Cálculo Diferencial e Integral 2

DPAA-2.086

Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
`thiagovedovatto.site`

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

7 de dezembro de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

Sequências

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Uma sequencia $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

a. $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$
b. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 3$
c. $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$
   Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Exercício

Semana 1 - Exercício 1

Liste os oito primeiros termos das sequências:

- a) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{n}$
- b) $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

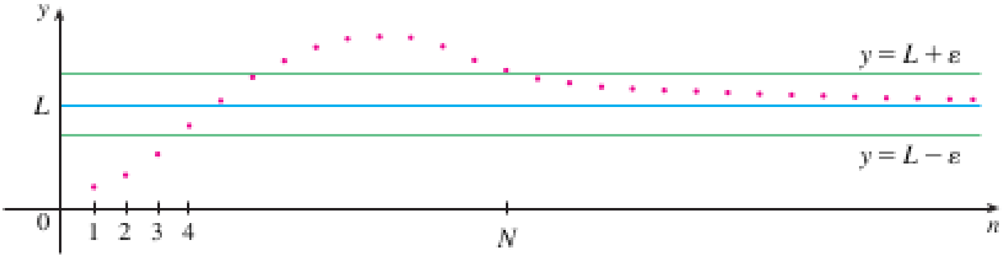
Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \quad n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

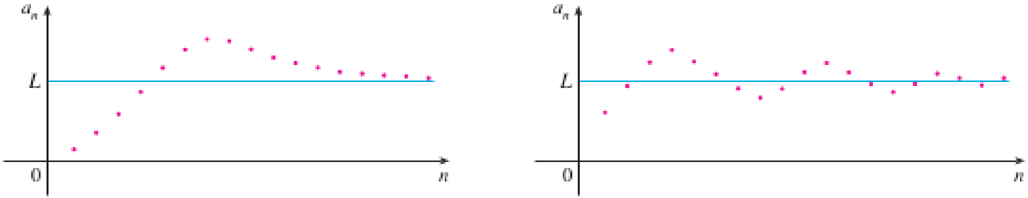


Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequencias convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

a. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

b. $b_n = \dfrac{1}{2n}$

c. $c_n = \dfrac{(n+1)^2}{n}$

d. $d_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}$

e. $e_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

f. $f_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

g. $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{ n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Exercício

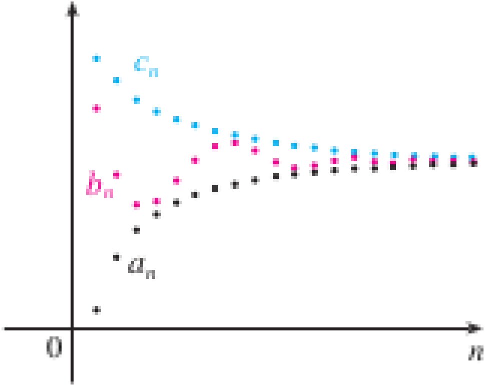
Semana 1 - Exercício 2

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

- a) $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$
- b) $\left\{ \dfrac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$
- c) $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício — **Semana 1 - Exercício 3**

Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

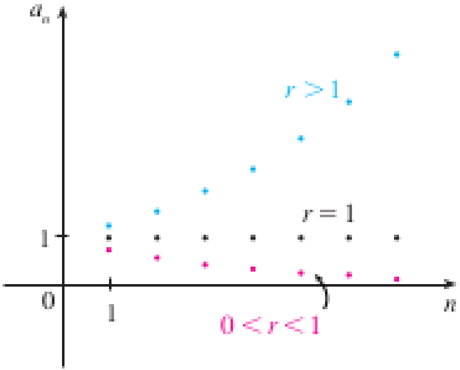
A Sequência r^n

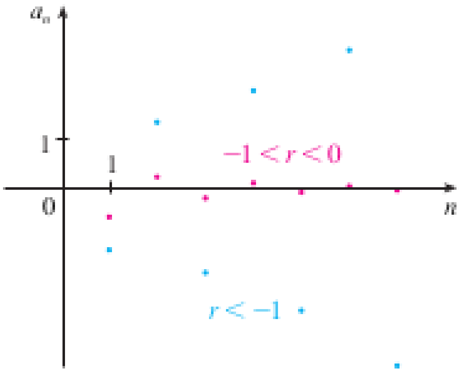
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e divergente para os demais valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$





Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a. $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b. $a_n = \dfrac{5^n}{3^{n-1}}$

Exercício

Semana 1 - Exercício 4

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a) $a_n = 2^n 5^{-n}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamada decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é monótona se for crescente ou decrescente.

Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a. $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$

b. $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$

c. $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

Exercício — **Semana 2 - Exercício 1**

Determine se a sequência $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício — **Semana 2 - Exercício 2**

Determine se a sequência $\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício — **Semana 2 - Exercício 3**

Determine se a sequência $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Sequência Limitada

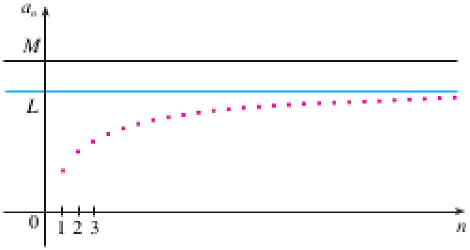
Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é limitada inferiormente se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada.



Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

1. Toda sequência monótona limitada é convergente.
2. Toda sequência monótona convergente é limitada.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 2 - Exercício 4

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$ é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?

Séries

Série

Uma série (infinita) é a soma dos termos de uma sequência (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Soma parcial

A n-ésima soma parcial s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \tag{1}$$

Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é convergente com soma s quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

com s finito. A série será chamada divergente quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Dada a série infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ determine:

a) Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{s_n\}$.

b) A fórmula para s_n em termos de n.

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício

Semana 4 - Exercício 3

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica. Se for convergente, calcule sua soma.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 3 - Exercício 1

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

a) $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$

b) $s_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

A Série Geométrica

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série Geométrica

A série geométrica é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad a \neq 0$$

onde r é a razão comum e a é o primeiro termo.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela razão comum r.

Quando $r < 0$ teremos a chamada série geométrica alternada que será estuda com mais detalhes nas próximas aulas.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e divergente se $|r| \geq 1$,

$\boxed{r = 1}$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$\boxed{r \neq 1}$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a. $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Exercício

Semana 3 - Exercício 2

Encontre a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$ se for convergente.

Exercício

Semana 3 - Exercício 3

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a. Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n-ésimo comprimido?
- b. Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\ldots$ como uma razão de inteiros (fração).

Exercício

Semana 3 - Exercício 4

Escreva o número $5,125\overline{48}$ como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

A Série Harmônica

Série Harmônica

A série harmônica é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Divergência da Série Harmônica

A série harmônica é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_{16} &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> 1+\frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

Analogamente, chegamos que $s_{32} > 1 + \dfrac{5}{2}$. Note que dessa forma $s_{2^n} > 1 + \dfrac{n}{2}$ o que implica que:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto, $\{s_n\}$ é uma série divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

O Teste da Divergência

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Condição de Convergência

Se a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3+2n^2+n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

Lembre-se $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Exercício

Semana 4 - Exercício 1

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ diverge.

Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe ou $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. (FALSO!!!)

Exercício — **Semana 4 - Exercício 2**

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

Propriedades operacionais das séries convergentes

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Exercício **Semana 4 - Exercício 4**

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3n}\right]$ é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

O Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

Note que essa função é contínua (toda função racional é contínua no seu domínio) e positiva nos reais.

Além disso $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$.

Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é decrescente em $(0, \infty)$.

Portanto essa função é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

Desta forma:

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^2+4}\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2}\left(\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\theta\right]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{n}{2}\right)-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Substituindo $x = 2\tan\theta$

Lembre-se que $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

Note que a integral indefinida é convergente, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado converge.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \dfrac{5}{4x-3}$.

Note que essa função é contínua (toda função racional é contínua no seu domínio) para $x \neq \dfrac{3}{4}$ e positiva para todo $x > \dfrac{3}{4}$.

