

Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto

thiago.vedovatto@ifg.edu.br

thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

23 de outubro de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: **Plano de Curso e Outras Informações** que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa

Plano de Curso

Metodologia de Avaliação

Prazos para entrega das atividades

Bibliografia Básica

Horário das aulas síncronas

Controle de frequência

Horário de Atendimento



Sequências

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Uma sequência $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

a $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$

b $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 3$

c $f_1 = 1, f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$

Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Liste os oito primeiros termos das sequências:

a $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{n}$

b $a_1 = 1, a_n = \frac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

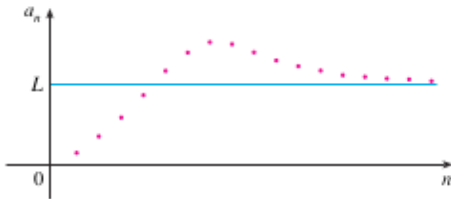


Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.



Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

a $a_n = \frac{1}{n^2}$

b $b_n = \frac{1}{2n}$

c $c_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

d $d_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n}$

e $e_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

f $f_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

g $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{ n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

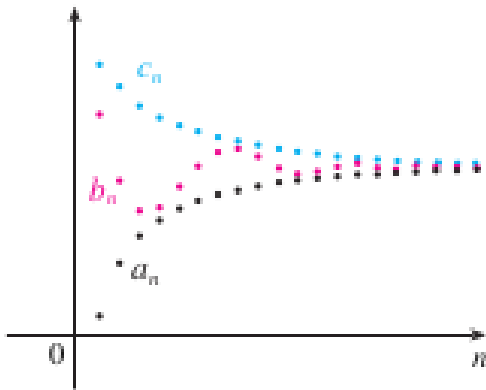
a $a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b $\left\{ \frac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.



Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

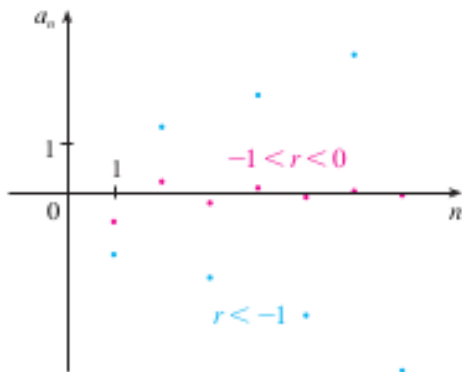
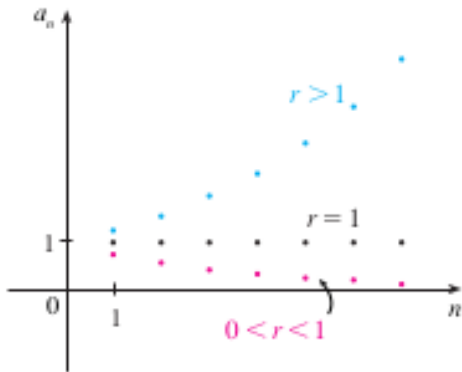
Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A Sequência r^n

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é **convergente** se $-1 < r \leq 1$ e **divergente** para os demais valores de r .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$



Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b $a_n = \frac{5^n}{3^{n-1}}$

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a $a_n = 2^n 5^{-n}$

b $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. É chamada **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$

b $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

c $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

Exercício

Semana 2 - Exercício 1

Determine se a sequência $\left\{ \frac{1 - 2n^2}{n^2} \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício

Semana 2 - Exercício 2

Determine se a sequência $\left\{ \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício

Semana 2 - Exercício 3

Determine se a sequência $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Sequência Limitada

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.



Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

- ① Toda sequência monótona limitada é convergente.
- ② Toda sequência monótona convergente é limitada.

Exercício

Mostre que a sequência $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

Mostre que a sequência $\left\{ \frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right\}$ é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?



Séries

Série

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Soma parcial

A n -ésima **soma parcial** s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é **convergente** com soma s quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com s finito. A série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Dada a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ determine:

- a Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{s_n\}$.
- b A fórmula para s_n em termos de n .

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício

Semana 4 - Exercício 3

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma.

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

a $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b $s_n = \frac{n^2}{n+1}$

A Série Geométrica

Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad a \neq 0$$

onde r é a **razão comum** e a é o **primeiro termo**.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum** r .

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é **convergente** se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se $|r| \geq 1$,

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$$r \neq 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Encontre a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$ se for convergente.

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$ como uma razão de inteiros (fração).

Escreva o número $5,125\overline{48}$ como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

A Série Harmônica

Série Harmônica

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Divergência da Série Harmônica

A **série harmônica** é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \dots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{16} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
 &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
 &> 1 + \frac{4}{2}
 \end{aligned}$$

Analogamente, chegamos que $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$. Note que dessa forma $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ o que implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto, $\{s_n\}$ é uma série divergente.

O Teste da Divergência

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3 + 2n^2 + n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

Lembre-se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ diverge.

Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existe ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. (FALSO!!!)

Exercício

Semana 4 - Exercício 2

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

Propriedades operacionais das séries convergentes

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3n} \right]$ é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

O Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente se, e somente se, a integral imprópria**

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **convergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente**.

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **divergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais.

Além disso $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$.

Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é **decrecente** em $(0, \infty)$.

Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em $[1, \infty)$.

Desta forma:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arctan \left(\frac{n}{2} \right) - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Substituindo $x = 2 \tan \theta$

Lembre-se que $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{5}{4x-3}$.

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) para $x \neq \frac{3}{4}$ e **positiva** para todo $x > \frac{3}{4}$.

É fácil ver que f é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrescente** em $[1, \infty)$.

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3} dx &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{4x-3} dx \\
 &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} \ln |4x-3| \right]_1^n \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |4n-3| \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty
 \end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **divergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **divergente**.

Exercício

Semana 5 - Exercício 1

Determine se a série $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$ é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

Exercício

Semana 5 - Exercício 2

Determine se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ é convergente ou divergente.



A Série- p

Série- p

A série- p (série potência) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar, $p < 0$, $p = 0$ e $p > 0$:

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$$p = 0$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$$p > 0$$

Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é **contínua** em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R}^*$).

A função é sempre **positiva** e **decrecente** no intervalo $[1, \infty]$.

Portanto, podemos aplicar o **Teste da Integral**.

Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$p = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$0 < p < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- p** é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 4}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 3

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 5n}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 4

Determine se a série $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots$ é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.