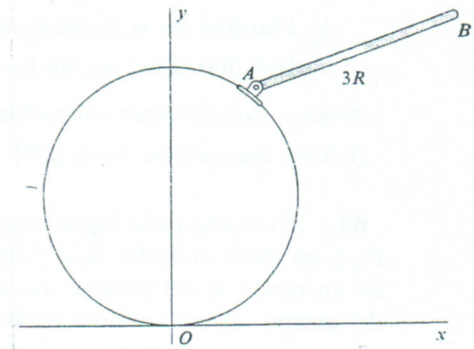
59.- Se dispone de una varilla AB homogénea y pesada de masa m y longitud $\frac{3R}{2}$ cuyo extremo A está obligado a moverse sin rozamiento sobre una circunferencia fija de radio R, como se indica en la figura. El conjunto está contenido en un plano vertical.

El eje Ox repele a todas y cada una de las partículas de la varilla AB con una fuerza proporcional al producto de la masa de cada partícula por la distancia que la separa de dicho eje siendo la constante de proporcionalidad $2g/3R$.

Se pide:

1) Resultante y momento resultante de las fuerzas directamente aplicadas a la varilla respecto del punto A.
2) Plantear las ecuaciones que determinan las posiciones de equilibrio y la reacción en A mediante las ecuaciones generales de equilibrio.
3) Calcular la reacción en A para las posiciones de equilibrio en que la varilla AB no está alineada con el eje Oy.



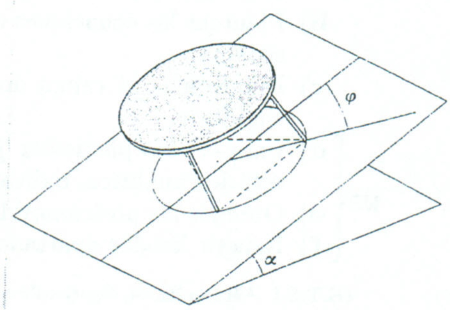
(E.T.S.I. Aeronaúticos, Diciembre 1972)

60.- Consideremos un taburete formado por un disco de radio $\underline{a}$ y tres patas soldadas en su superficie en puntos que forman un triángulo equilátero. Sea λa la distancia a la que se encuentra el centro de gravedad del taburete del plano que pasa por los extremos de sus patas.

El taburete así constituido se sitúa sobre un plano inclinado un ángulo α sobre la horizontal. De las tres patas solamente una presenta un coeficiente de rozamiento f con el plano. Las otras dos son lisas.

Llamemos φ el ángulo que forma con la línea de máxima pendiente del plano, el radio que va a la pata rugosa. Se pide:

1) Valores de φ correspondientes a las posiciones de equilibrio del taburete sobre el plano.
2) Partiendo de una posición de equilibrio se va aumentando el ángulo α hasta que el equilibrio se rompe por el vuelco o por deslizamiento. Discutir cual de estas dos circunstancias se presenta primero. Determinar el valor de α para el que se presenta y estudiar la influencia que puede tener el valor de λ. Repetir el análisis para todas las posiciones de equilibrio.



61.- El sistema material de la figura, contenido en un plano horizontal, está constituido por dos varillas iguales de longitud a articuladas por su extremo en un punto fijo A del plano, por un muelle de longitud natural cero y constante de rigidez k, que une los extremos B y C de las varillas, y por un disco homogéneo, de radio $a/4$ y masa M, que se sitúa entre las dos varillas tal como se indica en la figura.

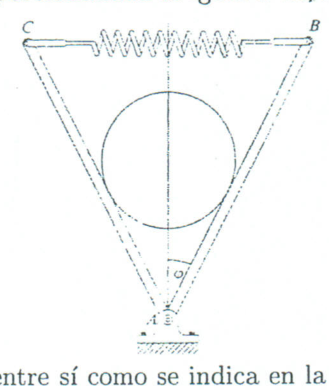
El punto fijo A atrae a todos y cada uno de los elementos diferenciales de masa del disco proporcionalmente al producto de la masa del elemento por la distancia. La constante de proporcionalidad es igual a $4k/m$.

Se tomará como parámetro para definir la posición del sistema el ángulo φ de la figura. Se pide:

1) Posiciones de equilibrio.
2) Reacción entre el disco y las varillas.

Suponiendo ahora que existe rozamiento entre el disco y las varillas, con coeficiente f, se pide:

3) Relación que determina las posiciones de equilibrio.
4) Reacciones entre el disco y las varillas en función de φ



(E.T.S.I. Aeronaúticos, Septiembre 1972)

62.- Dos semidiscos iguales homogéneos de radio R y masa m se unen entre sí como se indica en la figura; los vértices A mediante una articulación, y los vértices B y C mediante un muelle de longitud natural nula y constante de rigidez $k = mg/3\pi R$. El conjunto está contenido en un plano vertical, apoyado sobre el eje Ox, y sometido al peso.

Suponiendo que entre los semidiscos y el eje Ox no hay rozamiento:

1) Plantear las ecuaciones de equilibrio.

2) Determinar todas las posiciones de equilibrio.

3) Reacción en A para dichas posiciones.

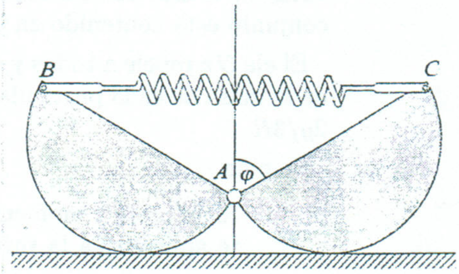
Si entre los semidiscos y el eje Ox existe un coeficiente de rozamiento f.

4) Plantear las ecuaciones de equilibrio.

5) Estudiar como varían las posiciones de equilibrio al variar f.

Nota.- Considérense solamente las posiciones $0 \leq \varphi \leq \pi$.

(E.T.S.I. Aeronaúticos, Junio 1974)



63.- El sistema de la figura, contenido en el plano horizontal Oxy, está formado por un aro de radio R y centro O, y un disco de radio $R/2$ y centro C. El aro está articulado en el punto O y su masa m está concentrada en un punto A del mismo. La masa del disco, de valor $6m$ se concentra uniformemente en el diámetro BD del mismo. Ambos sólidos están siempre en contacto con ligadura bilateral y entre sus superficies existe un rozamiento de coeficiente f. Sobre las masas del sistema actúa una atracción del eje Ox proporcional a la masa y a la distancia al mismo, siendo k la constante de proporcionalidad.

Para fijar la posición del sistema se utilizan las siguientes coordenadas generalizadas: *i)* α, ángulo entre OA y el eje Ox; *ii)* β, ángulo entre OC y el eje Ox; *iii)* γ, ángulo entre el diámetro BD y OC.

Se pide:

a) Determinar en función de las coordenadas generalizadas, para una posición genérica, la expresión de la resultante y del momento respecto a C del sistema de fuerzas de atracción que actúan sobre el disco.

b) Plantear las ecuaciones e inecuaciones necesarias que permitan obtener las posiciones de equilibrio del sistema.

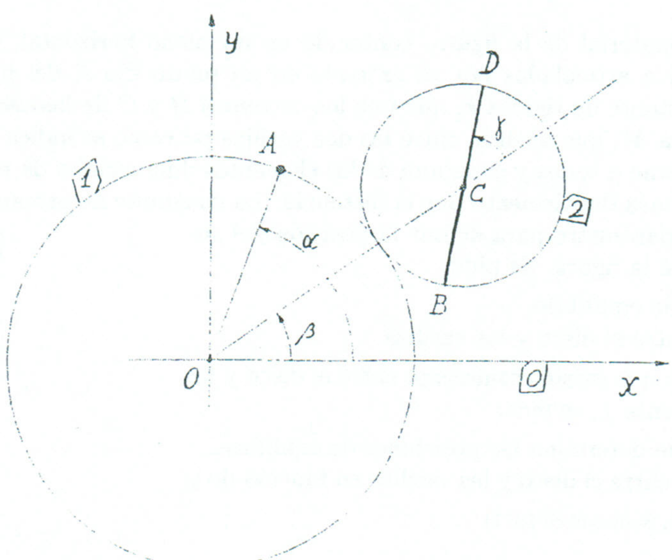
c) Determinar el rango de valores de β para los que existe equilibrio. Determinar las posiciones de equilibrio.