É fácil ver que f é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3}dx &= 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{4x-3}dx \\
&= 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4}\ln|4x-3|\right]_1^n \\
&= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln|4n-3| \\
&= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty
\end{aligned}
$$

Note que a integral indefinida é divergente, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 1

Determine se a série $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{19}+\cdots$ é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

Exercício

Semana 5 - Exercício 2

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ é convergente ou divergente.

A Série-p

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Série-p (Série hiper-harmônica)

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série-p, ou série hiper-harmônica, é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Convergência da série-p

A série-p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar, $p < 0$, $p = 0$ e $p > 0$:

$p < 0$ Nesse caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

INSTITUTO FEDERAL Goiás

$p = 0$ Assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$p > 0$ Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R}^*$).
A função é sempre positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty]$.
Portanto, podemos aplicar o Teste da Integral.
Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$p = 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n\to\infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$

$0 < p < 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$p > 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \cdots = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$

Desse modo o Teste da Integral garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a série-p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^{2}}$ é convergente ou divergente.

Exercício **Semana 5 - Exercício 3**

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\sqrt{n}}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício **Semana 5 - Exercício 4**

Determine se a série $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{81}+\cdots$ é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.

Testes da Comparação Termo à Termo

Teste da comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma série-p com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma série convergente.

Como $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \dfrac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que se trata da série harmônica, portanto é uma série divergente.

Como $\dfrac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = {}^4\!/_3$ e razão comum $r = {}^1\!/_3$.
Note que $r < 1$, então essa série geométrica será convergente.
Como $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Testes da Comparação de Limites

Teste da comparação de limites

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

1. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.
2. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
3. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$.

Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Note que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2+2n}}{\dfrac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/n^2}{(n^2+2n)/n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2/n} = 1
\end{aligned}$$

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$.
Note que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ com $p = 3/5$.

Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^{3/5}}$.

Note que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{(n^3+5)^{1/5}}}{\dfrac{1}{n^{3/5}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/5}}{(n^3+5)^{1/5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+5} \right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+5} \right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3/n^3}{(n^3+5)/n^3} \right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+5/n^3} \right)^{1/5} = 1
\end{aligned}
$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$ é convergente.

Exercício

Semana 6 - Exercícios 1 à 4

Determine se a série convergente ou divergente usando os testes da comparação:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$$
2. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2 k}{1+k^3}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\exp n}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$$

Séries Alternadas

Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O n-ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n$$

$$a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. Note que $b_n = |a_n|$.

Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz as seguintes condições

1. $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n
2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Convergência da Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é convergente.

Note que $b_n = \dfrac{1}{n}$. Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

e além disso

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{n+2}{n(n+1)}}$$
$$= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2}$$
$$= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2}$$
$$= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1$$

para todo n, ou seja $b_{n+1} < b_n$ para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do Teste da Série Alternada está satisfeita.

Agora veja que

$$
\begin{aligned}
b_1 &= {}^1\!/_5 = 0.2\\
b_2 &= {}^1\!/_3 = 0.333\\
b_3 &= {}^9\!/_{31} \approx 0.29032258\ldots\\
b_4 &= {}^4\!/_{17} \approx 0.235294117\ldots
\end{aligned}
$$

Dessa forma fica claro se a série não é totalmente decrescente, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo n_0. Para verificarmos se existe um n_0 que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à b_n.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8-x^3)}{(x^3+4)^2}$$

A função $f(x)$ é decrescente sempre que $f'(x) < 0$. Note que $f'(x)$ será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$
$$x^3 > 8$$
$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo $n > 2$, portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do Teste da Série Alternada e sua convergência é garantida.
Somando-se $b_1 = 1/5$ e $b_2 = 1/3$ à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-3}{2n+1}$ é convergente ou divergente.

Note que $b_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$. E claramente:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1} = \frac{5}{2} \neq 0$$

Note que a segunda condição do Teste da Série Alternada não foi satisfeita, mas AINDA NÃO PODEMOS AFIRMAR que a série seja divergente. Para tanto note que:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-3}{2n+1} = \nexists$$

Portanto, pelo Teste da Divergência o limite não existe.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n}\sqrt{n}$ é convergente ou divergente.

