

Curso de Cálculo Diferencial e Integral 2

DPAA-2.086 - Cálculo Diferencial e Integral 2

Prof. Thiago VedoVatto

thiago.vedovatto@ifg.edu.br

thiagovedovatto.site

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Campus de Goiânia

8 de novembro de 2021

Informações Importantes!!!

Antes de prosseguir com essa disciplina é fundamental tomar conhecimento de todos os avisos contidos no link: **Plano de Curso e Outras Informações** que está no início da sala do curso no Moodle. Nesse link encontram-se informações sobre:

Ementa

Plano de Curso

Metodologia de Avaliação

Prazos para entrega das atividades

Bibliografia Básica

Horário das aulas síncronas

Controle de frequência

Horário de Atendimento



Sequências

Sequência

É uma lista de números escrita em uma ordem definida.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Uma sequência $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Exercício

Liste os cinco primeiros termos da sequência:

a $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$

b $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 3$

c $f_1 = 1, f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ para $n \geq 3$

Esta é a famosa sequência de Fibonacci

Liste os oito primeiros termos das sequências:

a $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{n}$

b $a_1 = 1, a_n = \frac{(-1)^n a_{n-1}}{n!}$

em forma de frações irredutíveis.

Limite de uma Sequência

Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

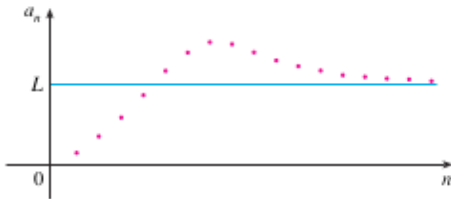


Valor Limite de uma Sequência

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Sequência Divergente

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se $n > N$ então $a_n > M$.



Propriedades dos limites das sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Exercício

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se convergirem, encontre o limites.

a $a_n = \frac{1}{n^2}$

b $b_n = \frac{1}{2n}$

c $c_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

d $d_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n}$

e $e_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

f $f_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right)^2$

g $g_n = n^2$

Exercício

Determine se a sequência $\left\{ n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, encontre o limite:

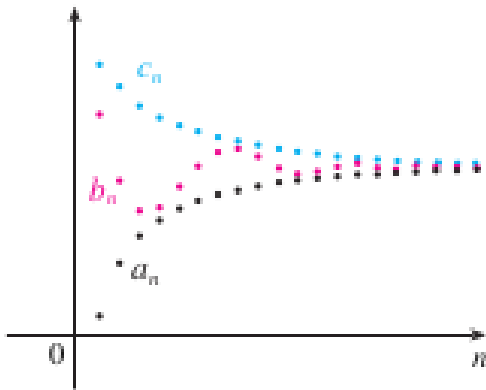
a $a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

b $\left\{ \frac{4^n}{1 + 9^n} \right\}$

c $a_n = \cos n^2$

Teorema do Confronto dos Limites para sequências

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.



Use o Teorema do Confronto dos Limites para sequências para provar o seguinte resultado:

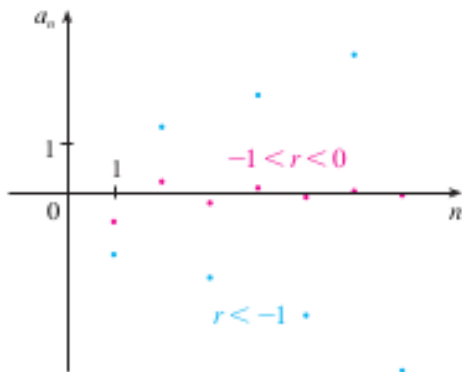
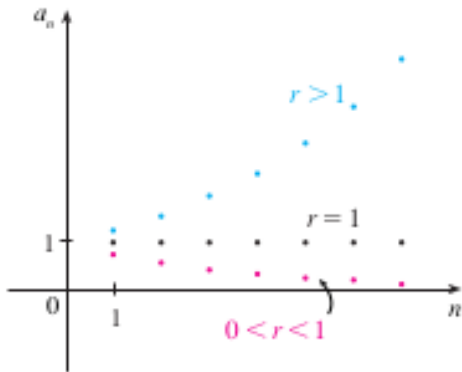
Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A Sequência r^n