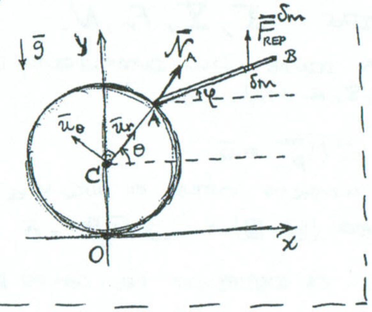
d) Para el caso particular $f = 0$, obtener las ecuaciones de equilibrio utilizando los procedimientos de la estática analítica, indicando previamente si existen ligaduras y si el sistema es holónomo.

NO **e)** Obtener las posiciones de equilibrio correspondientes al apartado anterior.

f) Repetir los dos apartados anteriores para el caso en que f sea infinito.

(E.T.S.I. Aeronaúticos, Septiembre 1995)





- COORDENADAS GENERALIZADAS : θ, φ
  ($\theta \equiv$ ANGULO ENTRE CA Y LA DIRECCION DE Ox;
  $\varphi \equiv$ ANGULO ENTRE AB Y LA DIRECCION DE Ox)

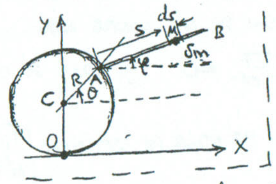
- INCOGNITAS DEBIDAS AL CONTACTO DE LA VARILLA AB CON EL EXTERIOR :

$$\overline{N}_A = N_A \, \bar{u}_r \quad \text{(UNA INCOGNITA)}$$

(SE SUPONE QUE ESTE CONTACTO ES CON LIGADURA BILATERAL).

- FUERZAS DADAS:
  - PESO (RESULTANTE $= -mg\bar{J}$; MOMENTO RESPECTO AL CENTRO DE MASAS $= \bar{0}$)
  - FUERZA DE REPULSION DEL EJE Ox PROPORCIONAL A LA MASA Y A LA DISTANCIA A DICHO EJE. SOBRE UN DIFERENCIAL DE MASA δm, LA FUERZA DE REPULSION QUE ACTUA ES: $\overline{F}^{\delta m}_{REP} = \frac{2g}{3R} \cdot \delta m \cdot y \bar{J}$

VAMOS A DETERMINAR, EN FUNCION DE LAS COORDENADAS GENERALIZADAS, LAS EXPRESIONES DE LA RESULTANTE Y DEL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO A DE ESTE SISTEMA DE FUERZAS. PARA ESTO, VAMOS A INTRODUCIR UNA VARIABLE s



QUE SIRVA PARA DEFINIR LA POSICION DE TODOS LOS PUNTOS DE LA VARILLA; TAL COMO MUESTRA EL DIBUJO, s SERA LA DISTANCIA DE UN PUNTO DE LA VARILLA AL PUNTO A. ASI, PARA UN DIFERENCIAL DE MASA DE LA VARILLA QUE ESTE A UNA DISTANCIA s DEL PUNTO A Y QUE OCUPE UNA LONGITUD ds, SU MASA δm Y SU COORDENADA y VENDRAN DADAS POR LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$\delta m = \frac{m}{\frac{3R}{2}} ds \ ; \ y = R + R \operatorname{sen}\theta + s \operatorname{sen}\varphi$$

PARA LA RESULTANTE, $\overline{F}_{REP}$, DEL SISTEMA DE FUERZAS DE REPULSION, SE TIENE DIRECTAMENTE:

$$\overline{F}_{REP} = \int \overline{F}^{\delta m}_{REP} = \frac{2g}{3R} \left(\int y \, \delta m\right) \bar{J} = \frac{2g}{3R} m y^G \bar{J}$$

$$\boxed{\overline{F}_{REP} = \frac{2gm}{3R} \left(R + R \operatorname{sen}\theta + \frac{3R}{4} \operatorname{sen}\varphi\right) \bar{J}}$$

PARA EL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO A DE LA FUERZA DE REPULSION QUE ACTUA SOBRE UN δm SE TIENE:

$$\delta m \, \overline{M}^{REP}_A = \overline{AM} \wedge \overline{F}^{\delta m}_{REP} = (s \cos\varphi \, \bar{I} + s \operatorname{sen}\varphi \, \bar{J}) \wedge \frac{2g}{3R} \frac{m}{\frac{3R}{2}} \cdot ds \cdot (R + R \operatorname{sen}\theta + s \operatorname{sen}\varphi) \bar{J} =$$

$$= \frac{4gm}{9R^2} \cos\varphi \cdot s \cdot (R + R \operatorname{sen}\theta + s \operatorname{sen}\varphi) \, ds \, \bar{K}$$

ENTONCES, EL MOMENTO TOTAL $\overline{M}^{REP}_A$, SERA:

$$\overline{M}^{REP}_A = \int \delta m \, \overline{M}^{REP}_A = \frac{4gm}{9R^2} \cos\varphi \left[(R + R \operatorname{sen}\theta) \int_0^{3R/2} s \cdot ds + \operatorname{sen}\varphi \int_0^{3R/2} s^2 ds \right] \bar{K}$$

$$\boxed{\overline{M}^{REP}_A = \frac{gmR}{2} \cos\varphi \, (1 + \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi) \, \bar{K}}$$

(PARA EL MOMENTO RESPECTO A OTRO PUNTO, RECUERDESE LA EXPRESION DEL CAMPO DE MOMENTOS DE UN SISTEMA DE VECTORES DESLIZANTES:

$$\overline{MOMENTO}_Q = \overline{MOMENTO}_P + \overline{RESULTANTE} \wedge \overline{PQ} \ )$$

- EN ESTE CASO SE TIENE UN SOLIDO PLANO CON FUERZAS EN EL PLANO, LUEGO HABRA TRES ECUACIONES DE LA ESTATICA NO TRIVIALES E INDEPENDIENTES. FACILMENTE DESCUBRIMOS DOS ECUACIONES DE LA ESTATICA EN LAS QUE NO INTERVIENE LA INCOGNITA N_A (ES DECIR, EN LAS QUE INTERVIENEN SOLO LAS INCOGNITAS DE POSICION: θ Y φ); EN EFECTO, COMO LA FUERZA $\overline{N}_A$ ESTA APLICADA EN EL PUNTO A, EN LA ECUACION DE MOMENTO RESPECTO A ESTE PUNTO NO APARECE $\overline{N}_A$, ASIMISMO, COMO LA DIRECCION DEL VECTOR $\overline{N}_A$ ES $\bar{u}_r$, EN LA ECUACION DE FUERZAS PROYECTADA SEGUN $\bar{u}_\theta$ TAMPOCO APARECERA N_A:

$$\begin{cases} \overline{M}^{REP}_A + \overline{AG} \wedge (-mg\bar{J}) = \bar{0} \\ (\overline{F}_{REP} - mg\bar{J} + N \bar{u}_r = \bar{0}) \cdot \bar{u}_\theta \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{TENIENDO EN CUENTA LAS EXPRESIONES DE } \overline{F}_{REP} \text{ Y } \overline{M}^{REP}_A \text{ Y QUE } \bar{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta \, \bar{I} + \cos\theta \, \bar{J} \\ \text{Y } \overline{AG} = \frac{3R}{4} (\cos\varphi \, \bar{I} + \operatorname{sen}\varphi \, \bar{J}) \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi \left(1 + \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi - \frac{3}{2}\right) = 0 & (1) \\ \left(1 + \operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4} \operatorname{sen}\varphi - \frac{3}{2}\right) \cos\theta = 0 & (2) \end{cases}$$

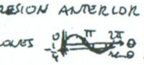
LAS PAREJAS DE VALORES DE θ Y φ QUE CUMPLAN LAS ECS. (1) Y (2) SON LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO DE LA VARILLA YA QUE EN LA ECUACION DE LA ESTATICA, INDEPENDIENTE DE LAS DOS ANTERIORES, QUE QUEDA POR PLANTEAR APARECE LA INCOGNITA N_A Y SERA LA QUE PERMITA OBTENER EL VALOR DE ESTA INCOGNITA EN LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO DADAS POR (1) Y (2).

