6/7 \implies \mathbb{P}(\bar{A}) = 1/7$, $\mathbb{P}(B) = 4/5 \implies \mathbb{P}(\bar{B}) = 1/5$ e $\mathbb{P}(C) = 2/3 \implies \mathbb{P}(\bar{C}) = 1/3$.
Portanto:

$$\mathbb{P}(M_1) = 1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{104}{105}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que o módulo 2 é composto por duas componentes em paralelo e, portanto irá funcionar se o evento $M_2 = D \cup E$ ocorrer.



Lembre-se que da Regra dos Complementares e das Leis de Morgan temos que:

$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) \qquad \text{e} \qquad \overline{D \cup E} = \bar{D} \cap \bar{E}$$

Deste modo temos que:

$$\mathbb{P}(D \cup E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D \cup E}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D} \cap \bar{E})$$

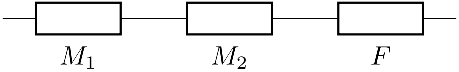
Mas se os eventos D e E são independentes os seus complementares também serão, portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D}) \cdot \mathbb{P}(\bar{E})$$

Note que $\mathbb{P}(D) = {}^5/_6 \implies \mathbb{P}(\bar{D}) = {}^1/_6$ e $\mathbb{P}(E) = {}^7/_8 \implies \mathbb{P}(\bar{E}) = {}^1/_8$. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_2) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{47}{48}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás



Como comentado anteriormente os módulos M_1 e M_2 e a componente F formam um circuito em série. Dessa forma temos que o circuito funcionará se o evento $M_1 \cap M_2 \cap F$ ocorrer. Portanto:

$$\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap F) = \mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(M_2) \cdot \mathbb{P}(F) = \frac{104}{105} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{9}{10} = \frac{611}{700}$$

Logo o circuito funcionará com probabilidade $\dfrac{611}{700} \approx 0.872857\ldots$

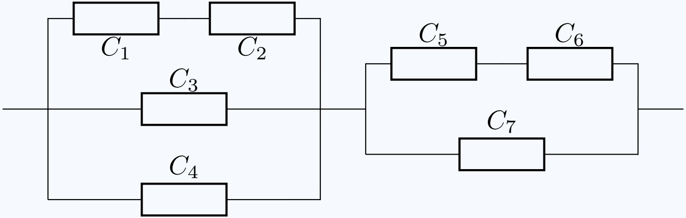
Exercício

Semana 4 - Exercício 4

O sequente circuito opera se houver uma rota de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. Considere os eventos:

$$C_i = \text{“A componente } i \text{ funcionou normalmente”}$$

Sabe-se que $\mathbb{P}(C_i) = \dfrac{100-i}{100}$. Qual a probabilidade do circuito operar?



Exercício **Ref.:25KL**

Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Determine a probabilidade de retiramos sucessivamente com reposição, três bombons de maracujá. E se as retiradas forem sem reposição?

Exercício **Semana 4 - Exercício 5**

Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira ao acaso, um cartão do bolso mostrando-o a um jogador. Qual é a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha, e de a outra face mostrada ao jogador, ser amarela?

Exercício

Semana 4 - Exercício 6

Em uma urna há 5 bolas amarelas, 3 verdes e 2 roxas. Sorteamos 3 bolas uma após a outra. Qual a probabilidade de obtermos a sequencia amarela-verde-roxa considerando que:

a) o sorteio é sem reposição

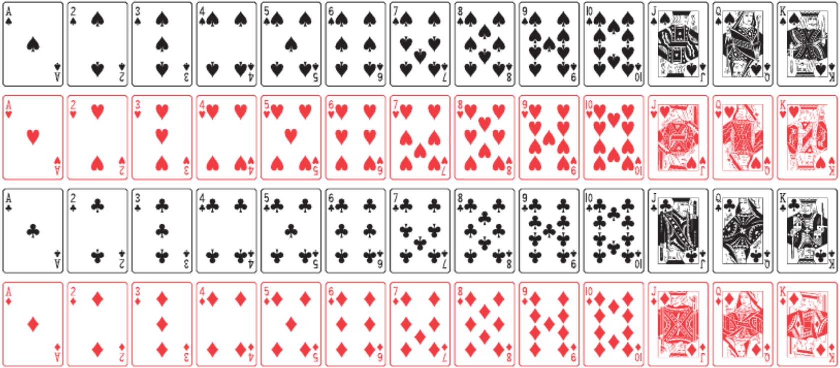
b) o sorteio é com reposição

Exercício

Ref.: Ref.:J42K

Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento "O ás de copas está entre as treze cartas" e B o evento "As treze cartas são do mesmo naipe". Verifique se A e B são independentes.

