Hipersuperfícies Associadas a Aplicações Biharmônicas -(HABA)

Ruys, Wesley da Silva
{Instituto Federal de Goiás, Campus Aparecida de Goiânia}, {IFG}
wesley.ruys@ifg.edu.br

3 de Julho de 2020

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos uma classificação das Superfícies Mínimas de Laguerre com aplicação normal de Gauss prescrita associada a aplicações biharmônicas. Estudamos as Superfícies Mínimas de Laguerre com linhas de curvatura planas. Introduzimos uma classe de hipersuperfícies associada a aplicações biharmônicas que generalizam as superfícies mínimas. Classificamos as hipersuperfícies de rotação e apresentamos exemplos destas hipersuperfícies parametrizadas por linhas de curvatura planas.

As superfícies mínimas de Laguerre foram introduzidas por Weingarten em 1888 e, mais tarde, estudadas por W.Blaschke ([2],[3],[4]). Elas são definidas como superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ que são pontos críticos do funcional $L(\psi)$ dado por

$$L(\psi) = \int \frac{H^2 - K}{K} dS$$

onde H e K denotam, respectivamente, as curvaturas média e gaussiana e dS é o elemento de área.

Podemos dizer que uma superfície $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com curvatura gaussiana não nula K e curvatura média H é uma superfície mínima de Laguerre se

$$\triangle_{III}\left(\frac{H}{K}\right) = 0,$$

que é a condição de ψ ser ponto crítico de $L(\psi)$, onde III é a terceira forma fundamental de Σ.

2 Hipersuperfícies Associadas a Aplicações Biharmônicas -(HABA)

Uma família a n-parâmetros de esferas, cujos centros estão sob uma hipersuperfície $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com função raio diferenciável R é chamada de congruência de esferas em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Podemos parametrizar superfícies que são envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano. Sejam Σ uma hipersuperfície orientável em R^{n+1}. Então existe uma parametrização local ortogonal $Y : U \longrightarrow \Pi$, onde U é um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^n$, $\Pi = \{(u_1, u_2, ..., u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : u_{n+1} = 0\}$ e uma função diferenciável $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que Σ pode ser localmente parametrizada por

$$X(u) = \left(Q - \frac{2R}{T}Y, -\frac{2R}{T}\right), \tag{1}$$

onde $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in U \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$T = 1 + |Y|^2, \quad Q = \sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j}, \quad L_{jj} = \langle Y_{,j}, Y_{,j}\rangle, \quad R = \langle Q, Y\rangle - h. \tag{2}$$

A aplicação normal de Gauss é dada por

$$N(u) = \frac{1}{1 + |Y|^2}\Big(2Y, 1 - |Y(u)|^2\Big). \tag{3}$$

Desse resultado, concluímos que uma Superfície Σ de $\mathbb{R}^3$ é chamada Superfície Mínima de Laguerre se

$$\triangle\left(\frac{\triangle h}{|g'|^2}\right) = 0. \tag{4}$$

onde $g : U \longrightarrow \Pi$ é uma função holomorfa, onde U é um subconjunto aberto conexo $\mathbb{R}^2$.

Uma Superfície Σ é dita do Tipo Esférico se existe um plano Π tal que para todo ponto $p \in \Sigma$, o conjunto de esferas de centro $p + \dfrac{H(p)}{K(p)}N(p)$ e raio $R(p) = \dfrac{H(p)}{K(p)}$ tangenciam Π.

Em ([11], [12]), Riveros e Corro apresentam hipersuperfícies parametrizadas por linhas de curvatura com aplicação normal de gauss prescrita e caracterizam as hipersuperfícies com linhas de curvatura plana. Uma superfície obtida através de uma congruência de esferas com g holomorfa é parametrizada por linhas de curvatura planas se g é da forma

$$g(z) = \frac{z_1 z + z_2}{z_3 z + z_4}, \;\text{ ou }\; g(z) = \frac{z_1 e^{\sqrt{c}z} + z_2}{z_3 e^{\sqrt{c}z} + z_4}, \;\; z_1 z_4 - z_2 z_3 \neq 0. \tag{5}$$

Uma Superfície Mínima de Laguerre Σ é dada de forma que $h = \langle 1, A\rangle + \langle g, B\rangle$. Se Σ é parametrizada por linhas de curvatura planas, ou seja g é dada por (4), as funções holomorfas A e B podem ser determinadas de forma explícita.

As Superfícies Mínimas de Laguerre em $\mathbb{R}^3$ foram generalizadas para dimensões maiores em ([8]) e ([14]). As hipersuperfícies Mínimas de Laguerre são pontos críticos do funcional $L(\psi)$ dado por

$$L(\psi) = Vol_g(\psi) = \int_M \frac{\left(\sum_j (r - r_j)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}} dM$$

onde dM é o elemento volume.

Vamos oferecer uma forma alternativa ao funcional $L(\psi)$ para generalizar uma Superfície Mínima de Laguerre. Uma hipersuperfície Σ é dita Hipersuperfície Associada a uma Aplicação Biharmônica (HABA) se existe um hiperplano Π tal que a função raio R determinada por Π, a função distância d e as funções r-curvatura média H_{n-1} e H_n satisfazem

$$\triangle_{III}\left(\frac{d}{R}.\frac{H_{n-1}}{H_n} - d\right) = 0.$$

onde H_r é dada por

$$H_r = \frac{S_r(W)}{\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}},$$

Uma classe de hipersuperfícies (HABA) são as Hipersuperfícies do Tipo Esférico. Σ é chamada Hipersuperfície do Tipo Esférico se existe um hiperplano Π tal que para todo ponto $p \in \Sigma$, o conjunto de esferas de centro $p + \dfrac{H_{n-1}(p)}{H_n(p)}N(p)$ e raio $R(p) = \dfrac{H_{n-1}(p)}{H_n(p)}$ tangenciam Π.

Podemos determinar condições para que possamos obter uma hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura. Uma Hipersuperfície Associada a uma Aplicação Biharmônica Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $Y(u) = (u, 0)$, $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ é parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se, $h : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função de variáveis separáveis, isto é, h é da forma $h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(u_i)$ em que cada f_i é dada por

$$f_i(u_i) = \frac{c_4^i}{24}u_i^4 + \frac{c_3^i}{6}u_i^3 + \frac{c_2^i}{2}u_i^2 + c_1^i u_i + c_0^i,$$

com

$$\sum_{i=1}^{n} c_4^i = 0,$$

onde, $c_j^i, \quad 1 \leq i \leq n \quad$ e $\quad 0 \leq j \leq 4$, são constantes reais. Além disso,as linhas de curvatura de Σ são planas.

Se Σ é uma hipersuperfície do Tipo Esférico em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $Y(u) = (u, 0)$, $u \in U \subset \mathbb{R}^n$, então Σ é parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se $h : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função de variáveis separáveis, isto é, h é da forma $h = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i)$ em que cada f_i é dada por

$$f_i(u_i) = \frac{c_2^i}{2} u_i^2 + c_1^i u_i + c_0^i,$$

onde, $c_j^i,\ 1 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq 4$ são constantes reais .

Alem disso, Σ é uma hipersuperfície de Dupin cujas linhas de curvatura planas.

3 Considerações Finais

As Superfícies Mínimas de Laguerre já foram generalizadas via operador integral para dimensões maiores. Na busca por caminhos alternativos para generalizar essas superfícies vimos que existem algumas alternativas viáveis para tal generalização. Nesse trabalho optamos por generalizar as Superfícies Mínimas de Laguerre utilizando de congruências de esferas e uma classe dessas Superfícies conhecidas como Superfícies do Tipo Esférico. Outros caminhos alternativos para Generalizar essas Superfícies podem ser frutos de outros trabalhos futuros.

Referências

[1] ABU MUHANNA, Y.; ALI, R. M. Biharmonic maps and Laguerre minimal surfaces. Abstr. Appl. Anal., p. Art. ID 843156, 9, 2013.

[2] BLASCHKE, W. Über die geometrie von laguerre ii: Flächentheorie in ebenenkoordinaten. 3:195-212, 1923.

[3] BLASCHKE, W. Blaschke, w.: Über die geometrie von laguerre iii: Beiträge zur Flächentheorie. 4:1-12, 1925.

[4] BLASCHKE, W. Vorlesungen Über Differentialgeometrie, volume 3. Springer, 1929.

[5] CORRO, A. V. Generalized Weingarten surfaces of Bryant type in hyperbolic 3-space. Mat. Contemp., 30:71-89, 2006. XIV School on Differential Geometry (Portuguese).

[6] DIAS, D. G.; CORRO, A. M. V. Classes of generalized Weingarten surfaces in the Euclidean 3-space. Adv. Geom., 16(1):45-55, 2016.

[7] FERAPONTOV, E. V. Reciprocal transformations and their invariants. Differentsial0nye Uravneniya, 25(7):1256-1265, 1286, 1989.

[8] LI, T.; WANG, C. Laguerre geometry of hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$. Manuscripta Math.,122(1):73-95, 2007.

[9] MUSSO, E.; NICOLODI, L. Laguerre geometry of surfaces with plane lines of curvature. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 69:123-138, 1999.

[10] POTTMANN, H.; GROHS, P.; MITRA, N. J. Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity. Adv. Comput. Math., 31(4):391-419, 2009.

[11] RIVEROS, C. M. C.; CORRO, A. M. V. Hypersurfaces with planar lines of curvature. preprint.

[12] RIVEROS, C. M. C.; CORRO, A. M. V. Classes of hypersurfaces with vanishing Laplace invariants. Bull. Korean Math. Soc., 49(4):685-692, 2012.

[13] RIVEROS, C. M. C.; CORRO, A. M. V.; SANTOS, J. Generalizations of laguerre surfaces. preprint.

[14] SONG, Y. The second variational formula for Laguerre minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$. Results Math., 63(3-4):985-998, 2013.