EN ESTE CASO SE PUEDEN OBTENER DE UN MODO SENCILLO LAS PAREJAS DE VALORES DE θ Y φ QUE CUMPLEN LAS ECS (1) Y (2). VAMOS A INICIAR SIMPLEMENTE EL PROCESO DE OBTENCION DE ESTAS PAREJAS. PARA ELLO NOS DAMOS CUENTA QUE EL TERMINO DE LA DERECHA DE (2) ES EL PRODUCTO DE DOS FACTORES: $\cos\theta$ Y $(1 + \operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4} \operatorname{sen}\varphi - \frac{3}{2})$. POR TANTO (2) SE CUMPLE SI $\cos\theta = 0$, ES DECIR SI $\theta = \frac{\pi}{2}$ Ó $\theta = \frac{3\pi}{2}$, Ó SI: $1 + \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{sen}\varphi$. VEAMOS QUE OCURRE CON LA EC (1) PARA CADA UNO DE ESTOS TRES CASOS:

→ SI $\theta = \frac{\pi}{2}$ SE CUMPLE (2), LLEVANDO $\theta = \frac{\pi}{2}$ A (1) QUEDA: $\cos\varphi \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sen}\varphi\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 0 \nearrow \begin{cases} \varphi = \pi/2 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{cases} \\ \text{ó} \\ \operatorname{sen}\varphi = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

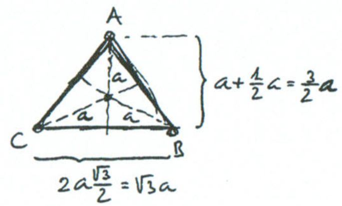
LUEGO YA SE TIENEN UNAS POSIC. DE EQ: $(\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

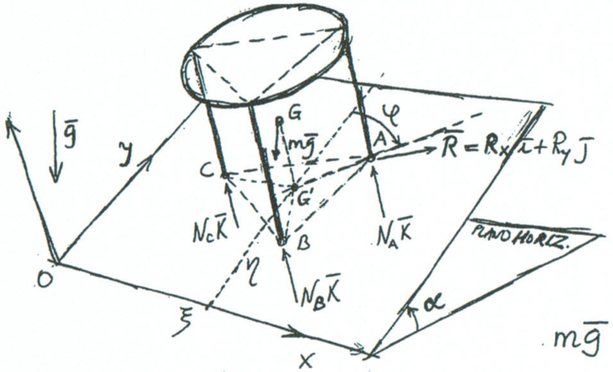
→ SI $\theta = \frac{3\pi}{2}$ SE CUMPLE (2), LLEVANDO $\theta = \frac{3\pi}{2}$ A (1) QUEDA: .... (SE HACE COMO ANTES...)

→ SI $1 + \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{sen}\varphi$ SE CUMPLE (2); SUSTITUYENDO $1 + \operatorname{sen}\theta$ POR $\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{sen}\varphi$ EN LA EC (1), ESTA QUEDA COMO SIGUE: $\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi = 0$. LOS VALORES DE φ QUE LA CUMPLEN SON: $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2}, \varphi = 0, \varphi = \pi$ CON CADA UNO DE ESTOS VALORES DE φ SE VUELVE A LA EXPRESION DE PARTIDA: $1 + \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{sen}\varphi$ PARA OBTENER θ. ASI PARA $\varphi = \frac{\pi}{2}$, LA EXPRESION ANTERIOR QUEDA: $1 + \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}$, ES DECIR: $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4}$ Y POR TANTO $\theta = \arcsen\left(-\frac{1}{4}\right)$, (HAY DOS SOLUCIONES ).

Y ASI SE SIGUEN BUSCANDO POSICIONES DE EQUILIBRIO...

60





$|\overline{GG'}| = \lambda a$

$m\bar{g} = -mg\,\text{sen}\,\alpha\,\bar{J} - mg\cos\alpha\,\bar{K}$

→ COORD. GEN. : ξ, η, φ

→ INCOGNITAS DEBIDAS AL CONTACTO DE LAS PATAS CON EL PLANO Oxy:

N_A, N_B, N_C, R_x, R_y

EL SISTEMA ES UN SOLIDO ⇒ HAY 6 ECS INDEP. DE LA ESTATICA EN LAS QUE INTERVIENEN LINEALMENTE LAS 5 INCOG: N_A, N_B, N_C, R_x Y R_y. EN ESTE CASO SOLO HAY UNA COMBINACION LINEAL DE LAS 6 ECS DE LA ESTATICA DONDE SOLO INTERVIENEN LAS COORD. GEN. Y ES:

$$\boxed{\sum \bar{M}_A^{F_{EXT}} \cdot \bar{K} = 0}$$

LAS 5 ECS. RESTANTES SON 5 ECS DE LAS QUE SE PUEDEN OBTENER : N_A, N_B, N_C, R_x y R_y.

$$\sum \bar{M}_A^{F_{EXT}} \cdot \bar{K} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overline{AB}\wedge N_B\bar{K} + \overline{AC}\wedge N_C\bar{K} + \overline{AG}\wedge\left(-mg\cos\alpha\,\bar{K} - mg\,\text{sen}\,\alpha\,\bar{J}\right)\right)\cdot\bar{K} = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{AG} = -a\cos\varphi\,\bar{J} - a\,\text{sen}\,\varphi\,\bar{\imath} + \lambda a\,\bar{K}$$

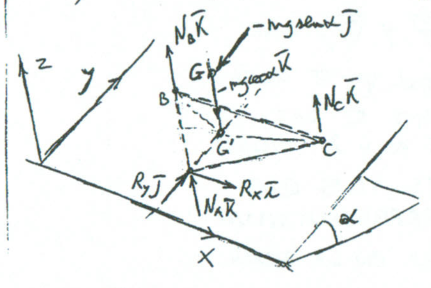
$$\Rightarrow \quad mga\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\varphi = 0$$

SI $\alpha \neq 0$ SE CUMPLE SI → $\boxed{\text{sen}\,\varphi = 0}$ → $\begin{cases}\varphi = 0\\ \text{ó}\\ \varphi = \pi\end{cases}$

SI EL COEF. DE ROZ. EN A FUESE ∞ Y EL CONTACTO BILATERAL ENTONCES CUALQUIER POSICION CON $\varphi = 0$ ó CON $\varphi = \pi$ SERIA POSIC. DE EQ. PERO CON EL COEF DE ROZ. FINITO DE VALOR f Y CONTACTO UNILATERAL EN LAS TRES PATAS, LAS POSICIONES CON $\varphi = 0$ O CON $\varphi = \pi$ SERAN DE EQ. SI CUMPLEN:

$$\begin{cases}\sqrt{R_x^2 + R_y^2} \leq f\,|N_A|\\ N_A \geq 0\\ N_B \geq 0\\ N_C \geq 0\end{cases}$$

*) DETERMINACION DE N_A, N_B, N_C, R_x Y R_y EN EL CASO $\boxed{\varphi = \pi}$:



$$\sum \bar{F}_{EXT} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 & (1)\\ R_y - mg\,\text{sen}\,\alpha = 0 & (2)\\ N_A + N_B + N_C - mg\cos\alpha = 0 & (3)\end{cases}$$

$$\sum \bar{M}_A^{EXT} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\imath} \Rightarrow \frac{3}{2}aN_C + \frac{3}{2}aN_B + mg\,\text{sen}\,\alpha\cdot\lambda\cdot a - mg\cos\alpha\,a = 0 & (4)\\ \bar{J} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a\,N_B - \frac{\sqrt{3}}{2}a\,N_C = 0 & (5)\\ \bar{K} \Rightarrow 0 = 0\end{cases}$$

