

Cálculo Diferencial e Integral 2

DPAA-2.086

Thiago VedoVatto

thiago.vedovatto@ifg.edu.br

thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

18 de dezembro de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: **Plano de Curso e Outras Informações** que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa

Plano de Curso

Metodologia de Avaliação

Prazos para entrega das atividades

Bibliografia Básica

Horário das aulas síncronas

Controle de frequência

Horário de Atendimento

Sequências

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Uma sequência $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

a $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$

b $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 3$

c $f_1 = 1, f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$

Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Liste os oito primeiros termos das sequências:

a $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{n}$

b $a_1 = 1, a_n = \frac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

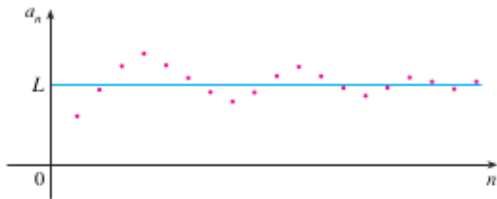
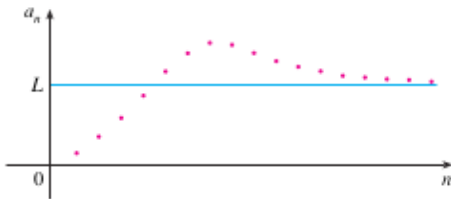


Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.



Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

a $a_n = \frac{1}{n^2}$

b $b_n = \frac{1}{2n}$

c $c_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

d $d_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n}$

e $e_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

f $f_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

g $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{ n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

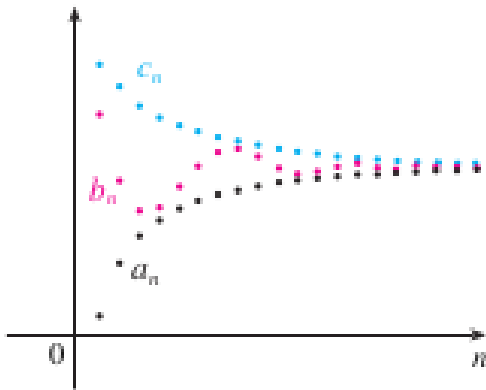
a $a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b $\left\{ \frac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para seqüências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.



Use o Teorema do Confronto dos Limites para seqüências para provar o seguinte resultado:

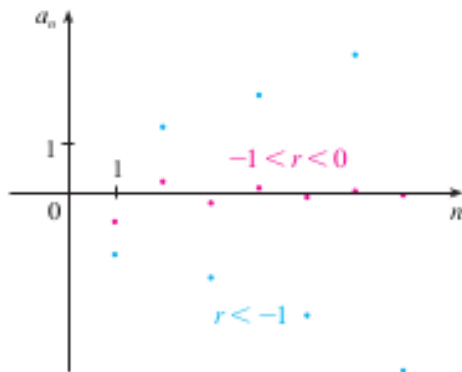
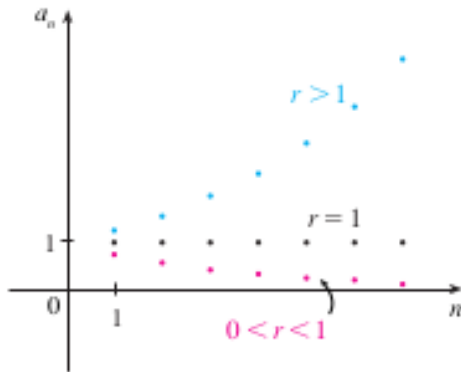
Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A Sequência r^n

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é **convergente** se $-1 < r \leq 1$ e **divergente** para os demais valores de r .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$



Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b $a_n = \frac{5^n}{3^{n-1}}$

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a $a_n = 2^n 5^{-n}$

b $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. É chamada **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$

b $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

c $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

Exercício

Semana 2 - Exercício 1

Determine se a sequência $\left\{ \frac{1 - 2n^2}{n^2} \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício

Semana 2 - Exercício 2

Determine se a sequência $\left\{ \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício

Semana 2 - Exercício 3

Determine se a sequência $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Sequência Limitada

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.



Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

- ① Toda sequência monótona limitada é convergente.
- ② Toda sequência monótona convergente é limitada.

Exercício

Mostre que a sequência $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

Mostre que a sequência $\left\{ \frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right\}$ é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?

Séries

Série

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Soma parcial

A n -ésima **soma parcial** s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é **convergente** com soma s quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com s finito. A série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Dada a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ determine:

- a Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{s_n\}$.
- b A fórmula para s_n em termos de n .

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício

Semana 4 - Exercício 3

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma.

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

a $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b $s_n = \frac{n^2}{n+1}$

A Série Geométrica

Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad a \neq 0$$

onde r é a **razão comum** e a é o **primeiro termo**.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum** r .

Quando $r < 0$ teremos a chamada **série geométrica alternada** que será estudada com mais detalhes nas próximas aulas.

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é **convergente** se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se $|r| \geq 1$,

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$$r \neq 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Encontre a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$ se for convergente.

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$ como uma razão de inteiros (fração).

