Gradiente Quase Ricci Soliton para soluções invariantes por translação, rotação e cilíndricas. *

Bezerra, Tatiana Pires Fleury

{Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia, Campus Aparecida de Goiânia}, {IFG}

tatiana.fleury@ifg.edu.br

Ruys, Wesley da Silva

{Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia, Campus Aparecida de Goiânia}, {IFG}

wesley.ruys@ifg.edu.br

2 de julho de 2020

1 Introdução

Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, g é a métrica . Dizemos que (M, g) é um Gradiente Ricci Soliton se existe uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$,função potencial, tal que

$$\mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}_g(f) = \rho g, \qquad \rho \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci, $\mathrm{Hess}_g(f)$ é a Hessiana de com respeito a métrica e ρ é um número real. Podemos classificar um Gradiente Ricci Soliton, conforme o sinal de ρ. Um Gradiente Ricci Soliton é dito shirinking se $\rho > 0$, steady se $\rho = 0$ e expanding se $\rho < 0$.

Em 2010 em ([3]) Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti introduziram uma extensão natural do conceito de Gradiente Ricci Soliton, o Gradiente Quase Ricci Soliton. (M, g) é dita Gradiente Quase Ricci Soliton se a equação (1) é satisfeita para algum $\rho \in C^\infty(M)$.

Catino, em 2011 (veja ([13]), introduziram a noção de variedade generalizada quase-Einstein, que são variedades quase-Einstein quase Ricci soliton. Em ([6]), os autores provaram um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ ou a esfera padrão $\mathbb{S}^n$ é uma variedade única com curvatura escalar não-negativa com uma estrutura de um gradiente quase Ricci soliton.

Motivado pelos trabalhos ([1]) e ([11]), este trabalho considerara gradiente quase Ricci soliton conforme ao espaço pseudo Euclidiano, que são invariantes sob a ação de grupos de translação $(n-1)-$ dimensional, rotação e cilindros. Mais, precisamente, seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo Euclidiano com métrica g e coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Consideraremos invariância por rotação, cilindrica e translação respectivamente dada por $r = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$ e $r = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^2$, $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Encontraremos funções f, φ e ρ tal que a métrica $\overline{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$, satisfaça a equação (1) para algum $\rho \in C^\infty(M)$.

2 Desenvolvimento

Mostramos que todo espaço conforme ao espaço pseudo-Euclidiano, invariante por rotação e translação são gradiente quasi Ricci solitons, e exibimos uma infinidade de exemplos desses gradiente quasi Ricci solitons.

Neste primeiro teorema, caracterizaremos os gradientes quasi Ricci solitons invariantes por rotação.

Teorema 2.1 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$. Considere funções diferenciáveis não constantes $f(r)$ e $\varphi(r)$,*

*este trabalho conta com apoio financeiro de ...

onde $r=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i^2$. *Existem métricas* $\overline{g}=\frac{1}{\varphi^2}g$ *tais que* $(\mathbb{R}^n,\overline{g})$ *são um gradiente quasi Ricci soliton com* f *uma função potencial se, e somente se, as funções* f, φ *e* ρ *satisfazem*

$$\left\{\begin{array}{l}(n-2)\varphi^{''}+2\varphi^{'}f^{'}+\varphi f^{''}=0\\ 4(n-1)\varphi\varphi^{'}+4r\varphi\varphi^{''}-4(n-1)r\left(\varphi^{'}\right)^2-4r\varphi\varphi^{'}f^{'}+2\varphi^2 f^{'}=\rho.\end{array}\right. \tag{2}$$

Observe que temos três funções e duas equações. Portanto, se escolhermos uma função conforme para o Teorema 2.1 podemos construir um gradiente quasi Ricci soliton pseudo-Riemanniano invariante pela ação de um grupo pseudo ortogonal (no caso Riemanniano, rotação), desde que o sistema (2) seja integrável. Resumimos esta discussão no seguinte Corolário.

Corolario 2.1 *Seja* $(\mathbb{R}^n,g)$ *um espaço pseudo-Euclidiano* $n\geq 3$ *com coordenadas* $x=(x_1,...,x_n)$, $g_{ij}=\delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i=\pm 1$ *com pelo menos um* $\varepsilon_i=1$. *Considere funções diferenciáveis não constantes* $f(r)$ *e* $\varphi(r)$, *onde* $r=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i^2$. *Dada qualquer função* $\varphi(r)$, *a métrica* $\overline{g}=\frac{1}{\varphi^2}g$ *é um gradiente quasi Ricci soliton com* f *uma função potencial, onde as funções* f *e* ρ *são dadas por*

$$\left\{\begin{array}{l}f(r)=\displaystyle\int\left[c-(n-2)\int\varphi\varphi^{''}dr\right]\frac{1}{\varphi^2}dr+k\\ \\ \rho(r)=4(n-1)\varphi\varphi^{'}+4r\varphi\varphi^{''}-4(n-1)r\left(\varphi^{'}\right)^2-4cr\frac{\varphi^{'}}{\varphi}+2c+\\ -2(n-2)\left(1-2r\frac{\varphi^{'}}{\varphi}\right)\displaystyle\int\varphi\varphi^{''}dr.\end{array}\right. \tag{3}$$

onde c *e* k *são constantes.*

No próximo teorema, caracterizaremos os gradientes quasi Ricci solitons invariantes por translação.

Teorema 2.2 *Seja* $(\mathbb{R}^n,g)$ *um espaço pseudo-Euclidiano* $n\geq 3$ *com coordenadas* $x=(x_1,...,x_n)$, $g_{ij}=\delta_{ij}\varepsilon_i$. *Considere funções não constantes diferenciáveis* $f(\xi)$ *e* $\varphi(\xi)$, *onde* $\xi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$ *e* $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\alpha_i^2=\varepsilon_{i_0}\neq 0$. *Existe uma métrica* $\overline{g}=\frac{1}{\varphi^2}g$ *tal que* $(\mathbb{R}^n,\overline{g})$ *é um gradiente quasi Ricci soliton com* f *como função potencial se, e somente se, as funções* f, φ *e* ρ *satisfazem*

$$\left\{\begin{array}{l}(n-2)\varphi^{''}+2\varphi^{'}f^{'}+\varphi f^{''}=0\\ \varepsilon_{i_0}\left[\varphi\varphi^{''}-(n-1)\left(\varphi^{'}\right)^2-\varphi\varphi^{'}f^{'}\right]=\rho.\end{array}\right. \tag{4}$$

No próximo resultado, vamos encontrar famílias de gradiente quasi Ricci solitons que são invariantes sobre a ação do grupo de translação $(n-1)$-dimensional.

Corolario 2.2 *Seja* $(\mathbb{R}^n,g)$ *um espaço pseudo-Euclidiano* $n\geq 3$ *com coordenadas* $x=(x_1,...,x_n)$, $g_{ij}=\varepsilon_i\delta_{ij}$. *Dada qualquer função* $\varphi(\xi)$, *a métrica* $\overline{g}=\frac{1}{\varphi^2}g$ *é um gradiente quasi Ricci soliton com* f *uma função potencial, onde as funções* f *e* ρ *são dadas por*

$$\left\{\begin{array}{l}f(\xi)=\displaystyle\int\left[c-(n-2)\int\varphi\varphi^{''}d\xi\right]\frac{1}{\varphi^2}d\xi+k\\ \\ \rho(\xi)=\varepsilon_{i_0}\left\{\left[\varphi\varphi^{''}-(n-1)(\varphi^{'})^2\right]-\frac{\varphi^{'}}{\varphi}\left[c-(n-2)\displaystyle\int\varphi\varphi^{''}d\xi\right]\right\}.\end{array}\right. \tag{5}$$

onde c *e* k *são constantes.*

Provamos que não existe gradiente Ricci soliton conforme ao espaço pseudo-Euclidiano onde o fator conrforme $\varphi=\varphi(s)$ e a função potencial $f=f(s)$ onde s é o invariante cilindrico $s=\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i x_i^2$.

Teorema 2.3 *Seja (R^n, g) um espaço Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $X = (x_1, ..., x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere funções diferenciáveis não constantes $f(s)$ e $\varphi(s)$ onde $s = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$. Então não existe métrica $\overline{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ tal que $(R^n, \overline{g})$ seja um gradiente quase Ricci Soliton, com f como uma função potencial.*

Podemos exibir exemplos simples.

Exemplo 2.1 *Tome a função $\varphi(r) = (a + br)^\alpha, a, b, \alpha \in R$, então encontramos*

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{c}{b}\ \dfrac{(a+br)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} + (n-2)\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1-2\alpha} ln\,|a+br| + k; \ \alpha \neq \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{c}{b} ln\,|a+br| + \dfrac{(n-2)}{8} ln^2\,|a+br| + k; \quad \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{6}$$

E a função ρ, será dada por

$$\rho(r) = 4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r\left(\varphi'\right)^2 + 2\varphi\left(\varphi - 2r\varphi'\right)f'$$

$$f'(r) = \begin{cases} c\,(a+br)^{-2\alpha} + (n-2)\dfrac{b\alpha(\alpha-1)}{1-2\alpha}\,(a+br)^{-1}; \quad \alpha \neq \dfrac{1}{2} \\ \\ c\,(a+br)^{-1} + \dfrac{(n-2)}{4} b\,(a+br)^{-1}\, ln\,|a+br|; \quad \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

onde c e k são constantes reais.

Exemplo 2.2 *Em particular tomando $a = 0, b = 1$ e $\alpha = \dfrac{1}{2}$ temos a função $\varphi(r) = \sqrt{r}$. E vemos pela equação acima,*

$$f(r) = cln\,|r| + \frac{(n-2)}{8} ln^2\,|r| + k$$

e neste caso $\rho = n - 2$.

Exemplo 2.3 *Olhando novamente para a função $\varphi(r) = (a + br)^\alpha, a, b, \alpha \in R$, concluímos que (R^n, g) é um gradiente Ricci Soliton somente se $a = 0$ e $\alpha = \dfrac{1}{2}$, e neste caso $\rho = b(n - 2)$.*

3 Considerações Finais

Este é um projeto de pesquisa desenvolvido por mim e registrado no IFG campus Aparecida de Goiânia de vigência de 2018/2 a 2020/2 e conto com a colaboração do professor doutor Wesley da Silva Ruys.

Este trabalho também faz parte da minha tese de doutorado compondo uma parte do ultimo capitulo da tese.

Os objetivos principais foi aplicar e desenvolver as habilidades em geometria Riemanniana, exibir famílias de gradiente Ricci soliton invariantes por translação para espaço pseudo- Euclidiano, exibir famílias de gradiente quase Ricci soliton invariantes por rotação para espaço Euclidiano e mostrar que não existe gradiente quase Ricci soliton invariantes por cilindro.

Nosso processo de pesquisa se baseou em estudo de artigos e a resolução das Equações diferenciais gerada pelo gradiente quase Ricci soliton.

Referências

[1] BARBOSA, E.; PINA, R. *On Gradient Ricci Solitons conformal to a pseudo-Euclidean space.*Israel J. Math, n. 1, p. 213?224, 2014.

[2] BATAT, W.; BROZOS-VÁSQUEZ, M; GARCÍA-RÍO, E.; GAVINO-FERNÁNDEZ, S. *Ricci solitons on Lorentzian manifolds with large isometry groups.* London Math. Soc., n. 6, p. 1219-1227, 2011.

[3] PIGOLA, S.; RIGOLI, M; RIMOLDI, M.; SETTI, A. *Ricci Almost Solitons.* Ann.ScuolaNorm. Sup. Pisa,n. 5, p. 757-799, 2011.

[4] BROZOS-VÁSQUEZ, M; CALVARUSO, G; GARCÍA-RÍO, E.; GAVINO-FERNÁNDEZ, S. *Three dimension Lorentzian homogeneous Ricci solitons.* Israel: J. Math.s, p. 385 403, 2012.

[5] BROZOS-VÁSQUEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.; GAVINO-FERNÁNDEZ, S. *Locally conformally ?at Lorentzian gradient Ricci solitons*. Journal of Geometric Analysis, v. 23, n. 3, p. 1196 - 1212,2013. 2004.

[6] BARROS, A.; BATISTA, R.; RIBEIRO JR., E. *Rigidity of gradient almost Ricci solitons, Illinois*. JJ. Math, v. 56, p. 1267?1279, 2012.

[7] O'NEILL, B. *Semi?Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York: Academic Press, 1983.

[8] ONDA, K. *Lorentzian Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups*. Geom. Dedicata, v. 147, n. 1, p. 313-322, 2010.

[9] BARROS, A.;GOMES, J. N.; RIBEIRO JR., E. *Anote on rigidityof thealmost Riccisoliton*. Arch. Math. (Basel), v. 100, p. 481?490, 2013.

[10] BROZOS-VÁSQUEZ, M.; GARCÍA-RÍO, E.; VALLE-REGUEIRO, X. *Half Conformally ?at gradient Ricci Almost Solitons*. Journal of Computational Physics, v. 472, 2016.

[11] SOUSA, M.; PINA, R. *Gradient Ricci Solitons with Structure of Warped Product*. Results in Mathematics, v. 71, p. 825-840, 2017.

[12] PINA, R; TENEMBLAT, K. *Incorporating topological derivatives into level set methods*. Journal of Computational Physics, v. 194, n. 1, p. 344-362, 2004.

[13] CATINO, G. *Generalized Quasi-Einstein Manifolds With Harmonic Weyl Tensor*. Math. Z., v. 271, n. 3-4, p. 751-756, 2012.