Um Estudo sobre a Curvatura e a Torção de Curvas Parametrizadas Diferenciáveis*

Silva, Laurienny Gondim†

Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí, Aluna de PIVIC, IF Goiano

laurienny.gondim@estudante.ifgoiano.edu.br

Santos, Dassael Fabrício dos Reis‡

Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí, IF Goiano

dassael.santos@ifgoiano.edu.br

3 de Julho de 2020

RESUMO: Este trabalho tem por objetivo apresentar um breve estudo sobre a geometria diferencial das curvas parametrizadas diferenciáveis e mostrar alguns resultados de classificação de curvas por meio do conhecimento prévio da curvatura e da torção da curva (ou de alguma relação entre elas). Mais precisamente, provaremos dois teoremas de classificação, à saber: um resultado que classifica todas as curvas planas de curvatura constante e um resultado que classifica as curvas no espaço com curvatura e torção constantes e as curvas de Bertrand. Para atingir este objetivo, utilizaremos como ferramentas principais as equações de Frenet e o Teorema Fundamental das Curvas.

Palavras-Chave: Curva, Curvatura, Torção, Teorema.

1 Introdução

O estudo das curvas parametrizadas diferenciáveis, em Geometria Diferencial, constitui um dos conceitos fundamentais para Matemática, sendo considerado ferramenta essencial para o desenvolvimento da Geometria Diferencial. De maneira geral, uma curva é um elemento geométrico, no plano ou no espaço, que aparece com naturalidade em matemática como, por exemplo, em geometria analítica no estudo das cônicas e no estudo das integrais de linha, e são conceitos fundamentais para o desenvolvimento da teoria das superfícies diferenciáveis. Um problema muito comum que surge em estudos de Geometria Diferencial é o de encontrar uma curva regular. Para solução destes problemas, usualmente utiliza-se do teorema fundamental das curvas ou de resultados de existência de EDOs. Neste sentido, a curvatura e a torção desempenham importante papel para solução destes problemas, pois auxiliam no estudo do comportamento local de algumas destas curvas.

Para Lima ([3], 2016, p.11), as curvas parametrizadas diferenciáveis caracterizam-se por admitir, em cada um de seus pontos, uma reta tangente, o que nos conduzirá ao fundamental conceito de curvatura de curvas.

Dentre os trabalhos que se destacam com estudos sobre este assunto podemos citar Tenenblat ([4], 2008) e do Carmo ([2], 2010). Em seu trabalho intitulado *Introdução a Geomeria Diferencial*, Tenenblat desenvolve o estudo da teoria das curvas e das superfícies. Em particular, a autora faz um estudo teórico geral sobre as curvas parametrizadas diferenciáveis e mostra alguns resultados de classificação de curvas por meio do conhecimento prévio de informações sobre a curvatura e a torção da curva. Já em 2010, do Carmo [2], em seu trabalho intitulado *Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies*, desenvolve resultados semelhantes para curvas e superfícies, realizando um breve estudo sobre curvas espaciais e mostrando resultados importantes sobre superfícies através de informações sobre a curvatura gaussiana.

Outros resultados importantes sobre o assunto podem ser encontrados em Alencar e Santos ([1], 2003), Ventura ([5], 1998) e suas referências. Neste sentido, este trabalho tem por objetivo apresentar resultados que classificam todas as curvas planas com curvatura constante, as curvas no espaço com curvatura e torção constantes e as curvas cuja curvatura e torção satisfazem certa relação linear.

*Este trabalho é produto de um projeto de PIVIC intitulado "Geometria Diferencial das Curvas Parametrizadas Diferenciáveis"e desenvolvido no IFGoiano - Campus Urutaí.

†Aluna de PIVIC do IF Goiano - Campus Urutaí

‡Professor do IF Goiano - Campus Urutaí, Orientador de PIVIC

2 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis

Nesta seção, apresentaremos uma breve descrição da teoria local das curvas parametrizadas diferenciáveis e, em seguida, mostraremos dois teoremas de classificação de curvas por meio de informações previamente conhecidas sobre a curvatura e a torção da curva. A menos que se mencione o contrário, neste trabalho, I denota um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Começaremos definindo os conceitos e propriedades básicas do estudo das curvas, começando pela definição de curva parametrizada diferenciável.