ASI:

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0\\ R_y = mg\,\text{sen}\,\alpha\end{cases}$$

$$(3),(4),(5) \Rightarrow \begin{cases} N_A = \frac{mg}{3}\left(\cos\alpha + 2\lambda\,\text{sen}\,\alpha\right)\\ N_B = N_C = \frac{mg}{3}\left(\cos\alpha - \lambda\,\text{sen}\,\alpha\right)\end{cases}$$

ENTONCES LA CONDICION $N_A \geq 0$ QUEDA:

$$\cos\alpha + 2\lambda \,\text{sen}\,\alpha \geq 0$$

QUE SE CUMPLE SIEMPRE (SE SUPONE $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

LAS CONDICIONES $N_B \geq 0$ Y $N_C \geq 0$ QUEDAN:

$$\cos\alpha - \lambda \,\text{sen}\,\alpha \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda \leq \cot\alpha} \quad 6$$

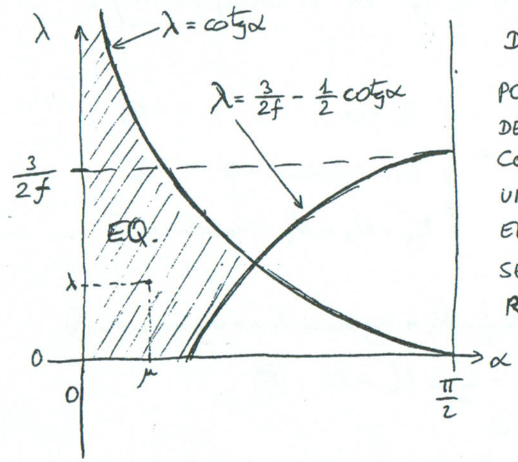
LA CONDICION $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} \leq f\,|N_A|$ QUEDA:

$$mg \,\text{sen}\,\alpha \leq f \frac{mg}{3} (\cos\alpha + 2\lambda \,\text{sen}\,\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \geq \frac{3}{2f} - \frac{1}{2}\cot\alpha} \quad 7$$

EN UN PLANO α,λ SE PUEDEN REPRESENTAR LAS CURVAS:

$$\lambda = \cot\alpha \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{3}{2f} - \frac{1}{2}\cot\alpha$$



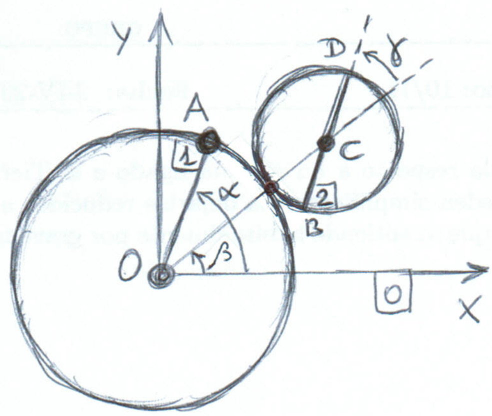
DEBIDO A 6 Y 7, LAS POSICIONES CON $\varphi = \pi$ SON DE EQUILIBRIO SI LAS CONSTANTES α Y λ TIENEN UNOS VALORES TALES QUE EL PUNTO REPRESENTATIVO SE ENCUENTRA EN LA ZONA RAYADA.

(CASO LIMITE DE VUELCO $\Rightarrow N_B = N_C = 0 \Rightarrow \lambda = \cot\alpha$

CASO LIMITE DE DESLIZAMIENTO $\Rightarrow \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = f\,|N_A| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3}{2f} - \frac{1}{2}\cot\alpha \text{)}$$

63



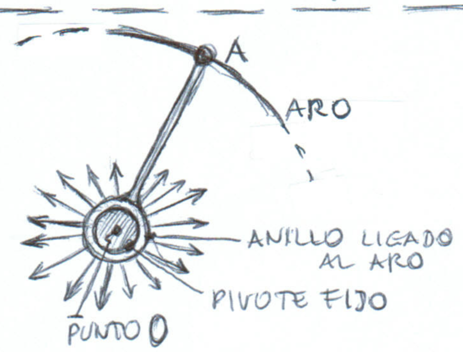
PARA LA RESOLUCION DEL PROBLEMA SE CONSIDERARAN LOS SIGUIENTES PUNTOS.

- COORDENADAS GENERALIZADAS: EL SISTEMA ESTA FORMADO POR DOS SOLIDOS PLANOS CONTENIDOS EN UN PLANO. DEBIDO A LAS LIGADURAS GEOMETRICAS:
  - EL CENTRO DEL ARO $\boxed{1}$ ESTA FIJO.
  - EL DISCO $\boxed{2}$ Y EL ARO $\boxed{1}$ ESTAN EN CONTACTO TANGENTE.

SOLO SON NECESARIAS Y SUFICIENTES TRES COORDENADAS GENERALIZADAS PARA DEFINIR LA POSICION DEL SISTEMA: LOS ANGULOS α, β Y γ DEFINIDOS EN EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA Y REPRESENTADOS EN LA FIGURA.

- INCOGNITAS DEBIDAS A LOS CONTACTOS:

EL ARO ESTA EN CONTACTO CON EL EXTERIOR MEDIANTE UNA ARTICULACION PLANA, PARA QUE EL CENTRO DEL ARO COINCIDA SIEMPRE



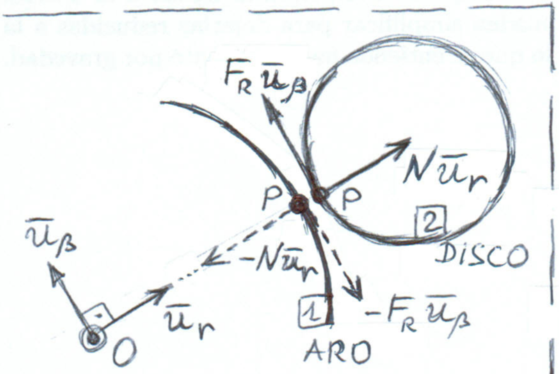
CON EL ORIGEN O DEL SISTEMA Oxy: UN ANILLO CIRCULAR LIGADO AL ARO RODEA UN PIVOTE CIRCULAR FIJO (DE IGUAL RADIO QUE EL ANILLO). EN CADA PUNTO DEL ANILLO, EL PIVOTE EJERCE UNA FUERZA INCOGNITA PERPENDICULAR AL ANILLO (POR LO TANTO, "PASARÁ" POR EL CENTRO DEL ANILLO). DE TODO ESTE SISTEMA DE FUERZAS DE CONTACTO, SOLO SE PODRA DETERMINAR (A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE LA ESTATICA) COMO MUCHO, LA RESULTANTE Y EL MOMENTO. COMO TODAS LAS FUERZAS "PASAN" POR EL CENTRO DEL ANILLO (PUNTO O), RESULTA QUE EL MOMENTO TOTAL RESPECTO AL PUNTO O ES CERO. POR OTRA PARTE, COMO LAS FUERZAS TIENEN COMPONENTES SEGUN LOS EJES Ox Y Oy, LA RESULTANTE $\bar{R}^{E/1}$, TENDRA COMPONENTES SEGUN ESTOS EJES; LLAMEMOS X E Y A SUS COMPONENTES SEGUN Ox Y Oy RESPECTIVAMENTE. EN DEFINITIVA, SE TIENE:

SISTEMA DE FUERZAS DE CONTACTO QUE EL EXTERIOR EJERCE SOBRE EL ARO
$$\left\{\begin{array}{l} \text{RESULTANTE} \equiv \bar{R}^{E/1} = X\,\bar{\imath} + Y\,\bar{\jmath} \\ \text{MOMENTO RESPECTO AL PUNTO O} \equiv \bar{M}_O^{E/1} = \bar{0} \end{array}\right.$$

LUEGO ESTE CONTACTO INTRODUCE DOS INCOGNITAS: X E Y. COMO EL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO O DE ESTE SISTEMA DE FUERZAS ES NULO, ESTE SISTEMA ES EQUIVALENTE A UNA UNICA

FUERZA, IGUAL A LA RESULTANTE $\overline{R}^{E/1} = X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath}$, APLICADA EN EL PUNTO O.