Escreva o número $5,125\overline{48}$ como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

A Série Harmônica

Série Harmônica

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Divergência da Série Harmônica

A **série harmônica** é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais

$s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \dots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{16} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
 &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
 &> 1 + \frac{4}{2}
 \end{aligned}$$

Analogamente, chegamos que $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$. Note que dessa forma $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ o que implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto, $\{s_n\}$ é uma série divergente.

O Teste da Divergência

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3 + 2n^2 + n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

Lembre-se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ diverge.

Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existe ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. (FALSO!!!)

Exercício

Semana 4 - Exercício 2

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

Propriedades operacionais das séries convergentes

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3n} \right]$ é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

O Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente**. Em outras palavras:

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **convergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente**.

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **divergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais.

Além disso $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$.

Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é **decrecente** em $(0, \infty)$.

Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em $[1, \infty)$.

Desta forma:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arctan \left(\frac{n}{2} \right) - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Substituindo $x = 2 \tan \theta$

Lembre-se que $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{5}{4x-3}$.

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) para $x \neq \frac{3}{4}$ e **positiva** para todo $x > \frac{3}{4}$.

É fácil ver que f é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrescente** em $[1, \infty)$.

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3} dx &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{4x-3} dx \\
 &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} \ln |4x-3| \right]_1^n \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |4n-3| \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty
 \end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **divergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **divergente**.

Exercício

Semana 5 - Exercício 1

Determine se a série $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \dots$ é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

Exercício

Semana 5 - Exercício 2

Determine se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ é convergente ou divergente.

A Série-*p*

Série- p (Série hiper-harmônica)

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série- p , ou série hiper-harmônica, é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Convergência da série- p

A série- p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar, $p < 0$, $p = 0$ e $p > 0$:

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$p = 0$ Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$p > 0$ Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R}^*$).

A função é sempre positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty]$.

Portanto, podemos aplicar o Teste da Integral.

Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$\boxed{p = 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$\boxed{0 < p < 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- p** é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 3

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + \sqrt{n}}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 4

Determine se a série $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots$ é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.

Testes da Comparação Termo à Termo

Teste da comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com **termos positivos**.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for **convergente** e $a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será **convergente**.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for **divergente** e $a_n \geq b_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será **divergente**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma **série-p** com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma **série convergente**.

Como $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$ é convergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Note que se trata da **série harmônica**, portanto é uma **série divergente**.

Como $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = 4/3$ e razão comum $r = 1/3$.

Note que $r < 1$, então essa série geométrica será **convergente**.

Como $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente pelo

Teste da Comparação termo à termo.

Testes da Comparação de Limites

Teste da comparação de limites

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com **termos positivos**.

- 1 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.
- 2 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- 3 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o

Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$.

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 2n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 / \textcolor{red}{n}^2}{(n^2 + 2n) / \textcolor{red}{n}^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2/n} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$.

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty\end{aligned}$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ com $p = 3/5$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n^{3/5}}$.

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}}{\frac{1}{n^{3/5}}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/5}}{(n^3 + 5)^{1/5}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3 + 5} \right)^{1/5} \\&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 5} \right)^{1/5} \\&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 / \cancel{n^3}}{(n^3 + 5) / \cancel{n^3}} \right)^{1/5} \\&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 5/n^3} \right)^{1/5} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}} \text{ é convergente.}$$

Determine se a série convergente ou divergente usando os testes da comparação:

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$$

$$② \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \sin^2 k}{1 + k^3}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\exp n}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$$

Séries Alternadas

Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O n -ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n$$

$$a_n = (-1)^nb_n$$

onde b_n é um número positivo. Note que $b_n = |a_n|$.

Série Harmônica Alternada

A **série harmônica alternada** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz as seguintes condições

- 1 $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Convergência da Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é convergente.

Note que $b_n = \frac{1}{n}$. Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo n . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

e além disso

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\ &= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2} \\ &= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} < 1\end{aligned}$$

para todo n , ou seja $b_{n+1} < b_n$ para todo n . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3 + 4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do **Teste da Série Alternada** está satisfeita.

Agora veja que

$$b_1 = 1/5 = 0.2$$

$$b_2 = 1/3 = 0.333$$

$$b_3 = 9/31 \approx 0.29032258 \dots$$

$$b_4 = 4/17 \approx 0.235294117 \dots$$

Dessa forma fica claro se a série **não é totalmente decrescente**, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo n_0 . Para verificarmos se existe um n_0 que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à b_n .

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função $f(x)$ é decrescente sempre que $f'(x) < 0$. Note que $f'(x)$ será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$

$$x^3 > 8$$

$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo $n > 2$, portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do **Teste da Série Alternada** e sua convergência é garantida.

Somando-se $b_1 = 1/5$ e $b_2 = 1/3$ à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n-3}{2n+1}$ é convergente ou divergente.

Note que $b_n = \frac{5n-3}{2n+1}$. E claramente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+1} = \frac{5}{2} \neq 0$$

Note que a segunda condição do **Teste da Série Alternada** não foi satisfeita, mas AINDA NÃO PODEMOS AFIRMAR que a série seja divergente. Para tanto note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{5n-3}{2n+1} = \nexists$$

Portanto, pelo **Teste da Divergência** o limite não existe.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} \sqrt{n}$ é convergente ou divergente.