Sequência r^n

A sequência $\{r^n\}$ é **convergente** se $-1 < r \leq 1$ e **divergente** para os demais valores de r .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1. \end{cases}$$



Exercício

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b $a_n = \frac{5^n}{3^{n-1}}$

Determine se as sequências cujos termos gerais são dados à seguir convergem ou divergem.

a $a_n = 2^n 5^{-n}$

b $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$

Sequências Monótonas, Limitadas e Convergentes

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência $\{a_n\}$ é **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. É chamada **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Exercício

Determine se as sequências dadas são crescentes, decrescentes ou não-monótonas.

a $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$

b $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

c $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

Exercício

Semana 2 - Exercício 1

Determine se a sequência $\left\{ \frac{1 - 2n^2}{n^2} \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício

Semana 2 - Exercício 2

Determine se a sequência $\left\{ \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Exercício

Semana 2 - Exercício 3

Determine se a sequência $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$ é crescente, decrescente ou não-monótonas.

Sequência Limitada

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que:

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.



Teoremas da Convergência de Sequências Monótonas

- ① Toda sequência monótona limitada é convergente.
- ② Toda sequência monótona convergente é limitada.

Exercício

Mostre que a sequência $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

Mostre que a sequência $\left\{ \frac{5^n}{1 + 5^{2n}} \right\}$ é monótona e limitada. A sequência é convergente? Porque?



Séries

Série

Uma **série** (infinita) é a soma dos termos de uma **sequência** (infinita) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Soma parcial

A n -ésima **soma parcial** s_n é a soma dos n primeiros termos de uma sequência.

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

Naturalmente, as somas parciais formam uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

Séries Convergentes e Divergentes

Dizemos que uma série é **convergente** com soma s quando essa sequência (1) convergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

com s finito. A série será chamada **divergente** quando a sequência (1) divergir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Exercício

Dada a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ determine:

- a Os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $\{s_n\}$.
- b A fórmula para s_n em termos de n .

Exercício

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

é convergente e determine para onde converge.

Exercício

Semana 4 - Exercício 3

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é convergente ou divergente expressando s_n como uma **soma telescópica**. Se for convergente, calcule sua soma.

Verifique se as séries cujo termo geral da soma parcial é dado à seguir são convergentes. Encontre os três primeiros termos da sequência que deu origem à cada série

a $s_n = \frac{n}{2n+1}$

b $s_n = \frac{n^2}{n+1}$

A Série Geométrica

Série Geométrica

A **série geométrica** é definida pela seguinte somatória:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad a \neq 0$$

onde r é a **razão comum** e a é o **primeiro termo**.

Nessa série cada termo é igual ao anterior multiplicado pela **razão comum** r .

Quando $r < 0$ teremos a chamada **série geométrica alternada** que será estudada com mais detalhes nas próximas aulas.

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica é **convergente** se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad |r| < 1,$$

e **divergente** se $|r| \geq 1$,

$$r = 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = na$$

É fácil mostrar que nesse caso a série é divergente.

$$r \neq 1$$

As somas parciais podem ser expressas como:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Exercício

Encontre a soma da série geométrica se for convergente.

a $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \dots$

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

Encontre a soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n}$ se for convergente.

Um paciente toma 150 mg de fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo do paciente

- a Qual a quantidade do fármaco depois do terceiro comprimido? E após o n -ésimo comprimido?
- b Qual a quantidade de droga que permanece no corpo à longo prazo?

Exercício

Escreva o número $1,53\overline{42} = 1,53424242\dots$ como uma razão de inteiros (fração).

Escreva o número $5,125\overline{48}$ como uma razão de inteiros (fração). (Use os resultados conhecidos sobre a Série Geométrica).

A Série Harmônica

Série Harmônica

A **série harmônica** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Divergência da Série Harmônica

A **série harmônica** é divergente.

Para mostrar que a série harmônica é divergente vamos recorrer as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \dots$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{16} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

Analogamente, chegamos que $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$. Note que dessa forma $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ o que implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$$

Portanto, $\{s_n\}$ é uma série divergente.

O Teste da Divergência

Condição de Convergência

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

A contra-positiva desse resultado nos dá base para definir o teste da divergência.

Teste da Divergência

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3}{n^3 + 2n^2 + n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + n}$ diverge.

Exercício

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

Lembre-se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ diverge.

Recíproca do Teste da Divergência (FALSO!!!)

Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ não existe ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. (FALSO!!!)

Exercício

Semana 4 - Exercício 2

Mostre que a Recíproca do Teste da Divergência é falsa. (Dica: Basta apresentar um contra-exemplo.)

Propriedades operacionais das séries convergentes

Propriedades operacionais das séries convergentes

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e c é uma constante, então as seguintes séries são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3n} \right]$ é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

O Teste da Integral

O Teste da Integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente**. Em outras palavras:

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **convergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente**.

Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for **divergente**, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) e **positiva** nos reais.

Além disso $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 4)^2}$.

Veja que $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, ou seja, a função f é **decrecente** em $(0, \infty)$.

Portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrecente** em $[1, \infty)$.

Desta forma:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2 + 4} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [\theta]_{\arctan(1/2)}^{\arctan(n/2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arctan \left(\frac{n}{2} \right) - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Substituindo $x = 2 \tan \theta$

Lembre-se que $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Note que a integral indefinida é **convergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **converge**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n-3}$ é convergente ou divergente.

A função associada ao termo geral dessa série é $f(x) = \frac{5}{4x-3}$.

Note que essa função é **contínua** (toda função racional é contínua no seu domínio) para $x \neq \frac{3}{4}$ e **positiva** para todo $x > \frac{3}{4}$.

É fácil ver que f é decrescente (o denominador é crescente e o numerador é constante), portanto essa função é **contínua**, **positiva** e **decrescente** em $[1, \infty)$.

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{5}{4x-3} dx &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{4x-3} dx \\
 &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} \ln |4x-3| \right]_1^n \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |4n-3| \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \infty = \infty
 \end{aligned}$$

Note que a integral indefinida é **divergente**, logo pelo teste da integral a série dada no enunciado **divergente**.

Exercício

Semana 5 - Exercício 1

Determine se a série $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$ é convergente ou divergente. Exiba o seu termo geral.

Exercício

Semana 5 - Exercício 2

Determine se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ é convergente ou divergente.

A Série- p

Série- p (Série hiper-harmônica)

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série- p , ou série hiper-harmônica, é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Convergência da série- p

A série- p é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Há três casos à considerar, $p < 0$, $p = 0$ e $p > 0$:

$$p < 0$$

Nesse caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$$

Logo pelo teste da divergência a série é divergente.

$p = 0$ Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$$

Novamente a série é divergente pelo teste da divergência.

$p > 0$ Considere a função associada à essa série:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Se trata de uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R}^*$).

A função é sempre positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty]$.

Portanto, podemos aplicar o Teste da Integral.

Para tanto é necessário determinar a integral imprópria do tipo 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$$

Aqui temos três sub-casos à considerar:

$$\boxed{p = 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty$$

$$\boxed{0 < p < 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$$

$$\boxed{p > 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1} > 0$$

Desse modo o **Teste da Integral** garante que a série é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$.

Considerando-se os dois casos iniciais podemos concluir que a **série- p** é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 3

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + \sqrt{n}}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Exercício

Semana 5 - Exercício 4

Determine se a série $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots$ é convergente ou divergente. Apresente o seu termo geral.

Testes da Comparação Termo à Termo

Teste da comparação termo à termo

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com **termos positivos**.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for **convergente** e $a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será **convergente**.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for **divergente** e $a_n \geq b_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será **divergente**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$.

Note que se trata de uma **série-p** com $p = 7/6 > 1$, portanto é uma **série convergente**.

Como $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} \leq \frac{1}{n^{7/6}}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$ é convergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. O termo geral da sequência que define a série não é definido quando $n = 1$, portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$$

Observe que para todo $n \geq 2$.

$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Note que se trata da **série harmônica**, portanto é uma **série divergente**.

Como $\frac{n^2}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 2$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n-1}}$ é divergente pelo **Teste da Comparação termo à termo**.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos**. Observe que para todo $n \geq 1$.

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Dessa forma podemos aplicar o teste da comparação usando a **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

com termo inicial $a = 4/3$ e razão comum $r = 1/3$.

Note que $r < 1$, então essa série geométrica será **convergente**.

Como $\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ é convergente pelo

Teste da Comparação termo à termo.

Testes da Comparação de Limites

Teste da comparação de limites

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com **termos positivos**.

- 1 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.
- 2 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- 3 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ com $p = 2$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 2n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 / \textcolor{red}{n}^2}{(n^2 + 2n) / \textcolor{red}{n}^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2/n} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ é convergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série harmônica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n}$.

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty\end{aligned}$$

Como o limite é **infinito**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$ é convergente ou divergente.

A série dada é uma série com **termos positivos** cujo termo geral é $a_n = \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$.

Vamos aplicar o Teste da Comparação com limite usando a **série-p** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/5}}$ com $p = 3/5$.

Seu termo geral é $b_n = \frac{1}{n^{3/5}}$.

Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}}{\frac{1}{n^{3/5}}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/5}}{(n^3 + 5)^{1/5}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3 + 5} \right)^{1/5} \\&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 5} \right)^{1/5} \\&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3/\textcolor{red}{n}^3}{(n^3 + 5)/\textcolor{red}{n}^3} \right)^{1/5} \\&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 5/n^3} \right)^{1/5} = 1\end{aligned}$$

Como o limite é uma constante **positiva**, então pelo **Teste da Comparação com limite** a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^3 + 5)^{1/5}}$ é convergente.

Determine se a série convergente ou divergente usando os testes da comparação:

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$$

$$② \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \sin^2 k}{1 + k^3}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\exp n}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$$



Séries Alternadas

Série Alternada

É aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. O n -ésimo termo de uma série alternada tem uma das formas:

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n$$

$$a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. Note que $b_n = |a_n|$.

Série Harmônica Alternada

A **série harmônica alternada** é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Teste da Série Alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$$

satisfaz as seguintes condições

① $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n

② $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Convergência da Série Harmônica Alternada

A série harmônica alternada é convergente.

Note que $b_n = \frac{1}{n}$. Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e além disso

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$$

para todo n . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série harmônica alternada é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

e além disso

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\ &= \frac{(n+3)n(n+1)}{(n+1)(n+2)^2} \\ &= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1\end{aligned}$$

para todo n , ou seja $b_{n+1} < b_n$ para todo n . Portanto as duas condições do **Teste da Série Alternada** foram satisfeitas, logo a série alternada do enunciado é convergente.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$b_n = \frac{n^2}{n^3 + 4}.$$

Desse modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} = 0$$

Portanto, a primeira condição do **Teste da Série Alternada** está satisfeita.

Agora veja que

$$b_1 = 1/5 = 0.2$$

$$b_2 = 1/3 = 0.333$$

$$b_3 = 9/31 \approx 0.29032258 \dots$$

$$b_4 = 4/17 \approx 0.235294117 \dots$$

Dessa forma fica claro se a série **não é totalmente decrescente**, mas é possível que ela passe a ter comportamento decrescente a partir de um certo n_0 . Para verificarmos se existe um n_0 que satisfaça essa condição vamos considerar a função associada à b_n .

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

É fácil mostrar que

$$f'(x) = \frac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$$

A função $f(x)$ é decrescente sempre que $f'(x) < 0$. Note que $f'(x)$ será negativa sempre que

$$8 - x^3 < 0$$

$$x^3 > 8$$

$$x > 2$$

Logo a série dada é decrescente para todo $n > 2$, portanto a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

satisfaz as duas condições do **Teste da Série Alternada** e sua convergência é garantida. Somando-se $b_1 = 1/5$ e $b_2 = 1/3$ à essa série continuaremos a ter uma série convergente, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

também é convergente.

Teste as séries quando à convergência ou divergência.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n-3}{2n+1}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n} \sqrt{n}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^2}$$

Teste da Convergência Absoluta

Série Absolutamente Convergente

Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Série Condicionalmente Convergente

Uma série é dita **condicionalmente convergente** se for convergente mas não for absolutamente convergente.

A **série harmônica alternada** é um exemplo de série condicionalmente convergente.

Teste da Convergência Absoluta

Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Série- p (Hiper-harmônica) Alternada

Para um dado $p \in \mathbb{R}$, a série- p , ou série hiper-harmônica, alternada é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

Convergência da Série- p Alternada

A série- p alternada é absolutamente convergente se $p \geq 1$ e condicionalmente convergente se $p < 1$.

Exercício

Prove o resultado anterior.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é convergente ou divergente.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} &= \frac{1/2}{1^2} - \frac{1/2}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1/2}{4^2} + \frac{1/2}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1/2}{7^2} - \cdots + \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \cdots\end{aligned}$$

Veja que os termos da séries podem ter sinais positivos e negativos, mas cuidado! Não se trata de uma série alternada como definimos na aula anterior.

Vamos mostrar que essa série é absolutamente convergente. Para isso considere a série de termos positivos associada à série dada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$$

Para tanto veja que:

$$\begin{aligned} |\cos(\pi n/3)| &\leq 1 \quad \text{para todo } n \\ \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2} &\leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma **série- p** com $p = 2$, portanto se trata de uma série convergente, consequentemente o **Teste da Comparação** nos garante que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(\pi n/3)|}{n^2}$ é convergente.

Dessa forma a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/3)}{n^2}$ é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.



Teste da Razão

Teste da Razão

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ o Teste da Razão é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

e

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Agora note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo **Teste da Razão** a série dada é **absolutamente convergente** e pelo **Teste da Convergência Absoluta** ela é **convergente**.

Exercício

Na aula anterior mostramos que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é convergente. Essa série é absoluta ou condicionalmente convergente?

Na última aula mostramos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Note agora que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1$$

Nessas condições o **Teste da Razão é inconclusivo!** Dessa forma precisamos recorrer à outros testes para responder à essa questão. Observe que:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

Dessa forma é possível aplicar o **Teste da Comparação** com a **série harmônica**. Como a **série harmônica** é divergente então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Também será e, consequentemente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ é **condicionalmente convergente**.

Teste da Raiz

Teste da Raiz

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{i=1}^n a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ o Teste da Raiz é inconclusivo.

Exercício

Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2+1/n}}{n^2} = 0 < 1$$

Portando a série dada é absolutamente convergente pelo **Teste da Raiz**. E o **Teste da Convergência Absoluta** nos garante que ela será convergente.

Teste as seguintes séries com relação à convergência e divergência.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Rearranjo de termos em séries

Rearranjo de termos em séries absolutamente convergentes

Se uma série for **absolutamente convergente** com soma s , então qualquer rearranjo de seus termos tem a mesma soma s .

Rearranjo de termos em séries condicionalmente convergentes

Se uma série for **condicionalmente convergente**, então para todo $r \in \mathbb{R}$ existe um rearranjo dos termos dessa série para o qual a sua somatória será r .

Seja a série harmônica alternada (condicionalmente convergente):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 \quad (2)$$

Multiplique a série por $1/2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \quad (3)$$

Acrescente zeros entre os termos dessa série:

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \cdots = \frac{\ln 2}{2} \quad (4)$$

Somando os termos correspondentes das séries (2) e (4):

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3 \ln 2}{2} \quad (5)$$

Perceba que as séries (2) e (5) são iguais.

Exercício

Apresente uma ordenação para os termos da série harmônica alternada de modo que a sua somatória seja igual a 1.