Curso de Cálculo Diferencial e Integral 2

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral 2

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

8 de novembro de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa	Plano de Curso
Metodologia de Avaliação	Prazos para entrega das atividades
Bibliografia Básica	Horário das aulas síncronas
Controle de frequência	Horário de Atendimento

Sequências

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Uma sequencia $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

- (a) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$
- (b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 3$
- (c) $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$
  Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Exercício **Semana 1 - Exercício 1**

Liste os oito primeiros termos das sequências:

(a) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{n}$

(b) $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

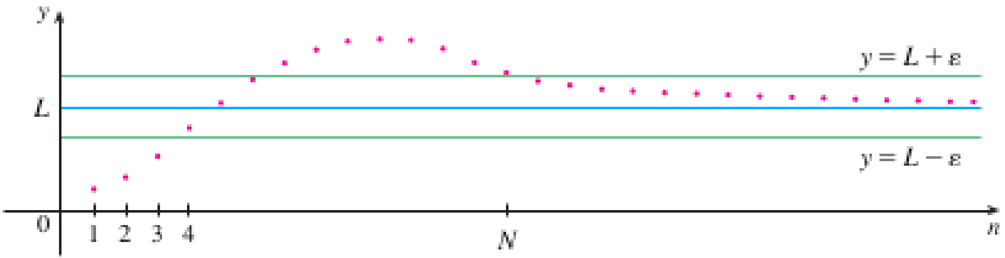
Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \quad n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

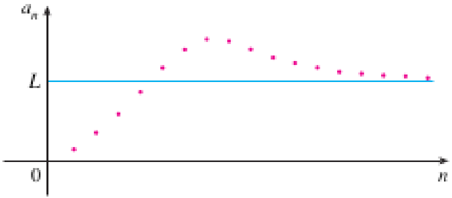


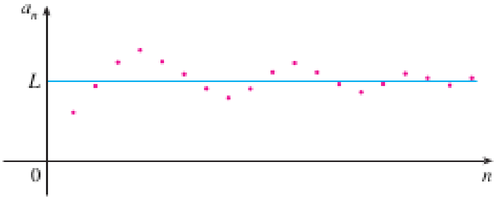
Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.





Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequencias convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

(b) $b_n = \dfrac{1}{2n}$

(c) $c_n = \dfrac{(n+1)^2}{n}$

(d) $d_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}$

(e) $e_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

(f) $f_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

(g) $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{ n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Exercício **Semana 1 - Exercício 2**

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

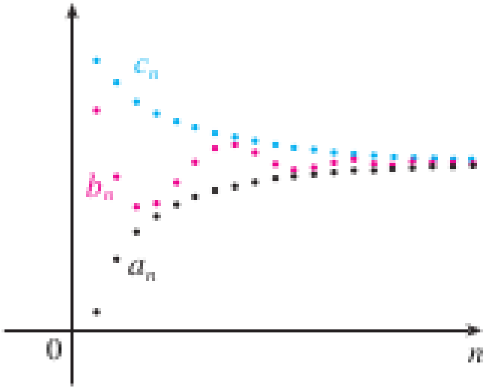
a) $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b) $\left\{ \dfrac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c) $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.



Exercício **Semana 1 - Exercício 3**

Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

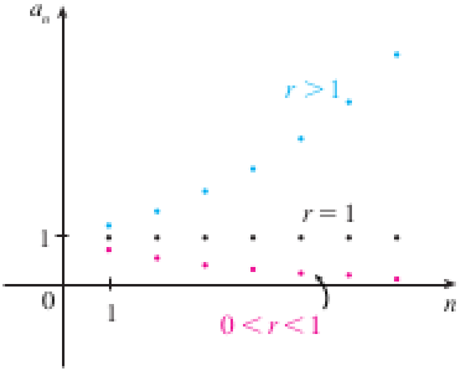
Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

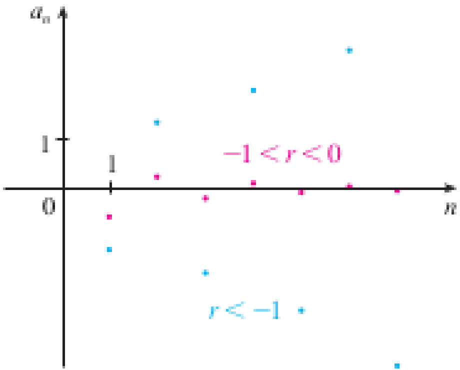
A Sequência r^n

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e divergente para os demais valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$





Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b) $a_n = \dfrac{5^n}{3^{n-1}}$

Exercício **Semana 1 - Exercício 4**

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

(a) $a_n = 2^n 5^{-n}$

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamada decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é monótona se for crescente ou decrescente.

Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a) $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$

b) $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$

c) $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

Exercício **Semana 2 - Exercício 1**

Determine se a sequência $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício **Semana 2 - Exercício 2**

Determine se a sequência $\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício **Semana 2 - Exercício 3**

Determine se a sequência $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Sequência Limitada

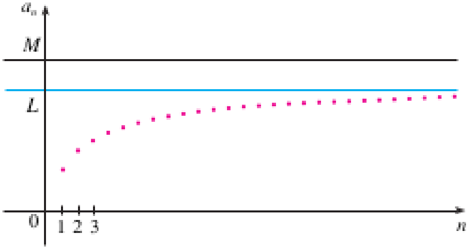
Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é limitada inferiormente se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada.



Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

1. Toda sequência monótona limitada é convergente.
2. Toda sequência monótona convergente é limitada.

Exercício

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

Exercício **Semana 2 - Exercício 4**

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$ é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?

Séries

Série

Uma série (infinita) é a soma dos termos de uma sequência (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Soma parcial

A n-ésima soma parcial s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \tag{1}$$

Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é convergente com soma s quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

com s finito. A série será chamada divergente quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Dada a série infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ determine:

- (a) Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{s_n\}$.
- (b) A fórmula para s_n em termos de n.

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício **Semana 4 - Exercício 3**

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica. Se for convergente, calcule sua soma.

Exercício **Semana 3 - Exercício 1**

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

(a) $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$

(b) $s_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

A Série Geométrica

Série Geométrica

A série geométrica é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad a \neq 0$$

onde r é a razão comum e a é o primeiro termo.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela razão comum r.

Quando $r < 0$ teremos a chamada série geométrica alternada que será estuda com mais detalhes nas próximas aulas.

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e divergente se $|r| \geq 1$,

$r = 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$r \neq 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a) $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Exercício **Semana 3 - Exercício 2**

Encontre a soma da série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$ se for convergente.

Exercício **Semana 3 - Exercício 3**

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

a) Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n-ésimo comprimido?

b) Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\ldots$ como uma razão de inteiros (fração).

Exercício **Semana 3 - Exercício 4**

Escreva o número $5,125\overline{48}$ como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

A Série Harmônica

Série Harmônica

A série harmônica é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Divergência da Série Harmônica

A série harmônica é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{16} &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> 1+\frac{4}{2}
\end{aligned}$$

Analogamente, chegamos que $s_{32} > 1+\frac{5}{2}$. Note que dessa forma $s_{2^n} > 1+\frac{n}{2}$ o que implica que:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto, $\{s_n\}$ é uma série divergente.

O Teste da Divergência

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3+2n^2+n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

Lembre-se $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Exercício **Semana 4 - Exercício 1**

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ diverge.

Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe ou $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. (FALSO!!!)

Exercício **Semana 4 - Exercício 2**

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

Propriedades operacionais das séries convergentes

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Exercício **Semana 4 - Exercício 4**

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3n}\right]$ é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

O Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$.

Note que essa função é contínua (toda função racional é contínua no seu domínio) e positiva nos reais.

Além disso $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$.

Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é decrescente em $(0, \infty)$.

Portanto essa função é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

Desta forma:

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+4}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_1^{n} \frac{1}{x^2+4}dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2}\left(\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}[\theta]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{n}{2}\right)-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Substituindo $x = 2\tan\theta$

Lembre-se que $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

Note que a integral indefinida é convergente, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado converge.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{5}{4x-3}$.

Note que essa função é contínua (toda função racional é contínua no seu domínio) para $x \neq \frac{3}{4}$ e positiva para todo $x > \frac{3}{4}$.

É fácil ver que f é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3}dx &= 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{4x-3}dx \\ &= 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4}\ln|4x-3|\right]_1^n \\ &= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln|4n-3| \\ &= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty\end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é divergente, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado divergente.

Exercício **Semana 5 - Exercício 1**

Determine se a série $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{19}+\cdots$ é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

Exercício **Semana 5 - Exercício 2**

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ é convergente ou divergente.

A Série-p

Série-p (Série hiper-harmônica)

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série-p, ou série hiper-harmônica, é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Convergência da série-p

A série-p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar, $p < 0$, $p = 0$ e $p > 0$:

$p < 0$ Nesse caso

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$p = 0$ Assim

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$p > 0$ Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio $(D_f = \mathbb{R}^*)$.
A função é sempre positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty]$.
Portanto, podemos aplicar o Teste da Integral.
Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$p = 1$ $$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}(\ln n - \ln 1) = \infty$$

$0 < p < 1$ $$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{-p}dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^n =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \infty$$

$p > 1$ $$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \cdots = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o Teste da Integral garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a série-p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício **Semana 5 - Exercício 3**

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + \sqrt{n}}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício **Semana 5 - Exercício 4**

Determine se a série $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \cdots$ é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.

Testes da Comparação Termo à Termo

Teste da comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma série-p com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma série convergente.

Como $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \dfrac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Note que se trata da série harmônica, portanto é uma série divergente.