Note que $b_n = \frac{\sqrt{n}}{e^n}$.

Precisamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Para tanto note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n}$$

Aplicando o Teorema de L'Hopital obtemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}e^n} = 0$$

Portanto a segunda condição do **Teorema da Série Alternada** está satisfeita.

É fácil verificar que: $b_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}$.

Precisamos mostrar que $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$, para tanto observe que:

$$\begin{aligned} b_{n+1} \leq b_n &\iff \ln b_{n+1} \leq \ln b_n \\ &\iff \ln \left(\frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}} \right) \leq \ln \left(\frac{\sqrt{n}}{e^n} \right) \\ &\iff \ln \sqrt{n+1} - \ln e^{n+1} \leq \ln \sqrt{n} - \ln e^n \\ &\iff \frac{1}{2} \ln(n+1) - n - 1 \leq \frac{1}{2} \ln(n) - n \\ &\iff \frac{1}{2} [\ln(n+1) - \ln(n)] \leq 1 \\ &\iff \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq 2 \end{aligned}$$

Da última equivalência obtém-se que:

$$\frac{n+1}{n} \leq e^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Note que para qualquer valor de $n \in \mathbb{Z}_+$ a expressão acima é sempre verdadeira, portanto, a primeira condição do **Teorema da Série Alternada** está satisfeita. Logo a série é convergente por esse resultado.

Teste as séries quando à convergência ou divergência.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n-3}{2n+1}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} \sqrt{n}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^2}$$

Teste da Convergência Absoluta

Série Absolutamente Convergente

Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita **condicionalmente convergente** se for convergente mas não for absolutamente convergente.

A **série harmônica alternada** é um exemplo de série condicionalmente convergente.

Teste da Convergência Absoluta

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Série- p (Hiper-harmônica) Alternada

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série- p , ou série hiper-harmônica, alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

Convergência da Série- p Alternada

A série- p alternada é absolutamente convergente se $p \geq 1$, condicionalmente convergente se $0 < p < 1$ e divergente se $p \leq 0$.

Exercício

Prove o resultado anterior.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} &= \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots\end{aligned}$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.

Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$\begin{aligned} |\cos(\pi n/3)| &\leq 1 \quad \text{para todo } n \\ \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} &\leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma **série- p** com $p = 2$, portanto se trata de uma série convergente,

consequentemente o **Teste da Comparação** nos garante que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$ é convergente.

Dessa forma a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

Teste da Razão

Teste da Razão

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ o Teste da Razão é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo **Teste da Razão** a série dada é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1$$

Nessas condições o **Teste da Razão é inconclusivo!** Dessa forma precisamos recorrer à outros testes para responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o **Teste da Comparação** com a **série harmônica**. Como a **série harmônica** é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, conseqüentemente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é **condicionalmente convergente**.

Teste da Raiz

Teste da Raiz

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o Teste da Raiz é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo **Teste da Raiz**. E o **Teste da Convergência Absoluta** nos garante que ela será convergente.

Teste as seguintes séries com relação à convergência e divergência.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Rearranjo de termos em séries

Rearranjo de termos em séries absolutamente convergentes

Se uma série for **absolutamente convergente** com soma s , então qualquer rearranjo de seus termos tem a mesma soma s .

Rearranjo de termos em séries condicionalmente convergentes

Se uma série for **condicionalmente convergente**, então para todo $r \in \mathbb{R}$ existe um rearranjo dos termos dessa série para o qual a sua somatória será r .

Seja a série harmônica alternada (condicionalmente convergente):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \quad (2)$$

Multiplique a série por $1/2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \quad (3)$$

Acrescente zeros entre os termos dessa série:

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \dots = \frac{\ln 2}{2} \quad (4)$$

Somando os termos correspondentes das séries (2) e (4):

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3 \ln 2}{2} \quad (5)$$

Perceba que as séries (2) e (5) são iguais.

Exercício

Apresente uma ordenação para os termos da série harmônica alternada de modo que a sua somatória seja igual a 1.

Série de Potências

Série de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

onde x é uma **variável** e c_n são constantes chamadas **coeficientes da série**.

Série de Potências em $\phi(x)$

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 [\phi(x)] + c_2 [\phi(x)]^2 + c_3 [\phi(x)]^3 + \dots$$

onde ϕ é uma função de x e c_n são constantes chamadas **coeficientes da série**.

Série de Potências Centrada em a

A série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + c_3 (x - a)^3 + \dots$$

é chamada de série de potências centrada em a , onde x é uma **variável** e c_n são constantes chamadas **coeficientes da série**.

Convergência de uma Série de Potências

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

- 1 A série converge apenas quando $x = a$;
- 2 A série converge para todo x ;
- 3 Existe um $R > 0$ tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

Determinação do Raio de Convergência

Para uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tal que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ exista ou seja infinito. Então o Raio de Convergência R será.

- 1 $R = \infty$ se $L = 0$;
- 2 $R = 0$ se $L = \infty$;
- 3 $R = 1/L$ caso contrário.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Qual o raio de convergência?

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Nesse caso a série é convergente para todo valor de x , pois $0 < 1$ e o raio de convergência é infinito.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$. Qual o raio de convergência?