Definição 2.1 (Curva) *Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada $t \in I$ associa um vetor $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde $x, y, z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis de classe C^∞. Além disso, a curva α é dita regular se $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, onde $\alpha'(t)$ é o vetor tangente à α em $t \in I$ dado por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.*

Por exemplo, a aplicação $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (x_0 + R\cos(t),\ y_0 + R\sin(t)), \tag{1}$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma circunferência no plano de centro em (x_0, y_0) e raio $R > 0$. Já a aplicação $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, $\quad a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma reta passando pelo ponto (c, d) e com direção do vetor (a, b). Também, a aplicação

$$\alpha(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t), e^t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço se desenrola sobre o cone $z^2 = x^2 + y^2$. Posteriormente, veremos que esta curva é uma hélice circular. Um conceito importante no estudo das curvas diferenciáveis é o de parametrização pelo comprimento de arco. Este conceito, junto com as Fórmulas de Frenet (definidas posteriormente), permitem fazer um estudo do comportamento local de uma curva. A definição a seguir trata sobre comprimento de arco de uma curva regular.

Definição 2.2 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. A função comprimento de arco de α a partir de a é definida por*

$$s(t) = \int_a^t \mid \alpha'(t) \mid dt, \quad a, t \in I. \tag{3}$$

Além disso, α é dita parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\int_a^b \mid \alpha'(t) \mid dt = b - a, \quad a, b \in I, \quad a \leq b. \tag{4}$$

É fácil provar que uma curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\mid \alpha'(t) \mid = 1$. Com efeito, se $\mid \alpha'(t) \mid = 1$, então,

$$\int_a^b \mid \alpha'(t) \mid dt = \int_a^b dt = t\Big|_a^b = b - a, \tag{5}$$

e, pela definição 2.2, α está parametrizada pelo comprimento de arco. A recíproca é imediata por derivação da função comprimento de arco. Para uma prova completa deste resultado veja do Carmo ([2], 2010, p. 20) ou Tenenblat ([4], 2008, p. 58). A circunferência de equação paramétrica dada em (1) com $R = 1$, por exemplo, é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \quad \text{e} \quad \mid \alpha'(t) \mid = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1. \tag{6}$$

Ao longo do trabalho, a menos que se mencione o contrário, assumiremos que todas as curvas $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Para mais detalhes sobre parametrização pelo comprimento de arco veja Tenenblat ([4], 2008) e Ventura ([5], 1998).

A definição a seguir estabelece o conceito de curvatura de uma curva.

Definição 2.3 (Curvatura) *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A curvatura de α é definida por $\kappa(s) =\mid \alpha''(s) \mid$, $s \in I$. Se α não está parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura de α é definida por*

$$\kappa(t) = \frac{\mid \alpha'(t) \times \alpha''(t) \mid}{\mid \alpha'(t) \mid^3}. \tag{7}$$

Além disso, se α é uma curva regular plana (não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco), a curvatura de α é dada por

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Para Ventura (1998, p. 7), a curvatura dá uma medida da variação da direção da curva, mas seu conhecimento não determina a forma da curva: tanto a circunferência como a hélice, por exemplo, têm curvatura constante.

A grosso modo, a curvatura de α mede a velocidade com que as tangentes à α mudam de direção, ou seja, o quanto a curva deixa de ser uma reta. Também, para cada $s \in I$, existem vetores ortogonais e unitários $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ dados por

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\mid \alpha''(s) \mid}, \quad b(s) = t(s) \times n(s). \tag{9}$$

A definição a seguir estabelece o conceito de torção de uma curva.

Definição 2.4 (Torção) *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. O número real τ dado por $\tau(s) = b'(s)n(s)$ é denominado torção de α.*

Segundo Tenenblat (2008, p. 65), geometricamente, o módulo da torção mede a velocidade com que varia o plano osculador. Em palavras, a torção mede a velocidade com que a curva α deixa de ser plana.