Note que $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{e^n}$.
Precisamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Para tanto note que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n}$$

Aplicando o Teorema de L'Hopital obtemos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}e^n} = 0$$

Portanto a segunda condição do Teorema da Série Alternada está satisfeita.

É fácil verificar que: $b_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Precisamos mostrar que $b_{n+1} \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$, para tanto observe que:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} \leq b_n &\iff \ln b_{n+1} \leq \ln b_n \\
&\iff \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}\right) \leq \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{e^n}\right) \\
&\iff \ln\sqrt{n+1} - \ln e^{n+1} \leq \ln\sqrt{n} - \ln e^n \\
&\iff \frac{1}{2}\ln(n+1) - n - 1 \leq \frac{1}{2}\ln(n) - n \\
&\iff \frac{1}{2}[\ln(n+1) - \ln(n)] \leq 1 \\
&\iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 2
\end{aligned}$$

Da última equivalência obtém-se que:

$$\frac{n+1}{n} \leq e^2 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que para qualquer valor de $n \in \mathbb{Z}_+$ a expressão acima é sempre verdadeira, portanto, a primeira condição do Teorema da Série Alternada está satisfeita.
Logo a série é convergente por esse resultado.

Exercício

Semana 7 - Exercício 1 à 4

Teste as séries quando à convergência ou divergência.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-3}{2n+1}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n}\sqrt{n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n^2}$$

Teste da Convergência Absoluta

Série Absolutamente Convergente

Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita condicionalmente convergente se for convergente mas não for absolutamente convergente.

A série harmônica alternada é um exemplo de série condicionalmente convergente.

Teste da Convergência Absoluta

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série-p (Hiper-harmônica) Alternada

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série-p, ou série hiper-harmônica, alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

Convergência da Série-p Alternada

A série-p alternada é absolutamente convergente se $p \geq 1$, condicionalmente convergente se $0 < p < 1$ e divergente se $p \leq 0$.

Exercício

Prove o resultado anterior.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} = \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.
Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Para tanto veja que:

$$|\cos(\pi n/3)| \leq 1 \quad \text{para todo } n$$
$$\frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+$$

Note que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série-p com $p = 2$, portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o Teste da Comparação nos garante que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$ é convergente.

Dessa forma a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Teste da Razão

Teste da Razão

Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ o Teste da Razão é inconclusivo.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\\ &= \frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Agora note que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo Teste da Razão a série dada é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} = 1$$

Nessas condições o Teste da Razão é inconclusivo! Dessa forma precisamos recorrer à outros testes para responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o Teste da Comparação com a série harmônica. Como a série harmônica é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, consequentemente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é condicionalmente convergente.

Teste da Raiz

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Teste da Raiz

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o Teste da Raiz é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo Teste da Raiz. E o Teste da Convergência Absoluta nos garante que ela será convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 8 - Exercícios 1 à 4

Teste as seguintes séries com relação à convergência e divergência.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Rearranjo de termos em séries

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Rearranjo de termos em séries absolutamente convergentes

Se uma série for absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de seus termos tem a mesma soma s.

Rearranjo de termos em séries condicionalmente convergentes

Se uma série for condicionalmente convergente, então para todo $r \in \mathbb{R}$ existe um rearranjo dos termos dessa série para o qual a sua somatória será r.

Seja a série harmônica alternada (condicionalmente convergente):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \tag{2}$$

Multiplique a série por $1/2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \tag{3}$$

Acrescente zeros entre os termos dessa série:

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \tag{4}$$

Somando os termos correspondentes das séries (2) e (4):

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3\ln 2}{2} \tag{5}$$

Perceba que as séries (2) e (5) são iguais.

Exercício

Apresente uma ordenação para os termos da série harmônica alternada de modo que a sua somatória seja igual a 1.

