CV2（SLAM十四讲）

经典视觉SLAM框架

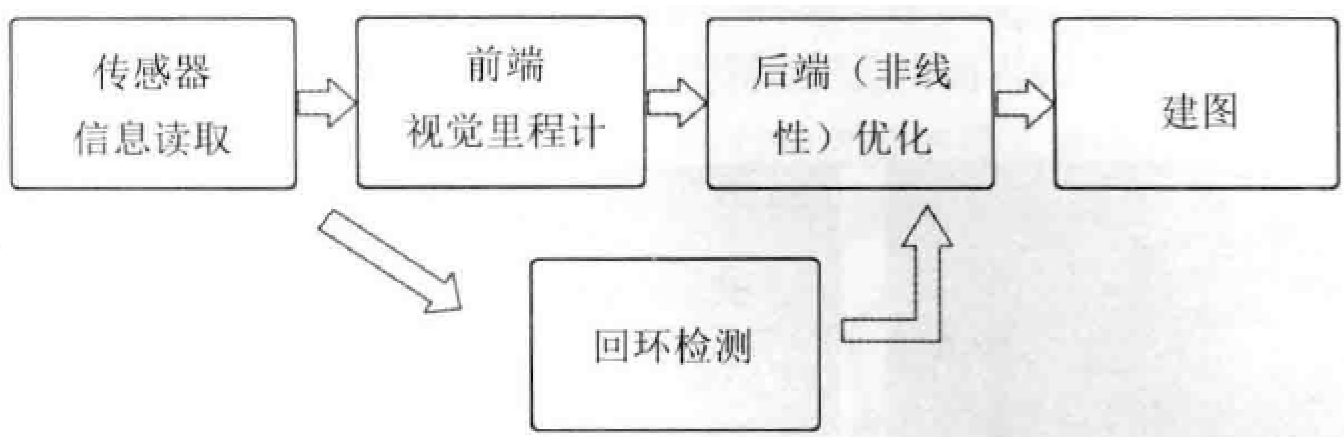


图 2-7　经典的视觉 SLAM 框架

三维空间刚体运动

旋转矩阵 Rotation matrix

点、向量和坐标系

$a \times b$

反对称矩阵 Anti-Symmetric matrix $a^{\wedge} b = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$

坐标系间的欧式变换

- 两个坐标系之间的运动由一个旋转加上一个平移做成，这种运动称为刚体运动。刚体运动做成中，同一个向量在各个坐标系下的长度和夹角都不会发生变化，这种变换称为欧式变换 Euclidean Transform。
- $a' = \mathbf{R}a + t$ R称为旋转矩阵。n维旋转矩阵集称为特殊正交群 Special Orthogonal Group $SO(n) = \left\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = 1 \right\}$

变换矩阵与齐次坐标

- 多次欧式变换不是一个线性变换，因此我们引入一个数学技巧：齐次坐标。即引入第四维，其为常量1
- 将旋转和平移整合到一个变换矩阵 Transform Matrix中，变换矩阵集合称为特殊欧式群 Special Euclidean Group $SE(3) = \left\{ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} | \mathbf{R} \in SO(3), t \in \mathbf{R}^3 \right\}$

旋转向量和欧拉角

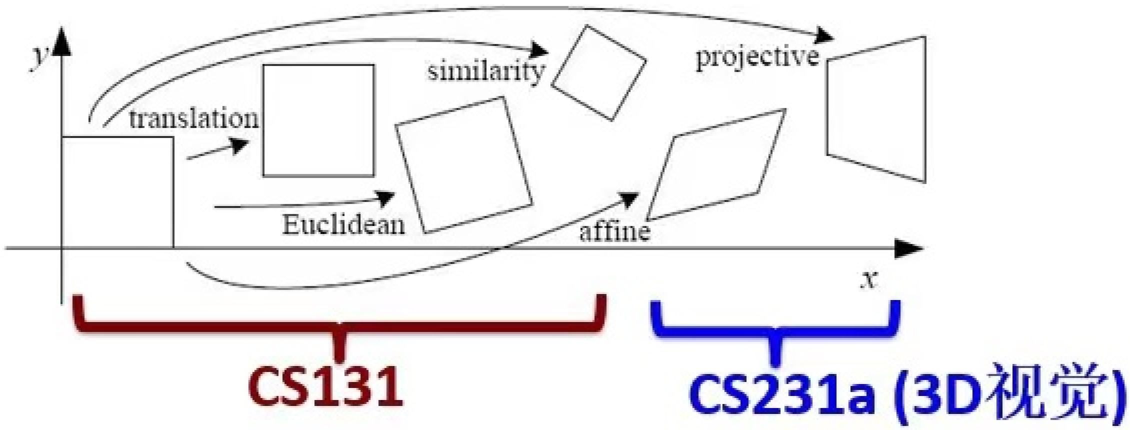
旋转向量/轴角 Axis-Angle

- 轴角
- 轴角和旋转矩阵之间转换关系
  - 轴角向旋转矩阵转换的罗德里格斯公式 Rodrigues's Formula： $\mathbf{R} = \cos\theta \mathbf{I} + (1 - \cos\theta n n^T) + \sin\theta n^{\wedge}$
  - 旋转矩阵向轴角转换 $\theta = \arccos \frac{tr(\mathbf{R}) - 1}{2}$

欧拉角 Euler Angle

四元数 Quaternion

相似、放射、射影变换



几何不变性等级

变换名称	矩阵形式	DoF	不变性质
Euclidean	$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$	6	长度、夹角、体积
Similarity	$\begin{bmatrix} s\mathbf{R} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$	7	体积比
Affine	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$	12	平行性、体积
Perspective	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & t \\ a^T & v \end{bmatrix}$	15	接触平面的相交和相切

李群与李代数

李群与李代数基础 Lie Group

群 Group

群是一种集合加上一种运算的代数结构。群要求运算满足下列几个条件：

- 封闭性 closeness：$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \cdot a_2 \in A$
- 结合律 associativity：$\forall a_1, a_2, a_3 \in A, (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)$
- 幺元 neutrality：$\exists a_0 \in A, s.t. \forall a \in A, a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a$
- 逆 invertibility：$\forall a^{-1} \in A, \exists a^{-1} \in A, s.t. a \cdot a^{-1} = a_0$ 整数的逆是其相反数

李群是指具有连续（光滑）性质的群，整数加法群$(\mathbb{Z}, +)$这类离散群是不光滑的。而$SO(n), SE(n)$属于光滑的李群，其对于位姿估计非常重要。

李代数的引出

- 任意随事件变换的旋转满足 $\mathbf{R}(t)\mathbf{R}(t)^T = \mathbf{I}$
- 两边对时间求导 $\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T + \mathbf{R}(t)\mathbf{R}(\dot{t})^T = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T = -\mathbf{R}(t)\mathbf{R}(\dot{t})^T$
- $\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T$是一个反对称矩阵，对于任意反对称矩阵，我们也可以找到唯一与之对应的向量，将这个运算称为$A^\vee$。因此可以找到一个三维向量$\phi(t) \in \mathbb{R}^3$与之对应，即$\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T = \phi(t)^\wedge$
- 等式两边右乘$\mathbf{R}(t)$
  - $\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T\mathbf{R}(t) = \dot{\mathbf{R}} = \phi(t)^\wedge\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{R}(t)$
  - 可以看到，要求旋转矩阵的导数，只要对其左乘一个$\phi^\wedge(t)$矩阵即可
- 考虑$t_0 = 0$时，设此时旋转矩阵为$\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$，根据导数定义，在$t = 0$进行一阶泰勒展开得到$\mathbf{R}(t) \approx \mathbf{R}(t_0) + \dot{\mathbf{R}}(t_0)(t - t_0) = \mathbf{I} + \phi(t_0)^\wedge(t)$
- 解上面的微分方程可以得到$\mathbf{R} = \exp \phi_0^\wedge(t)$
  - 给定某时刻的$\mathbf{R}$，就能求得一个对应的ϕ，它描述了$\mathbf{R}$在局部的导数关系。ϕ正是对应到$SO(3)$上的李代数$\mathfrak{so}(3)$
  - $\mathbf{R}$与ϕ之间的计算关系称为李群与李代数间的指数/对数映射

李代数的定义

- 每个李群都有与之对应的李代数。李代数描述了李群的局部性质/单位元附近的正切空间。
- 李代数$\mathfrak{g}$由一个集合$\mathbb{V}$、一个数域$\mathbb{F}$和一个二元运算$[,]$（称为李括号）组成。李代数需要满足如下性质
  - 封闭性：$\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathbb{V}$

- 双线性：：$\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$，有$[a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], [\mathbf{Z}, a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}] = a[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + b[\mathbf{Z}, \mathbf{Y}]$
  - 自反性：$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, \mathbf{X}] = 0$
  - 雅可比等价：$\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}+\mathbf{Y}]], [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] = 0$
- 李代数SO(3)
  - $\Phi = \phi^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
  - $\mathfrak{so}(3) = \left\{\phi \in \mathbb{R}^3, \Psi = \phi^{\wedge} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\right\}$
  - $[\phi_1, \phi_2] = (\Phi_1\Phi_2 - \Phi_2\Phi_1)^{\vee}$
- 李代数SE(3)
  - $\mathfrak{se}(3) = \left\{\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \phi \in \mathfrak{so}(3), \xi^{\wedge} = \begin{bmatrix} \phi^{\wedge} & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}\right\}$
  - $[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1^{\wedge}\xi_2^{\wedge} - \xi_2^{\wedge}\xi_1^{\wedge})^{\vee}$

指数与对数映射

SO(3)上的指数映射

- 任意矩阵的指数映射可以写成一个泰勒展开$\exp(\phi^{\wedge}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\phi^{\wedge})^n$，其只有在收敛的时候才有结果，但这个展开不能拿来计算（只用来推导稳定性）
- 拆分$\phi = \theta\mathbf{a}, \|a\| = 1$，通过以下两条性质可进行计算
  - $\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{I}$
  - $\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge} = -\mathbf{a}^{\wedge}$
- 通过泰勒展开和相关项合并后可以得到$\exp(\phi^{\wedge}) = \cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta nn^T) + \sin\theta n^{\wedge}$
  - 该公式就是罗德里格斯公式，这意味着$\mathfrak{so}(3)$实际上就是由旋转向量构成的空间，而指数映射就是罗德里格斯公式。通过它们可以把$\mathfrak{so}(3)$中任意一个向量对应到一个位于$SO(3)$中的旋转矩阵
  - 相反也可以定义反方向$SO(3) \to \mathfrak{so}(3)$的对数映射：$\phi = \ln(\mathbf{R})^{\vee} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\mathbf{R}-\mathbf{I})^{n+1}\right)^{\vee}$

SE(3)上的指数映射

- 指数映射：$\exp(\xi^{\wedge}) = \begin{bmatrix} \exp\phi^{\wedge} & \mathbf{J}\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I} + (1-\frac{\sin\theta}{\theta})\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\mathbf{a}^{\wedge}$
- 对数映射

李代数求导与扰动模型

BCH公式与近似形式

SO(3)上的李代数求导

李代数求导

扰动模型（左乘）

SE(3)上的李代数求导

相机与图像

相机模型

$$\frac{Z}{f}=-\frac{X}{X'}=-\frac{Y}{Y'}\rightarrow\frac{Z}{f}=\frac{X}{X'}=\frac{Y}{Y'}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}X'=f\frac{X}{Z}\\Y'=f\frac{Y}{Z}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}u=\alpha X'+c_x\\v=\beta Y'+c_y\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{c}u=f_x\frac{X}{Z}+c_x\\v=f_y\frac{Y}{Z}+c_y\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{c}u\\v\\1\end{array}\right)=\frac{1}{Z}\left(\begin{array}{ccc}f_x&0&c_x\\0&f_y&c_y\\0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}X\\Y\\Z\end{array}\right)\triangleq\frac{1}{Z}KP\rightarrow Z\left(\begin{array}{c}u\\v\\1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}f_x&0&c_x\\0&f_y&c_y\\0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}X\\Y\\Z\end{array}\right)\triangleq KP$$

$$ZP_{uv}=Z\left[\begin{array}{c}u\\v\\1\end{array}\right]=K(RP_w+t)=KTP_w$$

针孔相机模型

畸变模型

双目相机模型

RGB-D模型

非线性优化

状态估计问题

非线性最小二乘

一阶和二阶梯度法

高斯牛顿法

列文伯格-马夸尔特方法

视觉里程计1：特征点法 Visual Odometry VO

特征点法

2D-2D：对极几何

对极约束

本质矩阵

单应矩阵

三角测量

3D-2D：PnP

视觉里程计2：直接法 Direct Method

直接法的引出

2D光流 2D Optical Flow

- 稀疏光流 Lucas-Kanade光流
- 稠密光流 Horn-Schunck光流

直接法

后端

回环检测

建图