Morgado et al. (1991, p 166)



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:MZ2O**

Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de A e de B são $^1/_3$ e $^2/_3$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se vencer dois jogos consecutivos, de uma série de três. Que série de jogos é mais favorável ao jogador ABA ou BAB?

Morgado et al. (1991, p 169)

Resp.: Surpreendentemente é a sequência ABA!!!

Exercício Ref.:HNY6

Numa prova há 7 perguntas do tipo V ou F. Calcular a probabilidade de acertarmos todas as sete se:

a) escolhermos aleatoriamente as sete respostas;

b) escolhermos aleatoriamente as respostas sabendo que há mais respostas “verdadeiro” do que “falso”.

Morgado et al. (1991, p 157)

Exercício **Ref.:MK3K**

Marina quer enviar uma carta à Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $8/10$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $9/10$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $9/10$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

Morgado et al. (1991, p 162) Resp.: $25/44$

Teorema da Probabilidade Total

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

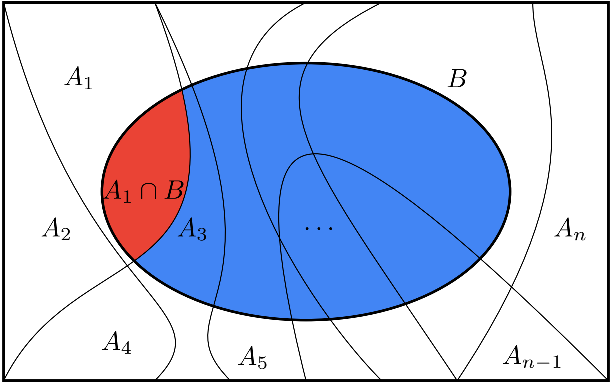
Teorema da Probabilidade Total

Seja B um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em um espaço amostral Ω tais que $\mathbb{P}(A_1) > 0, \mathbb{P}(A_2) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Para demonstrarmos esse resultado note B pode ser expresso como uma união disjunta de eventos em Ω da seguinte forma:



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Aplicando o terceiro axioma da probabilidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

Portando o teorema da probabilidade total está demonstrado:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

Exemplo: Contaminação de Semicondutores

Considere a tabulação que relaciona o nível de contaminação com suas respectivas probabilidade de falha do nível correspondente. A informação é resumida aqui:

Probabilidade de Falha	Nível de Contaminação	Probabilidade do Nível
0,1	Alto	0,2
0,005	Não Alto	0,8

Qual a probabilidade do item falhar?

Sejam os eventos:

$$A = \{\text{“O } \textit{chip} \text{ é exposto a altos níveis de contamização”}\} \qquad \text{e} \qquad F = \{\text{“O } \textit{chip} \text{ falha”}\}$$

Pela tabulação acima temos as seguintes probabilidades: $\mathbb{P}(F|A) = 0,1$, $\mathbb{P}(F|\bar{A}) = 0,005$, $\mathbb{P}(A) = 0,2$ e $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,8$. O Teorema da Probabilidade Total nos permite escrever:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) \\ &= 0,1 \cdot 0,2 + 0,005 \cdot 0,8 = 0,024 \end{aligned}$$

Note que esse valor coincide com a média ponderada das duas probabilidades de falha.

Exercício **Ref.:J348**

Um piloto de fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

Resp.: 0,325

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:JN45**

Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: As que já sofreram algum acidente e as que não. Dados estatísticos mostram que uma pessoa que já tenha sofrido algum acidente tem 0,4 de probabilidade de sofrer um novo acidente num período de um ano. As pessoas que nunca sofreram acidente tem 0,2 de probabilidade de sofrer seu primeiro acidente num período de um ano.

(a) Sabendo que 30% da população já sofreu algum acidente, qual é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente sofra um acidente no período de um ano? Resp.: 0,26

(b) Supondo que um indivíduo aleatório sofrerá um acidente no período de um ano. Qual a probabilidade de que o indivíduo tenha sofrido seu primeiro acidente? Resp.: 0,46

Ross (2010, p. 66)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:LK54**

Três candidatos: João, Maria e Pedro, disputam a presidência do diretório de estudantes de uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover um festival de música se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que um festival de música sejam promovido depois da eleição?
Resp.: 0,71

Ross (2010, p. 66)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:H87L**

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma fazenda F_2 e 50% de F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na indústria de sorvete os galões de leite são armazenados em refrigeradores sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, Qual a probabilidade do leite estar adulterado?