Série de Potências

Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n[\phi(x)]^n = c_0 + c_1[\phi(x)] + c_2[\phi(x)]^2 + c_3[\phi(x)]^3 + \cdots$$

onde ϕ é uma função de x e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Série de Potências Centrada em a

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

é chamada de série de potências centrada em a, onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = a$;
2. A série converge para todo x;
3. Existe um $R > 0$ tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

Determinação do Raio de Convergência

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tal que $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ exista ou seja infinito. Então o Raio de Convergência R será.

1. $R = \infty$ se $L = 0$;
2. $R = 0$ se $L = \infty$;
3. $R = {}^1/_L$ caso contrário.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Qual o raio de convergência?

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos.
Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão.
Para tanto note que:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Nesse caso a série é convergente para todo valor de x, pois $0 < 1$ e o raio de convergência é infinito.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$. Qual o raio de convergência?

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = n!x^n, \qquad a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Nesse caso a série é divergente para todo $x \neq 0$ e o raio de convergência é zero.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$.

Qual o raio de convergência?

Reescrevendo a série obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{2x}{3}\right)^n$$

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{2x}{3}\right)^n \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\left(\frac{2x}{3}\right)^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1}\left(\dfrac{2x}{3}\right)^{n+1}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\dfrac{2x}{3}\right)^{n}}\right|$$

$$= \frac{2|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{2|x|}{3}$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{2|x|}{3} < 1 \iff -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

e divergente se

$$\frac{2|x|}{3} > 1 \iff x > \frac{3}{2} \text{ ou } x < -\frac{3}{2}$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Caso $x = {}^{3}/_{2}$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Que é uma série convergente (série harmônica alternada).
Caso $x = -{}^{3}/_{2}$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Que é uma série divergente (série harmônica). Portanto a série dada é convergente para todo $x \in (-{}^{3}/_{2}, {}^{3}/_{2}]$ e o raio de convergência é ${}^{3}/_{2}$.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}$.

Qual o raio de convergência?

Se $x = -2$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq -2$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} \qquad a_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1} \ln(n+1)}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1}\ln(n+1)}}{\dfrac{(x+2)^n}{2^n\ln n}}\right| \\
&= \frac{|x+2|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \\
&= \frac{|x+2|}{2}
\end{aligned}
$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{|x+2|}{2} < 1 \iff -4 < x < 0$$

e divergente se

$$\frac{|x+2|}{2} > 1 \iff x > 0 \text{ ou } x < -4$$

Caso $x = 0$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Que é uma série divergente pelo Teste da Comparação com a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Caso $x = -4$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

Que é uma série convergente pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série dada é convergente para todo $x \in [-4, 0)$ e o raio de convergência é 2.

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$$

Exercício

Semana 9 - Exercícios 1 à 4

Determine os intervalos e raios de convergência das séries de potências dadas:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Representando funções usando séries

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos $a = 1$ e $r = -x^3$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1-(-x^3)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x^3| < 1 \iff -1 < x^3 < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Expresse $f(x) = -\dfrac{3}{x+1}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos $a = -3$ e $r = -x$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-x)^n = \frac{-3}{1-(-x)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-1)^n x^n = \frac{-3}{1+x}$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 3x^n = \frac{-3}{1+x}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{1}{3x+7}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x+7} = \frac{1}{7\left(\frac{3x}{7}+1\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{3x}{7}}$$

Se na série geométrica fizermos $a = {}^{1}/_{7}$ e $r = {}^{-3x}/_{7}$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{-3x}{7}\right)^n = \frac{\frac{1}{7}}{1-\left(-\frac{3x}{7}\right)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7}\left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$\left|\frac{-3x}{7}\right| < 1 \iff -1 < \frac{3x}{7} < 1 \iff -\frac{7}{3} < x < \frac{7}{3} \iff x \in (-{}^{7}/_{3}, {}^{7}/_{3})$$

e diverge caso contrário.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{1-(-3x+1)}$$