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = n!x^n, \quad a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Nesse caso a série é divergente para todo $x \neq 0$ e o raio de convergência é zero.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$.

Qual o raio de convergência?

Reescrevendo a série obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3} \right)^n$$

Se $x = 0$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos.

Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq 0$ vamos aplicar o Teste da Razão.

Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3} \right)^n \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \left(\frac{2x}{3} \right)^{n+1}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \left(\frac{2x}{3}\right)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3}\right)^n} \right| \\ &= \frac{2|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2|x|}{3}\end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{2|x|}{3} < 1 \iff -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

e divergente se

$$\frac{2|x|}{3} > 1 \iff x > \frac{3}{2} \text{ ou } x < -\frac{3}{2}$$

Caso $x = 3/2$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Que é uma série convergente (série harmônica alternada).

Caso $x = -3/2$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2x}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Que é uma série divergente (série harmônica). Portanto a série dada é convergente para todo $x \in (-3/2, 3/2]$ e o raio de convergência é $3/2$.

Exercício

Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}$.

Qual o raio de convergência?

Se $x = -2$ a série é claramente convergente, pois teríamos uma somatória de termos nulos. Para analisar a convergência dessa série quando $x \neq -2$ vamos aplicar o Teste da Razão. Para tanto note que:

$$a_n = \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} \quad a_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1} \ln(n+1)}$$

Para usarmos o Teste da Razão precisamos analisar o seguinte limite:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1} \ln(n+1)}}{\frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}} \right| \\
 &= \frac{|x+2|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \\
 &= \frac{|x+2|}{2}
 \end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão temos que se a série é convergente se:

$$\frac{|x+2|}{2} < 1 \iff -4 < x < 0$$

e divergente se

$$\frac{|x+2|}{2} > 1 \iff x > 0 \text{ ou } x < -4$$

Caso $x = 0$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Que é uma série divergente pelo Teste da Comparação com a série harmônica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Caso $x = -4$ a série dada é equivalente à

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

Que é uma série convergente pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série dada é convergente para todo $x \in [-4, 0)$ e o raio de convergência é 2.

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2 + n^2}$$

Exercício

Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$$

Determine os intervalos e raios de convergência das séries de potências dadas:

$$① \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

Representando funções usando séries

Exercício

Expresse $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos $a = 1$ e $r = -x^3$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1-(-x^3)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x^3| < 1 \iff -1 < x^3 < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = -\frac{3}{x+1}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Se na série geométrica fizermos $a = -3$ e $r = -x$ podemos construir a seguinte série:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} ar^n &= \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-x)^n = \frac{-3}{1-(-x)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} -3(-1)^n x^n = \frac{-3}{1+x} \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 3x^n = \frac{-3}{1+x}\end{aligned}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|-x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = \frac{1}{3x+7}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x+7} = \frac{1}{7\left(\frac{3x}{7} + 1\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{1 + \frac{3x}{7}}$$

Se na série geométrica fizermos $a = 1/7$ e $r = -3x/7$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7} \left(\frac{-3x}{7}\right)^n = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \left(\frac{-3x}{7}\right)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7} \left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$\left|\frac{-3x}{7}\right| < 1 \iff -1 < \frac{3x}{7} < 1 \iff -\frac{7}{3} < x < \frac{7}{3} \iff x \in (-7/3, 7/3)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = \frac{1}{3x}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{1 - (-3x + 1)}$$

Se na série geométrica fizermos $a = 1$ e $r = -3x + 1$ podemos construir a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-3x + 1)^n = \frac{1}{3x} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x - 1)^n = \frac{1}{3x}$$

Sabemos que a série geométrica é convergente quando:

$$|3x - 1| < 1 \iff -1 < 3x - 1 < 1 \iff 0 < x < \frac{2}{3} \iff x \in (0, 2/3)$$

e diverge caso contrário.

Exercício

Expresse $f(x) = \frac{7}{3x(3x+7)}$ como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

Note que:

$$\frac{7}{3x(3x+7)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x+7}$$

Nos exercícios anteriores vimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3x-1)^n = \frac{1}{3x} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7} \left(\frac{3x}{7}\right)^n = \frac{1}{3x+7}$$

Como as séries acima convergem, respectivamente, nos intervalos $(0, 2/3)$ e $(-7/3, 7/3)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[(3x-1)^n - \frac{1}{7} \left(\frac{3x}{7}\right)^n \right]$$

a série será convergente sempre que $x \in (0, 2/3) \cap (-7/3, 7/3) = (0, 2/3)$.

Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

$$① f(x) = \frac{3}{2 - x^5}$$

$$② f(x) = \frac{x^3}{2 + x^3}$$

$$③ f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$④ f(x) = \frac{1 - 2x + x^2}{x}$$

Derivação e Integração de Séries de Potências

Derivação e Integração Termo à Termo

Se a série de potências $\sum_{i=1}^{\infty} (x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

O raio de convergência da série resultante é R .

Série geométrica de potências

Se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Demonstração.

Note que a série dada é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Portanto é convergente quando $|x| < 1$. □

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Note que pela **série geométrica de potências** se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Portanto, se $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Exercício

Obtenha uma série de potências que represente a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$.

Acabamos de mostrar que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Derivando termo a termo obtemos:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 1 + 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

Portanto, se $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}.$$

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\ln(1+x)$.

Lembre-se que:

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx.$$

Note que pela **série geométrica de potências** se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exercício

Obtenha uma representação em séries de potências para $\tan^{-1} x$.

Lembre-se que:

$$\tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Note que pela **série geométrica de potências** se $|x| < 1$, então:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando termo a termo obtemos:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Expresse as funções como a soma de uma série de potências e encontre seu intervalo de convergência.

① $f(x) = \ln(2 - x)$

② $f(x) = \frac{1}{(2 - x)^2}$

③ $f(x) = \tan^{-1} 2x$

Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é definida pela seguinte série:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Convergência da Função de Bessel de Ordem 0

A função de Bessel de Ordem 0 é convergente para todo número real.

Para mostrar a convergência de $J_0(x)$ basta aplicar o teste da razão.

Exercício

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 0. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

Função de Bessel de Ordem 1

A função de Bessel de ordem 1 é definida pela seguinte série:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Exercício

Semana 11 - Exercício 4

Determine o intervalo de convergência da Função de Bessel de Ordem 1. É possível derivar e integrar essa função? Se sim encontre séries de potências para a derivada e a integral da função de Bessel.

Séries de Taylor e Maclaurin

Se f tiver uma representação em série de potências centrada em a com raio de convergência R , ou seja $|x - a| < R$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + c_4(x - a)^4 + c_5(x - a)^5 + \dots$$

Dessa forma podemos construir a seguinte tabulação para as derivadas sucessivas de f :

Expansão em séries de potências centradas em a	$x = a$
$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$	$f(a) = c_0$
$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \dots$	$f'(a) = c_1$
$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x - a) + 12c_4(x - a)^2 + 20c_5(x - a)^3 + \dots$	$f''(a) = 2c_2$
$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x - a) + 60c_5(x - a)^2 + 120c_6(x - a)^3 + \dots$	$f'''(a) = 6c_3$
\vdots	\vdots
$f^{(n)}(x) = n!c_n + \dots$	$f^{(n)}(a) = n!c_n$

Isolando o n -ésimo coeficiente obtemos:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Existência de representação em séries de potências

Se f tiver uma representação em série de potências em a , isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad |x - a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Série de Taylor centrada em a

Se f tiver uma expansão em série de potências em torno de a , então ela será da forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

Série de Maclaurin

Se f tiver uma expansão em série de potências em torno de 0, então ela será da forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$T_k = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Convergência da Série de Taylor

Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n -ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma da sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Nem sempre é fácil avaliar o limite acima, por isso é comum recorrer à Desigualdade de Taylor que veremos à seguir.

Desigualdade de Taylor

Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}$$

para $|x - a| \leq d$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \text{ real}$$

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à e^x .

Passo 1: Encontre uma série de potências que supostamente represente a função desejada.

Note que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo par $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, portanto $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n . Dessa forma se existir uma série de potências de Maclaurin para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potências obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Para tanto note que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n . Considere um número positivo d tal que $|x| \leq d$ e note que:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq e^d$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad \text{para } |x| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} = e^d \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para e^x em todos os valores de x .

Exercício

Encontre a série de Taylor centrada em 2 para $f(x) = e^x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à e^x .

Passo 1: Encontre uma série de potências que supostamente represente a função desejada.

Note que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo par $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, portanto $f^{(n)}(a) = e^a$ para todo n . Dessa forma se existir uma série de potências de Taylor para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potências obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|}{n+1} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Para tanto note que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n . Considere um número positivo d tal que $|x - a| \leq d$ e note que:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq e^d$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!} |x - a|^{n+1} \quad \text{para } |x - a| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^d}{(n+1)!} |x - a|^{n+1} = e^d \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para e^x em todos os valores de x .

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = \sin x$. Mostre a série converge para todos os valores de x e que sua soma é igual à $\sin x$.

Passo 1: Encontre uma série de potências que supostamente represente a função desejada.

Note que:

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
\vdots	\vdots

$f(x) = \text{sen } x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\text{sen } x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \text{sen } x$	$f^{(4)}(0) = 0$
\vdots	\vdots

Dessa forma se existir uma série de potências de Maclaurin para f , então ela será da forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
 &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
 &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
 \end{aligned}$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potências obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

Logo a série dada possui raio de convergência infinito ($R = \infty$).

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Vamos usar a Desigualdade de Taylor: Note que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para todo n e para todo número positivo d tal que $|x| \leq d$ e além disso:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \leq 1$$

Então, pela Desigualdade de Taylor, o resto $R_n(x)$ da série de Maclaurin satisfaz a desigualdade:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{para } |x| < d$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, pelo teorema do confronto dos limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Portanto, a série converge para $\sin x$.

Exercício

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^k$, onde k é um número real qualquer.

Passo 1: Encontre uma série de potencias que supostamente represente a função desejada.

