FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

NOTAS EN EQUILIBRIO GENERAL

Microeconomía 2
Semestre 2024-2

Profesor: Pavel Coronado Castellanos
Autores: Marcelo Gallardo & Gustavo Quijano

---

1 Análisis de la existencia del Equilibrio Walrasiano

Uno de los resultados más importantes en la teoría del equilibrio general es el de la existencia del equilibrio Walrasiano[1]. Este resultado se basa esencialmente en uno de los teoremas más notables en matemáticas: el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Este último indica que si tenemos una función continua que mapea un conjunto convexo y compacto en si mismo, entonces posee un punto fijo. A continuación, el enunciado de este teorema para el caso de conjuntos en la recta.

Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Entonces, existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. En particular, si $a = 0$ y $b = 1$, dada $f : [0, 1] \to [0, 1]$, siempre existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.*

[1]Véase por ejemplo los trabajos originales Arrow and Debreu (1954), McKenzie (1959). En nuestro análisis, no vamos a considerar producción. Asimismo, dejamos de lado la cuestión de la unicidad del equilibrio Walrasiano, que es dicho sea de paso, algo aún más delicado y técnico de estudiar. El lector interesado puede consultar Echenique (2015).

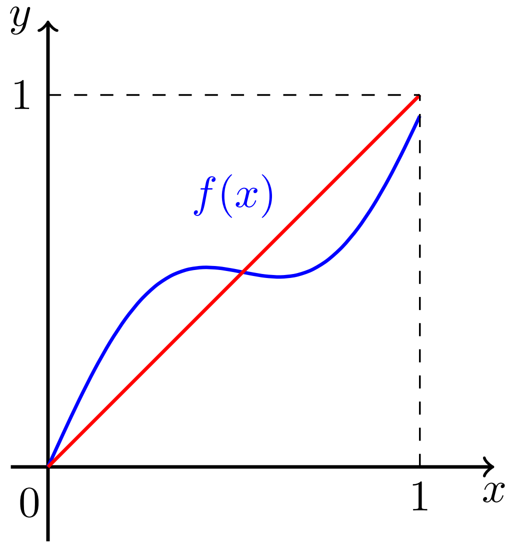

Figure 1: Gráfico relacionado con el Teorema de Brouwer en $n = 1$. Basado en Varian (1992).

El Teorema 1 es una versión simplificada del Teorema del Punto Fijo de Brouwer.[2] Al escalar este resultado a mayores dimensiones, obtenemos una generalización significativa, aunque perdemos la intuición geométrica y la demostración se vuelve considerablemente más compleja. Es de hecho el enunciado más general el que se usa para demostrar la existencia del Equilibrio Walrasiano. Por este motivo, lo presentamos a continuación[3].

Teorema 2. Sea X un subconjunto compacto[4] y convexo[5] en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces, existe un punto $c \in X$ tal que $f(c) = c$.

Nuestro objetivo es aplicar el Teorema 2 para demostrar la existencia de un Equilibrio Walrasiano en el contexto de las economías de intercambio puro (consideramos en todo momento una economía $\mathcal{E} = (\boldsymbol{\omega}_i \succeq_i)_{i=1}^I$ con $L > 0$ bienes e $I > 0$ consumidores, donde los bienes están indexados por ℓ y los consumidores por i).

Siguiendo a Varian (1992), los elementos del teorema del Punto Fijo de Brouwer pueden ser utilizados para el análisis del Equilibrio General. Para ello, pensemos en la siguiente función ad hoc la cual captura la esencia del proceso de ajuste de precios en una economía de mercado

$$g = (g_1, ..., g_L)$$

$$g(\mathbf{p}) = (g_1(\mathbf{p}), ..., g_L(\mathbf{p})), \;\; g_\ell(\mathbf{p}) = \frac{p_\ell + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}} \tag{1}$$

[2]La prueba del Teorema 1 se encuentra en el Apéndice.

[3]La prueba del Teorema 2 es omitida pues es sustancialmente más compleja. Para una exposición más detallada sobre este tema, el lector interesado puede consultar la obra de Milnor (Milnor (2006)), así como el artículo clásico Sperner (1928), donde se presenta el Lema de Sperner, una herramienta clave para la demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer en dimensiones superiores.

[4]Cerrado y acotado: dada $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ convergente, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \in X$. Además, existe $r > 0$ tal que $X \subset B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| < r\}$.

[5]Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ y $\theta \in [0, 1]$, entonces $\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y} \in X$.

donde $z_\ell(\mathbf{p}^*)$ es la función exceso de demanda del bien ℓ. Como se aprecia en la (1), g_ℓ es mayor que el precio p_ℓ si el exceso de demanda del bien ℓ es positivo, y es menor que p_ℓ si es que el bien ℓ tiene exceso de oferta (esto es, z_ℓ negativo). Note que cuando z_ℓ es estrictamente negativo, en el denominador algún z_j, $j \neq \ell$ tiene que ser estrictamente positivo por la Ley de Walras: la suma del valor de los excesos de demanda es igual a cero[6].

Aprovechándonos de la homogeneidad de grado cero de las demandas, podemos considerar precios tales que

$$\hat{p}_\ell = \frac{p_\ell}{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell}.$$

Esta transformación, que como se dijo explota la homogeneidad de grado cero de las demandas Walrasianas[7], garantiza que:

$$\hat{\mathbf{p}} \in \Delta = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^L : ||\mathbf{p}||_1 = \sum_{\ell=1}^{L} |p_\ell| = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1 \right\}.$$

Luego, el conjunto Δ es convexo y compacto (véase el apéndice, Lema 1). Por propósitos de claridad, permítanos ilustrar Δ para $L = 2$ y $L = 3$.

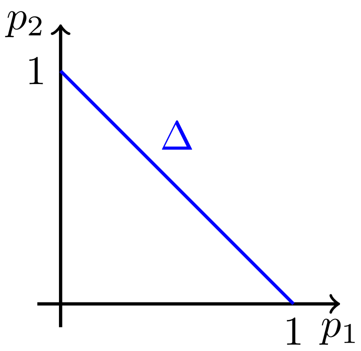

Figure 2: Δ para $L = 2$

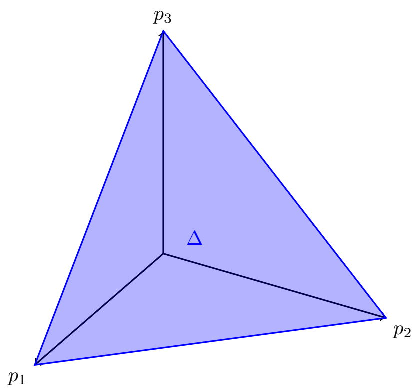

Figure 3: Δ para $L = 3$

Como ya anticipamos[8], la función g juega el rol de la función f del Teorema del Punto

[6]Desde ahora asumimos que las preferencias son de tal forma que se cumple la Ley de Walras. Véase el Lema 2.

[7]Es decir, $\mathbf{x}(\alpha\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p})$ para cualquier $\alpha > 0$.

[8]En realidad, la primera tentación es considerar

$$f(\mathbf{p}) = z(\mathbf{p}) + \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{p}.$$

En efecto, de tener un punto fijo, digamos $\mathbf{p}^*$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}^*) &= \mathbf{p}^* \\ z(\mathbf{p}^*) + \mathbf{p}^* &= \mathbf{p}^* \\ z(\mathbf{p}^*) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Fijo de Brouwer y $\Delta = X$. En efecto, se cumple que $g : \Delta \to \Delta$:

$$\begin{aligned}
||g||_1 &= \sum_{\ell=1}^{L} |g_\ell(\mathbf{p})| \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} g_\ell(\mathbf{p}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} \frac{p_\ell + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}\right)} \sum_{\ell=1}^{L} (p_\ell + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}) \\
&= \frac{1}{\left(1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}\right)} \left[\underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell}_{=1} + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\} \right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Queda solo por verificar que g es continua. Esto se deriva de una serie de resultados, no triviales, que involucran supuestos sobre las preferencias (Lema 2):

1. Las preferencias de los consumidores $\succeq_i$ son continuas (y por ende lo son sus funciones de utilidad $u_i(\cdot)$ asociadas). Esto conlleva a que las demandas Walrasianas sean continuas[9].

2. Una función vectorial $g = (g_1, ..., g_L)$ es continua si y solamente si las funciones componentes g_ℓ son continuas.

3. El máximo de dos funciones continuas es continua. Esto es, si $\varphi, \psi : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ son continuas, $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ es continua[10].

4. La suma, resta producto y división de funciones es continuas es continua. Más aún, las funciones constantes[11] son continuas.

Combinando esta lista de resultados matemáticos, podemos garantizar la continuidad de (1). En efecto, z_ℓ resulta ser continua pues es la suma de $i = 1$ a I de $x_{\ell i}(\mathbf{p})$ (continua por el primer punto), [12] restado con la constante $\omega_\ell = \sum_{i=1}^{I} \omega_{\ell i}$. Luego, $\max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}$ es

No obstante, $f(\mathbf{p}) = z(\mathbf{p}) + \mathbf{p}$, por lo general, no pertenece a Δ. Es decir,

$$||f(\mathbf{p})||_1 = ||z(\mathbf{p}) + \mathbf{p}||_1 = \sum_{\ell=1}^{L} |z_\ell(\mathbf{p}) + p_\ell| \underbrace{\neq}_{\text{por lo general}} 1.$$

[9] Ver Teorema de Berge (Berge (1963), de la Fuente (2000) o Ok (2007))

[10] Estos resultados son detallados en Abbott (2021) o de la Fuente (2000).

[11] f tal que $f(x) = c$ para todo x.

[12] A priori las demandas son correspondencias y no funciones. Sin embargo, si asumimos convexidad estricta de las preferencias, son funciones. Cuando trabajamos con preferencias que no son estrictamente convexas, en vez de Brouwer se usa el teorema de Kakutani, Mas-Colell et al. (1995).

continua pues el máximo de dos funciones continuas (la función constante igual a cero es continua por (4) y ya determinamos que z_ℓ es continua). Finalmente,

$$p_\ell + \max\{0, z_\ell\}$$

es continua pues tanto la función proyección $\pi_\ell(\mathbf{p}) = p_\ell$ como $\max\{0, z_\ell\}$ son continuas (y la suma de continuas es continua), así como lo es $1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell\}$ (por el mismo argumento). De este modo,

$$\frac{p_\ell + \max\{0, z_\ell\}}{\underbrace{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell\}}_{>0}}$$

es continua, pues resulta ser la división de dos funciones continuas. Concluimos así gracias a (2) que g es continua.

Con estos elementos establecidos, es decir, la función que juega el papel de f: $g : \Delta \to \Delta$ continua, y Δ, quien juega el papel del conjunto X, convexo y compacto, estamos listos para enunciar el plato de fondo: el teorema de existencia del Equilibrio Walrasiano.

Teorema 3. Si $(\succeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i=1}^{I}$ es una economía de intercambio puro tal que $\overline{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{\omega}_i \gg \mathbf{0}$ y $\succeq_i$ es continua, estrictamente convexa y estrictamente monótona para todo $i = 1, ..., I$, entonces, existe $\mathbf{p}^*$ tal que $z(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$. Además, si $z : \mathbb{R}_{++}^{L} \to \mathbb{R}^{L}$, existe $\mathbf{p}^*$ tal que $z(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.

Proof. Por el Teorema de Brouwer, existe $\mathbf{p}^*$ tal que $g(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$. Esto lleva a que $\forall\ \ell = 1, ..., L$

$$\begin{aligned}
p_\ell^* &= \frac{p_\ell^* + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}}{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}} \\
p_\ell^* \left(1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}\right) &= p_\ell^* + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\} \\
p_\ell^* \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\} &= \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\} \\
z_\ell(\mathbf{p}^*) p_\ell^* \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\} &= z_\ell(\mathbf{p}^*) \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\} \\
\underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} z_\ell(\mathbf{p}^*) p_\ell^*}_{=0 \text{ por la Ley de Walras}} \left[\sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}\right] &= \sum_{\ell=1}^{L} z_\ell(\mathbf{p}^*) \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\ell=1}^{L} z_\ell(\mathbf{p}^*) \underbrace{\max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}}_{\geq 0} = 0. \tag{2}$$

La Ecuación 2 indica que $z_\ell(\mathbf{p}^*) \leq 0,\ \forall\ \ell = 1, ..., L$ pues, si $z_\ell(\mathbf{p}^*) > 0$ para algún ℓ, la suma es estrictamente positiva. Finalmente, nuevamente por la Ley de Walras (Lema 2) dado que debemos tener

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^* z_\ell(\mathbf{p}^*) = 0 \tag{3}$$

con $p_\ell \geq 0$, combinando (3) con la Ecuación 2, se sigue que $p_\ell z_\ell(\mathbf{p}^*) = 0$ para todos $\ell = 1, ..., L$. Finalmente, en caso $p_\ell > 0$, necesariamente $z_\ell(\mathbf{p}^*) = 0$ para todo $\ell = 1, ..., L$, concluyendo así la demostración. □

2 Apéndice

Prueba del Teorema 1.

Proof. Sea

$$g(x) = f(x) - x.$$

Notemos que $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$, ya que f es continua y $\psi(x) = x$ es una función continua (la suma de funciones continuas es continua, ver Abbott (2021)). Ahora, evaluemos g en los extremos del intervalo $[a, b]$:

$$g(a) = f(a) - a \quad \text{y} \quad g(b) = f(b) - b.$$

Dado que $f : [a, b] \to [a, b]$, tenemos que $f(a) \geq a$ y $f(b) \leq b$. Esto implica que $g(a) \geq 0$ y $g(b) \leq 0$. Por el Teorema del Valor Intermedio (TVI), si $g(a) \geq 0$ y $g(b) \leq 0$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$. Es decir,

$$f(c) - c = 0,$$

l o que implica que $f(c) = c$. Por lo tanto, hemos demostrado que existe un punto fijo c en $[a, b]$. □

Observación 1. Un resultado importante en topología es que todo espacio compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo (Lima (1993)) a una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$:

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}||| \leq r\}.$$

Esto significa que, topológicamente, podemos pensar en el espacio X como si fuera una bola cerrada. El teorema de Brouwer asegura que para cualquier función continua que mapea X en sí mismo, debe haber un punto fijo.

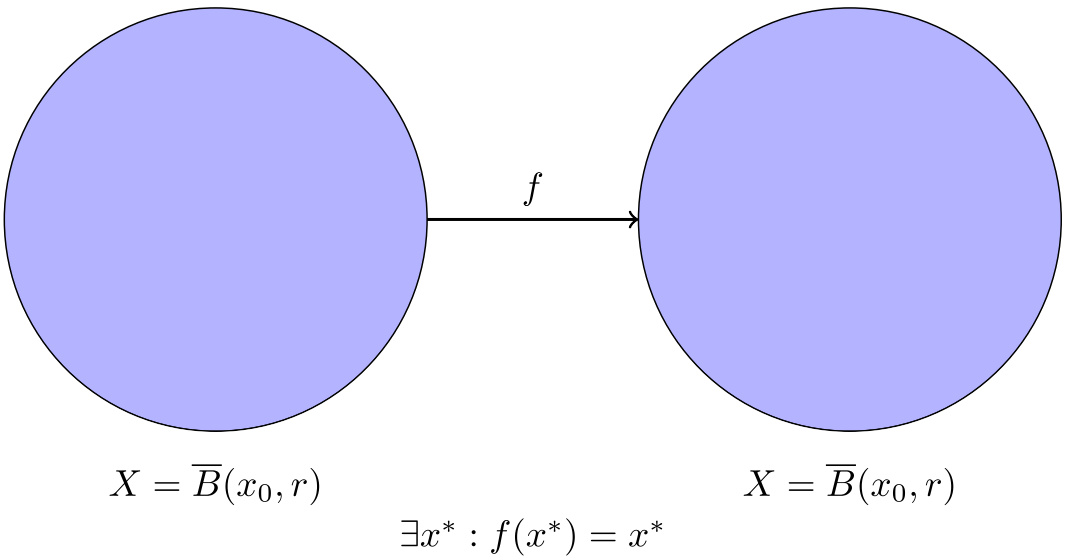

Figure 4: Gráfico relacionado con el Teorema de Brouwer en $n = 2$.

Para una prueba más general del teorema de Brouwer ver Ok (2007), Brouwer (1911), Brown (1928) o About Brouwer fixed point theorem and its applications in general equilibrium.

Lema 1. El simpelx Δ es convexo y compacto.

Proof. Dados $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \Delta$, y $\theta \in [0,1]$

$$\theta \mathbf{p}_1 + (1-\theta)\mathbf{p}_2 \in \Delta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
||\theta \mathbf{p}_1 + (1-\theta)\mathbf{p}_2||_1 &= \sum_{\ell=1}^{L} (\theta p_\ell^1 + (1-\theta) p_\ell^2) \\
&= \theta \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^1}_{=1} + (1-\theta) \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^2}_{=1} \\
&= \theta + (1-\theta) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Note que p_ℓ^1 denota la $\ell-$ésima coordenada del vector $\mathbf{p}_1$, mientras que p_ℓ^2 denota la $\ell-$ésima coordenada del vector $\mathbf{p}_2$. Esto último prueba la convexidad de Δ. La compacidad se prueba de la siguiente forma: la función

$$f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||_1 = \sum_{\ell=1}^{L} |x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{L} \underbrace{x_\ell}_{=|x_\ell| \text{ pues } x_\ell \geq 0}$$

es continua sobre $\mathbb{R}_+^L$ Lima (1993). Por ende, $f^{-1}(1)$ es un conjunto cerrado Lima (1993). Finalmente, Δ es acotado pues

$$\Delta \subset B_{||\cdot||_1}(0,2) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^L : \sum_{\ell=1}^{L} |x_\ell| < 2 \right\}.$$

□

Lema 2. Si $(\succeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i=1}^I$ es una economía de intercambio puro tal que $\overline{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{i=1}^I \boldsymbol{\omega}_i \gg 0$ y $\succeq_i$ es continua, estrictamente convexa y estrictamente monótona para todo $i = 1, ..., I$, entonces $z(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

1. z es continua.
2. z es homogénea de grado cero: $z(\lambda \mathbf{p}) = z(\mathbf{p})$, $\forall\ \lambda > 0$.
3. z satisface la ley de Walras: $\forall\ p \in \mathbb{R}_{++}^L :\ \mathbf{p} \cdot z(\mathbf{p}) = 0$.
4. $\exists\ M > 0$ tal que $\forall\ \ell = 1, ..., L$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^L$: $z_\ell(\mathbf{p}) > -M$.

Proof. Inciso por inciso:

1. La continuidad de $u^i(\cdot)$ y las propiedades de $B(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i)$ aseguran la continuidad de $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i)$ y, por lo tanto, la continuidad de z.

2. Para cada consumidor $i = 1, ..., I$, su conjunto presupuestario

$$B(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i) = \{\mathbf{x}_i \geq \mathbf{0} : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i\}$$

claramente permanece inalterado si $\mathbf{p} \to \lambda \mathbf{p}$ con $\lambda > 0$.

3. Dado que $\succeq_i$ es estrictamente monótona para cada consumidor,

$$\forall\ i = 1, ..., I:\ \underbrace{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i)}_{\text{gasto}} = \underbrace{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i}_{\text{ingreso de la dotación}}.$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i) &= \sum_{i=1}^{I} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} \mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i) - \boldsymbol{\omega}_i \right) &= 0 \\ \mathbf{p} \cdot z(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned}$$

4. Dado que $x_{\ell i}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_i)$ es positivo para cada consumidor $i = 1, ..., I$ y bien $\ell = 1, ..., L$:

$$z_\ell(\mathbf{p}) \geq -\overline{\omega}_\ell.$$

   Sea $M > \max_{\ell=1,...,L}\{\overline{\omega}_\ell\}$. Entonces, $z_\ell(\mathbf{p}) > -M$ para todos ℓ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_{++}$.

$\square$

Otra propiedad que $z(\cdot)$ satisface es que si $\{\mathbf{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^L_{++}$ converge a $\overline{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$ tal que existe $\ell:\ \overline{p}_\ell = 0$, entonces

$$\max\{z_1(\mathbf{p}_n), ..., z_L(\mathbf{p}_n)\} \to \infty.$$

La demostración se puede encontrar en Echenique (2015).

Lima, 7 de setiembre, 2024.

References

Abbott, S. (2021). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2nd edition.

Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22(3):265–290.

Berge, C. (1963). *Topological Spaces: Including a Treatment of Multi-valued Functions, Vector Spaces, and Convexity*. Dover Publications, Mineola, NY.

Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1):97–115.

Brown, G. (1928). A new proof of brouwer's theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):317–324.

de la Fuente, A. (2000). *Mathematical Methods and Models for Economists*. Cambridge University Press.

Echenique, F. (2015). Lecture notes general equilibrium theory.

Lima, E. L. (1993). *Análise Real: Volume 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 2nd edition.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.

McKenzie, L. W. (1959). On the existence of general equilibrium for a competitive market. *Econometrica*, 27(1):54–71.

Milnor, J. (2006). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, Princeton, NJ, revised edition.

Ok, E. A. (2007). *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Sperner, E. (1928). Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6(1):265–272.

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. W. W. Norton & Company, New York, 3rd edition.