ÁLGEBRAS ASSOCIADAS A GRAFOS ORIENTADOS EM NÍVEIS

10^a SEMANA DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ÁREAS ACADÊMICAS II
COORDENAÇÃO DA ÁREA ACADÊMICA DE MATEMÁTICA
IFG - CÂMPUS GOIÂNIA, GO, BRASIL

Kariny de Andrade Dirino (IFG - Câmpus Goiânia) - xxxx
Paulo Ferreira Viana Filho (IFG - Câmpus Goiânia) - xx
José Eder Salvador de Vasconcelos (IFG - Câmpus Goiânia) - xxx

Introdução

Consideremos o seguinte polinômio com coeficientes em um anel não comutativo $P(t) = t^2 + a_1 t + a_2$ e x_1, x_2 suas raízes à direita com a diferença $x_1 - x_2$ invertível e t uma variável central. Sejam,

$$x_{1,2} = (x_2 - x_1)x_2(x_2 - x_1)^{-1}, \; x_{2,1} = (x_1 - x_2)x_1(x_1 - x_2)^{-1}. \tag{1}$$

Temos,

$$x_1^2 + a_1 x_1 + a_2 = 0 \;\text{ e }\; x_2^2 + a_1 x_2 + a_2 = 0. \tag{2}$$

Disso,

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 - x_2^2 + a_1(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 - x_2^2 + a_1(x_1 - x_2) \\ &= x_1(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)x_2 + a_1(x_1 - x_2) \\ &= x_1 + (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1} + a_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Logo,

$$a_1 = -x_1 - (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1} = -x_1 - x_{1,2}. \tag{4}$$

Substituindo na primeira equação de (2) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 - (x_1 + (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1}x_1 + a_2 \\ &= x_1^2 - x_1^2 - (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1}x_1 + a_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Donde,

$$a_2 = (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1}x_1 = x_{1,2}x_1. \tag{6}$$

Então,

$$\begin{aligned} p(t) &= t^2 + (-x_1 - x_{1,2})t + x_{1,2}x_1 = t^2 - x_1 t - x_{1,2}t + x_{1,2}x_1 \\ &= (t - x_{1,2})t + (t - x_{1,2})(-x_1) \\ &= (t - x_{1,2})(t - x_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Com um procedimento análogo, pode-se mostrar que $P(t) = (t - x_{2,1})(t - x_2)$. Assim temos duas fatorações diferentes de $P(t)$. Essas duas fatorações implicam as seguintes identidades entre as pseudo raízes:

$$x_{1,2} + x_1 = x_{2,1} + x_2, \; x_{1,2}x_1 = x_{2,1}x_2.$$

É natural estudar a álgebra Q_2 com geradores $x_{1,2}$, $x_{2,1}$, x_1, x_2 satisfazendo as relações acima. Em [2] Gelfand, Retakh, Serconek and Wilson, introduziram uma nova classe de álgebras $A(\Gamma)$ associadas a grafos em níveis. A álgebra $A(\Gamma)$ é gerada pelas arestas do grafo. As relações são definidas associando cada caminho em Γ a um polinômio com coeficientes na álgebra associativa livre sobre o conjunto de arestas e determinando que caminhos distintos com mesmo inicio e fim representam a fatoração do mesmo polinômio em variáveis não comutativas. Essas álgebras são uma generalização das álgebras Q_n introduzidas por Gelfand, Retakh and Wilson em [1].

Preliminares

Sejam K um corpo e para qualquer conjunto W seja $T(W)$ a álgebra associativa livre em W sobre K. Seja $\Gamma = (E, V)$ um grafo onde V é o conjunto de vértice e E é o conjunto de arestas de Γ, existem funções $t, h : E \to V$, $t(e)$:=vértice inicial de e e $h(e)$:=vértice final de e. Dizemos que Γ é um grafo em níveis se, $V = \bigcup_{i=0}^n V_i$, $E = \bigcup_{i=0}^n E_i$. e para $e \in E_i$, $t(e) \in V_i$ e $h(e) \in V_{i-1}$.
Se $v \in V_1 (e \in E_1)$ dizemos que o nível de v é i e indicamos por $|v| = i$.
Sejam $V_0 = \{\star\}$ e $V_+ = \bigcup_{i>0}^n V_i$. Para cada $v \in V_+$ fixe algum $e_v \in E$ com $t(e_v) = v$: chamamos esta de aresta indicativa. Um caminho de v a w é uma sequência de arestas $\pi = \{e_1, ..., e_m\}$ tal que $t(e_1) = v$, $h(e_m) = k$ e $t(e_{i+1}) = h(e_i)$. Neste caso, $t(\pi) = v$, $h(\pi) = w$ e dizemos que o comprimento de π é m, denotado por $l(\pi)$. Escrevemos $v > w$ se existe uma caminho de v a w. Para $\pi = \{e_1, ..., e_m\}$ definimos, $e(\pi, k) = \displaystyle\sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le m} e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}$.

