

# Cálculo Diferencial e Integral 2

DPAA-2.086

Thiago VedoVatto

[thiago.vedovatto@ifg.edu.br](mailto:thiago.vedovatto@ifg.edu.br)

[thiagovedovatto.site](http://thiagovedovatto.site)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Campus de Goiânia

28 de novembro de 2021

## Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: **Plano de Curso e Outras Informações** que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa

Plano de Curso

Metodologia de Avaliação

Prazos para entrega das atividades

Bibliografia Básica

Horário das aulas síncronas

Controle de frequência

Horário de Atendimento

# Sequências

## Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Uma sequência  $\{a_n\}$  ou  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

## Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

a  $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$

b  $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 3$

c  $f_1 = 1, f_2 = 1$  e  $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$  para  $n \geq 3$

Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Liste os oito primeiros termos das sequências:

a  $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{n}$

b  $a_1 = 1, a_n = \frac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

## Limite de uma Sequência

Uma sequência  $\{a_n\}$  tem **limite**  $L$  e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se para cada  $\epsilon > 0$  existir um inteiro correspondente  $N$  tal que

$$\text{se } n > N \text{ então } |a_n - L| < \epsilon$$

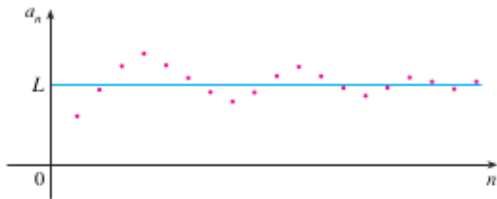
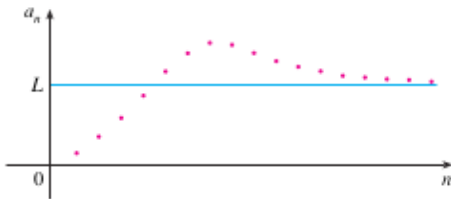


## Valor Limite de uma Sequência

Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  e  $f(n) = a_n$  quando  $n$  é um inteiro, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

## Sequência Divergente

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  significa que para cada número positivo  $M$  existe um inteiro  $N$  tal que se  $n > N$  então  $a_n > M$ .





## Propriedades dos limites das sequências

Se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  forem sequências convergentes e  $c$  for uma constante, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

## Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

a  $a_n = \frac{1}{n^2}$

b  $b_n = \frac{1}{2n}$

c  $c_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

d  $d_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n}$

e  $e_n = \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

f  $f_n = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

g  $g_n = n^2$

## Exercício

Determine se a sequência  $\left\{ n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) \right\}$  converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

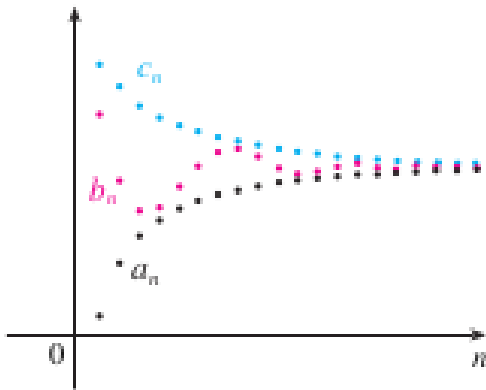
a  $a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b  $\left\{ \frac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c  $a_n = \cos n^2$

## Teorema do Confronto dos Limites para seqüências

Se  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para  $n \geq n_0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .



Use o Teorema do Confronto dos Limites para seqüências para provar o seguinte resultado:

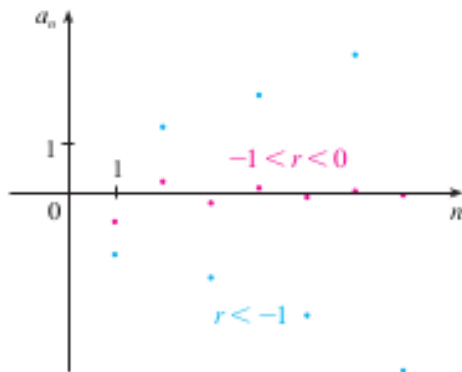
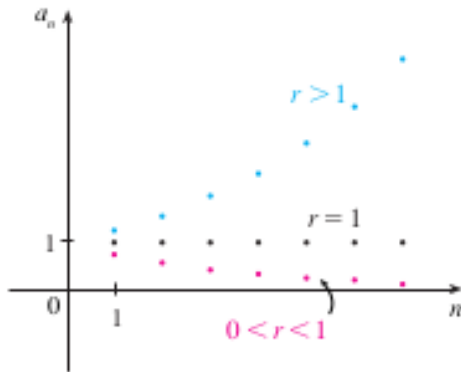
Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

## A Sequência $r^n$

## Sequência $r^n$

A sequência  $\{r^n\}$  é **convergente** se  $-1 < r \leq 1$  e **divergente** para os demais valores de  $r$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$





## Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b  $a_n = \frac{5^n}{3^{n-1}}$

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a  $a_n = 2^n 5^{-n}$

b  $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

# Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

## Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência  $\{a_n\}$  é **crescente** se  $a_n < a_{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ , isso é,  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ . É chamada **decrescente** se  $a_n > a_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ . Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

## Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a  $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$

b  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

c  $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

### Exercício

### Semana 2 - Exercício 1

Determine se a sequência  $\left\{ \frac{1 - 2n^2}{n^2} \right\}$  é crescente, decrescente ou não-monótonas.

### Exercício

### Semana 2 - Exercício 2

Determine se a sequência  $\left\{ \cos \left( \frac{n\pi}{3} \right) \right\}$  é crescente, decrescente ou não-monótonas.

### Exercício

### Semana 2 - Exercício 3

Determine se a sequência  $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$  é crescente, decrescente ou não-monótonas.

## Sequência Limitada

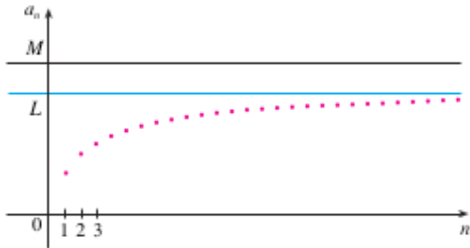
Uma sequência  $\{a_n\}$  é **limitada superiormente** se existir um número  $M$  tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número  $m$  tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então  $\{a_n\}$  é uma **sequência limitada**.



## Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

- ① Toda sequência monótona limitada é convergente.
- ② Toda sequência monótona convergente é limitada.



## Exercício

Mostre que a sequência  $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$  é convergente.

Mostre que a sequência  $\left\{ \frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right\}$  é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?

**Séries**

## Série

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

## Soma parcial

A  $n$ -ésima **soma parcial**  $s_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

### Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é **convergente** com soma  $s$  quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com  $s$  finito. A série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

## Exercício

Dada a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  determine:

- a Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais  $\{s_n\}$ .
- b A fórmula para  $s_n$  em termos de  $n$ .

## Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

## Exercício

### Semana 4 - Exercício 3

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$  é convergente ou divergente expressando  $s_n$  como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma.



Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

a  $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b  $s_n = \frac{n^2}{n+1}$

## A Série Geométrica

## Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad a \neq 0$$

onde  $r$  é a **razão comum** e  $a$  é o **primeiro termo**.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum**  $r$ .

Quando  $r < 0$  teremos a chamada **série geométrica alternada** que será estudada com mais detalhes nas próximas aulas.

## Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é **convergente** se  $|r| < 1$  e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se  $|r| \geq 1$ ,

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$$r \neq 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

## Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a  $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Encontre a soma da série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$  se for convergente.

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o  $n$ -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

## Exercício

Escreva o número  $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$  como uma razão de inteiros (fração).



Escreva o número  $5,125\overline{48}$  como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

## A Série Harmônica

## Série Harmônica

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

## Divergência da Série Harmônica

A **série harmônica** é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais

$s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \dots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{16} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
 &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
 &> 1 + \frac{4}{2}
 \end{aligned}$$

Analogamente, chegamos que  $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$ . Note que dessa forma  $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$  o que implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto,  $\{s_n\}$  é uma série divergente.

## O Teste da Divergência

## Condição de Convergência

Se a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  for convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

## Teste da Divergência

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existir ou se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

### Exercício

Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3 + 2n^2 + n}$  diverge.

### Exercício

Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + n}$  diverge.

### Exercício

Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  diverge.

Lembre-se  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$



Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$  diverge.

## Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  é divergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . (FALSO!!!)

### Exercício

### Semana 4 - Exercício 2

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

## Propriedades operacionais das séries convergentes

## Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  séries convergentes e  $c$  é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\pi}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3n} \right]$  é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

## O Teste da Integral

## O Teste da Integral

Suponha que  $f$  seja uma função contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$  e seja  $a_n = f(n)$ . Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente se, e somente se, a integral imprópria  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for convergente**. Em outras palavras:

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **convergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente**.

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **divergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$  é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ .

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais.

Além disso  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$ .

Veja que  $f'(x) < 0$  para todo  $x > 0$ , ou seja, a função  $f$  é **decrecente** em  $(0, \infty)$ .

Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em  $[1, \infty)$ .

Desta forma:



$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \arctan \left( \frac{n}{2} \right) - \arctan \left( \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Substituindo  $x = 2 \tan \theta$

Lembre-se que  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$  é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é  $f(x) = \frac{5}{4x-3}$ .

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) para  $x \neq \frac{3}{4}$  e **positiva** para todo  $x > \frac{3}{4}$ .

É fácil ver que  $f$  é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrescente** em  $[1, \infty)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3} dx &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{4x-3} dx \\
 &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{4} \ln |4x-3| \right]_1^n \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |4n-3| \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty
 \end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **divergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **divergente**.

## Exercício

## Semana 5 - Exercício 1

Determine se a série  $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \dots$  é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

## Exercício

## Semana 5 - Exercício 2

Determine se a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  é convergente ou divergente.

**A Série-*p***

### Série- $p$ (Série hiper-harmônica)

Para um dado  $p \in \mathbb{R}$ , a série- $p$ , ou série hiper-harmônica, é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

### Convergência da série- $p$

A série- $p$  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p \leq 1$ .

Há três casos à considerar,  $p < 0$ ,  $p = 0$  e  $p > 0$ :

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$p = 0$  Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$p > 0$  Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio ( $D_f = \mathbb{R}^*$ ).

A função é sempre positiva e decrescente no intervalo  $[1, \infty]$ .

Portanto, podemos aplicar o Teste da Integral.

Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$\boxed{p = 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$\boxed{0 < p < 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $0 < p \leq 1$ .

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- $p$**  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p < 1$ .



## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$  é convergente ou divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$  é convergente ou divergente.

## Exercício

## Semana 5 - Exercício 3

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + \sqrt{n}}{n^2}$  é convergente ou divergente.

## Exercício

## Semana 5 - Exercício 4

Determine se a série  $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots$  é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.

## Testes da Comparação Termo à Termo

## Teste da comparação termo à termo

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **convergente** e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **convergente**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **divergente** e  $a_n \geq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ .

Note que se trata de uma **série-p** com  $p = 7/6 > 1$ , portanto é uma **série convergente**.

Como  $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando  $n = 1$ , portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo  $n \geq 2$ .

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Note que se trata da **série harmônica**, portanto é uma **série divergente**.

Como  $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$  para todo  $n \geq 2$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é divergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial  $a = 4/3$  e razão comum  $r = 1/3$ .

Note que  $r < 1$ , então essa série geométrica será **convergente**.

Como  $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente pelo

**Teste da Comparação termo à termo.**



## Testes da Comparação de Limites

## Teste da comparação de limites

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**.

- 1 Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$  onde  $c$  é um número finito e  $c > 0$ , então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.
- 2 Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
- 3 Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$  e se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{\ln n}{n}$ . Vamos aplicar o

Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ .

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$ .

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  com  $p = 2$ .

Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n^2}$ .

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 2n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 / \textcolor{red}{n}^2}{(n^2 + 2n) / \textcolor{red}{n}^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2/n} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$  é convergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ .

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty\end{aligned}$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$ .

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$  com  $p = 3/5$ .

Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n^{3/5}}$ .



Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}}{\frac{1}{n^{3/5}}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/5}}{(n^3 + 5)^{1/5}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{n^3 + 5} \right)^{1/5} \\&= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 5} \right)^{1/5} \\&= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 / \cancel{n^3}}{(n^3 + 5) / \cancel{n^3}} \right)^{1/5} \\&= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 5/n^3} \right)^{1/5} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}} \text{ é convergente.}$$

Determine se a série convergente ou divergente usando os testes da comparação:

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$$

$$② \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \sin^2 k}{1 + k^3}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\exp n}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$$

## **Séries Alternadas**

### Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O  $n$ -ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n$$

$$a_n = (-1)^nb_n$$

onde  $b_n$  é um número positivo. Note que  $b_n = |a_n|$ .

### Série Harmônica Alternada

A **série harmônica alternada** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

## Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz as seguintes condições

①  $b_{n+1} \leq b_n$  para todo  $n$

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

## Convergência da Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é convergente.

Note que  $b_n = \frac{1}{n}$ . Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo  $n$ . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$



e além disso

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\ &= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2} \\ &= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} < 1\end{aligned}$$

para todo  $n$ , ou seja  $b_{n+1} < b_n$  para todo  $n$ . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3 + 4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do **Teste da Série Alternada** está satisfeita.

Agora veja que

$$b_1 = 1/5 = 0.2$$

$$b_2 = 1/3 = 0.333$$

$$b_3 = 9/31 \approx 0.29032258 \dots$$

$$b_4 = 4/17 \approx 0.235294117 \dots$$

Dessa forma fica claro se a série **não é totalmente decrescente**, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo  $n_0$ . Para verificarmos se existe um  $n_0$  que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à  $b_n$ .

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função  $f(x)$  é decrescente sempre que  $f'(x) < 0$ . Note que  $f'(x)$  será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$

$$x^3 > 8$$

$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo  $n > 2$ , portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do **Teste da Série Alternada** e sua convergência é garantida.

Somando-se  $b_1 = 1/5$  e  $b_2 = 1/3$  à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n-3}{2n+1}$  é convergente ou divergente.

Note que  $b_n = \frac{5n-3}{2n+1}$ . E claramente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+1} = \frac{5}{2} \neq 0$$

Note que a segunda condição do **Teste da Série Alternada** não foi satisfeita, mas AINDA NÃO PODEMOS AFIRMAR que a série seja divergente. Para tanto note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{5n-3}{2n+1} = \nexists$$

Portanto, pelo **Teste da Divergência** o limite não existe.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} \sqrt{n}$  é convergente ou divergente.

Note que  $b_n = \frac{\sqrt{n}}{e^n}$ .

Precisamos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

Para tanto note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n}$$

Aplicando o Teorema de L'Hopital obtemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}e^n} = 0$$

Portanto a segunda condição do **Teorema da Série Alternada** está satisfeita.

É fácil verificar que:  $b_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}$ .

Precisamos mostrar que  $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ , para tanto observe que:

$$\begin{aligned} b_{n+1} \leq b_n &\iff \ln b_{n+1} \leq \ln b_n \\ &\iff \ln \left( \frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}} \right) \leq \ln \left( \frac{\sqrt{n}}{e^n} \right) \\ &\iff \ln \sqrt{n+1} - \ln e^{n+1} \leq \ln \sqrt{n} - \ln e^n \\ &\iff \frac{1}{2} \ln(n+1) - n - 1 \leq \frac{1}{2} \ln(n) - n \\ &\iff \frac{1}{2} [\ln(n+1) - \ln(n)] \leq 1 \\ &\iff \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) \leq 2 \end{aligned}$$

Da última equivalência obtém-se que:

$$\frac{n+1}{n} \leq e^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Note que para qualquer valor de  $n \in \mathbb{Z}_+$  a expressão acima é sempre verdadeira, portanto, a primeira condição do **Teorema da Série Alternada** está satisfeita. Logo a série é convergente por esse resultado.



Teste as séries quando à convergência ou divergência.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n-3}{2n+1}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} \sqrt{n}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^2}$$

## Teste da Convergência Absoluta

### Série Absolutamente Convergente

Uma série  $\sum a_n$  é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos  $\sum |a_n|$  for convergente.

### Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita **condicionalmente convergente** se for convergente mas não for absolutamente convergente.

A **série harmônica alternada** é um exemplo de série condicionalmente convergente.

### Teste da Convergência Absoluta

Se uma série  $\sum a_n$  for absolutamente convergente, então ela é convergente.

### Série- $p$ (Hiper-harmônica) Alternada

Para um dado  $p \in \mathbb{R}$ , a série- $p$ , ou série hiper-harmônica, alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

### Convergência da Série- $p$ Alternada

A série- $p$  alternada é absolutamente convergente se  $p \geq 1$ , condicionalmente convergente se  $0 < p < 1$  e divergente se  $p \leq 0$ .

### Exercício

Prove o resultado anterior.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$  é convergente ou divergente.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} &= \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots\end{aligned}$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.

Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$\begin{aligned} |\cos(\pi n/3)| &\leq 1 \quad \text{para todo } n \\ \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} &\leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Note que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é uma **série- $p$**  com  $p = 2$ , portanto se trata de uma série convergente,

consequentemente o **Teste da Comparação** nos garante que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$  é convergente.

Dessa forma a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$  é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

## Teste da Razão

## Teste da Razão

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é divergente.

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  o Teste da Razão é inconclusivo.



## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$  é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo **Teste da Razão** a série dada é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

## Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1$$

Nessas condições o **Teste da Razão é inconclusivo!** Dessa forma precisamos recorrer à outros testes para responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o **Teste da Comparação** com a **série harmônica**. Como a **série harmônica** é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, conseqüentemente, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$  é **condicionalmente convergente**.

## Teste da Raiz

## Teste da Raiz

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , então a série  $\sum_{i=1}^n a_n$  é divergente.

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  o Teste da Raiz é inconclusivo.

## Exercício

Determine se a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$  é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo **Teste da Raiz**. E o **Teste da Convergência Absoluta** nos garante que ela será convergente.

Teste as seguintes séries com relação à convergência e divergência.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$



## **Rearranjo de termos em séries**

### Rearranjo de termos em séries absolutamente convergentes

Se uma série for **absolutamente convergente** com soma  $s$ , então qualquer rearranjo de seus termos tem a mesma soma  $s$ .

### Rearranjo de termos em séries condicionalmente convergentes

Se uma série for **condicionalmente convergente**, então para todo  $r \in \mathbb{R}$  existe um rearranjo dos termos dessa série para o qual a sua somatória será  $r$ .

Seja a série harmônica alternada (condicionalmente convergente):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \quad (2)$$

Multiplique a série por  $1/2$ :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \quad (3)$$

Acrescente zeros entre os termos dessa série:

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \dots = \frac{\ln 2}{2} \quad (4)$$

Somando os termos correspondentes das séries (2) e (4):

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3 \ln 2}{2} \quad (5)$$

Perceba que as séries (2) e (5) são iguais.

### Exercício

Apresente uma ordenação para os termos da série harmônica alternada de modo que a sua somatória seja igual a 1.

## Série de Potências

## Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

onde  $x$  é uma **variável** e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

### Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 [\phi(x)] + c_2 [\phi(x)]^2 + c_3 [\phi(x)]^3 + \dots$$

onde  $\phi$  é uma função de  $x$  e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

### Série de Potências Centrada em $a$

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + c_3 (x - a)^3 + \dots$$

é chamada de série de potências centrada em  $a$ , onde  $x$  é uma **variável** e  $c_n$  são constantes chamadas **coeficientes da série**.

## Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , existem apenas três possibilidades:

- 1 A série converge apenas quando  $x = a$ ;
- 2 A série converge para todo  $x$ ;
- 3 Existe um  $R > 0$  tal que a série converge se  $|x - a| < R$  e diverge se  $|x - a| > R$ .

## Determinação do Raio de Convergência

Para uma dada série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  tal que  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  exista ou seja infinito. Então o Raio de Convergência  $R$  será.

- 1  $R = \infty$  se  $L = 0$ ;
- 2  $R = 0$  se  $L = \infty$ ;
- 3  $R = 1/L$  caso contrário.

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Qual o raio de convergência?

Se  $x = 0$  a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando  $x \neq 0$  vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Nesse caso a série é convergente para todo valor de  $x$ , pois  $0 < 1$  e o raio de convergência é infinito.



## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ . Qual o raio de convergência?

Se  $x = 0$  a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando  $x \neq 0$  vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = n!x^n, \quad a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Nesse caso a série é divergente para todo  $x \neq 0$  e o raio de convergência é zero.

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$ .

Qual o raio de convergência?

Reescrevendo a série obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{2x}{3} \right)^n$$

Se  $x = 0$  a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos.

Para analisar a convergência dessa série quando  $x \neq 0$  vamos aplicar o Teste da Razão.

Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{2x}{3} \right)^n \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \left( \frac{2x}{3} \right)^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \left(\frac{2x}{3}\right)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3}\right)^n} \right| \\
 &= \frac{2|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\
 &= \frac{2|x|}{3}
 \end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{2|x|}{3} < 1 \iff -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

e divergente se

$$\frac{2|x|}{3} > 1 \iff x > \frac{3}{2} \text{ ou } x < -\frac{3}{2}$$

Caso  $x = 3/2$  a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{2x}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Que é uma série convergente (série harmônica alternada).

Caso  $x = -3/2$  a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{2x}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Que é uma série divergente (série harmônica). Portanto a série dada é convergente para todo  $x \in (-3/2, 3/2]$  e o raio de convergência é  $3/2$ .

## Exercício

Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}$ .

Qual o raio de convergência?

Se  $x = -2$  a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando  $x \neq -2$  vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} \quad a_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1} \ln(n+1)}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1} \ln(n+1)}}{\frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}} \right| \\
 &= \frac{|x+2|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \\
 &= \frac{|x+2|}{2}
 \end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{|x+2|}{2} < 1 \iff -4 < x < 0$$

e divergente se

$$\frac{|x+2|}{2} > 1 \iff x > 0 \text{ ou } x < -4$$

Caso  $x = 0$  a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Que é uma série divergente pelo Teste da Comparação com a série harmônica  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Caso  $x = -4$  a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

Que é uma série convergente pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série dada é convergente para todo  $x \in [-4, 0)$  e o raio de convergência é 2.

## Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2 + n^2}$$



## Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$$

Determine os intervalos e raios de convergência das séries de potências dadas:

$$① \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

## Representando funções usando séries

## Exercício

Expresse  $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$  como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos  $a = 1$  e  $r = -x^3$  podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1-(-x^3)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x^3| < 1 \iff -1 < x^3 < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

## Exercício

Expresse  $f(x) = -\frac{3}{x+1}$  como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos  $a = -3$  e  $r = -x$  podemos construir a seguinte série:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} ar^n &= \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-x)^n = \frac{-3}{1-(-x)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-1)^n x^n = \frac{-3}{1+x} \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 3x^n = \frac{-3}{1+x}\end{aligned}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

## Exercício

Expresse  $f(x) = \frac{1}{3x+7}$  como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x+7} = \frac{1}{7\left(\frac{3x}{7} + 1\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{1 + \frac{3x}{7}}$$

Se na série geométrica fizermos  $a = 1/7$  e  $r = -3x/7$  podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7} \left(\frac{-3x}{7}\right)^n = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \left(\frac{-3x}{7}\right)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7} \left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$\left|\frac{-3x}{7}\right| < 1 \iff -1 < \frac{3x}{7} < 1 \iff -\frac{7}{3} < x < \frac{7}{3} \iff x \in (-7/3, 7/3)$$

e diverge caso contrário.