Se na série geométrica fizermos $a = 1$ e $r = -3x+1$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-3x+1)^n = \frac{1}{3x} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x-1)^n = \frac{1}{3x}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|3x-1| < 1 \iff -1 < 3x-1 < 1 \iff 0 < x < \frac{2}{3} \iff x \in (0, {}^2\!/\!_3)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{7}{3x(3x+7)}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Note que:

$$\frac{7}{3x(3x+7)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x+7}$$

Nos exercícios anteriores vimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x-1)^n = \frac{1}{3x} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7}\left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Como as séries acima convergem, respectivamente, nos intervalos $(0, {}^2\!/_3)$ e $(-{}^7\!/_3, {}^7\!/_3)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[(3x-1)^n - \frac{1}{7}\left(\frac{3x}{7}\right)^n\right]$$

a série será convergente sempre que $x \in (0, {}^2\!/_3) \cap (-{}^7\!/_3, {}^7\!/_3) = (0, {}^2\!/_3)$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 10 - Exercícios 1 à 4

Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

1. $f(x) = \dfrac{3}{2 - x^5}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{2 + x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$
4. $f(x) = \dfrac{1 - 2x + x^2}{x}$

Derivação e Integração de Séries de Potências

Derivação e Integração Termo à Termo

Se a série de potências $\sum_{i=1}^{\infty}(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R>0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

O raio de convergência da série resultante é R.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série geométrica de potências

Se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Demonstração.

Note que a série dada é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Portando é convergente quando $|x| < 1$. $\square$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Note que pela série geométrica de potências se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Portanto, se $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$.

Acabamos de mostrar que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 1 + 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

Portanto, se $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}.$$

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\ln(1+x)$.

Lembre-se que:

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\, dx.$$

Note que pela série geométrica de potências se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\tan^{-1} x$.

Lembre-se que:

$$\tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Note que pela série geométrica de potências se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 11 - Exercícios 1 à 3

Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

1. $f(x) = \ln(2 - x)$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(2 - x)^2}$
3. $f(x) = \tan^{-1} 2x$

Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é definida pela seguinte série:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Convergência da Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é convergente para todo número real.

Para mostrar a convergência de $J_0(x)$ basta aplicar o teste da razão.

Exercício

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 0. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Função de Bessel de Ordem 1

A função de Bessel de ordem 1 é definida pela seguinte série:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Exercício

Semana 11 - Exercício 4

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 1. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

Séries de Taylor e Maclaurin

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Se f tiver uma representação em série de potências centrada em a com raio de convergência R, ou seja $|x-a|<R$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots$$

Dessa forma podemos construir a seguinte tabulação para as derivadas sucessivas de f:

Expansão em séries de potências centradas em a	$x = a$
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$	$f(a) = c_0$
$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots$	$f'(a) = c_1$
$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 + \cdots$	$f''(a) = 2c_2$
$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + 120c_6(x-a)^3 + \cdots$	$f'''(a) = 6c_3$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = n!c_n + \cdots$	$f^{(n)}(a) = n!c_n$

Isolando o n-ésimo coeficiente obtemos:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Existência de representação em séries de potências

Se f tiver uma representação em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série de Taylor centrada em a

Se f tiver uma expansão em série de potências em torno de a, então ela será da forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Série de Maclaurin

Se f tiver uma expansão em série de potências em torno de 0, então ela será da forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Polinômio de Taylor

$$T_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Convergência da Série de Taylor

Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x-a| < R$, então f é igual à soma da sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

Nem sempre é fácil avaliar o limite acima, por isso é comum recorrer à Desigualdade de Taylor que veremos à seguir.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Desigualdade de Taylor

Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para $|x-a| \leq d$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \text{ real}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à e^x.

Passo 1: Encontre uma série de potencias que supostamente represente a função desejada.

Note que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo par $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, portanto $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n. Dessa forma se existir uma série de potencias de Maclaurin para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potencias obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Para tanto note que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Considere um número positivo d tal que $|x| \leq d$ e note que:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq e^d$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para e^x em todos os valores de x.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Encontre a série de Taylor centrada em 2 para $f(x) = e^x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à e^x.

Passo 1: Encontre uma série de potências que supostamente represente a função desejada.