COMO LOS CONSTITUYENTES DEL SISTEMA MATERIAL, EL ARO $\boxed{1}$ Y EL DISCO $\boxed{2}$, ESTAN EN CONTACTO, EXISTIRÁ UNA FUERZA INCOGNITA ENTRE ELLOS EN EL PUNTO DE CONTACTO. AL SER EL CONTACTO CON ROZAMIENTO, LA FUERZA $\overline{R}^{1/2}$ QUE EL ARO $\boxed{1}$ EJERCE SOBRE EL DISCO $\boxed{2}$, TIENE DOS COMPONENTES INCOGNITAS: SEA N LA COMPONENTE SEGUN $\bar{u}_r$ ($\bar{u}_r = \overline{OP}/\|\overline{OP}\|$, DONDE P ES EL PUNTO DE CONTACTO) Y SEA F_R LA COMPONENTE SEGUN $\bar{u}_\beta$ ($\bar{u}_\beta$ ES PERPENDICULAR A $\bar{u}_r$; VEASE LA FIGURA). ES DECIR:



$$\overline{R}^{1/2} = N\bar{u}_r + F_R\,\bar{u}_\beta$$

LA REACCION $\overline{R}^{2/1}$ QUE EL DISCO $\boxed{2}$ EJERCE SOBRE EL ARO $\boxed{1}$, ES LA OPUESTA A LA QUE EL ARO EJERCE SOBRE EL DISCO. POR TANTO:

$$\overline{R}^{2/1} = -\overline{R}^{1/2} = -N\bar{u}_r - F_R\,\bar{u}_\beta$$

ASI PUES, EL CONTACTO ENTRE LOS DOS SOLIDOS QUE FORMAN EL SISTEMA INTRODUCE DOS INCOGNITAS: N Y F_R.

EN DEFINITIVA, LOS CONTACTOS DEL SISTEMA CON EL EXTERIOR Y ENTRE LAS PARTES QUE LO COMPONEN, INTRODUCEN CUATRO INCOGNITAS: X, Y, N Y F_R.

- FUERZAS DIRECTAMENTE APLICADAS:

LA MASA DEL ARO ESTA CONCENTRADA EN SU PUNTO A Y SOBRE ESTA MASA PUNTUAL ACTUA UNA ATRACCION DEL EJE Ox PROPORCIONAL A LA MASA Y A LA DISTANCIA A DICHO EJE. ENTONCES, LA EXPRESION DE ESTA FUERZA $\overline{F}^A$, ES:

$$\overline{F}^A = -kmy^A\bar{\jmath}$$

COMO, EN FUNCION DE LAS COORDENADAS GENERALIZADAS, SE TIENE: $y^A = R\,\mathrm{sen}\,\alpha$, RESULTA FINALMENTE:

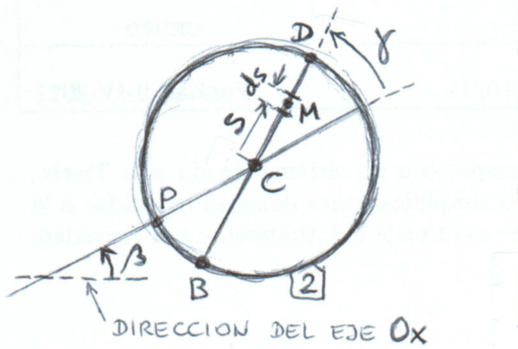
$$\overline{F}^A = -kmR\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\bar{\jmath}$$

ASIMISMO, SOBRE CADA DIFERENCIAL DE MASA dm DEL DISCO ACTUA TAMBIEN LA ATRACCION DEL EJE Ox; LA EXPRESION DE LA FUERZA DE ATRACCION $\overline{F}^{dm}_{AT}$ QUE ACTUA SOBRE EL DIFERENCIAL DE MASA GENERICO DEL DISCO, ES:

$$\overline{F}^{dm}_{AT} = -k\,y\,dm\,\bar{\jmath}$$

COMO LA MASA DEL DISCO ESTA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE SOLO EN SU DIAMETRO BD, VAMOS A INTRODUCIR UNA COORDE

NADA s EN ESTE DIAMETRO (VEASE LA FIGURA), QUE ES LA DISTANCIA (CON SIGNO) DE LOS PUNTOS DEL DIAMETRO AL CENTRO C: s ES POSITIVA DESDE C HASTA D, ES NEGATIVA DESDE C HASTA B. ENTONCES, PARA LA DIFERENCIAL DE MASA dm QUE OCUPA UNA LONGITUD ds Y CUYO PUNTO MEDIO M TIENE UNA COORDENADA s, SE TIENE:



$$dm = \frac{6m}{R}\, ds$$

$$y = \overline{OM}\cdot \bar{J} = (\overline{OC}+\overline{CM})\cdot\bar{J} = \left(R+\frac{R}{2}\right)\operatorname{sen}\beta + s\operatorname{sen}(\gamma+\beta)$$

Y POR TANTO:

$$\bar{F}_{AT}^{dm} = -k\frac{6m}{R}\left[\frac{3R}{2}\operatorname{sen}\beta + s\operatorname{sen}(\gamma+\beta)\right] ds\,\bar{J}$$

PARA EL MOMENTO ${}^{dm}\bar{M}_C^{AT}$ RESPECTO AL PUNTO C DE LA FUERZA $\bar{F}_{AT}^{dm}$ QUE ACTUA EN EL PUNTO GENERICO M, SE TIENE:

$${}^{dm}\bar{M}_C^{AT} = \overline{CM}\wedge\bar{F}_{AT}^{dm} = [s\cos(\gamma+\beta)\,\bar{\imath} + s\operatorname{sen}(\gamma+\beta)\bar{J}]\wedge\bar{F}_{AT}^{dm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^{dm}\bar{M}_C^{AT} = -k\frac{6m}{R}\left[\frac{3R}{2}\operatorname{sen}\beta + s\operatorname{sen}(\gamma+\beta)\right] s\cos(\gamma+\beta)\, ds\,\bar{K}$$

INTEGRANDO LAS DOS EXPRESIONES ANTERIORES RESPECTO A LA VARIABLE s (DESDE $s=-R/2$ HASTA $s=R/2$), SE DETERMINAN LA RESULTANTE $\bar{F}_{AT}$ Y EL MOMENTO TOTAL $\bar{M}_C^{AT}$ RESPECTO AL PUNTO C, DEL SISTEMA DE FUERZAS DE ATRACCION QUE ACTUA SOBRE EL DISCO:

$$\bar{F}_{AT} = \int \bar{F}_{AT}^{dm} = -k\left(\int y\, dm\right)\bar{J} = -k\,6m\,y^c\bar{J} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{AT} = -k\,6m\,\frac{3R}{2}\operatorname{sen}\beta\,\bar{J}$$

$$\bar{M}_C^{AT} = \int {}^{dm}\bar{M}_C^{AT} = -k\frac{6m}{R}\left[\frac{3R}{2}\operatorname{sen}\beta\cos(\gamma+\beta)\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} s\, ds + \operatorname{sen}(\gamma+\beta)\cos(\gamma+\beta)\int_{-R/2}^{R/2} s^2 ds\right]\bar{K}$$

$$\Rightarrow \bar{M}_C^{AT} = -k\frac{mR^2}{2}\operatorname{sen}(\gamma+\beta)\cos(\gamma+\beta)\,\bar{K}$$

CON LA RESULTANTE $\bar{F}_{AT}$ Y EL MOMENTO $\bar{M}_C^{AT}$ RESPECTO AL PUNTO C, YA SE PUEDE HALLAR EL MOMENTO RESPECTO A CUALQUIER OTRO PUNTO, UTILIZANDO LA EXPRESION DEL CAMPO DE MOMENTOS. POR EJEMPLO, EL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO P (PUNTO DE CONTACTO ENTRE EL DISCO Y EL ARO), ES:

$$\bar{M}_P^{AT} = \bar{M}_C^{AT} + \bar{F}_{AT}\wedge\overline{CP} =$$

$$= -k\frac{mR^2}{2}\operatorname{sen}(\gamma+\beta)\cos(\gamma+\beta) + (-9kmR\operatorname{sen}\beta\,\bar{J})\wedge\left(-\frac{R}{2}\cos\beta\,\bar{\imath} - \frac{R}{2}\operatorname{sen}\beta\,\bar{J}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{M}_P^{AT} = -k\frac{mR^2}{2}\left[\operatorname{sen}(\gamma+\beta)\cos(\gamma+\beta) + 9\operatorname{sen}\beta\cos\beta\right]\bar{K}$$

- ECUACIONES DE LA ESTATICA:

COMO EL SISTEMA ESTA FORMADO POR DOS SOLIDOS PLANOS CONTENIDOS EN EL PLANO Oxy, Y LAS FUERZAS QUE ACTUAN ESTAN EN DICHO PLANO, HAY TRES ECUACIONES DE LA ESTATICA NO TRIVIALES E INDEPENDIENTES PARA CADA SOLIDO; POR LO TANTO, EN ESTE CASO HAY SEIS ECUACIONES DE LA ESTATICA INDEPENDIENTES.

SE PUEDEN PLANTEAR DIRECTAMENTE LAS TRES ECUACIONES DE LA ESTATICA PARA CADA UNO DE LOS SOLIDOS O TAMBIEN COMBINACIONES DE ELLAS. POR EJEMPLO, SE PUEDEN PLANTEAR LAS TRES ECUACIONES DE LA ESTATICA PARA UNO DE LOS SOLIDOS Y LAS TRES ECUACIONES DE LA ESTATICA PARA EL SISTEMA COMPLETO (ESTAS ULTIMAS COINCIDEN CON LA SUMA DE LAS ECUACIONES DE LA ESTATICA DE CADA SOLIDO).

EN LAS ECUACIONES DE LA ESTATICA INTERVIENEN LINEALMENTE LAS CUATRO INCOGNITAS DEBIDAS A LOS CONTACTOS DEL SISTEMA: X, Y, N Y F_R. COMO EL CONTACTO ENTRE EL DISCO Y EL ARO ES BILATERAL, SI EL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO f ENTRE SUS SUPERFICIES FUERA INFINITO, ENTONCES NO HABRIA RESTRICCIONES A LOS VALORES DE LAS CUATRO INCOGNITAS ANTERIORES Y POR TANTO, LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA VENDRIAN DADAS POR TODAS LAS COMBINACIONES LINEALES QUE SE PUEDEN OBTENER DE LAS SEIS ECUACIONES DE LA ESTATICA Y EN LAS QUE SOLO INTERVENGAN COMO INCOGNITAS LAS COORDENADAS GENERALIZADAS, ES DECIR, EN LAS QUE NO INTERVENGAN LAS INCOGNITAS DEBIDAS A LOS CONTACTOS: X, Y, N Y F_R.

EN ESTE CASO SE PUEDEN PLANTEAR DIRECTAMENTE DOS ECUACIONES DE LA ESTATICA EN LAS CUALES NO INTERVIENEN NINGUNA DE LAS CUATRO INCOGNITAS ANTERIORES. ESTO ES DEBIDO A LO SIGUIENTE:

→ SOBRE EL DISCO $\boxed{2}$ ACTUA LA FUERZA INCOGNITA EJERCIDA POR EL ARO $\boxed{1}$: $\overline{R}^{1/2} = N\overline{u}_r + F_R\overline{u}_\theta$, APLICADA EN EL PUNTO P DE CONTACTO ENTRE AMBOS SOLIDOS. POR TANTO, EN LA ECUACION DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS RESPECTO AL PUNTO P APLICADA AL DISCO, NO VAN A APARECER NI N NI F_R, SOLO VAN A INTERVENIR COMO INCOGNITAS LAS COORDENADAS GENERALIZADAS.

SOBRE EL DISCO, ADEMAS DE LA FUERZA $\overline{R}^{1/2}$ APLICADA EN EL PUNTO P, ACTUA EL SISTEMA DE FUERZAS DE ATRACCION DEL EJE Ox. POR TANTO, LA ECUACION DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS RESPECTO AL PUNTO P, PARA EL DISCO, ES:

$$\cancelto{\overline{0}}{\overline{PP}} \wedge \overline{R}^{1/2} + \overline{M}_P^{AT} = \overline{0}$$

EL MOMENTO $\overline{M}_P^{AT}$ RESPECTO AL PUNTO P DEL SISTEMA DE FUERZAS DE ATRACCION YA SE DETERMINO ANTERIORMENTE; LLEVANDO SU EXPRESION A LA ANTERIOR ECUACION, ESTA QUEDA COMO SIGUE:

$$-k\frac{mR^2}{2}\left[sen(\gamma+\beta)\cos(\gamma+\beta) + 9\,sen\beta\cos\beta\right] = 0$$

Y SIMPLIFICANDO (TENIENDO EN CUENTA QUE: $2\,\mathrm{sen}\,X\cos X = \mathrm{sen}\,2X$), RESULTA FINALMENTE:

$$\mathrm{sen}\,2(\gamma+\beta) + 9\,\mathrm{sen}\,2\beta = 0 \qquad (1)$$

→ SOBRE EL SISTEMA COMPLETO (DISCO + ARO), ES NULO EL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO O DEL SISTEMA DE REACCIONES INCOGNITA DE CONTACTO QUE EL EXTERIOR EJERCE SOBRE EL ARO ($\overline{M}_0^{E/1} = \overline{0}$). POR TANTO, EN LA ECUACION DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS RESPECTO AL PUNTO O APLICADA AL SISTEMA COMPLETO, SOLO VAN A APARECER LAS COORDENADAS GENERALIZADAS COMO INCOGNITAS (ES DECIR, NO VAN A APARECER X, Y, N O F_R).

SOBRE EL SISTEMA COMPLETO, ADEMAS DEL CITADO SISTEMA DE FUERZAS DE CONTACTO EJERCIDAS POR EL EXTERIOR, ACTUA LA FUERZA $\overline{F}^A$ APLICADA EN EL PUNTO A DEL ARO, Y SOBRE EL DISCO ACTUA EL SISTEMA DE FUERZAS DE ATRACCION DEL EJE Ox (CON RESULTANTE $\overline{F}_{AT}$ Y MOMENTO $\overline{M}_C^{AT}$ RESPECTO AL PUNTO C).

