Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
`thiagovedovatto.site`

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

27 de setembro de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa	Plano de Curso
Metodologia de Avaliação	Prazos para entrega das atividades
Bibliografia Básica	Horário das aulas síncronas
Controle de frequência	Horário de Atendimento

Sequências

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Uma sequencia $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

- (a) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$
- (b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 3$
- (c) $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$
  Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Exercício **Semana 1 - Exercício 1**

Liste os oito primeiros termos das sequências:

- (a) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{n}$
- (b) $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

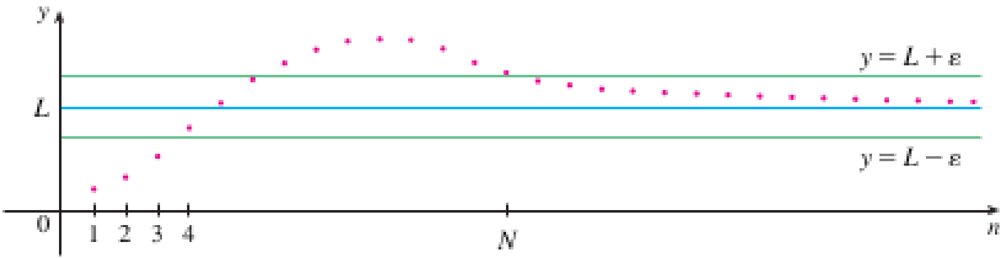
Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \quad n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

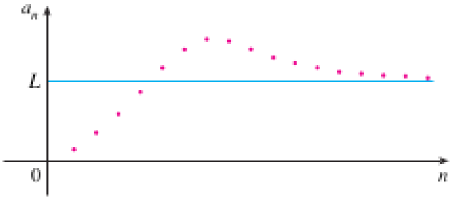


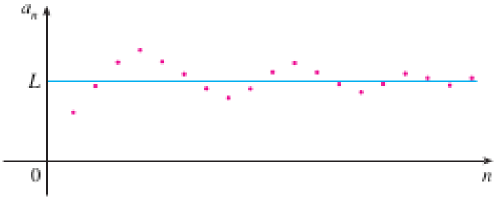
Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.





Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequencias convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

(b) $b_n = \dfrac{1}{2n}$

(c) $c_n = \dfrac{(n+1)^2}{n}$

(d) $d_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}$

(e) $e_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

(f) $f_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

(g) $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{ n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Exercício

Semana 1 - Exercício 2

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

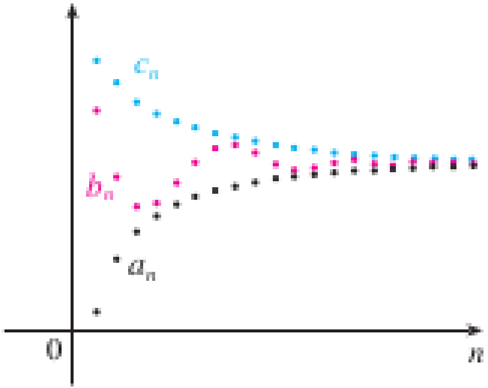
a) $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b) $\left\{ \dfrac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c) $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.



Exercício **Semana 1 - Exercício 3**

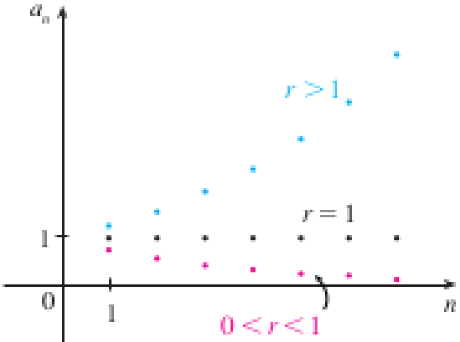
Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

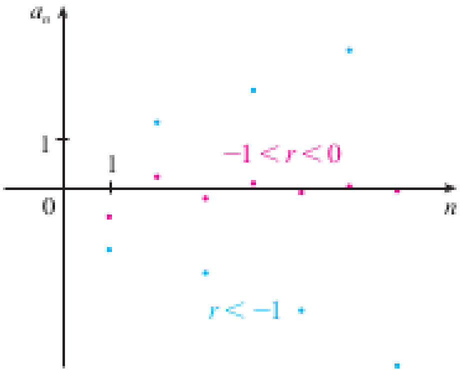
Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e divergente para os demais valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$





Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b) $a_n = \dfrac{5^n}{3^{n-1}}$

Exercício **Semana 1 - Exercício 4**

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

(a) $a_n = 2^n 5^{-n}$

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamada decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é monótona se for crescente ou decrescente.

Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a) $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$

b) $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$

c) $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

Exercício

Semana 2 - Exercício 1

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a) $\left\{ \dfrac{1 - 2n^2}{n^2} \right\}$

b) $\left\{ \cos\left(\dfrac{n\pi}{3} \right) \right\}$

c) $\left\{ \dfrac{n^n}{n!} \right\}$

Sequência Limitada

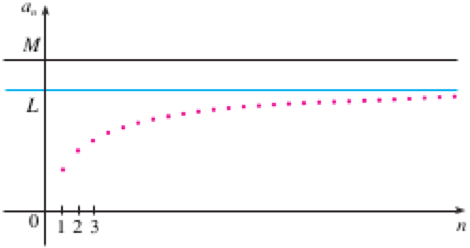
Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é limitada inferiormente se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada.



Teoremas da Convergência Monótona

1. Toda sequência monótona limitada é convergente.
2. Toda sequência monótona convergente é limitada.

Exercício

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

Exercício **Semana 2 - Exercício 2**

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$ é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?

Séries

Série

Uma série (infinita) é a soma dos termos de uma sequência (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Soma parcial

A n-ésima soma parcial s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \tag{1}$$

Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é convergente quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

com s finito. A série será chamada divergente quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Dada a série infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ determine:

- (a) Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{s_n\}$.
- (b) A fórmula para s_n em termos de n.

Exercício **Semana 2 - Exercício 3**

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à essa sequência

a) $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$

b) $s_n = \dfrac{n^2}{n-1}$

Série Geométrica

A série geométrica é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad a \neq 0$$

onde r é a razão comum e a é o primeiro termo.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela razão comum r.

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e divergente se $|r| \geq 1$,

$r = 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$r \neq 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a) $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Exercício **Semana 2 - Exercício 4**

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

a) Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n-ésimo comprimido?

b) Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\ldots$ como uma razão de inteiros (fração).

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Série Harmônica

A série harmônica é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Exercício

Mostre que a série harmônica é divergente.

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica. Se for convergente, calcule sua soma