Já para Lima ([3], 2016, p. 29), o valor absoluto da torção de uma curva regular α num ponto s , quando não nulo, é, numa vizinhança de $\alpha(s)$, uma medida de "afastamento" do traço de α do plano osculador de α em s.

Os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, são denominados, respectivamente, vetor tangente, normal e binormal à α em $s \in I$ e tem derivadas dadas pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

ou seja,

$$t'(s) = \kappa(s)n(s), \quad n'(s) = -\kappa(s)t(s) - \tau(s)b(s), \quad b'(s) = \tau(s)n(s). \tag{11}$$

As equações acima são chamadas Fórmulas (ou equações) de Frenet e determinam comportamento local de α. Para prova das equações acima veja do Carmo ([2], 2010) e Tenenblat ([4], 2008) e suas referências. Uma classe de curvas importantes no estudo da Geometria Dife rencia lsão as hélices. Estas curvas caracterizam-se por ter curvatura e torção constantes. Em geral, uma hélice pode ser definida como uma curva no espaço, de curvatura não-nula, cuja reta tangente em cada ponto faz um ângulo constante com uma direção fixada. A seguir, formalizaremos a definição de hélice.

Definição 2.5 (Hélice) *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Dizemos que α é uma hélice, se existe um vetor unitário v que forma um ângulo constante com $\alpha'(t)$, para todo $t \in I$, isto é,*

$$\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\mid \alpha'(t) \mid} = c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

A curva dada pela equação (2), por exemplo, é uma hélice, pois

$$\alpha'(t) = (e^t\cos(t) - e^t\sin(t), e^t\sin(t) + e^t\cos(t), e^t), \quad \mid \alpha'(t) \mid = \sqrt{3}e^t, \tag{13}$$

e, tomando uma direção fixa $v = (0,0,1)$, tem-se

$$\frac{\langle \alpha'(t), v\rangle}{\mid \alpha'(t) \mid} = \frac{\langle (e^t\cos(t) - e^t\sin(t), e^t\sin(t) + e^t\cos(t), e^t), (0,0,1)\rangle}{\sqrt{3}e^t} = \frac{e^t}{\sqrt{3}e^t} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{14}$$

Note que o resultado acima é constante, provando que α, de fato, é uma hélice. A seguir definiremos o que se entende por curva de Bertrand.

Definição 2.6 (Curvas de Bertrand) *Uma curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com curvatura e torção não-nulas, é uma curva de Bertrand, se existe uma curva regular $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ em que as retas normais de α e β são iguais em $t \in I$. Neste caso, β é chamado par e Bertrand de α e escreve-se*

$$\beta(t) = \alpha(t) + rn(t), \quad t \in I. \tag{15}$$

O resultado a seguir é um dos principais teoremas do estudo das curvas parametrizadas diferenciáveis. Em essência, este teorema garante que as funções curvatura e torção determinam uma curva, a menos de sua posição no espaço. Tal resultado é denominado Teorema Fundamental das Curvas. A versão do Teorema Fundamental das Curvas apresentada a seguir se deve à do Carmo ([2], 2010).

Teorema 2.7 (Teorema Fundamental das Curvas) *Dadas as funções diferenciáveis $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, s é o comprimento de arco, $\kappa(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α. Além disso, qualquer outra curva β satisfazendo as mesmas condições difere de α por um movimento rígido, isto é, existe uma aplicação ortogonal $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com determinante positivo, e um vetor v, tal que, $\beta = \phi \circ \alpha + v$.*

A prova deste teorema se baseia em resultados de existência de Equações Diferenciais Ordinárias para existência da curva α nas equações de Frenet para unicidade. Ao leitor interessado em conhecer a prova completa do Teorema Fundamental das Curvas, sugere-se consultar do Carmo ([2], 2010), Lima ([3], 2016) e Tenenblat ([4], 2008), Ventura ([5], 1998) e suas referências.