(Magalhães & Lima, 2015, p. 58)

Teorema de Bayes

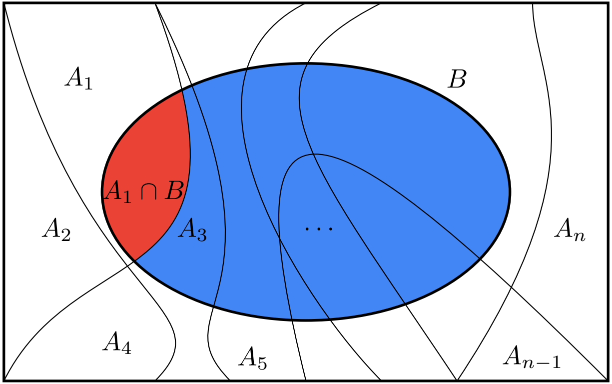
Teorema de Bayes

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e $\mathbb{P}(A_1) > 0, \ldots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então, para $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$



A_1
B
$A_1 \cap B$
A_2
A_3
$\cdots$
A_n
A_4
A_5
A_{n-1}

Exercício **Ref.:J4L7**

Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:

- (a) Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido? R.: $0,32$.
- (b) Qual a probabilidade do pênalti ser convertido? R.: $0,46$.
- (c) Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense? R.: $0,88$.

(Morgado et al., 1991, p 159)

Exercício Ref.:K19I

Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A chance de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A chance de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico?

Resp.: $^2/_3$

Exercício **Ref.:19LQ**

Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $4/10$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $6/10$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $4/10$.

(a) Qual a probabilidade da equipe ganhar? R.: 0,48

(b) Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia? R.: $1/2$

Morgado et al. (1991, p. 164)

Exercício **Ref.:HJD9**

Considere três eventos A, B e C tais que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ e $\mathbb{P}(C) > 0$. Demonstre o Teorema de Bayes com condicionamento:

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(B|A \cap C)\mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:K59O**

Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $1/3$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame.

a) Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular? R.: $8/15$

b) Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.: 0,44

Morgado et al. (1991, p. 165)

Exercício **Ref.:N2L1**

Três urnas I, II e III contém respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna e escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna I? R.: $^5/_{24}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:JN43**

Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:

- (a) A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro? R.: 0,0792
- (b) A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato. R.: 0,264

Ross (2010, p. 102)

Exercício **Ref.:J32N**

Duas máquinas A e B produzem 3 mil peças em um dia. A máquina A produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A? R.: $3/5$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício Ref.:J297

Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo A e dez amostras de solo tipo B. Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.

a) Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo B que são selecionadas e quais suas probabilidades. R.: $X \in \{5, \ldots, 10\}$

b) Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo A ou todas as dez amostras do tipo B? R.: 0,0326

c) Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo B selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média? R.: 0,6966

Exercício **Ref.:N564**

Dentre os estudantes João, Pedro e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas, qual a probabilidade:

a. De manuel nunca ser escolhido?
b. De um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?

Exercício **Ref.:1Y34**

Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta? R.: $^{4}/_{7}$

Exercício **Ref.:J6F5**

Os colégios A, B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se o resultado for $RRRMMMMM$ (R para rapaz e M para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C?

Bussab & Morettin (2013, p. 128)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:3JK8**

Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Ref.:H7R5**

Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Bussab & Morettin (2013, p. 126)

Exercício **Ref.:5IT6**

Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha n alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é p. Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente?

R.: $\dfrac{np}{1+(n-1)p}$

Ross (2010, p. 67)

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício **Problema de Monty Hall**

Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas, A, B e C: atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe A, mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta C e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

Selvin et al. (1975)

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Problema do Aniversário**

Considere k pessoas numa sala.

1. Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
2. A partir de qual valor de k essa probabilidade é maior que 0,5?

Mckinney (1966)

Referências

Bussab, W. O. & P. A. Morettin (2013). *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, & David Degenszajn ans Roberto Périgo (2002). *Matemática - Volume único* (2 ed.). Atual.

Magalhães, M. N. & A. C. P. Lima (2015). *Noções de Probabilidade e Estatística* (7 ed.). São Paulo: EdUSP.

Mckinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly 73*(4), 385–387.

Montgomery, D. C. & G. C. Runger (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.

Morgado, A. C., J. B. P. Carvalho, P. C. P. Carvalho, & P. Fernandez (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade* (9 ed.). Coleção do Professor de Matemática. SBM.

Ross, S. M. (2010). *A First Course in Probability* (8 ed.). New York: Pearson Hall.

Selvin, S., M. Bloxham, A. I. Khuri, M. Moore, R. Coleman, G. R. Bryce, J. A. Hagans, T. C. Chalmers, E. A. Maxwell, & G. N. Smith (1975). Letters to the editor. *The American Statistician 29*(1), 67–71.

Weiss, N. A. (2012). *Introdutory Statistics* (9 ed.). Addison-Wesley.