Exercício 73: (Ross, 2010, p. 118) Duas bolas são retiradas aleatoriamente sem reposição de uma urna contendo 8 bolas numeradas de 1 à 8. Se fizermos uma aposta que ao menos uma das bolas tenha um número maior ou igual à 6, qual é a probabilidade de vencermos essa aposta? Repita o exercício assumindo sorteio com reposição.

Exercício 74: Um experimento consiste em jogar sucessivamente uma moeda honesta até a ocorrência da primeira cara ou até o n-ésimo lançamento da moeda. Seja X o total de lançamentos feitos nesse experimento. Determine:

a) $\mathbb{P}(X = 1)$

b) $\mathbb{P}(X = k), \quad k < n$

c) $\mathbb{P}(X = n)$

Repita o exercício assumindo que a probabilidade de sair cara é p.

Exercício 75: (Ross, 2010, p. 119) Três bolas são aleatoriamente escolhidas de uma urna contendo 3 bolas brancas, 3 vermelhas e 5 pretas. Suponha que eu ganhe \$1 por cada bola branca sorteada e perca \$1 por cada bola vermelha. Seja X o ganho obtido com a retirada de três bolas dessa urna. Determine:

a) Os possíveis valores que a variável aleatória X pode assumir.

b) As probabilidades de que X assuma cada um desses valores.

Exercício 76: (Ross, 2010, p. 172) Duas bolas são aleatoriamente escolhidas de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 pretas e 2 laranjas. Suponha que eu ganhe \$2 por cada bola preta sorteada e perca \$1 por cada bola branca. Seja X o ganho obtido com a retirada de três bolas dessa urna. Determine:

a) Os possíveis valores que a variável aleatória X pode assumir.

b) As probabilidades de que X assuma cada um desses valores.

Exercício 77: (Ross, 2010, p. 172) Dois dados honestos são jogados. Seja X o produto das duas faces obtidas. Calcule $\mathbb{P}(X = i)$ para $i \in \{1, \ldots, 36\}$.

2.1 Variáveis Aleatórias Discretas

Uma variável aleatória é discreta quando seu conjunto de valores possíveis (que apresentam probabilidade positiva) é *finito* ou *enumerável*.

Definição 22 (Função de densidade de probabilidade)

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores num conjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Uma *função de distribuição de probabilidade* (FDP) para X é qualquer função $f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$ onde:

1. $0 \leq f(x_i) \leq 1$ para todo x_i
2. $\sum_i f(x_i) = 1$

Definição 23 (Função de distribuição acumulada)

Associada essa mesma variável aleatória X define-se a *função de distribuição acumulada* (FDA) como:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

É possível representar a FDP e tabular valores da FDA por meio de uma tabela quando a variável aleatória X assume valores num conjunto finito $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

X	$f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$	$F(x_i) = \mathbb{P}(X \leq x_i)$
x_1	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_1)$
x_2	$\mathbb{P}(X = x_2)$	$\mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2)$
x_3	$\mathbb{P}(X = x_3)$	$\mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) + \mathbb{P}(X = x_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$\mathbb{P}(X = x_n)$	$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$

Exercício 78: (Rathie & Zörnig, 2012, p. 89-90) Verifique se as funções a seguir são FDPs e ilustre seus gráficos:

a) $f(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \\ 0,2 & \text{se } x = 2 \\ 0,4 & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x = 1 \\ 2/3 & \text{se } x = 0 \\ 1/4 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1/2^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2/3^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1/2x & \text{se } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Exercício 79: (Rathie & Zörnig, 2012, p. 102) Existe k para que as funções a seguir sejam FDPs?

a) $f(x) = \begin{cases} k/4 & \text{se } x = 10 \\ k/2 & \text{se } x = 12 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } x = 3, \ldots, 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} k/2 & \text{se } x = 0 \\ -k/3 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Exercício 80: Obter a FDA para as FDPs à seguir e ilustrar os seus gráficos:

a $f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } x = -1 \\ 1/4 & \text{se } x = 0 \\ 2/4 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

b $f(x) = \begin{cases} 0,2 & \text{se } x = -15 \\ 0,4 & \text{se } x = -10 \\ 0,3 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

c $f(x) = \begin{cases} 1/2^x & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

d $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & \text{se } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Exercício 81: (Magalhães & Lima, 2015, p. 70) Com os dados do último censo, a assistente social de um Centro de Saúde constatou que para as famílias da região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Suponha que uma família será escolhida, aleatoriamente, nessa região e o número de filhos averiguado. Qual a FDP da variável aleatória número de filhos?

Exercício 82: Considere um jogo onde se lançam dois tetraedros (dados de quatro faces, com faces enumeradas de 1 à 4) distintos e não-viciados. Suponha que nesse jogo você ganhe R$5,00 quando a soma dos dados for superior à 6. Ganhe R$3,00 quando a soma for 5 ou 6 e perca R$4,00 quando a soma for menor que 5. Qual é a distribuição dos ganhos possíveis?

Exercício 83: Considere os experimentos aleatórios:

A Lançar três moedas distintas e observar o número de caras.

B Sortear duas bolas em uma urna contendo 3 bolas azuis, 4 bolas verdes e 5 bolas roxas e observar o número de bolas azuis.

C Lançar dois tetraedros (dados de quatro faces, com faces enumeradas de 1 à 4 distintos e não-viciados e observar a soma das faces.

Determine a FDP:

a) Do número de caras no experimento A?

b) Do número de bolas azuis no experimento B considerando que o sorteio é:

   i com reposição;

   ii sem reposição

c) Da soma das faces que saem para cima no experimento C?

Exercício 84: (Magalhães & Lima, 2015, p. 71) Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos, na resistência do subsolo. Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra. Com base em evidências geológicas admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0,1 para cada 5 metros. O custo básico inicial e de 100UPCs (unidade padrão de construção) e será acrescido de $50k$, com k representando o número de alterações observadas. Assumindo que as alterações ocorrem independentemente entre cada um dos três intervalos de 5 metros, qual a função de distribuição de probabilidade da variável custo das obras de fundação?

Exercício 85: Considere dois lançamentos independentes de uma moeda equilibrada. Defina X como o número de caras nos dois lançamentos. Quais são as FDP e FDA associadas a essa variável aleatória? Exiba os gráficos correspondentes.

Exercício 86: (Magalhães & Lima, 2015, p. 75) Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No estudo, as crianças recebiam uma dose de vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem alguma reação alérgica, recebiam outra dose da vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas. Os resultados completos estão na tabela a seguir.

Doses	1	2	3	4	5
freq.	245	288	256	145	66

Determine a FDP e a FDA para a variável aleatória número de doses recebidas. Qual a probabilidade de uma criança receber:

a) três doses?

b) no máximo duas doses?

c) no mínimo três doses?