Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
`thiagovedovatto.site`

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

23 de setembro de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa	Plano de Curso
Metodologia de Avaliação	Prazos para entrega das atividades
Bibliografia Básica	Horário das aulas síncronas
Controle de frequência	Horário de Atendimento

Sequências

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Uma sequencia $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

- (a) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$
- (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + 3$
- (c) $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$
  Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Exercício **Semana 1 - Exercício 1**

Liste os oito primeiros termos das sequências:

a) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{n}$

b) $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \quad n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.

Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequencias convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

(b) $b_n = \dfrac{1}{2n}$

(c) $c_n = \dfrac{(n+1)^2}{n}$

(d) $d_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}$

(e) $e_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

(f) $f_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$

(g) $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Exercício **Semana 1 - Exercício 2**

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

a) $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b) $\left\{ \dfrac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c) $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Exercício **Semana 1 - Exercício 3**

Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

Se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e divergente para os demais valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b) $a_n = \dfrac{5^n}{3^{n-1}}$

Exercício **Semana 1 - Exercício 4**

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a) $a_n = 2^n 5^{-n}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamada decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é monótona se for crescente ou decrescente.

Sequência Limitada

Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é limitada inferiormente se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada.

Teorema da Convergência Monótona

Toda sequência monótona limitada é convergente.