Segundo Tenenblat ([4], 2008, p. 90), o Teorema fundamental das Curvas prova que, dadas duas funções diferenciáveis quaisquer, sendo uma delas positiva, existe uma curva regular de $\mathbb{R}^3$ que admite essas funções como curvatura e torção.

O resultados principais deste trabalho, tratados a seguir, classificam algumas curvas diferenciáveis por meio de informações previamente conhecidas sobre a curvatura e a torção da curva. Mais precisamente, mostraremos dois resultados, à saber: um resultado que classifica curvas planas de curvatura constante e um resultado de classificação de curvas espaciais conhecendo certas informações sobre a curvatura e a torção da curva.

Teorema 2.8 (Curvas Planas de Curvatura Constante) *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura κ. Então:*

1. *α é uma reta se, e somente se, $\kappa \equiv 0$.*
2. *α está contida em uma circunferência de raio $R > 0$ se, e somente se, $\kappa = \frac{1}{R}$.*

Além disso, se α é uma curva plana de curvatura κ constante, então α está contida em uma reta ou α está contida em uma circunferência.

A prova da primeira parte do teorema acima utiliza as Fórmulas de Frenet. Para prova da segunda parte do teorema, basta observar que se $\kappa = 0$, então, pela primeira parte, α é uma reta. Por outro lado, se $\kappa > 0$ é uma função diferenciável em I, utilizando o Teorema Fundamental das Curvas, uma curva plana que tem κ como curvatura é dada por

$$\alpha(s) = \left(\int \cos\theta(s)ds + b_0, \int \sin\theta(s)ds + b_1\right), \tag{16}$$

onde b_0, b_1 são constantes,

$$\theta(s) = \int \kappa(s) ds + \Phi, \tag{17}$$

e a curva é determinada a menos de uma translação do ponto (b_0, b_1) e uma rotação do ângulo Φ. Sendo $\kappa > 0$ constante, é fácil provar que α está contida em uma cincunferência. Para uma versão do Teorema fundamental das Curvas Planas (isto é, quando $\tau \equiv 0$), veja do Carmo ([2], 2010) e Tenenblat ([4], 2008).

Teorema 2.9 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura κ e torção τ. Então:*

1. *α é uma hélice se, e somente se, $\frac{\kappa}{\tau}$ é constante.*

2. *α é uma curva de Bertrand se, e somente se, existem constantes não nulas A e B, tais que, $Ak + B\tau = 1$.*

A prova do Teorema 2.9 segue das equações de Frenet e das definições de torção e curvatura.

Visto que uma reta e uma circunferência em $\mathbb{R}^3$ são curvas que estão contidas em algum plano, e que curvas planas são caracterizadas por serem curvas cuja torção é identicamente nula, então o teorema 2.8 pode ser enunciado em termos de curvas espaciais da seguinte forma: Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura κ e torção τ. Então:

1. α é uma reta se, e somente se, $\tau \equiv 0$ e $\kappa \equiv 0$.

2. α está contida em uma circunferência de raio $R > 0$ se, e somente se, $\tau \equiv 0$ e $\kappa = \frac{1}{R}$.

A demonstração é análoga a prova da primeira parte do Teorema 2.8. Para mais detalhes e informações sobre o estudo das curvas parametrizadas diferenciáveis, consulte a bibliografia listada e suas referências.

3 Considerações Finais

Ao completar este estudo concluímos que o conhecimento prévio de certas informações sobre a curvatura e a torção de uma curva parametrizada diferenciável pode ser um fator determinante para o conhecimento da curva. Salientamos que nem toda curva pode ser obtida apenas pelo conhecimento da curvatura e da torção, mas o conhecimento destes fatores é uma ferramenta importate para um estudo sobre o comportamento da curva.

Agradecimentos: Ao Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí.

Referências

[1] ALENCAR, H.; SANTOS, W. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[2] do CARMO, M. *Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[3] LIMA, R. F. *Introdução a Geometria Diferencial*. IV Colóquio de Matemática da Região Norte, Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[4] TENENBLAT, K. *Introdução a Geometria Diferencial*. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

[5] VENTURA, P. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: SBM, 1998.