Cálculo Diferencial e Integral 2

DPAA-2.086

Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
`thiagovedovatto.site`

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

20 de dezembro de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Limites e continuidade de funções de duas variáveis

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
-0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 14 - Exercício 1**

Utilize uma tabela com valores numéricos para $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{2-xy}$ para (x,y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Em seguida explique porque sua conjectura está correta.

Limite de uma função f de duas variáveis

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \in D$ tende à (a, b) é L e escrevemos

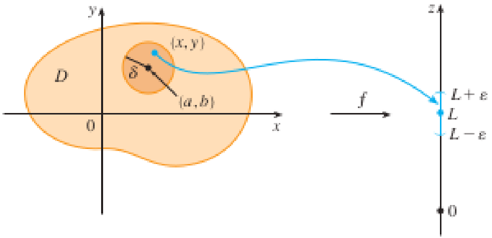
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

Se para todo $\epsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

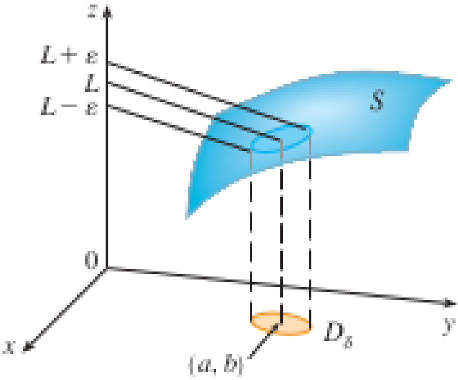
$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ não existe.

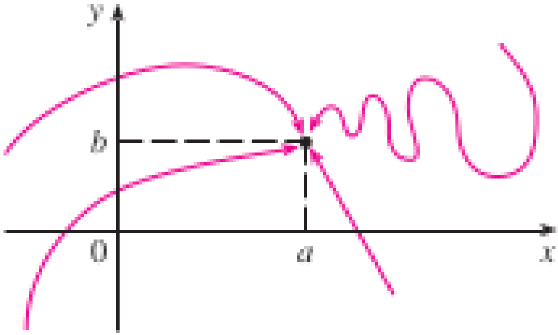
INSTITUTO FEDERAL
Goiás



y
(x, y)
D
δ
(a, b)
0
x
f
z
L + ε
L
L − ε
0



z
L + ε
L
L − ε
S
0
x
y
D_δ
(a, b)



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Propriedade dos limites de funções de duas variáveis

As regras a seguir são verdadeiras se L, M e k forem números reais e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$ para todo número k

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ para todo número $M \neq 0$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n$ para todo número n inteiro positivo

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ para todo número n inteiro positivo, e, se n for par, assumimos que $L > 0$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Continuidade de uma função f de duas variáveis

Uma função f de duas variáveis é dita contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Dica: Plote o gráfico usando o geogebra.

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dica: Plote o gráfico usando o geogebra.

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Dica: Plote o gráfico usando o geogebra.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$$

Dica: Plote o gráfico usando o geogebra.

Se investigarmos o comportamento desse limite por diferentes caminhos veremos que ele sempre será 0, mas isso não significa que o limite será 0 para todos os (infinitos) caminhos possíveis. Considere um $\epsilon > 0$ dado, mas arbitrário. Desejamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ então } \left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$$

ou

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ então } \frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} < \epsilon$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que $y^2 \leq x^2 + y^2 \implies \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, portanto

$$\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2}$$

Portanto, escolhendo $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$, obtemos

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon$$

A partir dessa definição, sabemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Exercício

Mostre que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

É contínua em todo o ponto exceto na origem. Dica: Considere os caminhos ao longo das retas furadas $y = mx$, $x \neq 0$. Plote o gráfico usando o geogebra.

Exercício

Mostre que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

É contínua em todo o ponto exceto na origem. Dica: Considere os caminhos ao longo das parábolas furadas $y = mx^2$, $x \neq 0$. Plote o gráfico usando o geogebra.

Exercício

Semana 14 - Exercício 2

Calcule os seguintes limites, se existirem

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{e^{2x}+e^{2y}}$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$$

Dica: Plote os gráficos usando o geogebra.

Exercício

Semana 14 - Exercício 3

Determine todos os pontos nos quais f é contínua.

a. $f(x,y) = \ln xy^2$

b. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$

c. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

Dica: Plote os gráficos usando o geogebra.

Exercício

Semana 14 - Exercício 4

Onde a função $h(x, y) = \sin^{-1}({}^{y}\!/_{x})$ é contínua.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Referências

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Algumas referências clássicas para um bom curso de cálculo: Stewart (2016), Leithold (1994), Gonçalves & Flemming (2007), Guidorizzi (2008), Larson & Edwards (2018), Adams & Essex (2018), Hass et al. (2018).

Adams, R. A. & C. Essex (2018). *Calculus: A Complete Course*. Pearson.

Gonçalves, M. B. & D. M. Flemming (2007). *Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas* (2 ed.). Pearson.

Guidorizzi, H. L. (2008). *Um curso de cálculo* (5 ed.), Volume 4. LTC.

Hass, J., C. Heil, G. B. Thomas, & M. D. Weir (2018). *Thomas' Calculus* (14 ed.). Pearson.

Larson, R. & B. Edwards (2018). *Calculus with CalcChat and CalcView*. Cengage Learning.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (3 ed.), Volume 2. Harbra.

Stewart, J. (2013). *Cálculo* (7 ed.), Volume 2. Cengage.

Stewart, J. (2016). *Calculus* (8 ed ed.). Cengage Learning.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás