

# Curso de Cálculo Diferencial e Integral II

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Thiago VedoVatto

[thiago.vedovatto@ifg.edu.br](mailto:thiago.vedovatto@ifg.edu.br)

[thiagovedovatto.site](http://thiagovedovatto.site)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Campus de Goiânia

26 de outubro de 2021

### Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: **Plano de Curso e Outras Informações** que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa

Plano de Curso

Metodologia de Avaliação

Prazos para entrega das atividades

Bibliografia Básica

Horário das aulas síncronas

Controle de frequência

Horário de Atendimento



Sequências

## Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Uma sequência  $\{a_n\}$  ou  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

## Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

a  $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$

b  $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 3$

c  $f_1 = 1, f_2 = 1$  e  $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$  para  $n \geq 3$

Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Liste os oito primeiros termos das sequências:

a  $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{n}$

b  $a_1 = 1, a_n = \frac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

## Limite de uma Sequência

Uma sequência  $\{a_n\}$  tem **limite**  $L$  e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se para cada  $\epsilon > 0$  existir um inteiro correspondente  $N$  tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

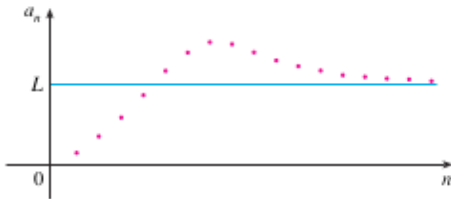


## Valor Limite de uma Sequência

Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  e  $f(n) = a_n$  quando  $n$  é um inteiro, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

## Sequência Divergente

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  significa que para cada número positivo  $M$  existe um inteiro  $N$  tal que se  $n > N$  então  $a_n > M$ .





## Propriedades dos limites das sequências

Se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  forem sequencias convergentes e  $c$  for uma constante, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

## Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

a  $a_n = \frac{1}{n^2}$

b  $b_n = \frac{1}{2n}$

c  $c_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

d  $d_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n}$

e  $e_n = \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

f  $f_n = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

g  $g_n = n^2$

### Exercício

Determine se a sequência  $\left\{ n \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) \right\}$  converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

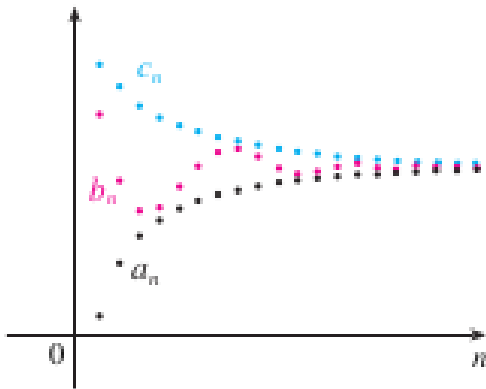
a  $a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b  $\left\{ \frac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c  $a_n = \cos n^2$

### Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para  $n \geq n_0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .



Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

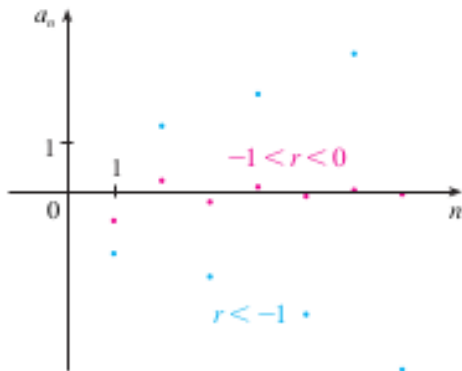
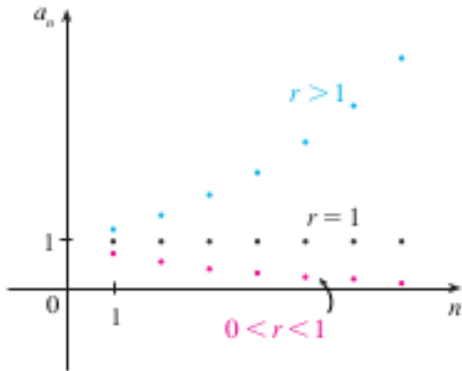
Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

A Sequência  $r^n$

### Sequência $r^n$

A sequência  $\{r^n\}$  é **convergente** se  $-1 < r \leq 1$  e **divergente** para os demais valores de  $r$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$





## Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b  $a_n = \frac{5^n}{3^{n-1}}$

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a  $a_n = 2^n 5^{-n}$

b  $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

## Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

## Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência  $\{a_n\}$  é **crescente** se  $a_n < a_{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ , isso é,  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ . É chamada **decrescente** se  $a_n > a_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ . Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

## Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a  $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$

b  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

c  $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

### Exercício

### Semana 2 - Exercício 1

Determine se a sequência  $\left\{ \frac{1 - 2n^2}{n^2} \right\}$  é crescente, decrescente ou não-monótonas.

### Exercício

### Semana 2 - Exercício 2

Determine se a sequência  $\left\{ \cos \left( \frac{n\pi}{3} \right) \right\}$  é crescente, decrescente ou não-monótonas.

### Exercício

### Semana 2 - Exercício 3

Determine se a sequência  $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$  é crescente, decrescente ou não-monótonas.

## Sequência Limitada

Uma sequência  $\{a_n\}$  é **limitada superiormente** se existir um número  $M$  tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número  $m$  tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então  $\{a_n\}$  é uma **sequência limitada**.



## Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

- ① Toda sequência monótona limitada é convergente.
- ② Toda sequência monótona convergente é limitada.



## Exercício

Mostre que a sequência  $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$  é convergente.

Mostre que a sequência  $\left\{ \frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right\}$  é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?



**Séries**

## Série

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

## Soma parcial

A  $n$ -ésima **soma parcial**  $s_n$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

### Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é **convergente** com soma  $s$  quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com  $s$  finito. A série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

## Exercício

Dada a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  determine:

- a Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais  $\{s_n\}$ .
- b A fórmula para  $s_n$  em termos de  $n$ .

### Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

### Exercício

#### Semana 4 - Exercício 3

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$  é convergente ou divergente expressando  $s_n$  como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma.



Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

a  $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b  $s_n = \frac{n^2}{n+1}$

## A Série Geométrica

## Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad a \neq 0$$

onde  $r$  é a **razão comum** e  $a$  é o **primeiro termo**.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum**  $r$ .

## Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é **convergente** se  $|r| < 1$  e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se  $|r| \geq 1$ ,

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$$r \neq 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

## Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a  $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Encontre a soma da série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$  se for convergente.

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o  $n$ -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

### Exercício

Escreva o número  $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$  como uma razão de inteiros (fração).



Escreva o número  $5,125\overline{48}$  como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

## A Série Harmônica

## Série Harmônica

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

## Divergência da Série Harmônica

A **série harmônica** é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais  $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \dots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{16} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

Analogamente, chegamos que  $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$ . Note que dessa forma  $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$  o que implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto,  $\{s_n\}$  é uma série divergente.

## O Teste da Divergência

### Condição de Convergência

Se a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  for convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

### Teste da Divergência

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existir ou se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

### Exercício

Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3 + 2n^2 + n}$  diverge.

### Exercício

Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + n}$  diverge.

### Exercício

Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  diverge.

Lembre-se  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$



Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$  diverge.

### Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  é divergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . (FALSO!!!)

#### Exercício

#### Semana 4 - Exercício 2

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

## Propriedades operacionais das séries convergentes

## Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  séries convergentes e  $c$  é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\pi}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3n} \right]$  é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

## O Teste da Integral

## O Teste da Integral

Suponha que  $f$  seja uma função contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$  e seja  $a_n = f(n)$ . Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente se, e somente se, a integral imprópria**

**$\int_1^{\infty} f(x)dx$  for convergente.** Em outras palavras:

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **convergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente**.

Se  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  for **divergente**, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$  é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ .

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais.

Além disso  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$ .

Veja que  $f'(x) < 0$  para todo  $x > 0$ , ou seja, a função  $f$  é **decrecente** em  $(0, \infty)$ .

Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em  $[1, \infty)$ .

Desta forma:



$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \arctan \left( \frac{n}{2} \right) - \arctan \left( \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Substituindo  $x = 2 \tan \theta$

Lembre-se que  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$  é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é  $f(x) = \frac{5}{4x-3}$ .

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) para  $x \neq \frac{3}{4}$  e **positiva** para todo  $x > \frac{3}{4}$ .

É fácil ver que  $f$  é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrescente** em  $[1, \infty)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3} dx &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{4x-3} dx \\
 &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{4} \ln |4x-3| \right]_1^n \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |4n-3| \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty
 \end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **divergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **divergente**.

### Exercício

### Semana 5 - Exercício 1

Determine se a série  $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$  é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

### Exercício

### Semana 5 - Exercício 2

Determine se a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  é convergente ou divergente.

A Série- $p$

### Série- $p$ (Série hiper-harmônica)

A série- $p$  (série potência)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p \leq 1$ .

Há três casos à considerar,  $p < 0$ ,  $p = 0$  e  $p > 0$ :

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$$p = 0$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$$p > 0$$

Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é **contínua** em todo o seu domínio ( $D_f = \mathbb{R}^*$ ).

A função é sempre **positiva** e **decrecente** no intervalo  $[1, \infty]$ .

Portanto, podemos aplicar o **Teste da Integral**.

Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$p = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$0 < p < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $0 < p \leq 1$ .

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- $p$**  é convergente se  $p > 1$  e divergente se  $p < 1$ .



### Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$  é convergente ou divergente.

### Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 4}{n^2}$  é convergente ou divergente.

### Exercício

### Semana 5 - Exercício 3

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 5n}{n^2}$  é convergente ou divergente.

### Exercício

### Semana 5 - Exercício 4

Determine se a série  $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots$  é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.

## Testes da Comparação Termo à Termo

### Teste da comparação termo à termo

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **convergente** e  $a_n \leq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **convergente**.

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for **divergente** e  $a_n \geq b_n$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também será **divergente**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ .

Note que se trata de uma **série-p** com  $p = 7/6 > 1$ , portanto é uma **série convergente**.

Como  $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$  é convergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando  $n = 1$ , portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo  $n \geq 2$ .

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Note que se trata da **série harmônica**, portanto é uma **série divergente**.

Como  $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$  para todo  $n \geq 2$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$  é divergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo  $n \geq 1$ .

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial  $a = 4/3$  e razão comum  $r = 1/3$ .

Note que  $r < 1$ , então essa série geométrica será **convergente**.

Como  $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  é convergente pelo

**Teste da Comparação termo à termo.**



## Testes da Comparação de Limites

## Teste da comparação de limites

Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sejam séries com **termos positivos**.

- 1 Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$  onde  $c$  é um número finito e  $c > 0$ , então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.
- 2 Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
- 3 Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$  e se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{\ln n}{n}$ . Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ . Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  é divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$ .

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  com  $p = 2$ .

Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n^2}$ .

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 2n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 / \textcolor{red}{n}^2}{(n^2 + 2n) / \textcolor{red}{n}^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2/n} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$  é convergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n}$ .

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty\end{aligned}$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  é divergente.

## Exercício

Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$  é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é  $a_n = \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$ .

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$  com  $p = 3/5$ .

Seu termo geral é  $b_n = \frac{1}{n^{3/5}}$ .



Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}}{\frac{1}{n^{3/5}}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/5}}{(n^3 + 5)^{1/5}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{n^3 + 5} \right)^{1/5} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 / \textcolor{red}{n}^3}{(n^3 + 5) / \textcolor{red}{n}^3} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 5/n} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$  é convergente.

Determine se a série convergente ou divergente usando os testes da comparação:

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$$

$$② \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2 k}{1 + k^2}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\exp n}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$$