Note que:

$$f(x) = (1+x)^k$$

$$f'(x) = k(1+x)^{k-1}$$

$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2}$$

$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = k(k-1) \cdots (k-n+1)(1+x)^{k-n}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = k$$

$$f''(0) = k(k-1)$$

$$f'''(0) = k(k-1)(k-2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = k(k-1) \cdots (k-n+1)$$

$$\begin{array}{l|l}
 f(x) = (1+x)^k & f(0) = 1 \\
 f'(x) = k(1+x)^{k-1} & f'(0) = k \\
 f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\
 f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\
 \vdots & \vdots \\
 f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)
 \end{array}$$

Note que $f^{(n)}(x) = \frac{k!}{(k-n)!} (1+x)^{k-n}$ para todo par de inteiros n e k , portanto

$$f^{(n)}(0) = \frac{k!}{(k-n)!} \text{ para todo } n \text{ e } k.$$

Dessa forma se existir uma série de potencias de Maclaurin para f então ela será da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

Passo 2: Determinar o raio de convergência da série de potências obtida.

Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k - n|}{n + 1} |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| 1 - \frac{k}{n} \right|}{1 + \frac{1}{n}} |x| = |x| < 1$$

Logo a série dada converge no intervalo $(-1, 1)$ e diverge fora desse intervalo.

A convergência em -1 e 1 dependerá dos valores de k .

A série converge em 1 se $-1 < k \leq 0$ e em ambas as extremidades se $k \geq 0$.

Passo 3: Mostre que a série obtida de fato representa a função desejada.

Não é simples mostrar diretamente que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ nesse caso. O livro Stewart (2013, ex.85 sec.: 11.10) dá uma dica de como proceder.

Série Binomial

Se k for um número real qualquer e $|x| < 1$, então:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

Ache uma representação em série de Maclaurin para a função dada e determine o raio de convergência.

① $f(x) = \sinh x$

② $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2-x}}$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Exercício

Encontre uma uma série de potências de x para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

e use essa série para obter uma série de potências de x para

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e por fim encontre uma série para $\sin^{-1} x$.

Ache uma representação em série de Taylor centrada em a para as funções dadas e determine o raio de convergência.

③ $f(x) = \sin x$

④ $f(x) = \ln x$

Exercício

Use a série binomial para encontrar a série de MacLaurin para a função dada e determine seu raio de convergência:

a $f(x) = (3 - x)^{-2}$

b $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

c $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Exercício

Calcule com precisão de até três casas decimais de precisão, o valor da integral definida (use alguma técnica baseada em séries de potência):

a $\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3} dx$

b $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Funções de várias variáveis

Função f de duas variáveis

Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$.

Quando escrevermos $z = f(x, y)$ chamaremos x e y de **variáveis independentes** e z de **variável dependente**.

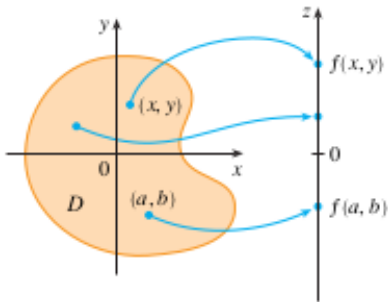
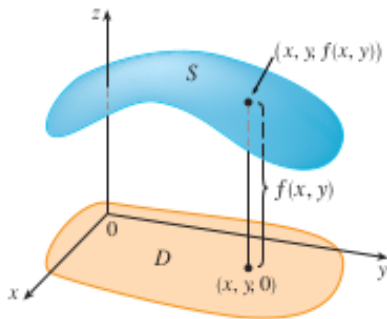


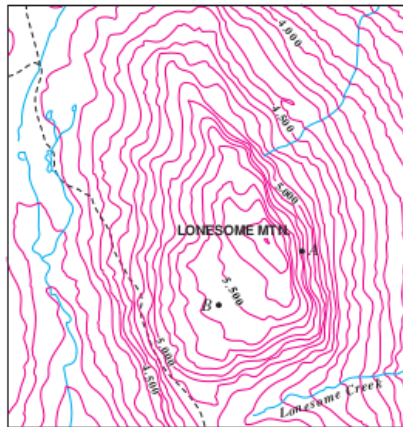
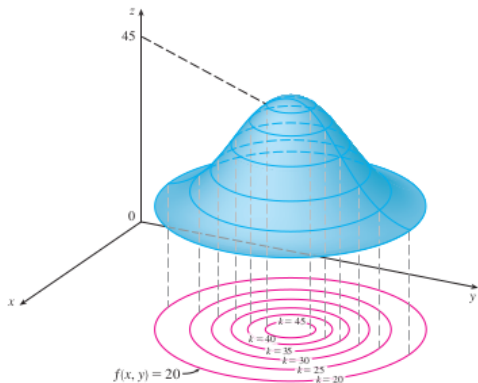
Gráfico de uma função de duas variáveis

