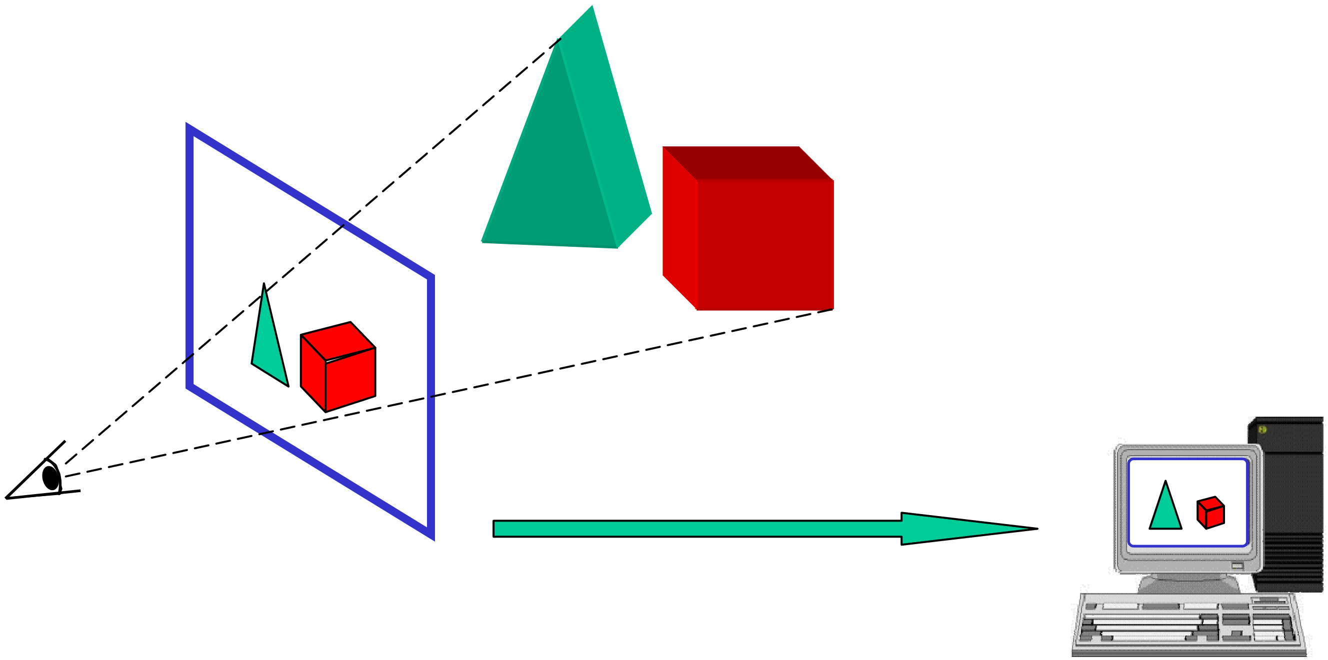
TEMA 5: Vistas en 3D

Índice

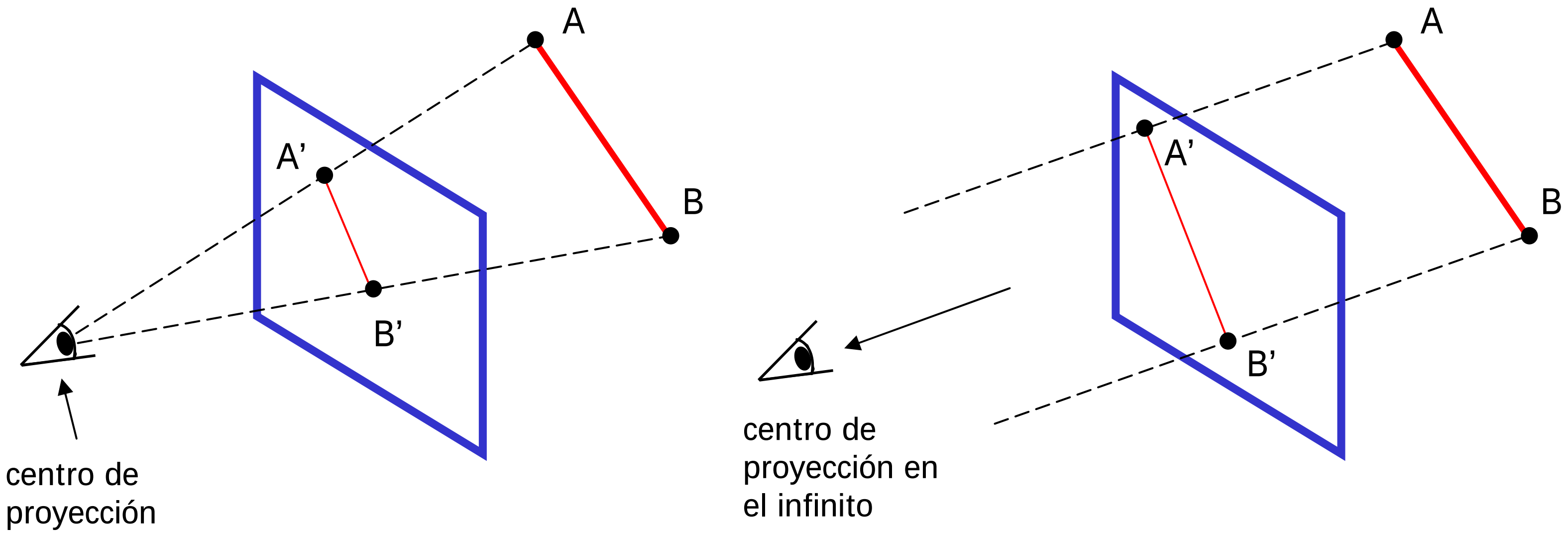
Proyecciones

- La proyección es una transformación que convierte la representación tridimensional de una escena sobre un plano bidimensional → la pantalla
- Debemos proyectar toda nuestra escena 3D sobre un plano, para convertirlo en un dibujo 2D
- Finalmente este dibujo plano se traslada a la pantalla



Teoría de las proyecciones

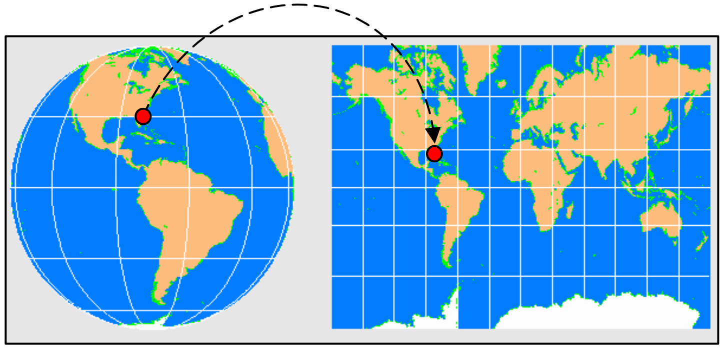
- La proyección de un punto viene definida por la intersección entre el plano de proyección y el rayo que une dicho punto con el centro de proyección



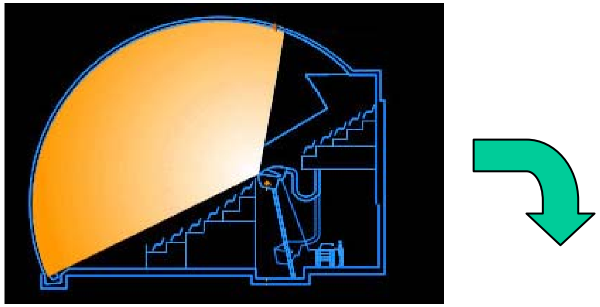
- La proyección de una línea sigue siendo una línea → sólo se necesita proyectar sus extremos y llamar a Bresenham!

Tipos de proyecciones

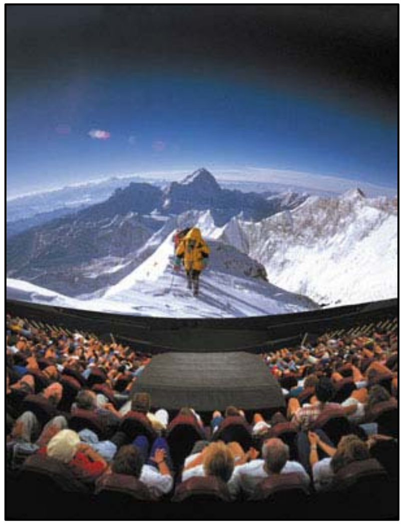
- La proyección más usada es la proyección geométrica planar
  - Se llama geométrica cuando los rayos de proyección son rectos
  - Se llama planar cuando la superficie de proyección es un plano
- Existen otros tipos de proyección



no geométrica



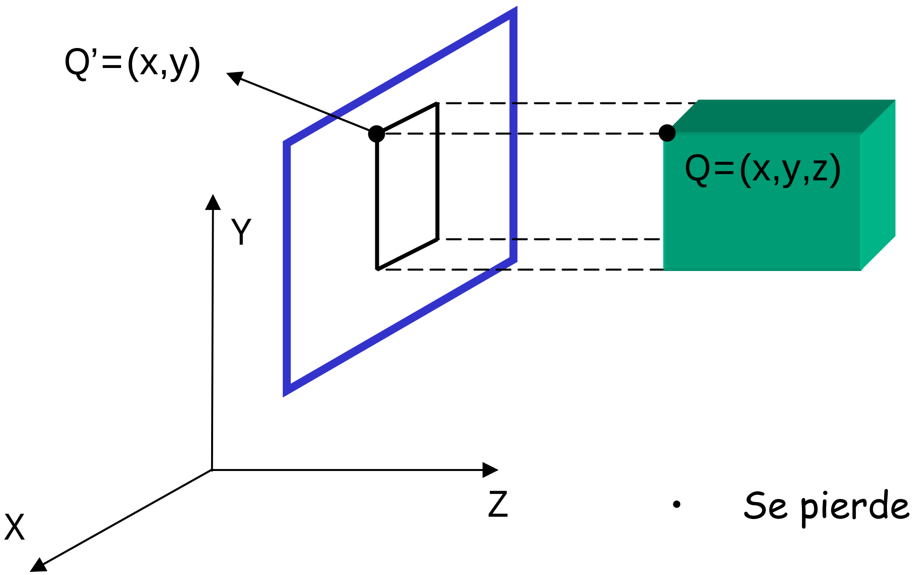
no planar



- La proyección geométrica plana es de dos tipos
  - Perspectiva: la distancia del centro de proyección al plano es finita
  - Paralela: la distancia es infinita → sólo se especifica la dirección de vista → todos los rayos son paralelos

Proyección paralela

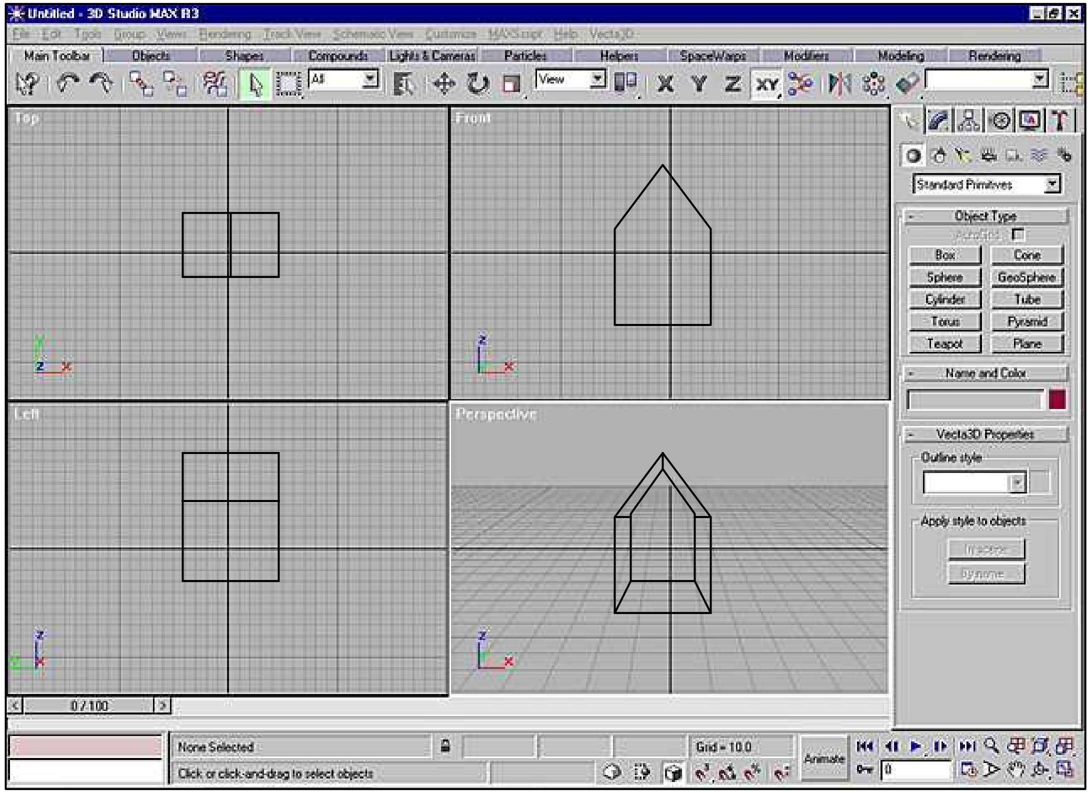
- El caso más sencillo es la proyección paralela ortográfica
  - El plano de proyección es uno de los planos principales (ejemplo plano XY)
  - La dirección de proyección es el eje perpendicular (ejemplo eje Z)
- Solamente hay que eliminar la componente Z