Séries de Hilbert das álgebras graduadas $A(\Gamma)$

Sejam V um espaço vetorial com base $\{v_j | j \in J\}$ e $R \subseteq T(V)$. Denotemos por $\langle R \rangle$ o ideal de $T(V)$ gerado por R, isto é,

$$\langle R \rangle = \{\sum_{i=1}^{k} y_i r_i z_i \;\mid\; k \ge 0, y_i, z_i \in T(V), r_i \in R\}$$

Então dizemos que a álgebra quociente $T(V)/\langle R \rangle$ é a álgebra definida por geradores $\{v_j | j \in J\}$ e relações R.
Dizemos que a álgebra definida por geradores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e relações R é uma álgebra quadrática se $R \subseteq V \otimes V$. Seja R o ideal bilateral de $T(E)$ gerado por

$$\{e(\pi_1, k_1) - e(\pi_2, k_2) : t(\pi_1) = t(\pi_2), h(\pi_1) = h(\pi_2), 1 \le k \le l(\pi_1)\}.$$

Definição: $A(\Gamma) = T(E)/R$. Um espaço vetorial é A graduado (veja [3]) se para cada $a \in A$ existe um subespaço V_a tal que $V = \bigoplus_{a \in A} V_a$.
Seja V um espaço vetorial $\mathbb{Z}_{\ge 0}$-graduado e suponha que cada V_i tem dimensão finita. Definimos a *série de Hilbert* de V, $H(V, t)$, por

$$H(V, t) = \sum_{i \ge 0} (dim(V_i))t^i.$$

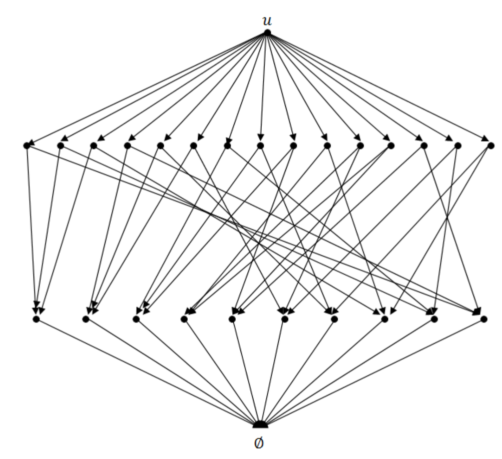
Agora, apresentaremos uma expressão que permite calcular a série de Hilbert das álgebras $A(\Gamma)$.

Theor. 1 *Seja Γ um grafo em níveis com um único vértice minimal $\star$ de nível 0 e $h(t)$ a série de Hilbert de $A(\Gamma)$. Então,*

$$h(t) = \frac{1 - t}{1 + \displaystyle\sum_{v_1 \ge \cdots \ge v_l \ge \star} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}}.$$

A álgebra $A(\Gamma_{\mathcal{P}_5})$

Seja V o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que têm exatamente dois elementos. Dada a condição: dois elementos v_1 e $v_2 \in V$ são adjacentes se $v_1 \cap v_2 = \varnothing$. Essa relação de adjacência define o *grafo de Petersen*



Construímos o grafo de Hasse do reticulado do grafo de Petersen e calculamos a série de Hilbert da Álgebra $A(\Gamma_{\mathcal{P}_5})$, expressão dada por:

$$H(A(\Gamma), t) = \frac{1}{-6t^3 + 29t^2 - 26t + 1}.$$

Referências Bibliográficas

[1] I. Gelfand, V.Retakh, R.Wilson. *Quadratic-linear algebras associated with decompositions on non commutative plynomials and Differential polynomials.* Select Math,(N.S.), **7**, 493-523, 2001.

[2] I. Gelfand, V.Retakh,S. Serconek, R.L. Wilson. *On a class of algebras associated to directed graphs.* In Selecta Math, (N.S.) 281-295, 2005.

[3] N. Jacobson. *Lectures in Abstract Algebra, Vol.II - Linear Algebra.* Nostrand Company.Inc., Princeton, 1953.

Apoio