Note que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo par $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, portanto $f^{(n)}(a) = e^a$ para todo n. Dessa forma se existir uma série de potências de Taylor para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potências obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|}{n+1} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Para tanto note que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Considere um número positivo d tal que $|x - a| \leq d$ e note que:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq e^d$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para e^x em todos os valores de x.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à $\operatorname{sen} x$.

Passo 1: Encontre uma série de potencias que supostamente represente a função desejada.

Note que:

$$
\begin{array}{c|c}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Dessa forma se existir uma série de potências de Maclaurin para f, então ela será da forma:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
&= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potencias obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^2|}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Note que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo n e para todo número positivo d tal que $|x| \leq d$ e além disso:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq 1$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{para } |x| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para $\operatorname{sen} x$.

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^k$, onde k é um número real qualquer.

Passo 1: Encontre uma série de potencias que supostamente represente a função desejada.

Note que:

$$
\begin{array}{l|l}
f(x) = (1+x)^k & f(0) = 1 \\
f'(x) = k(1+x)^{k-1} & f'(0) = k \\
f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\
f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{array}
$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$$
\begin{array}{l|l}
f(x) = (1+x)^k & f(0) = 1 \\
f'(x) = k(1+x)^{k-1} & f'(0) = k \\
f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\
f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{array}
$$

Note que $f^{(n)}(x) = \dfrac{k!}{(k-n)!}(1+x)^{k-n}$ para todo par de inteiros n e k, portanto

$f^{(n)}(0) = \dfrac{k!}{(k-n)!}$ para todo n e k.

Dessa forma se existir uma série de potencias de Maclaurin para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potencias obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|k-n|}{n+1}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| = |x| < 1$$

Logo a série dada converge no intervalo $(-1,1)$ e diverge fora desse intervalo.
A convergência em -1 e 1 dependerá dos valores de k.
A série converge em 1 se $-1 < k \leq 0$ e em ambas as extremidades se $k \geq 0$.

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Não é simples mostrar diretamente que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ nesse caso. O livro Stewart (2013, ex.85 sec.: 11.10) dá uma dica de como proceder.

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Série Binomial

Se k for um número real qualquer e $|x| < 1$, então:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 12 - Exercícios 1 e 2

Ache uma representação em série de Maclaurin para a função dada e determine o raio de convergência.

1. $f(x) = \operatorname{senh} x$
2. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2-x}}$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ExercícioE

ncontre uma uma série de potências de x para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

e use essa série para obter uma série de potências de x para

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e por fim encontre uma série para $\sin^{-1} x$.

Exercício

Semana 12 - Exercícios 3 e 4

Ache uma representação em série de Taylor centrada em a para $f(x) = \operatorname{sen} x$ e determine o raio de convergência.

3. $f(x) = \operatorname{sen} x$
4. $f(x) = \ln x$

Exercício

Use a série binomial para encontrar a série de MacLaurin para a função dada e determine seu raio de convergência:

- a) $f(x) = (3-x)^{-2}$
- b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$
- c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Exercício

Calcule com precisão de até três casas decimais de precisão, o valor da integral definida (use alguma técnica baseada em séries de potência):

- a) $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3}dx$
- b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Referências

Algumas referências clássicas para um bom curso de cálculo: Stewart (2016), Leithold (1994), Gonçalves & Flemming (2007), Guidorizzi (2008), Larson & Edwards (2018), Adams & Essex (2018), Hass et al. (2018).

Adams, R. A. & C. Essex (2018). *Calculus: A Complete Course*. Pearson.

Gonçalves, M. B. & D. M. Flemming (2007). *Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas* (2 ed.). Pearson.

Guidorizzi, H. L. (2008). *Um curso de cálculo* (5 ed.), Volume 4. LTC.

Hass, J., C. Heil, G. B. Thomas, & M. D. Weir (2018). *Thomas' Calculus* (14 ed.). Pearson.

Larson, R. & B. Edwards (2018). *Calculus with CalcChat and CalcView*. Cengage Learning.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (3 ed.), Volume 2. Harbra.

Stewart, J. (2013). *Cálculo* (7 ed.), Volume 2. Cengage.

Stewart, J. (2016). *Calculus* (8 ed ed.). Cengage Learning.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás