Cálculo Diferencial e Integral 2

DPAA-2.086

Thiago VedoVatto
thiago.vedovatto@ifg.edu.br
`thiagovedovatto.site`

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

7 de dezembro de 2021

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: Plano de Curso e Outras Informações que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

- Ementa
- Plano de Curso
- Metodologia de Avaliação
- Prazos para entrega das atividades
- Bibliografia Básica
- Horário das aulas síncronas
- Controle de frequência
- Horário de Atendimento

Sequências

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Uma sequencia $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

a) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n + 3$

c) $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$
Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Exercício

Semana 1 - Exercício 1

Liste os oito primeiros termos das sequências:

a) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{n}$

b) $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

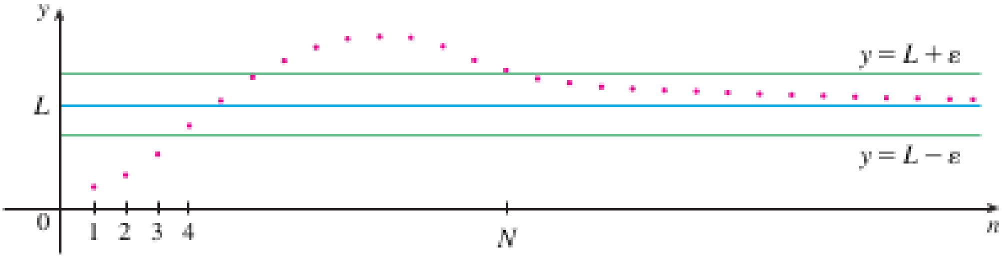
Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \quad n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$



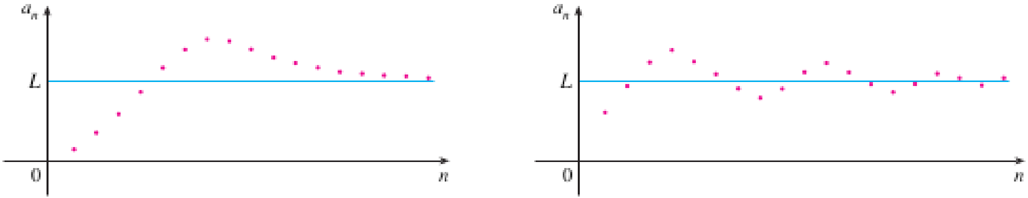
INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.



Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequencias convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

a. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$
b. $b_n = \dfrac{1}{2n}$
c. $c_n = \dfrac{(n+1)^2}{n}$
d. $d_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}$
e. $e_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$
f. $f_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n}\right)^2$
g. $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 1 - Exercício 2

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

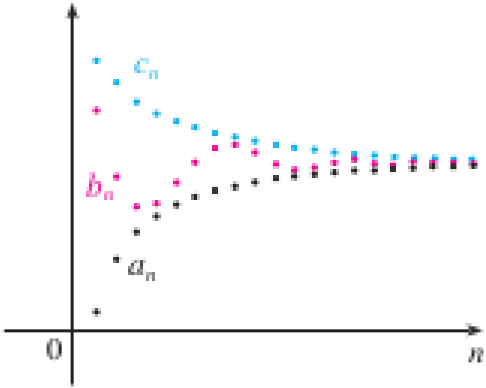
a. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b. $\left\{ \dfrac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c. $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.



Exercício **Semana 1 - Exercício 3**

Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

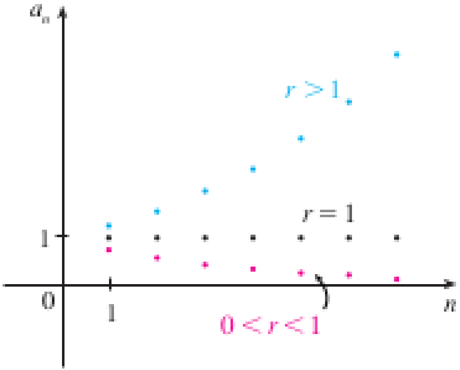
INSTITUTO FEDERAL Goiás

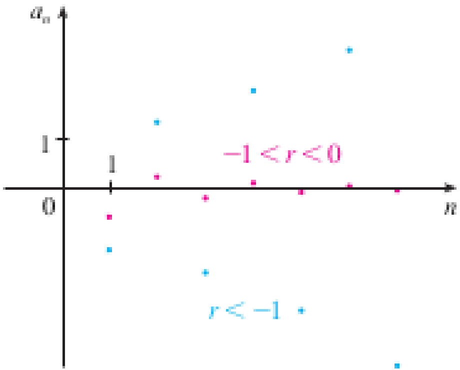
A Sequência r^n

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e divergente para os demais valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$





Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b) $a_n = \dfrac{5^n}{3^{n-1}}$

Exercício

Semana 1 - Exercício 4

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a) $a_n = 2^n 5^{-n}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamada decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é monótona se for crescente ou decrescente.

Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a. $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$

b. $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$

c. $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

Exercício — **Semana 2 - Exercício 1**

Determine se a sequência $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício — **Semana 2 - Exercício 2**

Determine se a sequência $\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício — **Semana 2 - Exercício 3**

Determine se a sequência $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Sequência Limitada

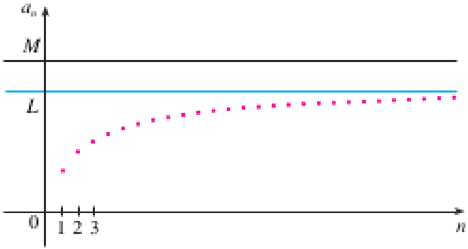
Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é limitada inferiormente se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada.



Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

1. Toda sequência monótona limitada é convergente.
2. Toda sequência monótona convergente é limitada.

Exercício

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 2 - Exercício 4

Mostre que a sequência $\left\{ \dfrac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right\}$ é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?

Séries

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série

Uma série (infinita) é a soma dos termos de uma sequência (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Soma parcial

A n-ésima soma parcial s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \tag{1}$$

Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é convergente com soma s quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

com s finito. A série será chamada divergente quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Dada a série infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ determine:

(a) Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{s_n\}$.

(b) A fórmula para s_n em termos de n.

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício

Semana 4 - Exercício 3

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica. Se for convergente, calcule sua soma.

Exercício

Semana 3 - Exercício 1

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

a. $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$

b. $s_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

A Série Geométrica

Série Geométrica

A série geométrica é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad a \neq 0$$

onde r é a razão comum e a é o primeiro termo.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela razão comum r.

Quando $r < 0$ teremos a chamada série geométrica alternada que será estuda com mais detalhes nas próximas aulas.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e divergente se $|r| \geq 1$,

$r = 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$r \neq 1$ As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a) $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Exercício

Semana 3 - Exercício 2

Encontre a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$ se for convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 3 - Exercício 3

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

a. Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n-ésimo comprimido?
b. Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\ldots$ como uma razão de inteiros (fração).

Exercício

Semana 3 - Exercício 4

Escreva o número $5,125\overline{48}$ como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

A Série Harmônica

Série Harmônica

A série harmônica é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Divergência da Série Harmônica

A série harmônica é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$$
\begin{aligned}
s_{16} &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> 1+\frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

Analogamente, chegamos que $s_{32} > 1+\dfrac{5}{2}$. Note que dessa forma $s_{2^n} > 1+\dfrac{n}{2}$ o que implica que:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto, $\{s_n\}$ é uma série divergente.

O Teste da Divergência

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3+2n^2+n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

Lembre-se $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Exercício **Semana 4 - Exercício 1**

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ diverge.

Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe ou $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. (FALSO!!!)

Exercício

Semana 4 - Exercício 2

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

Propriedades operacionais das séries convergentes

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício **Semana 4 - Exercício 4**

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3n}\right]$ é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

O Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

Note que essa função é contínua (toda função racional é contínua no seu domínio) e positiva nos reais.

Além disso $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$.

Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é decrescente em $(0, \infty)$.

Portanto essa função é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

Desta forma:

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+4}dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x^2+4}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2}\left(\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} [\theta]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \left[\arctan\left(\frac{n}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Substituindo $x = 2\tan\theta$

Lembre-se que $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

Note que a integral indefinida é convergente, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado converge.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \dfrac{5}{4x-3}$.

Note que essa função é contínua (toda função racional é contínua no seu domínio) para $x \neq \dfrac{3}{4}$ e positiva para todo $x > \dfrac{3}{4}$.

É fácil ver que f é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3}dx &= 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{4x-3}dx \\
&= 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4} \ln|4x-3| \right]_1^n \\
&= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln|4n-3| \\
&= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty
\end{aligned}
$$

Note que a integral indefinida é divergente, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 1

Determine se a série $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{19}+\cdots$ é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

Exercício

Semana 5 - Exercício 2

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ é convergente ou divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

A Série-p

Série-p (Série hiper-harmônica)

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série-p, ou série hiper-harmônica, é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Convergência da série-p

A série-p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar, $p < 0$, $p = 0$ e $p > 0$:

$p < 0$ Nesse caso

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$p = 0$ Assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$p > 0$ Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R}^*$).

A função é sempre positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty]$.

Portanto, podemos aplicar o Teste da Integral.

Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$\boxed{p = 1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$

$\boxed{0 < p < 1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-p}dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^n =$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \infty$$

$\boxed{p > 1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \cdots = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{1}{p-1} > 0$

Desse modo o Teste da Integral garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a série-p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$ é convergente ou divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 5 - Exercício 3

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\sqrt{n}}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 4

Determine se a série $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{81}+\cdots$ é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.

Testes da Comparação Termo à Termo

Teste da comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma série-p com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma série convergente.

Como $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}} \leq \dfrac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que se trata da série harmônica, portanto é uma série divergente.

Como $\dfrac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n+1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = {}^{4}/_{3}$ e razão comum $r = {}^{1}/_{3}$.
Note que $r < 1$, então essa série geométrica será convergente.
Como $\frac{4}{3^n+1} \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente pelo Teste da Comparação termo à termo.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Testes da Comparação de Limites

Teste da comparação de limites

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

1. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.
2. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
3. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$.

Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2+2n}}{\dfrac{1}{n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2/n^2}{(n^2+2n)/n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2/n} = 1\end{aligned}$$

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$.

Note que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \end{aligned}$$

Como o limite é infinito, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com termos positivos cujo termo geral é $a_n = \dfrac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a série-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ com $p = 3/5$.

Seu termo geral é $b_n = \dfrac{1}{n^{3/5}}$.

Note que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{(n^3+5)^{1/5}}}{\dfrac{1}{n^{3/5}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/5}}{(n^3+5)^{1/5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+5}\right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+5}\right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3/\color{red}{n^3}}{(n^3+5)/\color{red}{n^3}}\right)^{1/5} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+5/n^3}\right)^{1/5} = 1
\end{aligned}
$$

Como o limite e uma constante positiva, então pelo Teste da Comparação com limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3+5)^{1/5}}$ é convergente.

Exercício

Semana 6 - Exercícios 1 à 4

Determine se a série convergente ou divergente usando os testes da comparação:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$$
2. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2 k}{1 + k^3}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\exp n}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$$

Séries Alternadas

Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O n-ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n$$

$$a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. Note que $b_n = |a_n|$.

Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz as seguintes condições

1. $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n
2. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Convergência da Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é convergente.

Note que $b_n = \dfrac{1}{n}$. Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

e além disso

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{n+2}{n(n+1)}} = \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2} = \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1$$

para todo n, ou seja $b_{n+1} < b_n$ para todo n. Portanto as duas condições do Teste da Série Alternada foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do Teste da Série Alternada está satisfeita.

Agora veja que

$$\begin{aligned} b_1 &= 1/5 = 0.2 \\ b_2 &= 1/3 = 0.333 \\ b_3 &= 9/31 \approx 0.29032258\ldots \\ b_4 &= 4/17 \approx 0.235294117\ldots \end{aligned}$$

Dessa forma fica claro se a série não é totalmente decrescente, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo n_0. Para verificarmos se existe um n_0 que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à b_n.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função $f(x)$ é decrescente sempre que $f'(x) < 0$. Note que $f'(x)$ será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$
$$x^3 > 8$$
$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo $n > 2$, portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do Teste da Série Alternada e sua convergência é garantida. Somando-se $b_1 = {}^1/_5$ e $b_2 = {}^1/_3$ à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-3}{2n+1}$ é convergente ou divergente.

Note que $b_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$. E claramente:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1} = \frac{5}{2} \neq 0$$

Note que a segunda condição do Teste da Série Alternada não foi satisfeita, mas AINDA NÃO PODEMOS AFIRMAR que a série seja divergente. Para tanto note que:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-3}{2n+1} = \nexists$$

Portanto, pelo Teste da Divergência o limite não existe.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n}\sqrt{n}$ é convergente ou divergente.

Note que $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{e^n}$.
Precisamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Para tanto note que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n}$$

Aplicando o Teorema de L'Hopital obtemos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}e^n} = 0$$

Portanto a segunda condição do Teorema da Série Alternada está satisfeita.
É fácil verificar que: $b_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}$.

Precisamos mostrar que $b_{n+1} \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$, para tanto observe que:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} \leq b_n &\iff \ln b_{n+1} \leq \ln b_n \\
&\iff \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}\right) \leq \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{e^n}\right) \\
&\iff \ln\sqrt{n+1} - \ln e^{n+1} \leq \ln\sqrt{n} - \ln e^n \\
&\iff \frac{1}{2}\ln(n+1) - n - 1 \leq \frac{1}{2}\ln(n) - n \\
&\iff \frac{1}{2}[\ln(n+1) - \ln(n)] \leq 1 \\
&\iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 2
\end{aligned}$$

Da última equivalência obtém-se que:

$$\frac{n+1}{n} \leq e^2 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Note que para qualquer valor de $n \in \mathbb{Z}_+$ a expressão acima é sempre verdadeira, portanto, a primeira condição do Teorema da Série Alternada está satisfeita.
Logo a série é convergente por esse resultado.

Exercício

Semana 7 - Exercício 1 à 4

Teste as séries quando à convergência ou divergência.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-3}{2n+1}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n}\sqrt{n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n^2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Teste da Convergência Absoluta

Série Absolutamente Convergente

Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita condicionalmente convergente se for convergente mas não for absolutamente convergente.

A série harmônica alternada é um exemplo de série condicionalmente convergente.

Teste da Convergência Absoluta

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série-p (Hiper-harmônica) Alternada

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série-p, ou série hiper-harmônica, alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

Convergência da Série-p Alternada

A série-p alternada é absolutamente convergente se $p \geq 1$, condicionalmente convergente se $0 < p < 1$ e divergente se $p \leq 0$.

Exercício

Prove o resultado anterior.

Exercício

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} = \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.
Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Para tanto veja que:

$$\left|\cos\left(\pi n/3\right)\right| \leq 1 \quad \text{para todo } n$$
$$\frac{\left|\cos\left(\pi n/3\right)\right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+$$

Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série-p com $p = 2$, portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o Teste da Comparação nos garante que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\cos\left(\pi n/3\right)\right|}{n^2}$ é convergente.

Dessa forma a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\pi n/3\right)}{n^2}$ é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Teste da Razão

Teste da Razão

Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ o Teste da Razão é inconclusivo.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\\ &= \frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo Teste da Razão a série dada é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente.

Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{4}{n^2}}=1$$

Nessas condições o Teste da Razão é inconclusivo! Dessa forma precisamos recorrer à outros testes para responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o Teste da Comparação com a série harmônica. Como a série harmônica é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, consequentemente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é condicionalmente convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Teste da Raiz

Teste da Raiz

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^{n} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o Teste da Raiz é inconclusivo.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine se a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2+1/n}}{n^2}=0<1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo Teste da Raiz. E o Teste da Convergência Absoluta nos garante que ela será convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 8 - Exercícios 1 à 4

Teste as seguintes séries com relação à convergência e divergência.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Rearranjo de termos em séries

Rearranjo de termos em séries absolutamente convergentes

Se uma série for absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de seus termos tem a mesma soma s.

Rearranjo de termos em séries condicionalmente convergentes

Se uma série for condicionalmente convergente, então para todo $r \in \mathbb{R}$ existe um rearranjo dos termos dessa série para o qual a sua somatória será r.

Seja a série harmônica alternada (condicionalmente convergente):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \tag{2}$$

Multiplique a série por $^1/_2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \tag{3}$$

Acrescente zeros entre os termos dessa série:

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+0-\frac{1}{12}+0+\cdots=\frac{\ln 2}{2} \tag{4}$$

Somando os termos correspondentes das séries (2) e (4):

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3\ln 2}{2} \tag{5}$$

Perceba que as séries (2) e (5) são iguais.

Exercício

Apresente uma ordenação para os termos da série harmônica alternada de modo que a sua somatória seja igual a 1.

Série de Potências

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n[\phi(x)]^n = c_0 + c_1[\phi(x)] + c_2[\phi(x)]^2 + c_3[\phi(x)]^3 + \cdots$$

onde ϕ é uma função de x e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Série de Potências Centrada em a

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

é chamada de série de potências centrada em a, onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = a$;
2. A série converge para todo x;
3. Existe um $R > 0$ tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

Determinação do Raio de Convergência

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tal que $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ exista ou seja infinito. Então o Raio de Convergência R será.

1. $R = \infty$ se $L = 0$;
2. $R = 0$ se $L = \infty$;
3. $R = {}^{1}/{}_{L}$ caso contrário.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Qual o raio de convergência?

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos.
Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão.
Para tanto note que:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Nesse caso a série é convergente para todo valor de x, pois $0 < 1$ e o raio de convergência é infinito.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$. Qual o raio de convergência?

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = n!x^n, \qquad a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Nesse caso a série é divergente para todo $x \neq 0$ e o raio de convergência é zero.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$.

Qual o raio de convergência?

Reescrevendo a série obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{2x}{3}\right)^n$$

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{2x}{3}\right)^n \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\left(\frac{2x}{3}\right)^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1}\left(\dfrac{2x}{3}\right)^{n+1}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\dfrac{2x}{3}\right)^{n}}\right| \\
&= \frac{2|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \\
&= \frac{2|x|}{3}
\end{aligned}
$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{2|x|}{3} < 1 \iff -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

e divergente se

$$\frac{2|x|}{3} > 1 \iff x > \frac{3}{2} \text{ ou } x < -\frac{3}{2}$$

Caso $x = {}^3\!/_2$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Que é uma série convergente (série harmônica alternada).
Caso $x = -{}^3\!/_2$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Que é uma série divergente (série harmônica). Portanto a série dada é convergente para todo $x \in (-{}^3\!/_2, {}^3\!/_2]$ e o raio de convergência é ${}^3\!/_2$.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}$.

Qual o raio de convergência?

Se $x = -2$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq -2$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} \qquad a_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1} \ln(n+1)}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1}\ln(n+1)}}{\dfrac{(x+2)^n}{2^n\ln n}}\right| \\
&= \frac{|x+2|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \\
&= \frac{|x+2|}{2}
\end{aligned}
$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{|x+2|}{2} < 1 \iff -4 < x < 0$$

e divergente se

$$\frac{|x+2|}{2} > 1 \iff x > 0 \text{ ou } x < -4$$

Caso $x = 0$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Que é uma série divergente pelo Teste da Comparação com a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Caso $x = -4$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

Que é uma série convergente pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série dada é convergente para todo $x \in [-4, 0)$ e o raio de convergência é 2.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$$

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 9 - Exercícios 1 à 4

Determine os intervalos e raios de convergência das séries de potências dadas:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$$

Representando funções usando séries

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos $a = 1$ e $r = -x^3$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1-(-x^3)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x^3| < 1 \iff -1 < x^3 < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = -\dfrac{3}{x+1}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos $a = -3$ e $r = -x$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-x)^n = \frac{-3}{1-(-x)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-1)^n x^n = \frac{-3}{1+x}$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 3x^n = \frac{-3}{1+x}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{1}{3x+7}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x+7} = \frac{1}{7\left(\frac{3x}{7}+1\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{3x}{7}}$$

Se na série geométrica fizermos $a = {}^{1}\!/_{7}$ e $r = {}^{-3x}\!/_{7}$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{-3x}{7}\right)^n = \frac{\frac{1}{7}}{1-\left(-\frac{3x}{7}\right)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7}\left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$\left|\frac{-3x}{7}\right| < 1 \iff -1 < \frac{3x}{7} < 1 \iff -\frac{7}{3} < x < \frac{7}{3} \iff x \in (-{}^{7}\!/_{3}, {}^{7}\!/_{3})$$

e diverge caso contrário.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{1-(-3x+1)}$$

Se na série geométrica fizermos $a = 1$ e $r = -3x+1$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-3x+1)^n = \frac{1}{3x} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x-1)^n = \frac{1}{3x}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|3x-1| < 1 \iff -1 < 3x-1 < 1 \iff 0 < x < \frac{2}{3} \iff x \in (0, {}^{2}\!/_{3})$$

e diverge caso contrário.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Expresse $f(x) = \dfrac{7}{3x(3x+7)}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Note que:

$$\frac{7}{3x(3x+7)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x+7}$$

Nos exercícios anteriores vimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x-1)^n = \frac{1}{3x} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7}\left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Como as séries acima convergem, respectivamente, nos intervalos $(0, {}^{2}/_{3})$ e $(-{}^{7}/_{3}, {}^{7}/_{3})$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[(3x-1)^n - \frac{1}{7}\left(\frac{3x}{7}\right)^n\right]$$

a série será convergente sempre que $x \in (0, {}^{2}/_{3}) \cap (-{}^{7}/_{3}, {}^{7}/_{3}) = (0, {}^{2}/_{3})$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 10 - Exercícios 1 à 4

Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

1. $f(x) = \dfrac{3}{2 - x^5}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{2 + x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$
4. $f(x) = \dfrac{1 - 2x + x^2}{x}$

Derivação e Integração de Séries de Potências

Derivação e Integração Termo à Termo

Se a série de potências $\sum_{i=1}^{\infty}(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

O raio de convergência da série resultante é R.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série geométrica de potências

Se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Demonstração.

Note que a série dada é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Portando é convergente quando $|x| < 1$. $\square$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Note que pela série geométrica de potências se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Portanto, se $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$.

Acabamos de mostrar que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 1 + 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

Portanto, se $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\ln(1+x)$.

Lembre-se que:

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx.$$

Note que pela série geométrica de potências se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\tan^{-1} x$.

Lembre-se que:

$$\tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Note que pela série geométrica de potências se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 11 - Exercícios 1 à 3

Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

1. $f(x) = \ln(2 - x)$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(2 - x)^2}$
3. $f(x) = \tan^{-1} 2x$

Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é definida pela seguinte série:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Convergência da Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é convergente para todo número real.

Para mostrar a convergência de $J_0(x)$ basta aplicar o teste da razão.

Exercício

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 0. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

Função de Bessel de Ordem 1

A função de Bessel de ordem 1 é definida pela seguinte série:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Exercício

Semana 11 - Exercício 4

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 1. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

Séries de Taylor e Maclaurin

Se f tiver uma representação em série de potências centrada em a com raio de convergência R, ou seja $|x-a|<R$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots$$

Dessa forma podemos construir a seguinte tabulação para as derivadas sucessivas de f:

Expansão em séries de potências centradas em a	$x=a$
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$	$f(a) = c_0$
$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots$	$f'(a) = c_1$
$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 + \cdots$	$f''(a) = 2c_2$
$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + 120c_6(x-a)^3 + \cdots$	$f'''(a) = 6c_3$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = n!c_n + \cdots$	$f^{(n)}(a) = n!c_n$

Isolando o n-ésimo coeficiente obtemos:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Existência de representação em séries de potências

Se f tiver uma representação em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Série de Taylor centrada em a

Se f tiver uma expansão em série de potências em torno de a, então ela será da forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

Série de Maclaurin

Se f tiver uma expansão em série de potências em torno de 0, então ela será da forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Polinômio de Taylor

$$T_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Convergência da Série de Taylor

Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x-a| < R$, então f é igual à soma da sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

Nem sempre é fácil avaliar o limite acima, por isso é comum recorrer à Desigualdade de Taylor que veremos à seguir.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Desigualdade de Taylor

Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para $|x-a| \leq d$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \text{ real}$$

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à e^x.

Passo 1: Encontre uma série de potencias que supostamente represente a função desejada.

Note que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo par $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, portanto $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n. Dessa forma se existir uma série de potencias de Maclaurin para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potencias obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Para tanto note que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Considere um número positivo d tal que $|x| \leq d$ e note que:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq e^d$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para e^x em todos os valores de x.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Encontre a série de Taylor centrada em 2 para $f(x) = e^x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à e^x.

Passo 1: Encontre uma série de potências que supostamente represente a função desejada.

Note que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo par $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, portanto $f^{(n)}(a) = e^a$ para todo n. Dessa forma se existir uma série de potências de Taylor para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potências obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|}{n+1} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Para tanto note que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Considere um número positivo d tal que $|x - a| \leq d$ e note que:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq e^d$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para e^x em todos os valores de x.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à $\operatorname{sen} x$.

Passo 1: Encontre uma série de potencias que supostamente represente a função desejada.

Note que:

$$
\begin{array}{c|c}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Dessa forma se existir uma série de potências de Maclaurin para f, então ela será da forma:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
&= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potencias obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^2|}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Note que $f^{(n+1)}(x) \leq 1$ para todo n e para todo número positivo d tal que $|x| \leq d$ e além disso:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq 1$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{para } |x| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para $\operatorname{sen} x$.

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^k$, onde k é um número real qualquer.

Passo 1: Encontre uma série de potencias que supostamente represente a função desejada.

Note que:

$$
\begin{array}{l|l}
f(x) = (1+x)^k & f(0) = 1 \\
f'(x) = k(1+x)^{k-1} & f'(0) = k \\
f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\
f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
f(x) = (1+x)^k & f(0) = 1 \\
f'(x) = k(1+x)^{k-1} & f'(0) = k \\
f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\
f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{array}
$$

Note que $f^{(n)}(x) = \dfrac{k!}{(k-n)!}(1+x)^{k-n}$ para todo par de inteiros n e k, portanto $f^{(n)}(0) = \dfrac{k!}{(k-n)!}$ para todo n e k.

Dessa forma se existir uma série de potencias de Maclaurin para f então ela será da forma:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n
$$

INSTITUTO FEDERAL Goiás

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potencias obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|k-n|}{n+1}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| = |x| < 1$$

Logo a série dada converge no intervalo $(-1,1)$ e diverge fora desse intervalo.
A convergência em -1 e 1 dependerá dos valores de k.
A série converge em 1 se $-1 < k \leq 0$ e em ambas as extremidades se $k \geq 0$.

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Não é simples mostrar diretamente que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ nesse caso. O livro Stewart (2013, ex.85 sec.: 11.10) dá uma dica de como proceder.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Série Binomial

Se k for um número real qualquer e $|x| < 1$, então:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

Exercício

Semana 12 - Exercícios 1 e 2

Ache uma representação em série de Maclaurin para a função dada e determine o raio de convergência.

1. $f(x) = \operatorname{senh} x$
2. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2-x}}$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

ExercícioE

ncontre uma uma série de potências de x para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

e use essa série para obter uma série de potências de x para

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e por fim encontre uma série para $\sin^{-1} x$.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Exercício

Semana 12 - Exercícios 3 e 4

Ache uma representação em série de Taylor centrada em a para $f(x) = \operatorname{sen} x$ e determine o raio de convergência.

3. $f(x) = \operatorname{sen} x$
4. $f(x) = \ln x$

Exercício

Use a série binomial para encontrar a série de MacLaurin para a função dada e determine seu raio de convergência:

- a) $f(x) = (3-x)^{-2}$
- b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$
- c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Exercício

Calcule com precisão de até três casas decimais de precisão, o valor da integral definida (use alguma técnica baseada em séries de potência):

- a) $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3}dx$
- b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

Referências

Algumas referências clássicas para um bom curso de cálculo: Stewart (2016), Leithold (1994), Gonçalves & Flemming (2007), Guidorizzi (2008), Larson & Edwards (2018), Adams & Essex (2018), Hass et al. (2018).

Adams, R. A. & C. Essex (2018). *Calculus: A Complete Course*. Pearson.

Gonçalves, M. B. & D. M. Flemming (2007). *Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas* (2 ed.). Pearson.

Guidorizzi, H. L. (2008). *Um curso de cálculo* (5 ed.), Volume 4. LTC.

Hass, J., C. Heil, G. B. Thomas, & M. D. Weir (2018). *Thomas' Calculus* (14 ed.). Pearson.

Larson, R. & B. Edwards (2018). *Calculus with CalcChat and CalcView*. Cengage Learning.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (3 ed.), Volume 2. Harbra.

Stewart, J. (2013). *Cálculo* (7 ed.), Volume 2. Cengage.

Stewart, J. (2016). *Calculus* (8 ed ed.). Cengage Learning.

INSTITUTO FEDERAL
Goiás