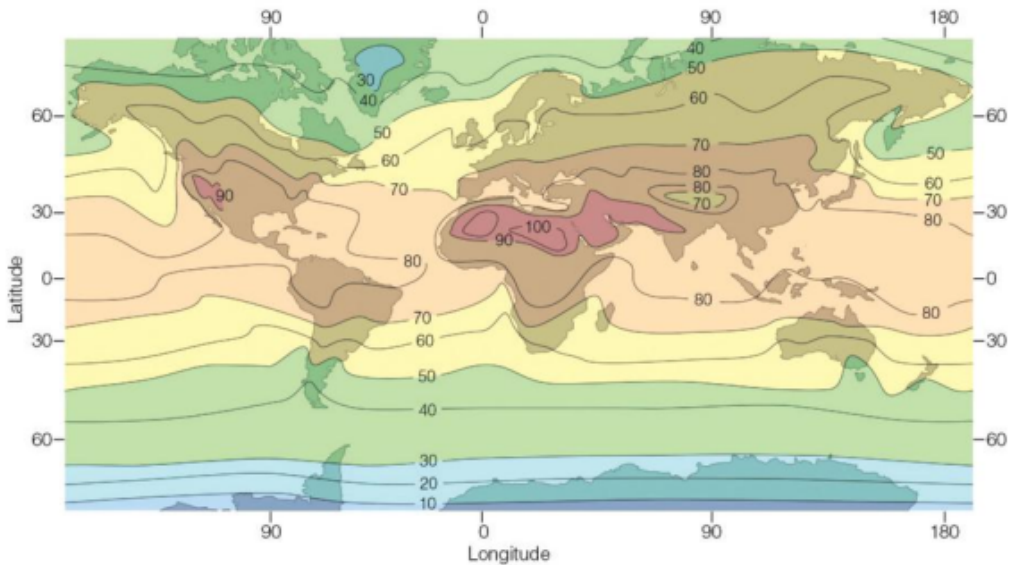
Se f é uma função de duas variáveis com domínio D , então seu **gráfico** é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em \mathbb{R}^3 tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D .



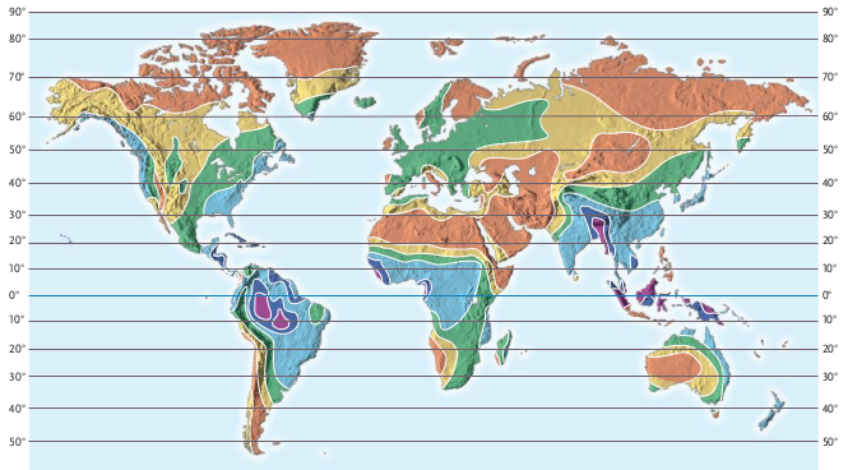
Curvas de nível

As **curvas de nível** de uma função de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).





Curvas Isotérmicas: Temperatura média do ar perto do nível do mar em julho ($^{\circ}F$)



© 2016 Cengage Learning®

FIGURE 14
Precipitation

KEY

Precipitation (cm/yr)

Under 25	50 to 100	200 to 250
25 to 50	100 to 200	Over 250

Precipitação

Exercício

Considere a função $f(x, y) = 2 - x - 3y$.

- a Calcule $f(1, 2)$;
- b Encontre seu domínio e sua imagem;
- c Descreva as equações das curvas de nível;
- d Esboce algumas de suas curvas de nível;
- e Determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f Decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

Exercício

Considere a função $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

- a Calcule $f(1, 2)$;
- b Encontre seu domínio e sua imagem;
- c Descreva as equações das curvas de nível;
- d Esboce algumas de suas curvas de nível;
- e Determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f Decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

Exercício

Use algum software para esboçar os gráficos e as equações das curvas de nível das seguintes funções:

a $f(x, y) = \ln(\sqrt{4 - x^2 - y^2})$

b $f(x, y) = \sin(x + y)$

c $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x - y + 2}}{y}$

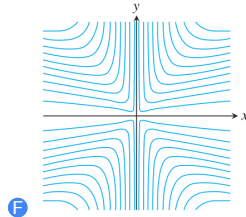
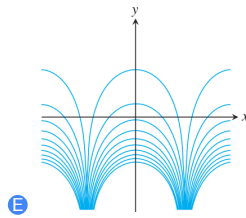
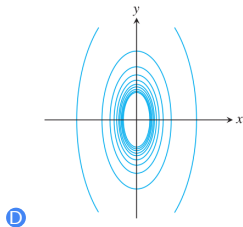
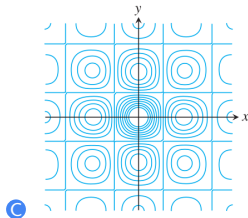
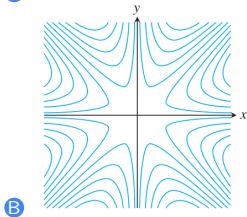
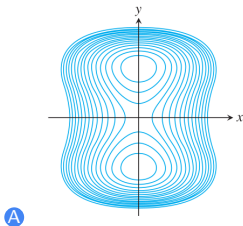
d $f(x, y) = \frac{\ln(2 - x)}{1 - x^2 - y^2}$

e $f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{x - y}$

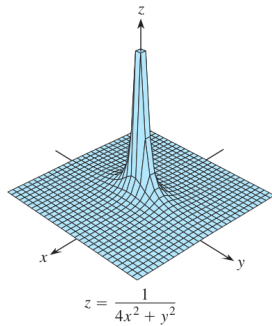
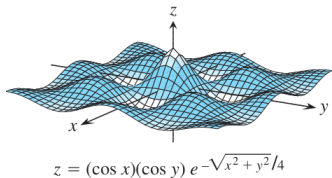
Função f de n variáveis