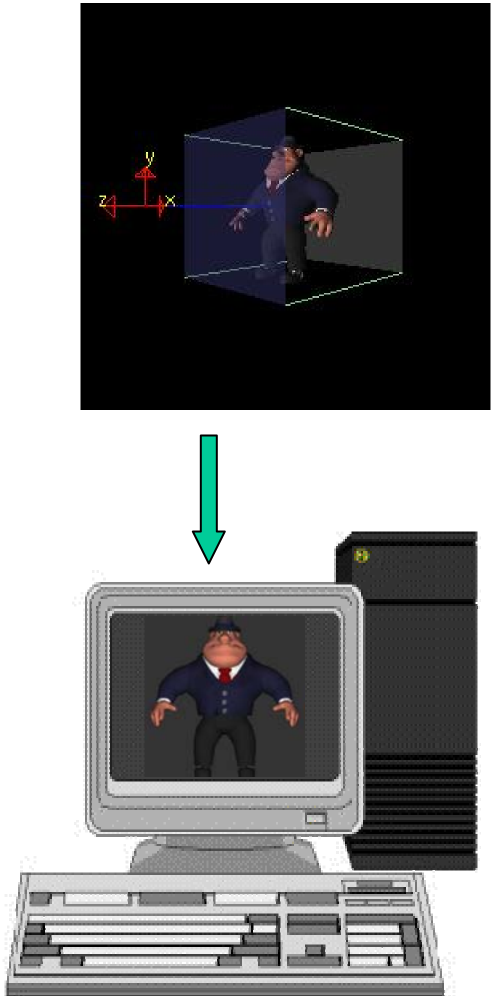


- Se pierde información sobre la profundidad
- Las líneas paralelas permanecen paralelas
- Los ángulos sólo se mantienen en las caras paralelas al plano de proyección

Proyección paralela

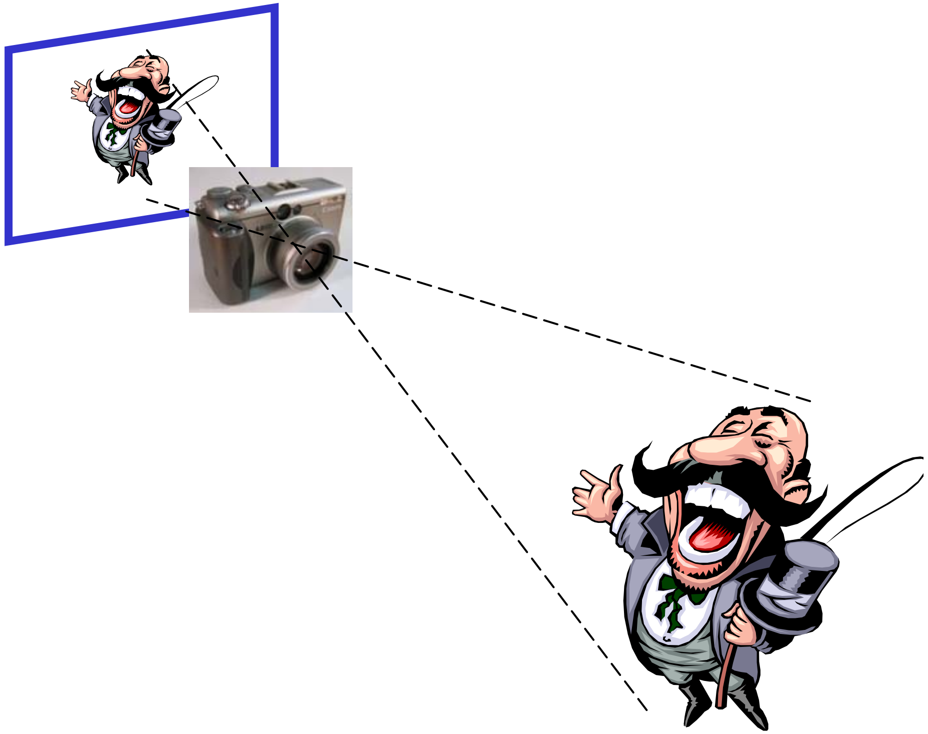
- Es inmediata de calcular
- Se utiliza en programas de modelado, donde se muestran tres vistas simultáneas del objeto

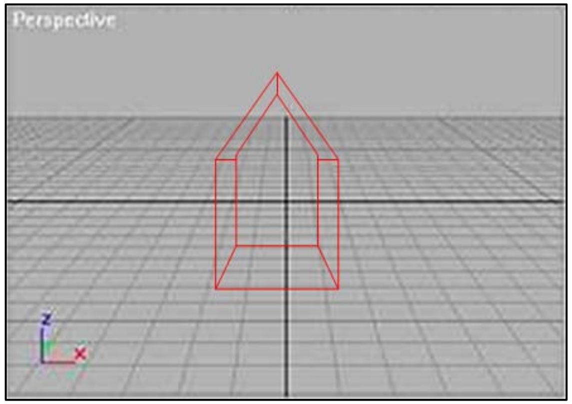




Proyección perspectiva

- Simula el comportamiento de una cámara o del ojo humano
- Aumenta el realismo de la imagen, al dar sensación de profundidad
- El tamaño de un objeto varía invers. proporcional a la distancia del objeto al plano de proyección

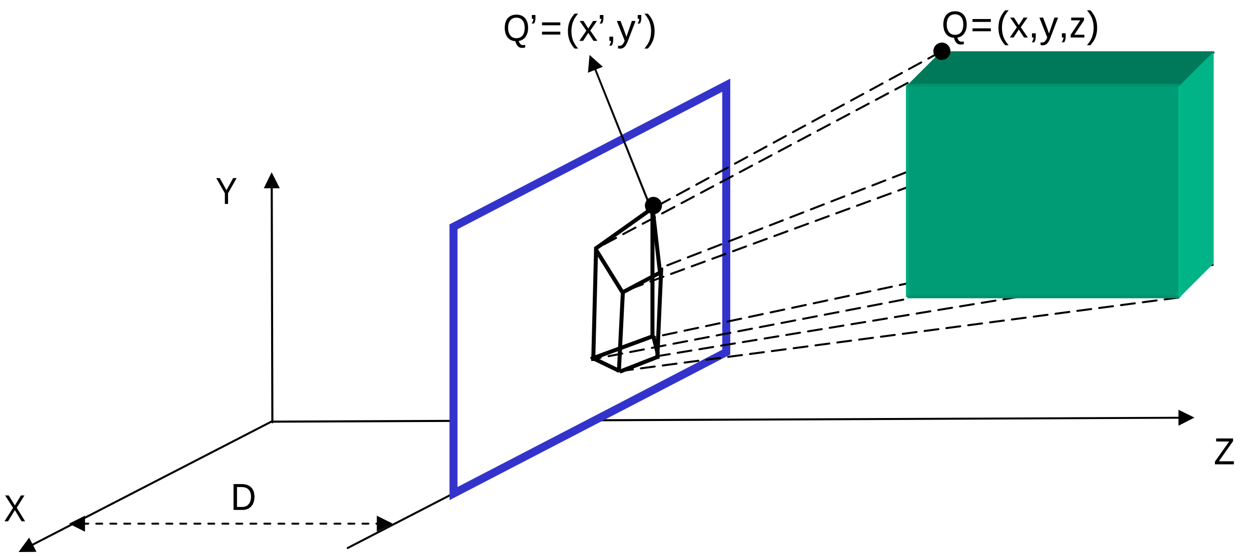




- No es útil para reconocer formar ni medir longitudes:
  - Las distancias son falsas
  - Los ángulos no se mantienen
  - Las líneas paralelas dejan de serlo

Cálculo de las expresiones

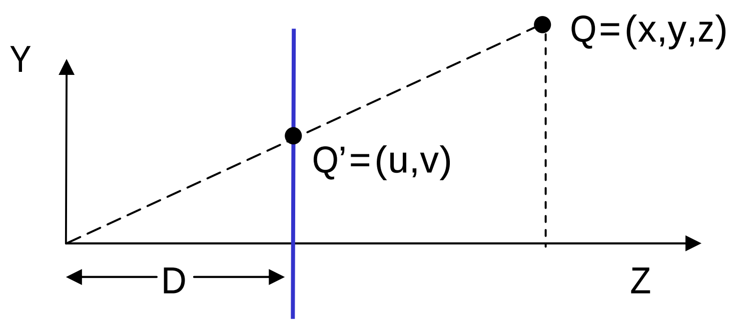
- Generalmente se usa un sistema de mano izquierda, donde
  - El eje Z representa la dirección de vista
  - El eje Y representa la vertical del observador
  - El eje X representa la horizontal del observador



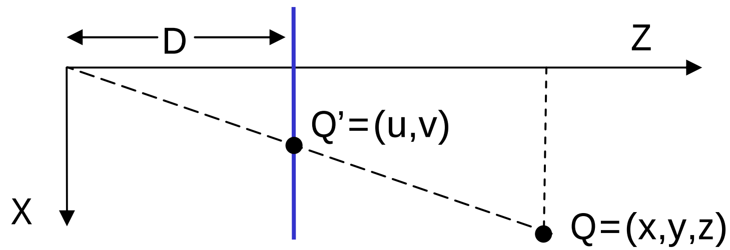
- Sea Q=(x,y,z) un punto 3D que se proyecta sobre el punto Q'=(x',y')
- Queremos calcular las coordenadas de Q' a partir de Q
- La distancia D al plano de proyección se supone conocida

Cálculo de las expresiones

- Se resuelve por la regla de los triángulos semejantes:

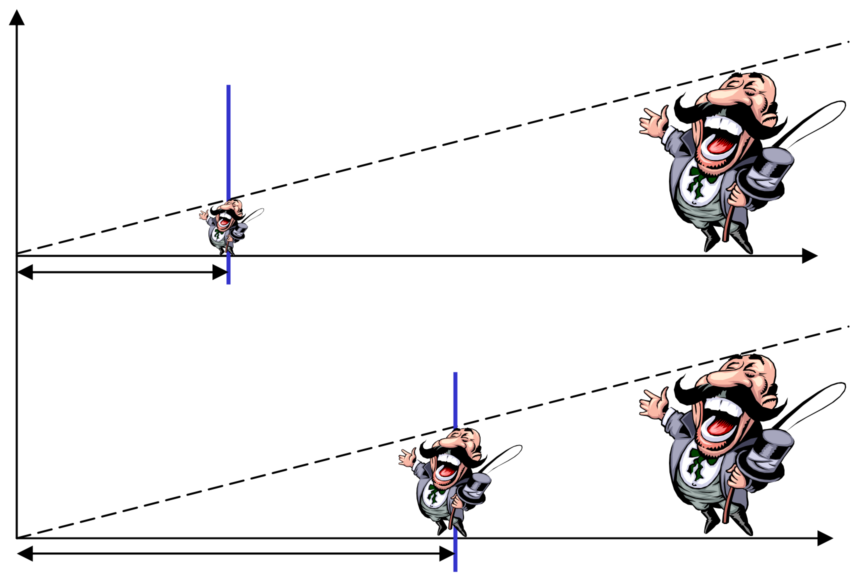


$$\frac{v}{D} = \frac{y}{z} \Rightarrow \boxed{v = D\frac{y}{z}}$$



$$\frac{u}{D} = \frac{x}{z} \Rightarrow \boxed{u = D\frac{x}{z}}$$

- Los objetos más alejados (z>>) tiene componentes más pequeñas
- La expresión es válida también para puntos detrás del plano y del ojo
- ¿Qué ocurre si variamos D?



Obtención de la matriz de perspectiva

- La expresión final para la perspectiva es:
- ¿Cómo pasarlo a forma matricial?
- Inicialmente parece imposible, pues no es una expresión lineal

$$\begin{cases} x' = Dx/z \\ y' = Dy/z \\ z' = D \end{cases}$$

- La solución pasa por usar la componente homogénea:

$$\begin{cases} x' = Dx/z \\ y' = Dy/z \\ z' = D \\ h' = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = Dx \\ y' = Dy \\ z' = Dz \\ h' = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \\ h' = z/D \end{cases}$$

- De esta forma la matriz queda:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

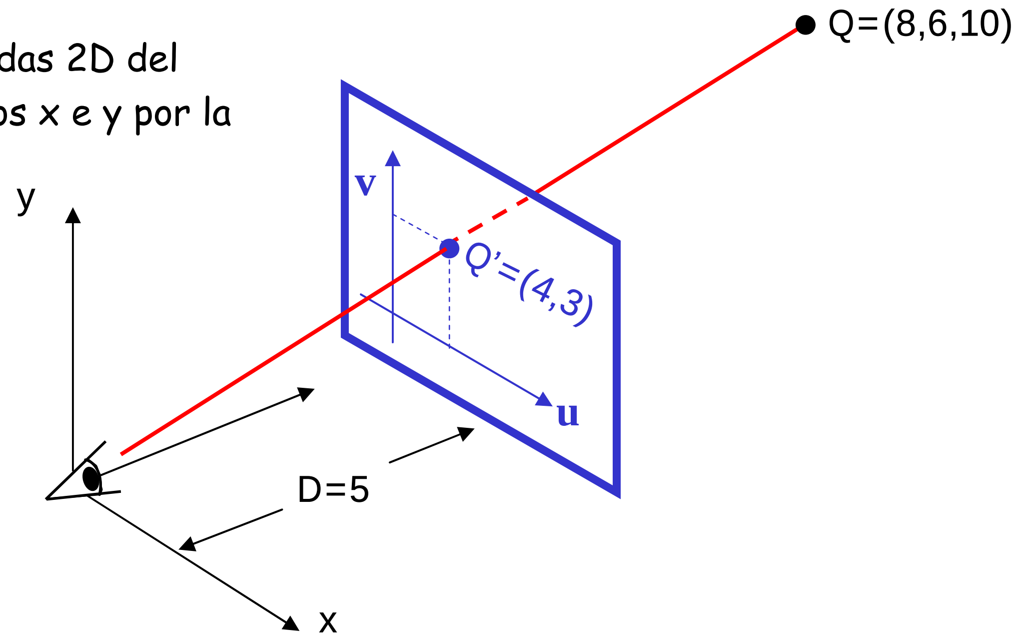
Y la transformación queda: $Q' = Q \cdot P$

Obtención del resultado

- Después de aplicar la matriz el resultado queda:

$$Q' = Q \cdot P = (x, y, z, 1)P = (x, y, z, z / D)$$

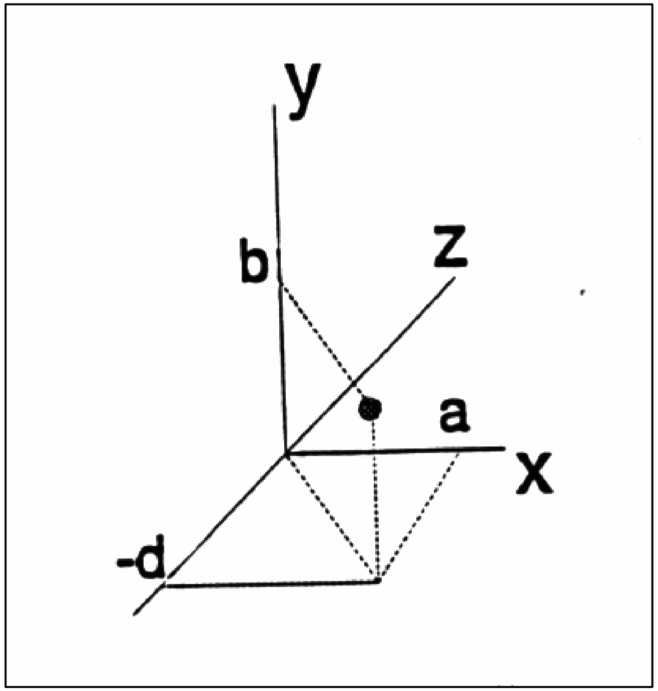
- Para obtener las coordenadas 2D del punto proyectado, dividimos x e y por la componente homogénea



- Es aconsejable seguir utilizando coordenadas homogéneas:
  - Código más sencillo y eficaz
  - Permiten recuperar el punto original a partir del proyectado

Ejemplo

4) Obtener la matriz de proyección perspectiva con los siguientes parámetros: centro de proyección (a,b,-d) y plano de proyección z=0. ¿Cuáles serían las coordenadas del punto (3a,b,d) al aplicarle esta transformación?



- El plano de proyección es correcto (paralelo al plano XY)
- Pero la posición del observador no → hay que trasladar para que esté en el origen

…continuación

- Trasladamos el ojo al origen:

$$T(-a,-b,d)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -a & -b & d & 1\end{pmatrix}$$

- Hacemos la perspectiva:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/d\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

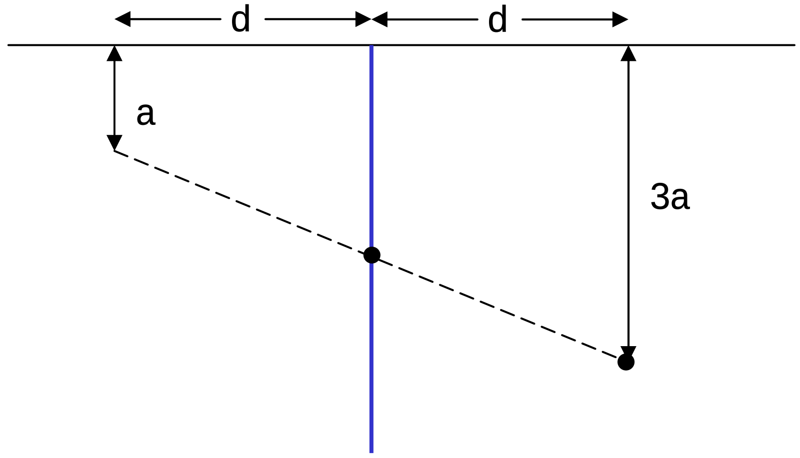
- Deshacemos la traslación:

$$T(a,b,-d)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ a & b & -d & 1\end{pmatrix}$$

$$M=TPT^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ a/d & b/d & 0 & 1/d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

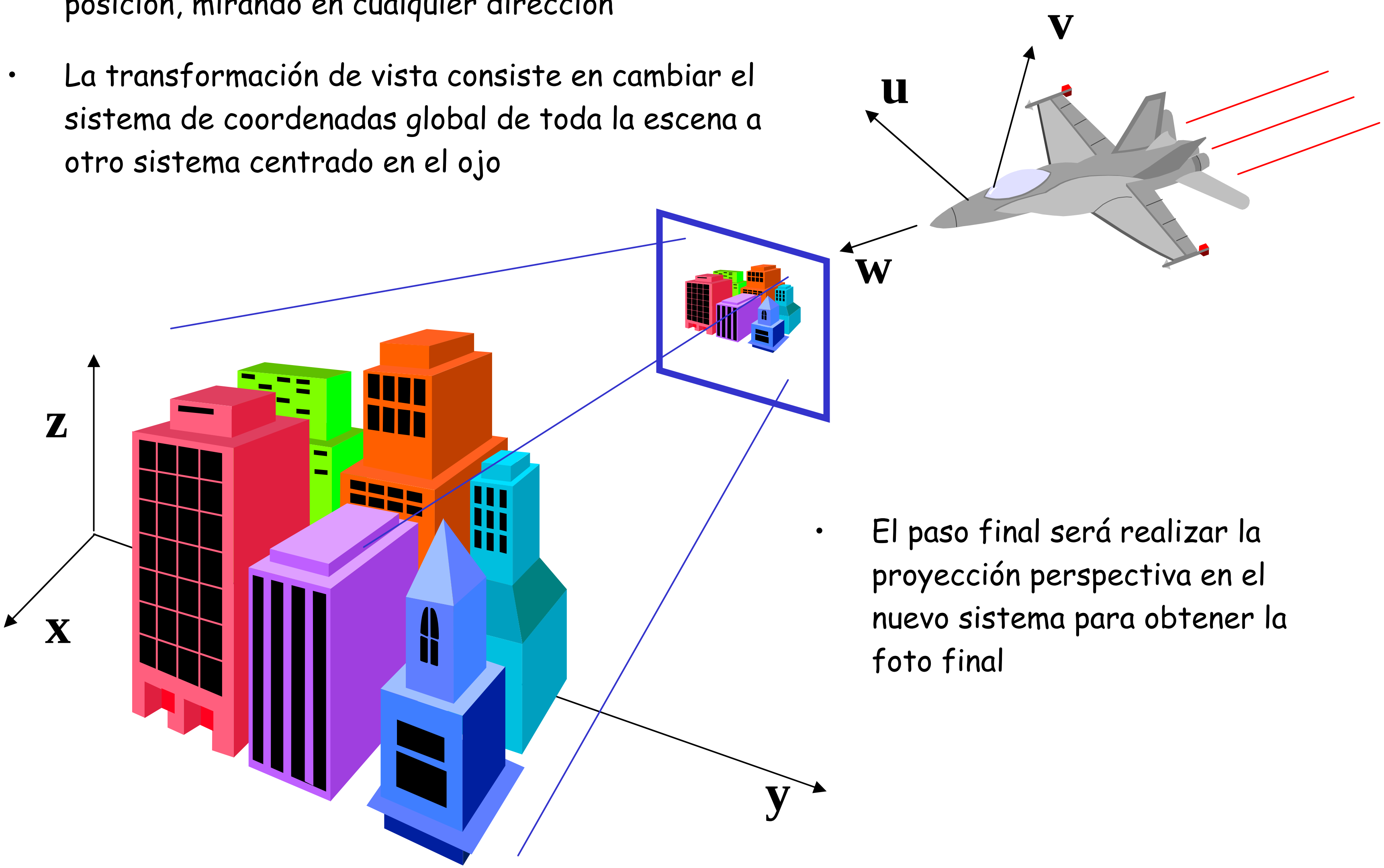
El punto proyectado estará en:

$$P'=PM=(4a,2b,0,2)=(2a,b,0)$$



Transformación de vista

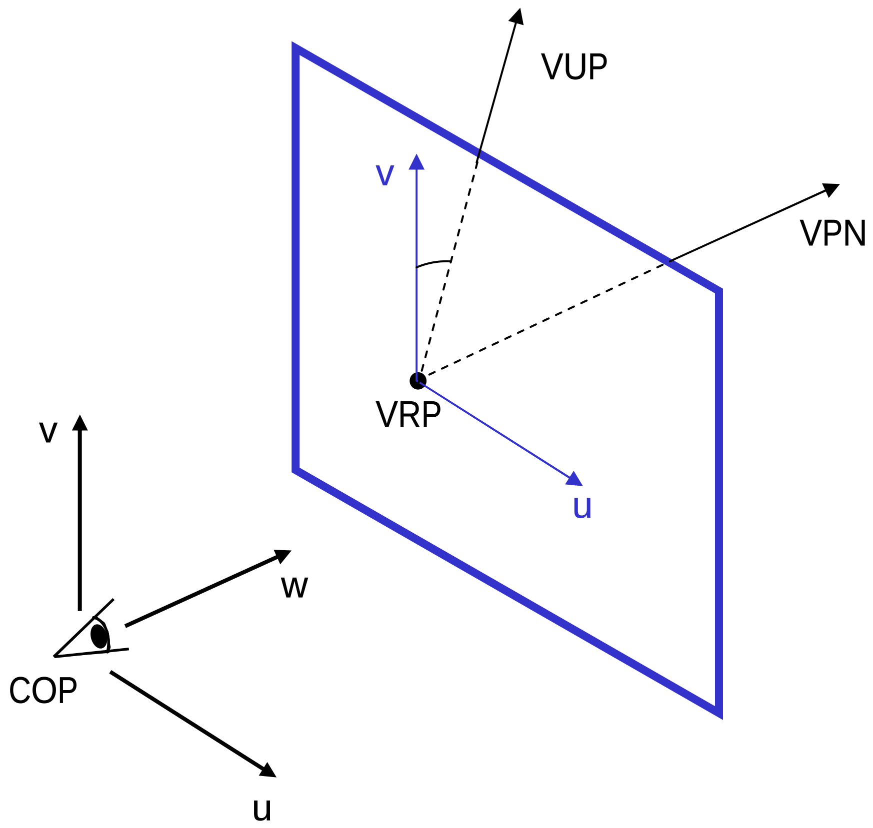
- En un caso general, el ojo puede estar en cualquier posición, mirando en cualquier dirección
- La transformación de vista consiste en cambiar el sistema de coordenadas global de toda la escena a otro sistema centrado en el ojo



- El paso final será realizar la proyección perspectiva en el nuevo sistema para obtener la foto final

Parámetros de vista

- El plano de proyección suele venir definido por un punto del plano (VRP) y un vector normal (VPN)



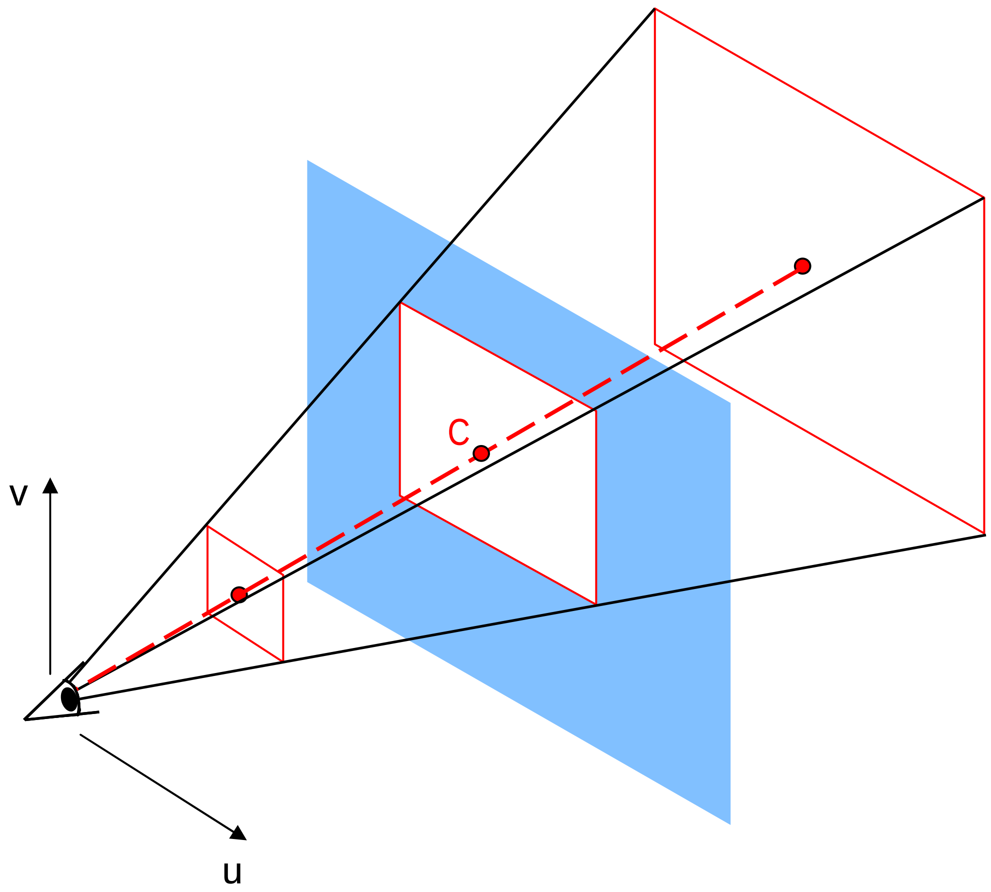
- También hace falta un vector que indique la verticalidad del observador (VUP)

- La posición del ojo también ha de ser conocida (COP)

- El punto COP será el origen del sistema de referencia 3D para hacer la perspectiva

Parámetros de vista

- Normalmente el observador no puede ver la escena completa
- Hay que definir una ventana rectangular en el interior del plano de proyección para delimitar la foto



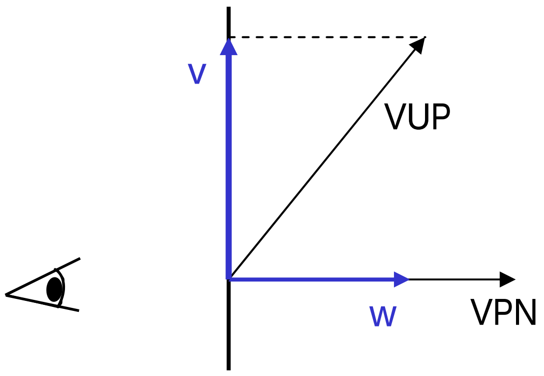
- La ventana y el ojo forman una pirámide → volumen de vista
- La línea entre el ojo y el centro de la ventana (C) indica la dirección de vista
- La pirámide de vista suele truncarse por dos planos de recorte
- El objetivo es evitar objetos muy lejanos o excesivamente cercanos

Obtención de los vectores del nuevo sistema

- Lo primero es obtener los 3 vectores del sistema de referencia del ojo (u,v,w)

- El vector w siempre coincide con el vector normal al plano, VPN

$$w = VPN$$



- El vector v suele ser VUP, excepto cuando VUP no pertenece al plano de proyección

- En ese caso hay que proyectarlo

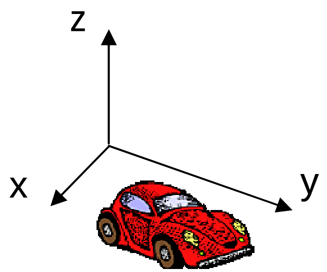
$$v = VUP - (VPN \cdot VUP)VPN$$

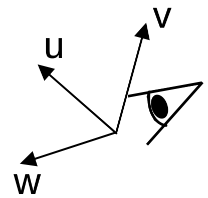
- El vector u es perpendicular a los dos anteriores, apuntando a la derecha del observador:

$$u = VPN \times v$$

Construcción de la matriz de vista

- A continuación hay que hacer un cambio de sistema de referencia para pasar del sistema de coordenadas global al sistema del ojo





- Para ello se usa la fórmula para el cambio de sistema de referencia:
  - Trasladar el sistema nuevo al viejo
  - Rotar la cámara para hacer coincidir los sistemas

$$M = T(-o_x, -o_y, -o_z) \cdot R$$

- La matriz final queda:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -o_x & -o_y & -o_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Los vectores (u,v,w) deben estar normalizados!

Afilamiento adicional

- Cuando la dirección de vista no coincida con el eje Z, habrá que realizar un afilamiento para que coincidan

- La recta que se quiere afilar es:

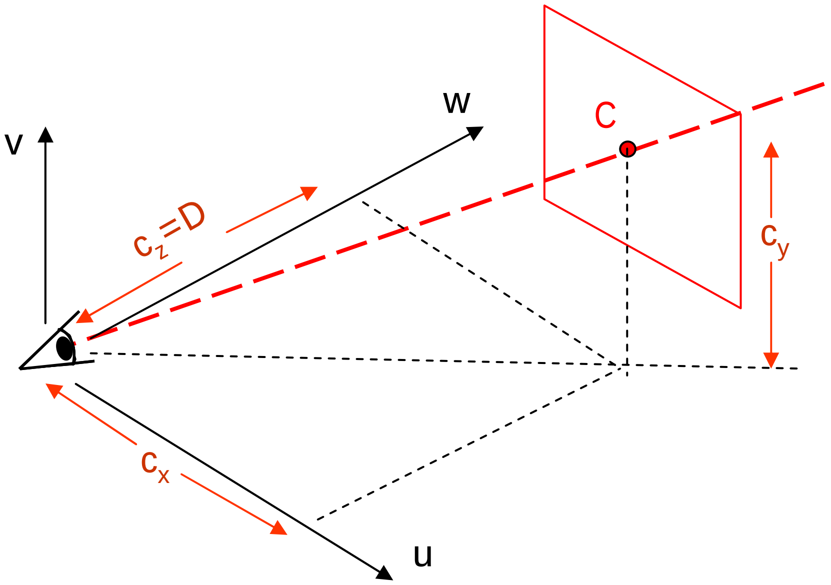
$$\begin{cases} x = (c_x / c_z) z \\ y = (c_y / c_z) z \end{cases}$$

- La expresión para el afilamiento es:

$$\begin{cases} x' = x - (c_x / c_z) z \\ y' = y - (c_y / c_z) z \\ z' = z \end{cases}$$

- La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x / c_z & -c_y / c_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La matriz final M de transformación de vista es:

$$M = T(-o_x, -o_y, -o_z) \cdot R \cdot A$$

Ejemplo

2. Sea el cubo de la figura 1, cuya cara superior está formada por 4 vértices $P_1 = (0,2,1)$, $P_2 = (0,2,2)$, $P_3 = (1,2,2)$, y $P_4 = (1,2,1)$. Como la figura muestra una vista sobre el plano yz, el punto P_4 queda detrás de P_1 y el punto P_3 detrás de P_2. Se pide:

   (a) Calcular la matriz de transformación de vista, teniendo en cuenta que el ojo se encuentra en $(0,5,5)$, el plano de proyección viene dado por el punto de referencia de vista $(0,4,4)$ y un vector normal al plano $(0,-1,-1)$, y el vector que nos indica la vertical es $(0,+1,-1)$. (1 punto)

   (b) Obtener las coordenadas de los 4 puntos en el nuevo sistema de coordenadas. (0.5 puntos)

   (c) Calcular la matriz de proyección perspectiva. (0.75 puntos)

   (d) Obtener y dibujar las coordenadas de los 4 puntos proyectados. Explicar qué clase de polígono obtenemos. (0.75 puntos)

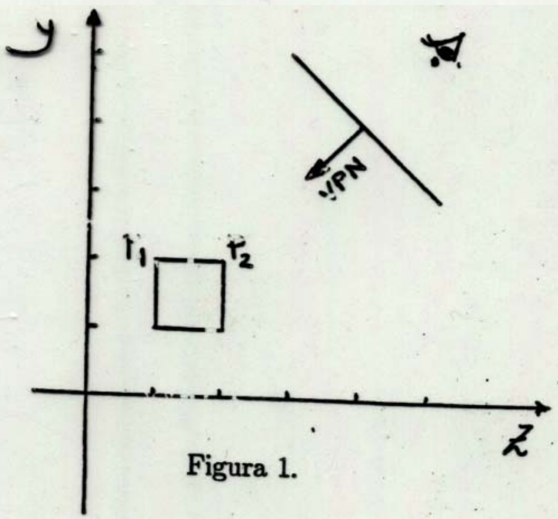
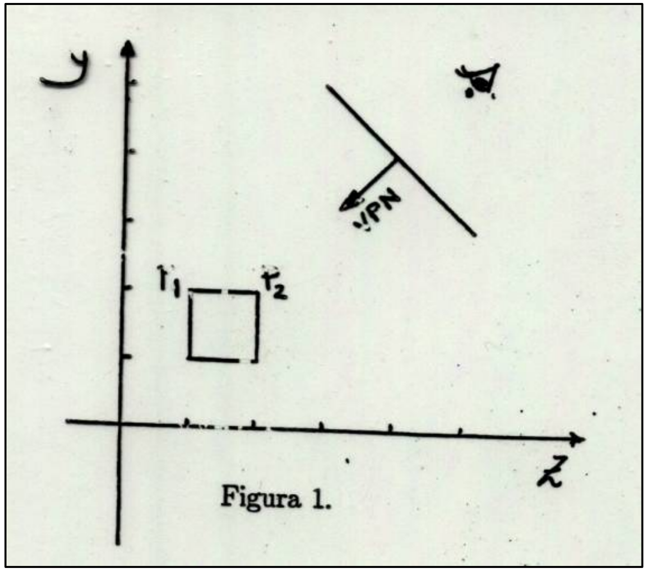


Figura 1.

…continuación…



- Información de partida: $COP = (0,5,5)$

  $VPN =< 0,-1,-1 >$ $\quad$ $VUP =< 0,1,-1 >$

- Lo primero es obtener la expresión de los vectores (u,v,w) del sistema del ojo:

$$w = \frac{VPN}{\|VPN\|} =< 0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}} >$$

- Como el vector VUP pertenece al plano de proyección, no hace falta proyectarlo para calcular v:

$$v = \frac{VUP}{\|VUP\|} =< 0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}} >$$

- El vector u es el producto vectorial de los dos anteriores:

$$u = w \times v =< 1,0,0 >$$

…continuación…

a) Calcular la matriz de transformación de vista:

a)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = T \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

No hace falta afilamiento porque no se ha especificado ninguna ventana

…continuación…

b) Obtener las coordenadas de los puntos en el nuevo sistema:

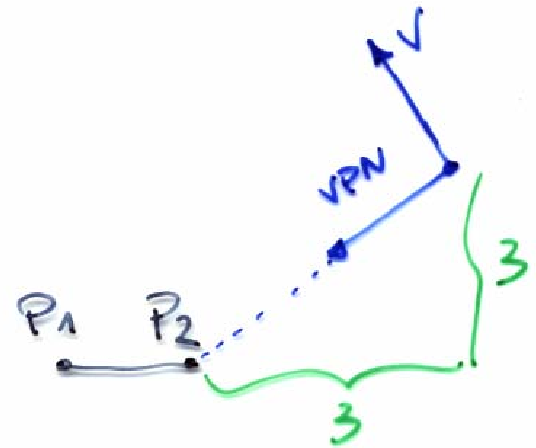
b)

$P_1' = P_1 \cdot M = (0, 1/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2}, 1)$

$P_2' = P_2 \cdot M = (\underbrace{0, 0}_{\text{en el origen}}, 3\sqrt{2}, 1)$

$P_3' = P_3 \cdot M = (1, 0, 3\sqrt{2}, 1)$

$P_4' = P_4 \cdot M = (1, 1/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2}, 1)$



Efectivamente,

$P_2' = (0, 0, \sqrt{18}) = (0, 0, 3\sqrt{2})$

…continuación…

c) Calcular la matriz de proyección perspectiva:

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

distancia del ojo al plano de proyección $\to \sqrt{2}$

↳ ya que $VRP' = VRP \cdot M = (0, 4, 4, 1) M = (0, 0, \sqrt{2}, 1)$

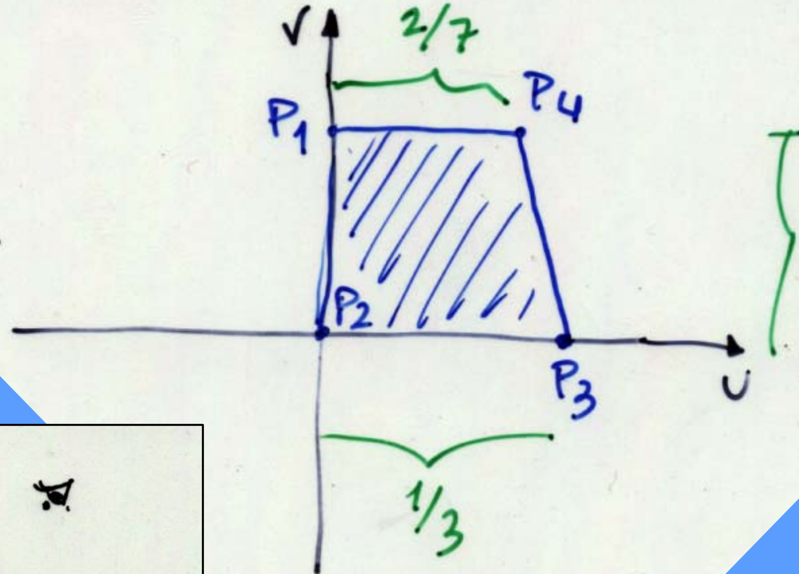
d) Obtener y dibujar los puntos proyectados:

d)

$$\begin{cases} P_1'' = P_1' \cdot D = (0, 1/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2}, 7/2) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{7}, \sqrt{2}, 1\right) \\ P_2'' = P_2' \cdot D = (0, 0, 3\sqrt{2}, 3) = (0, 0, \sqrt{2}, 1) \\ P_3'' = P_3' \cdot D = (1, 0, 3\sqrt{2}, 3) = \left(\frac{1}{3}, 0, \sqrt{2}, 1\right) \\ P_4'' = P_4' \cdot D = (1, 1/\sqrt{2}, 7/\sqrt{2}, 7/2) = \left(\frac{2}{7}, \frac{\sqrt{2}}{7}, \sqrt{2}, 1\right) \end{cases}$$

… continuación

- Todos los puntos están sobre el plano de proyección
- P_2 va a estar en el centro de la pantalla (0,0)



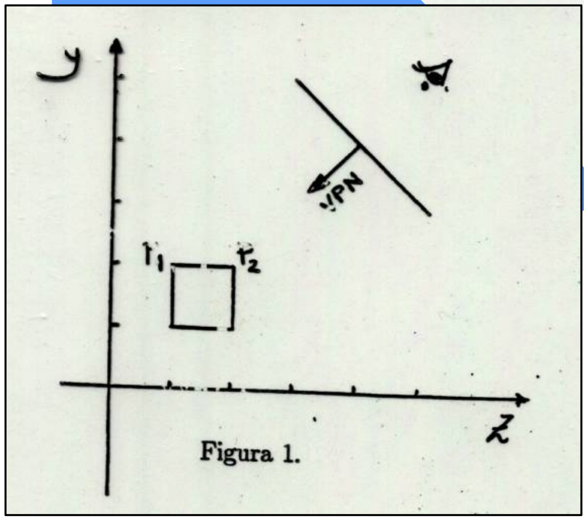
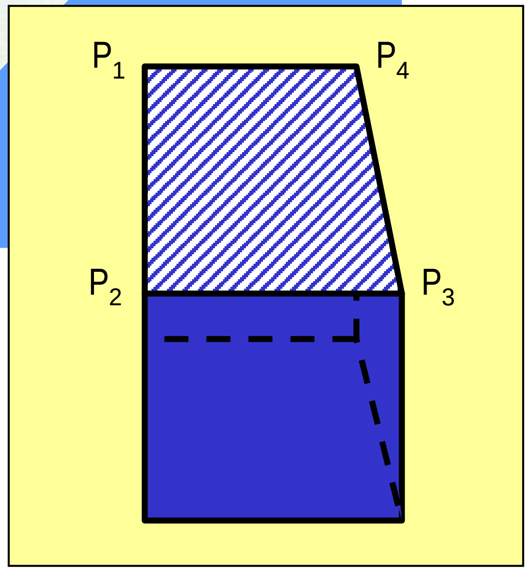


Figura 1.

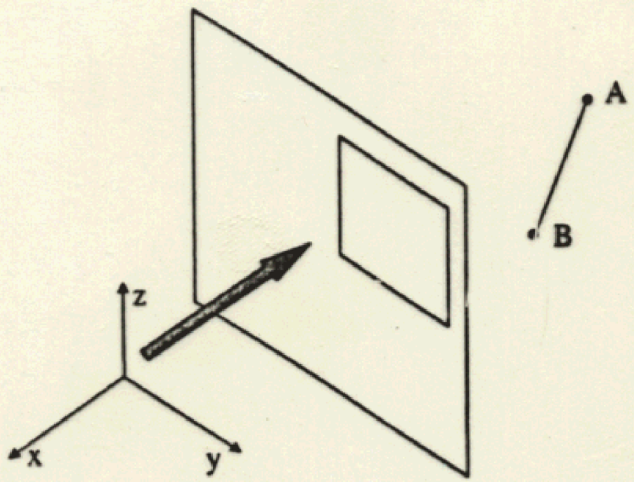


Ejemplo

2. Tenemos el segmento AB, donde $A = (-8, 10, 16)$ y $B = (-6, 9, 15)$. El observador está situado en el origen, y su vertical coincide con el eje z. El plano de proyección es $x = -4$. La ventana de visión tiene por esquinas los puntos $(-4, 2, 10)$ y $(-4, 8, 6)$. Se pide

(a) Obtener la matriz de transforación de vista y calcular las nuevas coordenadas del segmento (2.5 puntos)

(b) Obtener la matriz de perspectiva y calcular la proyección del segmento (1 punto)



…continuación…

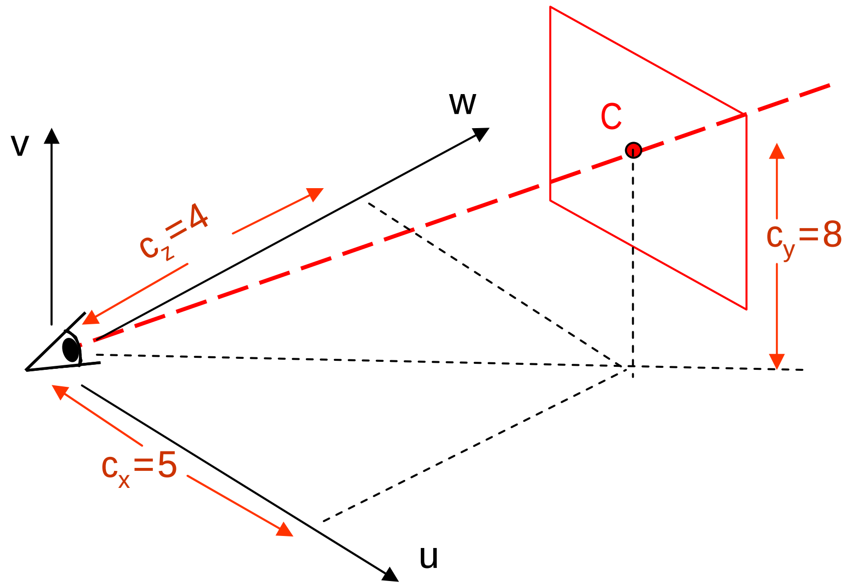
- El ojo ya está en el origen → no hay que trasladar
- La matriz de transformación de vista es entonces:

$$M = R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

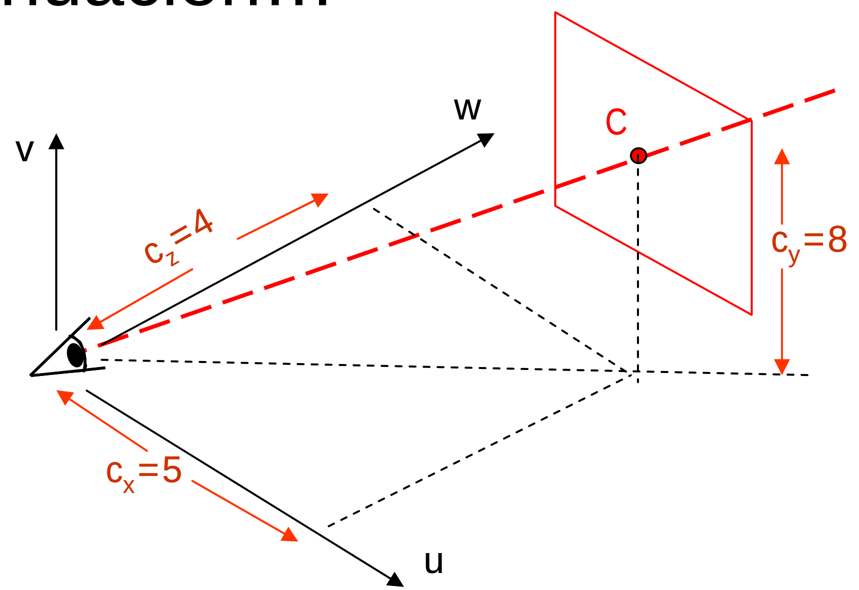
- El centro de la ventana es el punto $C = (-4,5,8)$
- Después de transformado sale el punto

$$C' = C \cdot M = (5,8,4) \neq (0,0,4)$$

- Es necesario afilar la recta que pasa por el centro de la ventana al eje Z



… continuación…



- La recta que se quiere afilar es:

$$\begin{cases} x = 5z/4 \\ y = 2z \end{cases}$$

- La matriz de afilamiento es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5/4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz final de transformación de vista es:

$$M = R \cdot A = \begin{pmatrix} 5/4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

… continuación

b) Obtener la matriz de perspectiva, y calcular la proyección del segmento

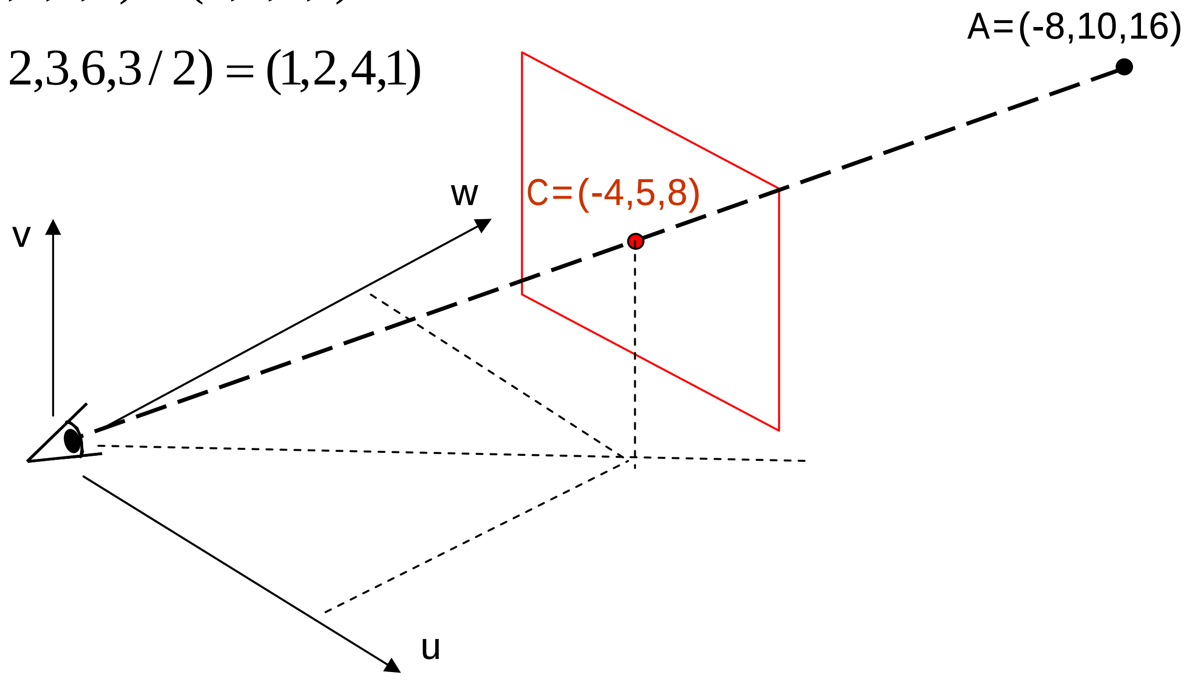
- La matriz de perspectiva es: $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Los puntos proyectados son:

$$A' = (-8,10,16,1) \cdot M \cdot P = (0,0,8,2) = (0,0,4,1)$$

$$B' = (-6,9,15,1) \cdot M \cdot P = (3/2,3,6,3/2) = (1,2,4,1)$$

- El punto A debe caer en el mismo centro de la foto



Etapas en la creación de la imagen

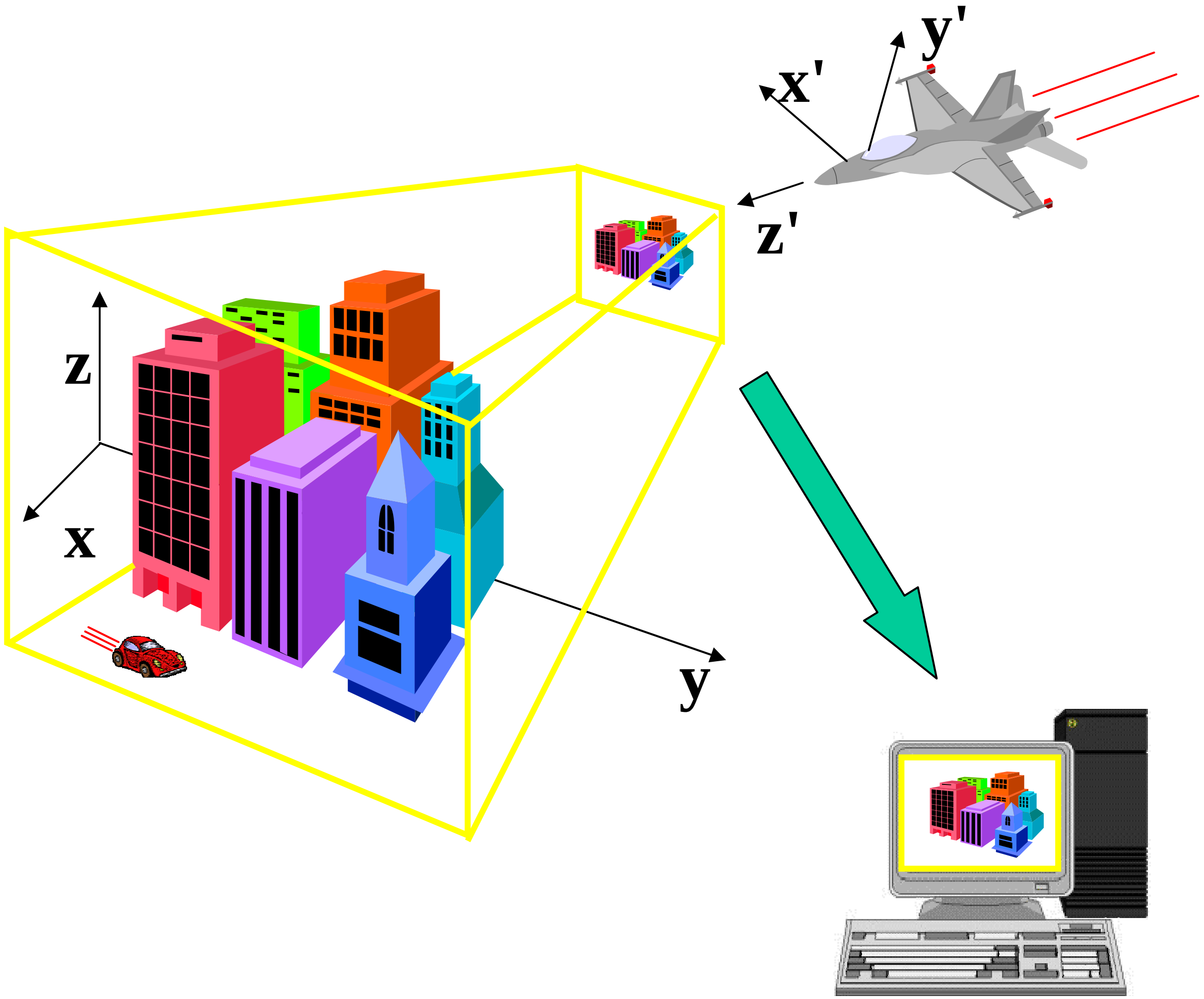
Posicionar objetos en el sistema 3D

Transformación de vista

Recorte 3D

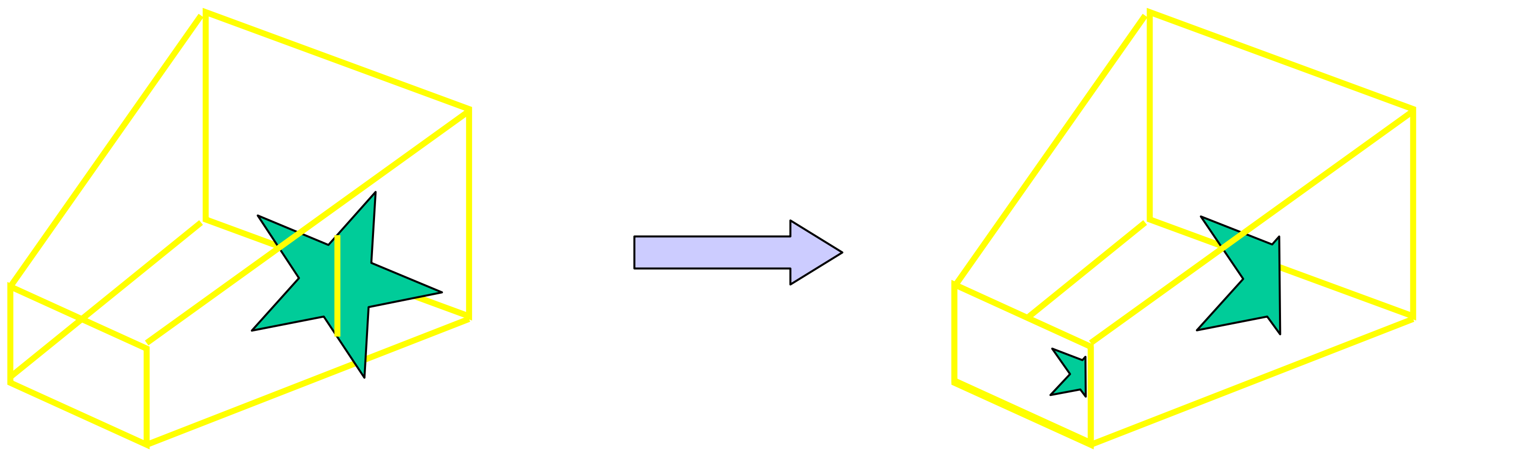
Proyección

Transformación a ventana

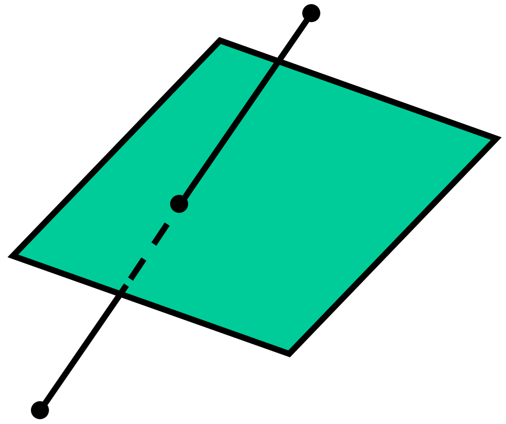


Recorte 3D

- Antes de proyectar la imagen debemos recortar la escena frente al volumen de visualización

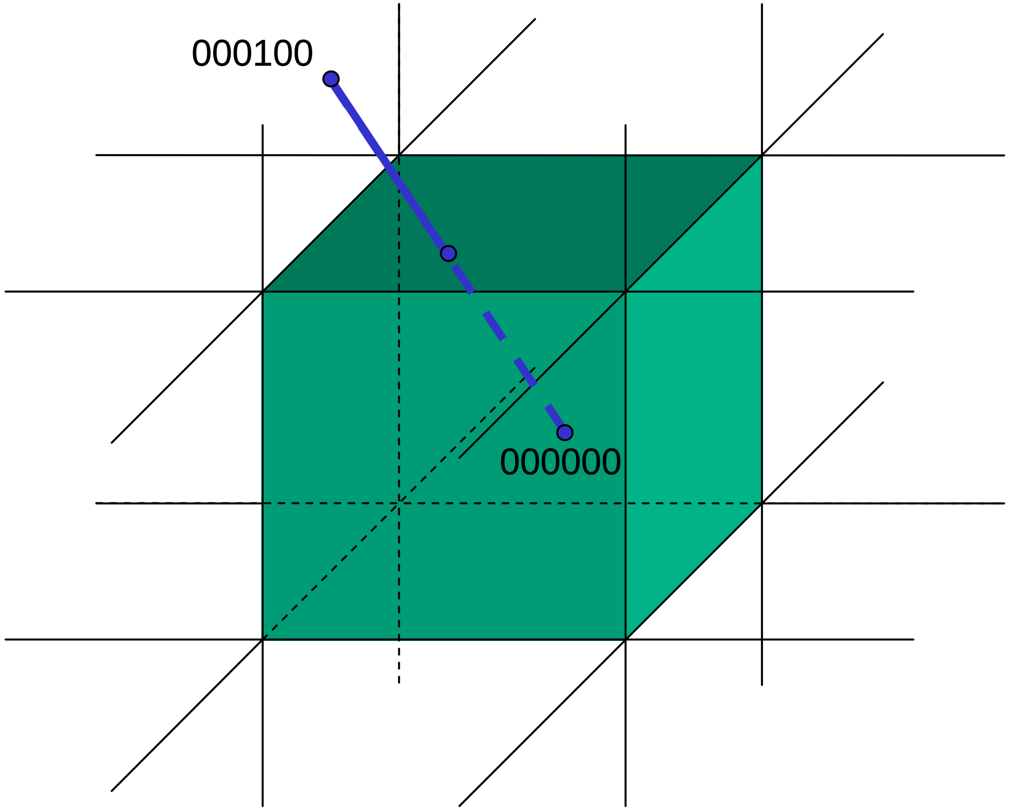


- Básicamente se trata de un problema de intersección de rectas y planos
- Las rectas son las aristas de los polígonos
- Los planos son las 6 caras del volumen de visualización



Algoritmo de Cohen-Sutherland 3D

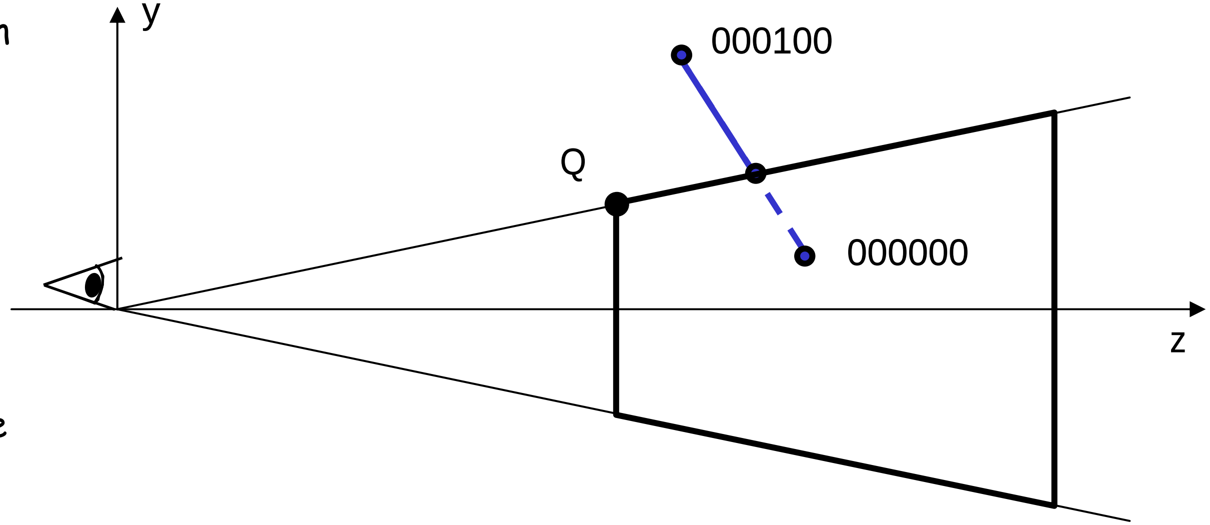
- Igual que en el caso 2D, se ejecuta primero un test inicial para reducir el número de intersecciones a calcular
- A cada extremo de la línea le asignamos un código de 6 bits
- Cada bit indica si el punto está a un lado o a otro de cada cara



- Cuando se usa proyección paralela, el volumen de vista es un cubo
- En ese caso, los bits del código se calculan con simples restas como en la versión 2D ($y-y_{max}$)

Cálculo de los códigos en perspectiva

- Cuando se usa proyección perspectiva, el volumen de vista es una pirámide truncada (frustum)



- El cálculo de los códigos es ligeramente diferente
- Por ejemplo, tomemos la cara superior, donde conocemos las coordenadas del punto Q
- La ecuación del techo es $y = (Q_y / Q_z) z = az$
- La función es entonces

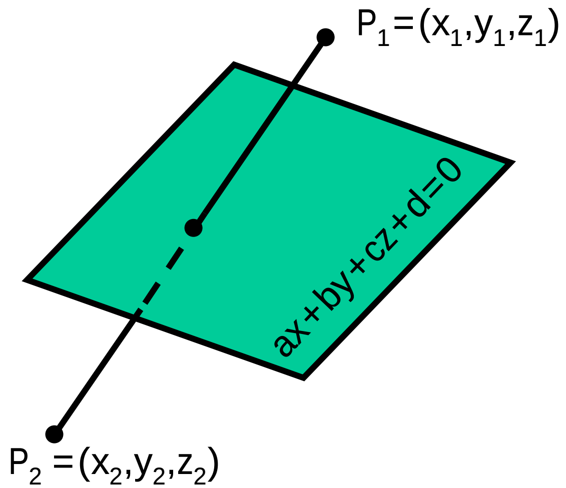
$$f_T = y - az = \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{El punto está por encima del volumen} \\ \leq 0 & \rightarrow \text{El punto está dentro del volumen} \end{cases}$$

- Necesitamos una función de decisión para cada cara

Cálculo de la intersección

- En total, para calcular ambos códigos sólo hacen falta 12 restas, 12 productos y 12 comparaciones
- Finalmente una operación binaria AND entre ambos códigos nos etiquetaría la línea como invisible, completamente visible, o caso de duda

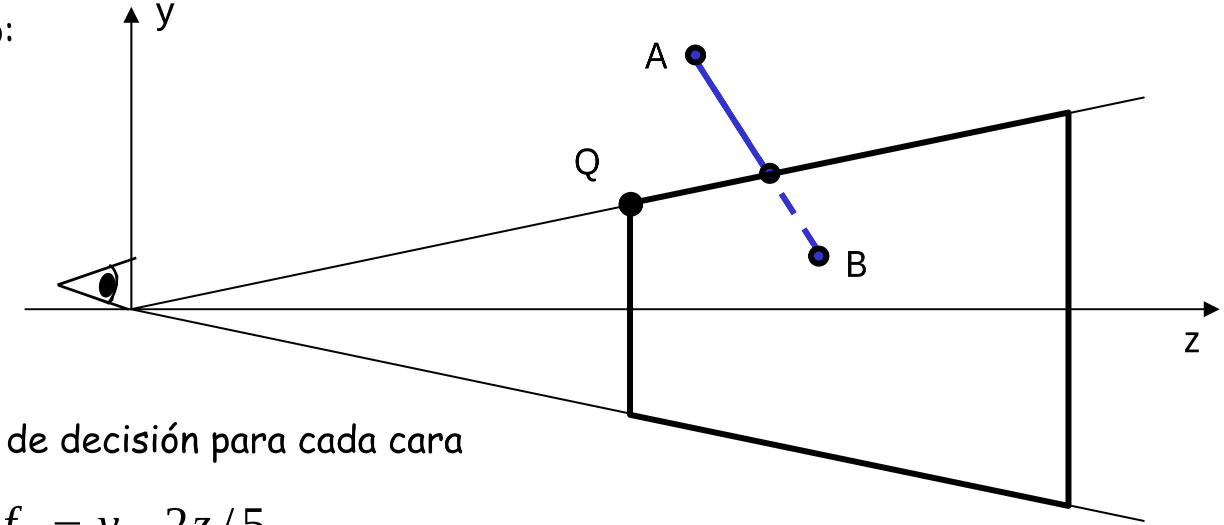
- A las líneas en caso de duda, se les calcula la intersección con una de las caras
- Suele elegirse una cara en donde el bit sea distinto en ambos códigos
- La intersección se puede calcular en parámetricas de esta manera:



$$t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)}$$

- Finalmente la línea se subdivide en dos, y se vuelve a aplicar el test a cada tramo

Ejemplo



Recortar la arista AB, siendo:

Q = (0,2,5),

A = (0,5,6)

B = (0,1,8)

- Calculamos las funciones de decisión para cada cara
- Ejemplo: cara superior $f_T = y - 2z/5$
- Obtenemos los códigos para A y B: 100000 y 000000
- Calculamos la intersección con la cara superior

$$(5-4t) - 2/5(6+2t) = 0 \Rightarrow t = 13/24 \Rightarrow P = (0{,}17/6{,}85/12)$$

- Obtenemos las subaristas AP y PB:
  - La primera sale completamente invisible
  - La segunda sale completamente visible

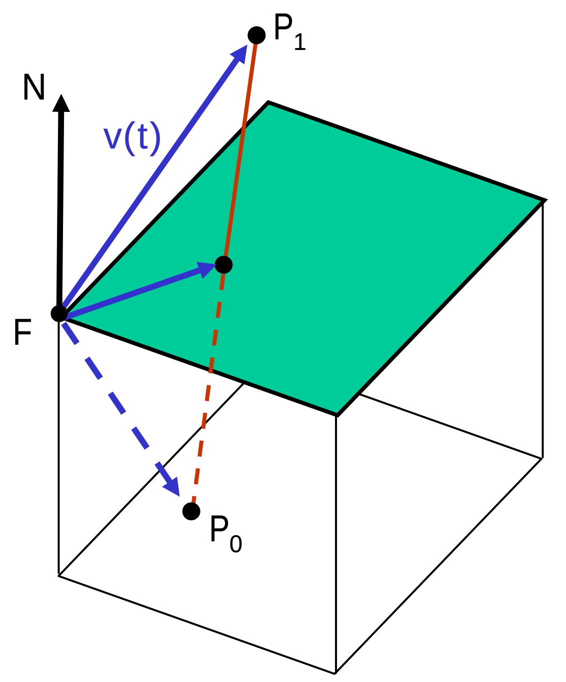
Algoritmo de Cyrus-Beck 3D

- Similar al caso en 2D
- Se elige un punto F arbitrario para cada cara
- Sea P(t) un punto sobre el segmento, t en [0,1] $P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$
- Sea v(t) el vector desde F hasta un punto cualquiera del segmento $v(t) = P(t) - F$
- Sea el producto escalar $N_i \cdot v(t)$
- La intersección se produce cuando $N_i \cdot v(t) = 0$
- Desarrollando y despejando t obtenemos:

$$N_i \cdot v(t) = N_i\left(P(t) - F\right) = \ldots = 0$$

$$\Downarrow$$

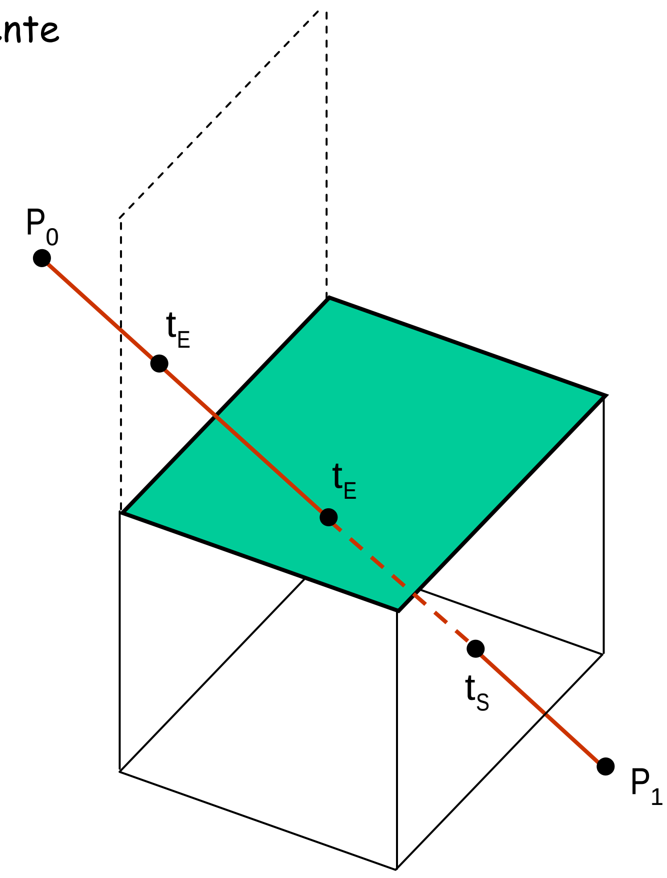
$$\boxed{t = -\frac{N_i\left(P_0 - F\right)}{N_i\left(P_1 - P_0\right)}}$$



- Hay que controlar que el denominador no se haga cero

Cálculo del tramo visible

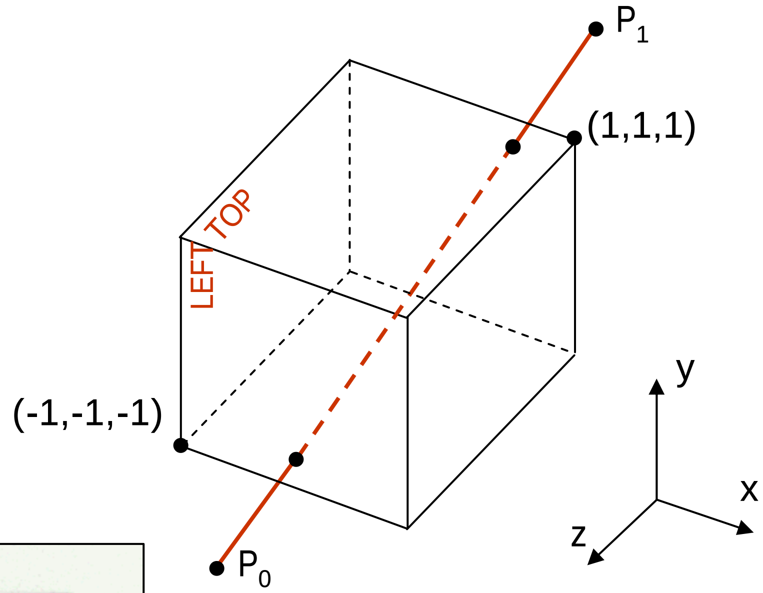
- Aplicando la fórmula obtenemos los 6 valores de t que indican las intersecciones de la línea con las 6 caras. ¿Cómo identificamos cuáles son las dos correctas?
- Los valores de t fuera del rango (0,1) se descartan
- Cada valor de t se etiqueta como entrante (t_E) o saliente (t_S), según entre o salga con respecto al volumen
- ¿Cómo saberlo?
- Mirando el signo de $N_i \cdot (P_1 - P_0)$
  - Si es negativo → punto entrante
  - Si es positivo → punto saliente
- La solución viene dada por el tramo de línea entre el P_E más alto y el P_S más bajo
- Si $t_E > t_S$ → la línea no se dibuja
- Una vez obtenidos los valores de t, se sustituyen en la ecuación parámetrica para obtener las coordenadas (x,y,z) de los puntos



Ejemplo de recorte con volumen rectangular

- Sea $P_0 = (-2, -1, 1/2)$, $P_1 = (3/2, 3/2, -1/2)$
- Primero calculamos las normales
- Como puntos conocidos tomamos las esquinas
- La dirección del segmento es

$$D = (7/2, 5/2, -1)$$



Plane	n	f	w	w · n	D · nt	t_L	t_U
Top	[0 −1 0]	(1, 1, 1)	[−3 −2 −1/2]	2	−5/2		4/5
Bottom	[0 1 0]	(−1, −1, −1)	[−1 0 3/2]	0	5/2	0	
Right	[−1 0 0]	(1, 1, 1)	[−3 −2 −1/2]	3	−7/2		6/7
Left	[1 0 0]	(−1, −1, −1)	[−1 0 3/2]	−1	7/2	2/7	
Hither	[0 0 −1]	(1, 1, 1)	[−3 −2 −1/2]	1/2	1	−1/2	
Yon	[0 0 1]	(−1, −1, −1)	[−1 0 3/2]	3/2	−1		3/2

mínimo t_S

máximo t_E

OJO: en este ejemplo las normales se han tomado hacia dentro

Ahora entrantes y salientes tienen signo contrario

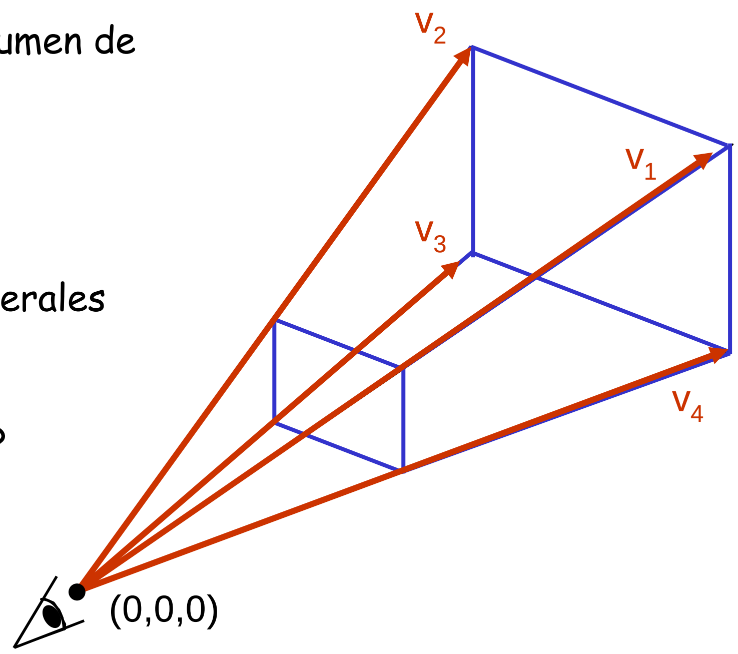
- La línea recortada es el segmento entre los puntos:

$$P(2/7) = P_0 + (2/7)D = (-1, -2/7, 3/14)$$

$$P(4/5) = P_0 + (4/5)D = (4/5, 1, -3/10)$$

Recorte con volumen en perspectiva

- Cuando el recorte es en perspectiva, el volumen de recorte es una pirámide truncada



- Como punto perteneciente a las 4 caras laterales se puede tomar el ojo (0,0,0)
- ¿Pero cómo podemos calcular las normales?

- Necesitamos conocer dos vectores pertenecientes a cada cara
- Entonces, el producto vectorial de cada pareja de vectores nos da la normal
- Ejemplo: $n_T = v_1 \times v_2$ (suponiendo que queremos las normales hacia fuera)

Ejemplo

3. Tenemos el segmento ABC, donde $A = (0, 5, -10)$, $B = (1, -1, -10)$ y $C = (10, 0, -10)$. La dirección de vista coincide con el semieje $-z$. Las dimensiones de la ventana de proyección son 4 de alto y 6 de ancho, y su centro está en el punto $(0, 0, -5)$. El objetivo es generar una imagen del segmento (Figura 1). Los pasos para lograrlo son:

   (a) Realizar el recorte del segmento con el algoritmo de Cyrus-Beck 3D. (2.5 puntos)

   (b) Proyectar el resultado del recorte sobre la ventana. Para hacerlo debes considerar que el semieje $-z$ se convierte en $+z$, y por lo tanto hay que cambiar de signo todas las componentes z de todos los puntos. (1 punto)

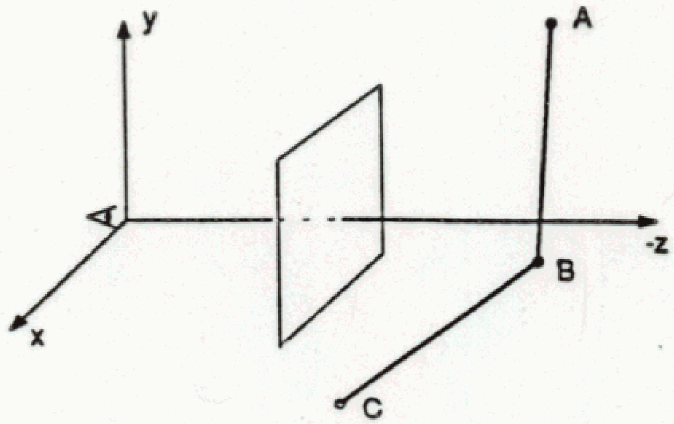
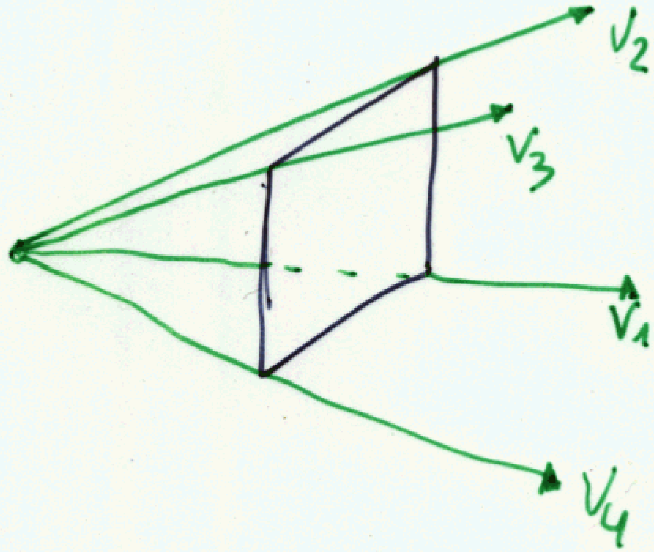


FIGURA 1

… continuación …



$$\begin{cases} \vec{V}_1 = (-3,-2,-5) \\ \vec{V}_2 = (-3,2,-5) \\ \vec{V}_3 = (3,+2,-5) \\ \vec{V}_4 = (+3,-2,-5) \end{cases}$$

Normales:

$N_L = V_1 \times V_2 = (20,0,-12)$

$N_R = V_3 \times V_4 = (-20,0,-12)$

$N_T = V_2 \times V_3 = (0,-30,-12)$

$N_B = V_4 \times V_1 = (0,30,-12)$

… continuación …

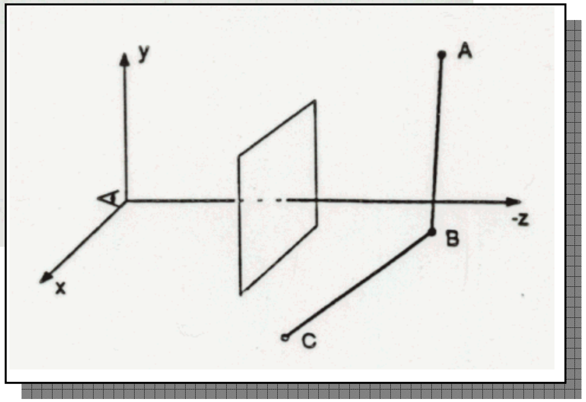
Comenzaremos con la arista $\overline{AB} = A + (B-A)t = (0,5,-10) + \underbrace{(1,-6,0)}_{D}t$

	u	f	w	$w \cdot n$	$D \cdot n$	t_{min}	t_{max}
Derecha	$(-20,0,-12)$	$(0,0,0)$	$(0,5,-10)$	120	-20	–	6
Izda.	$(20,0,-12)$	$(0,0,0)$	$(0,5,-10)$	120	20	-6	–
Arriba	$(0,-30,-12)$	$(0,0,0)$	$(0,5,-10)$	-30	180	1/6	–
Abajo	$(0,30,-12)$	$(0,0,0)$	$(0,5,-10)$	270	-180	–	3/2

Los puntos visibles son desde t_1 a 1.

$$P(t_1) = A + Dt = \left(\tfrac{1}{6}, 4, -10\right)$$

$$P(1) = B = (1,-1,-10)$$



… continuación …

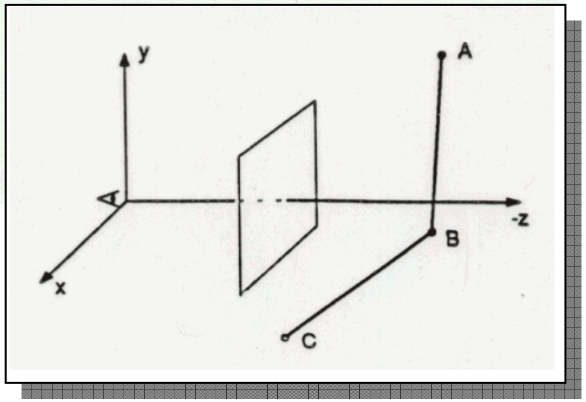
Para la arista $\overline{BC} = B + (C-B)t = (1,-1,-10) + \underbrace{(9,1,0)}_{D}\, t$

	n	f	w	$w \cdot n$	$D \cdot n$	t	
Derecha	$(-20,0,-12)$	$(0,0,0)$	$(1,-1,-10)$	100	-180	-	$5/9$
Izda.	$(20,0,-12)$	"	"	140	180	$-7/9$	—
Arriba	$(0,-30,-12)$	"	"	150	-30	—	5
Abajo	$(0,30,-12)$	"	"	90	30	-3	—

Los puntos visibles son de $t=0$ a $t_2 = 5/9$

$P(0) = B = (1,-1,-10)$

$P(t_2) = (6, -4/9, -10)$



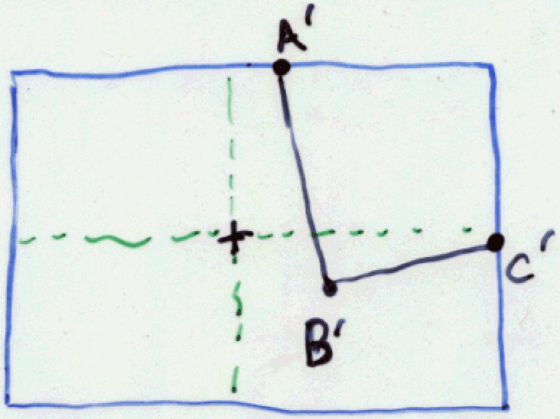
… continuación

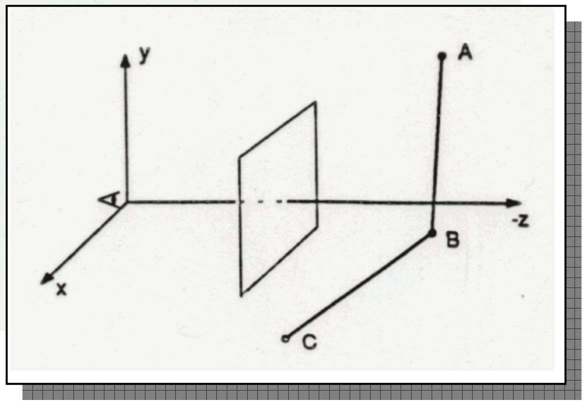
b) La matriz de perspectiva es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A' = (\frac{1}{6}, 4, +10) \cdot D = (\frac{1}{6}, 4, 10, 2) = (\frac{1}{12}, 2{,}5, 1)$

$B' = (1, -1, +10) \cdot D = (1, -1, 10, 2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 5, 1)$

$C' = (6, -\frac{4}{9}, +10) \cdot D = (6, -\frac{4}{9}, 10, 2) = (3, -\frac{2}{9}, 5, 1)$





Resumen de lo visto