

1.6 Teorema de Bayes

Teorema 11 (Teorema de Bayes)

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos A_1, \dots, A_n e $\mathbb{P}(A_1) > 0, \dots, \mathbb{P}(A_n) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i).$$

Nessas condições, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então, para $i = 1, \dots, n$:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}.$$

Exercício 49: (Morgado et al., 1991, p 159). Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores da Jataiense. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o jogador for da Jataiense e de 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:

- Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador da Jataiense e ser convertido?
- Qual a probabilidade do pênalti ser convertido?
- Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser perdido. Qual a probabilidade do jogador que cobrou o pênalti tenha sido da Jataiense?

Exercício 50: Suponha que o tratamento do doutor Silva é tal que existe uma chance de que o seu paciente morra, ainda que seu diagnóstico tenha sido correto. A probabilidade de que seu diagnóstico esteja errado é de 10%. A probabilidade de que o paciente morra se o diagnóstico está errado é de 90% e, caso contrário, é de 5%. Sabe-se que um paciente do doutor Silva morreu hoje. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido um erro no diagnóstico?

Exercício 51: (Morgado et al., 1991, p. 164). Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $4/10$. Uma equipe de futebol ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade $6/10$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $4/10$.

- Qual a probabilidade da equipe ganhar?
- Sabendo que essa equipe ganhou um jogo em um dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia?

Exercício 52: (Morgado et al., 1991, p. 165). Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é a certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $1/3$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando a resposta e probabilidade 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das perguntas do exame.

- Qual a probabilidade do aluno acertar uma questão em particular?
- Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou? R.:

Exercício 53: Três urnas I , II e III contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna I ?

Exercício 54: (Ross, 2010, p. 102). Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro e 22% das famílias que possuem um cachorro também possuem um gato. Sabendo que 30% das famílias possuem um gato determine:

- a) A probabilidade de que uma família selecionada aleatoriamente possua um gato e um cachorro?
- b) A probabilidade condicional de que uma família selecionada aleatoriamente possua um cachorro dado que já possui um gato.

Exercício 55: Três urnas I , II e III contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a urna I ?

Exercício 56: Duas máquinas A e B produzem 3 mil peças em um dia. A máquina A produz mil peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2 mil, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A ?

Exercício 57: Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece ele dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta?

Exercício 58: Um geólogo tem em seu laboratório dez amostras de solo tipo A e dez amostras de solo tipo B . Para um experimento ele seleciona ao acaso 15 amostras para serem analisadas.

- a) Quais os possíveis valores para o número de amostras do tipo B que são selecionadas e quais suas probabilidades.
- b) Qual a probabilidade de que a seleção contenha todas as dez amostras do tipo A ou todas as dez amostras do tipo B ?
- c) Qual a probabilidade de que o número de amostras tipo B selecionadas diste não mais que um desvio padrão da média?

Exercício 59: Dentre os estudantes João, Pedro e Manuel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas. qual a probabilidade de:

- a) Manuel nunca ser escolhido?
- b) Um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?



Exercício 60: (Bussab & Morettin, 2013, p. 128) Os colégios A , B e C têm as seguintes porcentagens de rapazes, respectivamente: 40%, 20% e 10%. Um desses colégios é selecionado ao acaso e oito alunos são escolhidos, com reposição. Se o resultado for $RRRMMMMM$ (R para rapaz e M para moça), qual é a probabilidade de ter sido selecionado o colégio C ?

Exercício 61: Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

Exercício 62: (Bussab & Morettin, 2013, p. 126). Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Exercício 63: (Ross, 2010, p. 67). Em um teste de múltipla escolha se o estudante não souber a resposta de uma questão ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Suponha que cada questão tenha n alternativas e que a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão é p . Qual a probabilidade do estudante saber a resposta de uma questão se ele a respondeu corretamente?

1.7 Problemas clássicos e desafios

Aqui temos uma seleção de alguns problemas clássicos da probabilidade. Alguns são bastante difíceis de serem resolvidos e outros podem ter soluções contra-intuitivas.

Exercício 64: Problema de Monty Hall - Selvin et al. (1975). Num programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas, P_1 , P_2 e P_3 : atrás de uma porta há um carro e das demais não há nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe P_1 , mas essa não é aberta de imediato. Então, o apresentador abre a porta P_3 e ela está vazia (ele sabe onde está o carro!). Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha. O que você faria?

Exercício 65: Problema do Aniversário - Mckinney (1966). Considere k pessoas numa sala.

- Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
- A partir de qual valor de k essa probabilidade é maior que 0,5?