Uma função f de n variáveis é uma regra que associa a cada n -upla de números reais (x_1, \dots, x_n) de um conjunto D um único valor real denotado por $f(x_1, \dots, x_n)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x_1, \dots, x_n) | (x_1, \dots, x_n) \in D\}$.

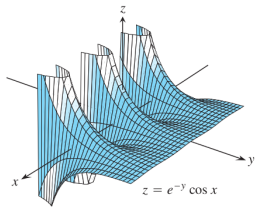
Faça a correspondência entre as curvas de nível e as respectivas funções:



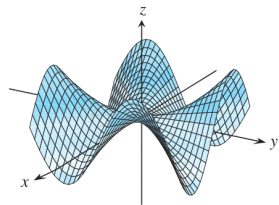
1



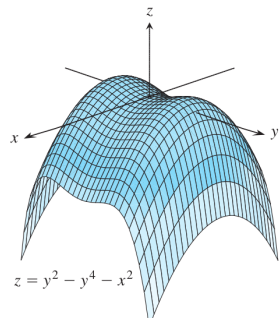
3



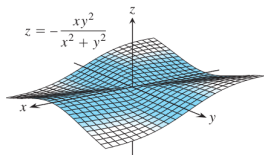
4



5



6



2

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a) encontre seu domínio e sua imagem;
- b) descreva as equações das curvas de nível;
- c) esboce algumas de suas curvas de nível;
- d) esboce o gráfico da função;
- e) determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f) decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

2 $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

3 $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

4 $f(x, y) = x^2 - y^2$

Exercício

Nos exercícios à seguir considere a função dada e

- a) encontre seu domínio e sua imagem;
- b) descreva as equações das curvas de nível;
- c) esboce algumas de suas curvas de nível;
- d) esboce o gráfico da função;
- e) determine se o domínio é uma região aberta, fechada ou nenhuma das duas;
- f) decida se o domínio é limitado ou ilimitado.

1 $f(x, y) = y/x^2$

2 $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

3 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

4 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

5 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

Limites de funções de duas variáveis

Limite de uma função f de duas variáveis

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) . Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \in D$ tende à (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

Se para todo $\epsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Se $f(x, y) \rightarrow L_1$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \rightarrow L_2$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_2 , com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ não existe.

Propriedade dos limites de funções de duas variáveis

As regras a seguir são verdadeiras se L , M e k forem números reais e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x,y) = kL \text{ para todo número } k$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \text{ para todo número } M \neq 0$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n \text{ para todo número } n \text{ inteiro positivo}$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} \text{ para todo número } n \text{ inteiro positivo, e, se } n \text{ for par, assumimos que } L > 0$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$$

Se investigarmos o comportamento desse limite por diferentes caminhos veremos que ele sempre será 0, mas isso não significa que o limite será 0 para todos os (infinitos) caminhos possíveis. Considere um $\epsilon > 0$ dado, mas arbitrário. Desejamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

ou

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} < \epsilon$$

Note que $y^2 \leq x^2 + y^2 \implies \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$, portanto

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, escolhendo $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta$, obtemos

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon$$

A partir dessa definição, sabemos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Exercício

Determine o limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$$

Exercício

Semana 14 - Exercício 1 à 4

Calcule os seguintes limites, se existirem

1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} 3x^2 + xy - 2y^2$

2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$

3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{e^{2x} + e^{2y}}$

4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^4}$

Referências

Algumas referências clássicas para um bom curso de cálculo: Stewart (2016), Leithold (1994), Gonçalves & Flemming (2007), Guidorizzi (2008), Larson & Edwards (2018), Adams & Essex (2018), Hass et al. (2018).

Adams, R. A. & C. Essex (2018). *Calculus: A Complete Course*. Pearson.

Gonçalves, M. B. & D. M. Flemming (2007). *Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas* (2 ed.). Pearson.

Guidorizzi, H. L. (2008). *Um curso de cálculo* (5 ed.), Volume 4. LTC.

Hass, J., C. Heil, G. B. Thomas, & M. D. Weir (2018). *Thomas' Calculus* (14 ed.). Pearson.

Larson, R. & B. Edwards (2018). *Calculus with CalcChat and CalcView*. Cengage Learning.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (3 ed.), Volume 2. Harbra.

Stewart, J. (2013). *Cálculo* (7 ed.), Volume 2. Cengage.

Stewart, J. (2016). *Calculus* (8 ed ed.). Cengage Learning.