## Exercício

Expresse  $f(x) = \frac{1}{3x}$  como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{1 - (-3x + 1)}$$

Se na série geométrica fizermos  $a = 1$  e  $r = -3x + 1$  podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-3x + 1)^n = \frac{1}{3x} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x - 1)^n = \frac{1}{3x}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|3x - 1| < 1 \iff -1 < 3x - 1 < 1 \iff 0 < x < \frac{2}{3} \iff x \in (0, 2/3)$$

e diverge caso contrário.

## Exercício

Expresse  $f(x) = \frac{7}{3x(3x+7)}$  como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Note que:

$$\frac{7}{3x(3x+7)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x+7}$$

Nos exercícios anteriores vimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x-1)^n = \frac{1}{3x} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7} \left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Como as séries acima convergem, respectivamente, nos intervalos  $(0, 2/3)$  e  $(-7/3, 7/3)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ (3x-1)^n - \frac{1}{7} \left(\frac{3x}{7}\right)^n \right]$$

a série será convergente sempre que  $x \in (0, 2/3) \cap (-7/3, 7/3) = (0, 2/3)$ .



Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$① f(x) = \frac{3}{2 - x^5}$$

$$② f(x) = \frac{x^3}{2 + x^3}$$

$$③ f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$④ f(x) = \frac{1 - 2x + x^2}{x}$$

# Derivação e Integração de Séries de Potências

## Derivação e Integração Termo à Termo

Se a série de potências  $\sum_{i=1}^{\infty} (x-a)^n$  tiver um raio de convergência  $R > 0$ , então a função  $f$  definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo  $(a-R, a+R)$  e

$$\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

O raio de convergência da série resultante é  $R$ .

## Série geométrica de potências

Se  $|x| < 1$ , então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

### Demonstração.

Note que a série dada é uma série geométrica com  $a = 1$  e  $r = x$ . Portanto é convergente quando  $|x| < 1$ . □

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

## Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

Note que pela **série geométrica de potências** se  $|x| < 1$ , então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Portanto, se  $|x| < 1$ :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

## Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ .

Acabamos de mostrar que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 1 + 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

Portanto, se  $|x| < 1$ :

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}.$$

## Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para  $\ln(1+x)$ .

Lembre-se que:

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx.$$

Note que pela **série geométrica de potências** se  $|x| < 1$ , então:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

## Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para  $\tan^{-1} x$ .

Lembre-se que:

$$\tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Note que pela **série geométrica de potências** se  $|x| < 1$ , então:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$



Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

①  $f(x) = \ln(2 - x)$

②  $f(x) = \frac{1}{(2 - x)^2}$

③  $f(x) = \tan^{-1} 2x$

## Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é definida pela seguinte série:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

## Convergência da Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é convergente para todo número real.

Para mostrar a convergência de  $J_0(x)$  basta aplicar o teste da razão.

## Exercício

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 0. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

## Função de Bessel de Ordem 1

A função de Bessel de ordem 1 é definida pela seguinte série:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

### Exercício

### Semana 11 - Exercício 4

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 1. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

## Referências

Algumas referências clássicas para um bom curso de cálculo: Stewart (2016), Leithold (1994), Gonçalves & Flemming (2007), Guidorizzi (2008), Larson & Edwards (2018), Adams & Essex (2018), Hass et al. (2018).

---

Adams, R. A. & C. Essex (2018). *Calculus: A Complete Course*. Pearson.

Gonçalves, M. B. & D. M. Flemming (2007). *Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas* (2 ed.). Pearson.

Guidorizzi, H. L. (2008). *Um curso de cálculo* (5 ed.), Volume 4. LTC.

Hass, J., C. Heil, G. B. Thomas, & M. D. Weir (2018). *Thomas' Calculus* (14 ed.). Pearson.

Larson, R. & B. Edwards (2018). *Calculus with CalcChat and CalcView*. Cengage Learning.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (3 ed.), Volume 2. Harbra.

Stewart, J. (2016). *Calculus* (8 ed ed.). Cengage Learning.