Como $\dfrac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n+1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = 4/3$ e razão comum $r = 1/3$.
Note que $r < 1$, então essa série geométrica será convergente.
Como $\displaystyle\frac{4}{3^n+1} \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Testes da Comparação de Limites

Teste da comparação de limites

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

1. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.
2. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
3. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$.

Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Note que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2+2n}}{\dfrac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/n^2}{(n^2+2n)/n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2/n} = 1
\end{aligned}$$

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$.
Note que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty
\end{aligned}$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ com $p = 3/5$.

Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^{3/5}}$.

Note que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{(n^3+5)^{1/5}}}{\dfrac{1}{n^{3/5}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/5}}{(n^3+5)^{1/5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+5}\right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+5}\right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3/{\color{red}n^3}}{(n^3+5)/{\color{red}n^3}}\right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+5/n^3}\right)^{1/5} = 1
\end{aligned}
$$

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$ é convergente.

Exercício **Semana 6 - Exercícios 1 à 4**

Determine se a série convergente ou divergente usando os testes da comparação:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$$
2. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2 k}{1+k^2}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\exp n}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$$

Séries Alternadas

Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O n-ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n$$

$$a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. Note que $b_n = |a_n|$.

Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz as seguintes condições

1. $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Convergência da Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é convergente.

Note que $b_n = \dfrac{1}{n}$. Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

e além disso

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{n+2}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2}$$

$$= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1$$

para todo n, ou seja $b_{n+1} < b_n$ para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do Teste da Série Alternada está satisfeita.

Agora veja que

$$\begin{aligned}
b_1 &= {}^1\!/_5 = 0.2 \\
b_2 &= {}^1\!/_3 = 0.333 \\
b_3 &= {}^9\!/_{31} \approx 0.29032258\ldots \\
b_4 &= {}^4\!/_{17} \approx 0.235294117\ldots
\end{aligned}$$

Dessa forma fica claro se a série não é totalmente decrescente, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo n_0. Para verificarmos se existe um n_0 que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à b_n.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função $f(x)$ é decrescente sempre que $f'(x) < 0$. Note que $f'(x)$ será negativa sempre que

$$
\begin{aligned}
8 - x^3 &< 0 \\
x^3 &> 8 \\
x &> 2
\end{aligned}
$$

Logo a série dada é decrescente para todo $n > 2$, portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do Teste da Série Alternada e sua convergência é garantida. Somando-se $b_1 = {}^1/_5$ e $b_2 = {}^1/_3$ à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

Exercício

Semana 7 - Exercício 1 à 4

Teste as séries quando à convergência ou divergência.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-3}{2n+1}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n}\sqrt{n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n^2}$$

Teste da Convergência Absoluta

Série Absolutamente Convergente

Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita condicionalmente convergente se for convergente mas não for absolutamente convergente.

A série harmônica alternada é um exemplo de série condicionalmente convergente.

Teste da Convergência Absoluta

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Série-p (Hiper-harmônica) Alternada

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série-p, ou série hiper-harmônica, alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

Convergência da Série-p Alternada

A série-p alternada é absolutamente convergente se $p \geq 1$ e condicionalmente convergente se $p < 1$.

Exercício

Prove o resultado anterior.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} &= \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots\end{aligned}$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.
Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$|\cos(\pi n/3)| \leq 1 \quad \text{para todo } n$$
$$\frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+$$

Note que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série-p com $p = 2$, portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o Teste da Comparação nos garante que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$ é convergente.

Dessa forma a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Teste da Razão

Teste da Razão

Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ o Teste da Razão é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\\ &= \frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo Teste da Razão a série dada é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente.

Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{4}{n^2}} = 1$$

Nessas condições o Teste da Razão é inconclusivo! Dessa forma precisamos recorrer à outros testes para responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o Teste da Comparação com a série harmônica. Como a série harmônica é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, consequentemente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é condicionalmente convergente.

Teste da Raiz

Teste da Raiz

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o Teste da Raiz é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo Teste da Raiz. E o Teste da Convergência Absoluta nos garante que ela será convergente.

Exercício **Semana 8 - Exercícios 1 à 4**

Teste as seguintes séries com relação à convergência e divergência.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Rearranjo de termos em séries

Rearranjo de termos em séries absolutamente convergentes

Se uma série for absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de seus termos tem a mesma soma s.

Rearranjo de termos em séries condicionalmente convergentes

Se uma série for condicionalmente convergente, então para todo $r \in \mathbb{R}$ existe um rearranjo dos termos dessa série para o qual a sua somatória será r.

Seja a série harmônica alternada (condicionalmente convergente):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \tag{2}$$

Multiplique a série por $^1/_2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \tag{3}$$

Acrescente zeros entre os termos dessa série:

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \tag{4}$$

Somando os termos correspondentes das séries (2) e (4):

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3\ln 2}{2} \tag{5}$$

Perceba que as séries (2) e (5) são iguais.

Exercício

Apresente uma ordenação para os termos da série harmônica alternada de modo que a sua somatória seja igual a 1.