POR TANTO, LA ECUACION DE EQUILIBRIO DE MOMENTOS RESPECTO AL PUNTO O, PARA EL SISTEMA COMPLETO, ES:

$$\cancel{\overline{M}_0^{E/1}}^{\,\overline{0}} + \overline{OA}\wedge\overline{F}^A + \overline{M}_0^{AT} = \overline{0}$$

APLICANDO EL CAMPO DE MOMENTOS ($\overline{M}_0^{AT} = \overline{M}_C^{AT} + \overline{F}_{AT}\wedge\overline{CO}$), RECORDANDO LAS EXPRESIONES DE $\overline{F}^A$, $\overline{F}_{AT}$ Y $\overline{M}_C^{AT}$ Y TENIENDO EN CUENTA QUE: $\overline{OA} = R(\cos\alpha\,\overline{I} + \mathrm{sen}\,\alpha\,\overline{J})$ Y $\overline{CO} = -(3R/2)(\cos\beta\,\overline{I} + \mathrm{sen}\,\beta\,\overline{J})$, AL OPERAR, LA ANTERIOR ECUACION QUEDA COMO SIGUE:

$$-kmR\,\mathrm{sen}\,\alpha\,R\cos\alpha - \frac{mR^2}{2}k\,\mathrm{sen}(\gamma+\beta)\cos(\gamma+\beta) - \frac{3R}{2}\cos\beta\,k6m\frac{3R}{2}\mathrm{sen}\,\beta = 0$$

SIMPLIFICANDO (Y TENIENDO EN CUENTA QUE: $2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}\,2x$), LA ANTERIOR ECUACION QUEDA COMO SIGUE:

$$2\,\mathrm{sen}\,2\alpha + \mathrm{sen}\,2(\gamma+\beta) + 27\,\mathrm{sen}\,2\beta = 0 \qquad (2)$$

HASTA AHORA SE HAN PLANTEADO DOS ECUACIONES DE LA ESTATICA EN LAS CUALES SOLO INTERVIENEN COMO INCOGNITAS LAS COORDENADAS GENERALIZADAS: ECUACIONES (1) Y (2). SE PUEDE COMPROBAR QUE EN LAS CUATRO ECUACIONES DE LA ESTATICA (INDEPENDIENTES DE LAS DOS ANTERIORES) QUE QUEDAN POR PLANTEAR, VAN A INTERVENIR LAS INCOGNITAS DEBIDAS A LOS CONTACTOS (X, Y, N Y F_R) Y NO EXISTE NINGUNA COMBINACION LINEAL DE ELLAS EN LAS CUALES SOLO APAREZCAN COMO INCOGNITAS LAS COORDENADAS GENERALIZADAS. PARA VER ESTO, SE PLANTEARAN LAS DOS ECUACIONES VECTORIALES SIGUIENTES:

→ ECUACION DE EQUILIBRIO DE FUERZAS PARA EL SISTEMA COMPLETO.

LAS FUERZAS EXTERIORES QUE ACTUAN SOBRE EL SISTEMA COMPLETO SON: LAS REACCIONES INCOGNITA DE CONTACTO SOBRE EL ARO (CON RESULTANTE $\overline{R}^{E/1} = X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath}$), LA ATRACCION $\overline{F}^A$ SOBRE LA MASA PUNTUAL DEL ARO Y LA ATRACCION SOBRE EL DISCO (CON RESULTANTE $\overline{F}_{AT}$). LUEGO ESTA ECUACION ES:

$$\overline{R}^{E/1} + \overline{F}^A + \overline{F}_{AT} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath} - kmR\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\bar{\jmath} - k9mR\,\mathrm{sen}\,\beta\,\bar{\jmath} = \overline{0}$$

DE DONDE SE OBTIENE:

$$X = 0 \quad ③$$
$$Y = kmR(\mathrm{sen}\,\alpha + 9\,\mathrm{sen}\,\beta) \quad ④$$

- ECUACION DE EQUILIBRIO DE FUERZAS PARA EL DISCO.

LAS FUERZAS EXTERIORES AL DISCO QUE ACTUAN SOBRE EL, SON: LA REACCION INCOGNITA DE CONTACTO EJERCIDA POR EL ARO: $\overline{R}^{1/2} = F_R\overline{u}_\beta + N\overline{u}_r$, LA ATRACCION DEL EJE Ox (CON RESULTANTE $\overline{F}_{AT}$). LUEGO ESTA ECUACION ES:

$$\overline{R}^{1/2} + \overline{F}_{AT} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\overline{u}_r + F_R\overline{u}_\beta - k9mR\,\mathrm{sen}\,\beta\,\bar{\jmath} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\overline{u}_r + F_R\overline{u}_\beta - k9mR\,\mathrm{sen}\,\beta(\mathrm{sen}\,\beta\,\overline{u}_r + \cos\beta\,\overline{u}_\beta) = \overline{0}$$

DE DONDE SE OBTIENE:

$$N = k9mR\,\mathrm{sen}^2\beta \quad ⑤$$
$$F_R = k9mR\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta \quad ⑥$$

ENTONCES, LAS ECUACIONES ③, ④, ⑤ Y ⑥, SON CUATRO ECUACIONES DE LA ESTATICA, EN CADA UNA DE LAS CUALES SOLO APARECE UNA DE LAS CUATRO INCOGNITAS DE CONTACTO; POR LO TANTO, CUALQUIER COMBINACION LINEAL ENTRE ELLAS DARA UNA ECUACION EN LA CUAL APARECERAN MAS DE UNA DE DICHAS INCOGNITAS (POR EJEMPLO, CUALQUIER COMBINACION LINEAL DE LAS ECUACIONES ⑤ Y ⑥, SERA UNA ECUACION EN LA QUE APARECERAN EVIDENTEMENTE N Y F_R). ES DECIR, NO ES POSIBLE OBTENER, A PARTIR DE LAS ECUACIONES ③, ④, ⑤ Y ⑥, COMBINACIONES LINEALES DONDE NO APAREZCAN NINGUNA DE LAS INCOGNITAS X, Y, N Ó F_R. POR LO TANTO, EN EL CASO DE NO EXISTIR RESTRICCIONES A LOS VALORES DE ESTAS CUATRO INCOGNITAS, LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA ESTAN DADAS POR LOS VALORES DE LAS COORDENADAS GENERALIZADAS QUE CUMPLAN LAS ECUACIONES ① Y ②:

$$\mathrm{sen}\,2(\gamma+\beta) + 9\,\mathrm{sen}\,2\beta = 0 \quad ①$$

$$2\,\mathrm{sen}\,2\alpha + \mathrm{sen}\,2(\gamma+\beta) + 27\,\mathrm{sen}\,2\beta = 0 \quad ②$$

AHORA BIEN, SI EL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO f ENTRE EL ARO Y EL DISCO ES FINITO, EXISTE UNA RESTRICCION AL VALOR DEL MODULO DE LA COMPONENTE TANGENTE DE LA REACCION DE CONTACTO:

$$\|F_R \bar{u}_\beta\| \leq f \|N \bar{u}_r\| \implies |F_R| \leq f|N|$$

TENIENDO EN CUENTA LAS ECUACIONES ⑤ Y ⑥, LA ANTERIOR INECUACION QUEDA, EN FUNCION DE LAS COORDENADAS GENERALIZADAS, COMO SIGUE:

$$9kmR|\operatorname{sen}\beta\cos\beta| \leq f\, 9kmR \operatorname{sen}^2\beta \implies$$

$$\implies |\operatorname{cotg}\beta| \leq f \qquad ⑦$$

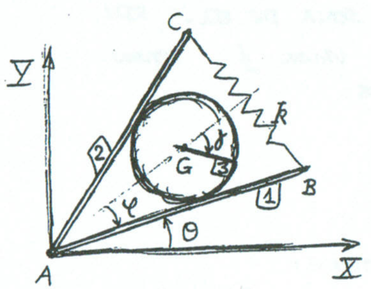
ENTONCES, EN EL CASO DE QUE EL CONTACTO ENTRE EL ARO Y EL DISCO SEA CON ROZAMIENTO DE COEFICIENTE f, LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA VENDRAN DADAS POR LOS VALORES DE LAS COORDENADAS GENERALIZADAS QUE CUMPLAN LAS ECUACIONES ① Y ②, Y LA INECUACION ⑦:

$$\operatorname{sen}2(\gamma+\beta) + 9\operatorname{sen}2\beta = 0 \qquad ①$$

$$2\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}2(\gamma+\beta) + 27\operatorname{sen}2\beta = 0 \qquad ②$$

$$|\operatorname{cotg}\beta| \leq f \qquad ⑦$$

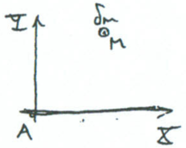
61



COORD. GEN: φ, θ, γ

HAY $3 \times 3 = 9$ ECS DE LA ESTATICA INDEP.

SISTEMA DE FUERZAS DE ATRACCION DEL PTO A SOBRE LAS MASAS DEL DISCO $\boxed{3}$:



$\overline{F}^{\delta m} = -K\,\overline{AM}\,\delta m \qquad \left(K = \frac{4k}{m}\right)$

*) RESULTANTE $\equiv \overline{F}_{AT}$:

$$\overline{F}_{AT} = \int \overline{F}^{\delta m} = -\int \frac{4k}{m}\,\overline{AM}\,\delta m = -\frac{4k}{m}\int \overline{AM}\,\delta m$$

$$\overline{F}_{AT} = -\frac{4k}{m}\,m\,\overline{AG} \rightarrow \boxed{\overline{F}_{AT} = -4k\,\overline{AG}}$$

*) MOMENTO RESPECTO AL PTO A:

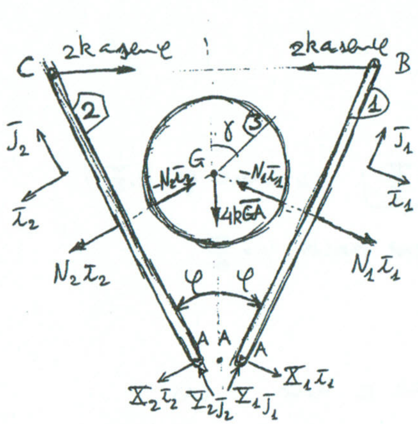
$$\overline{\mathcal{M}}_A^{AT} = \overline{0}$$

LUEGO EL MOMENTO RESPECTO AL PTO G SERA:

$$\overline{\mathcal{M}}_G^{AT} = \underbrace{\overline{\mathcal{M}}_A^{AT}}_{\overline{0}} + \overline{F}_{AT} \wedge \overline{AG} = -4k\,\overline{AG} \wedge \overline{AG} = \overline{0}$$

→ CASO:

CONTACTO <u>SIN</u> ROZAMIENTO ENTRE EL DISCO Y LAS VARILLAS



$|\overline{GA}| = \frac{a}{4\,sen\varphi}$

INCOGNITAS DEBIDAS A LOS CONTACTOS DE LAS VARILLAS CON EL EXTERIOR (ARTICULACION EN EL PTO A) Y DEL DISCO CON LAS VARILLAS:

$X_1, X_2, Y_1, Y_2, N_1, N_2$

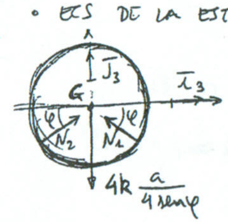
• ECS DE LA ESTATICA PARA EL SOLIDO $\boxed{1}$:

$$\Sigma\overline{M}_A^{Fext} = \overline{0} \Rightarrow 2ka\,sen\varphi\,a\cos\varphi - N_1\frac{a}{4\,tg\varphi} = 0 \quad (1)$$
$$\left(\Sigma\overline{F}_{EXT}\right)\cdot\overline{\imath}_1 = 0 \Rightarrow N_1 + X_1 - 2ka\,sen\varphi\cos\varphi = 0 \quad (2)$$
$$\left(\Sigma\overline{F}_{EXT}\right)\cdot\overline{J}_1 = 0 \Rightarrow Y_1 - 2ka\,sen^2\varphi = 0 \quad (3)$$

• ECS DE LA ESTATICA PARA EL SOLIDO $\boxed{2}$:

$$\Sigma\overline{M}_A^{Fext} = \overline{0} \Rightarrow 2ka\,sen\varphi\,a\cos\varphi - N_2\frac{a}{4\,tg\varphi} = 0 \quad (4)$$
$$\left(\Sigma\overline{F}_{EXT}\right)\cdot\overline{\imath}_2 = 0 \Rightarrow N_2 + X_2 - 2ka\,sen\varphi\cos\varphi = 0 \quad (5)$$
$$\left(\Sigma\overline{F}_{EXT}\right)\cdot\overline{J}_2 = 0 \Rightarrow Y_2 - 2ka\,sen^2\varphi = 0 \quad (6)$$

• ECS DE LA ESTATICA PARA EL SOLIDO $\boxed{3}$:



$$\Sigma\overline{M}_G^{Fext} = \overline{0} \Rightarrow 0 = 0 \quad (7)$$
$$\left(\Sigma\overline{F}_{EXT}\right)\cdot\overline{\imath}_3 = 0 \Rightarrow N_2\cos\varphi - N_1\cos\varphi = 0 \quad (8)$$
$$\left(\Sigma\overline{F}_{EXT}\right)\cdot\overline{J}_3 = 0 \Rightarrow N_1\,sen\varphi + N_2\,sen\varphi - \frac{ka}{sen\varphi} = 0 \quad (9)$$

LAS ECS (1),(2),(3),(4),(5) Y (6) SON 6 ECS LINEALES RESPECTO A LAS 6 INCOGNITAS X_1, X_2, Y_1, Y_2, N_1 Y N_2. POR TANTO DE ESTAS 6 ECS SE PUEDEN DESPEJAR ESTAS 6 INCOG EN FUNCION DE LAS COORD. GEN., QUE LLEVADAS A (7),(8) Y (9) DARIAN 3 ECS DONDE SOLO INTERVIENEN LAS COORD GEN, SIENDO POR TANTO 3 ECS QUE DARIAN LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO. SIN EMBARGO LA EC (7) ES UNA IDENTIDAD (0=0); COMO DE (1) Y DE (4) SE OBTIENE $N_1 = N_2$, LA ECUACION (8) QUEDA OTRA IDENTIDAD (0=0); SÓLO

A PARTIR DE LA EC 9 SE OBTIENE UNA EC NO TRIVIAL EN FUNCION DE LAS COORD GEN. QUEDANDO:

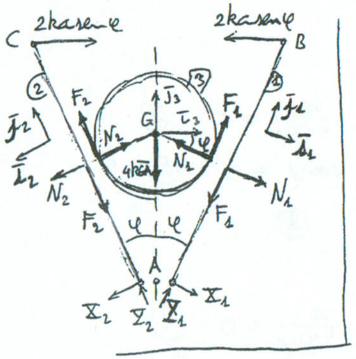
$$16\,ka\,\text{sen}^3\varphi - \frac{ka}{\text{sen}\varphi} = 0$$

DE DONDE SE OBTIENE $\text{sen}\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{6}}$ (SE SUPONE $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

LUEGO SON POSIC DE EQ TODAS AQUELLAS EN LAS CUALES $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

→ CASO:

CONTACTO CON ROZAMIENTO DE COEF f ENTRE EL DISCO Y LAS VARILLAS.



ECS ESTATICA PARA SOLIDO 1:

$$\sum \overline{M}_A^{EXT} = \overline{0} \Rightarrow 2ka\,\text{sen}\varphi\, a\cos\varphi - N_1 \frac{a}{4\,\text{tg}\varphi} = 0 \quad \boxed{1}$$

$$\left(\sum \overline{F}_{EXT}\right)\cdot \bar{I}_1 = 0 \Rightarrow N_1 + X_1 - 2ka\,\text{sen}\varphi\cos\varphi = 0 \quad \boxed{2}$$

$$\left(\sum \overline{F}_{EXT}\right)\cdot \bar{J}_1 = 0 \Rightarrow Y_1 - F_1 - 2ka\,\text{sen}^2\varphi = 0 \quad \boxed{3}$$

ECS ESTATICA PARA SOLIDO 2:

$$\sum \overline{M}_A^{EXT} = \overline{0} \Rightarrow 2ka\,\text{sen}\varphi\, a\cos\varphi - N_2 \frac{a}{4\,\text{tg}\varphi} = 0 \quad \boxed{4}$$

$$\left(\sum \overline{F}_{EXT}\right)\cdot \bar{I}_2 = 0 \Rightarrow N_2 + X_2 - 2ka\,\text{sen}\varphi\cos\varphi = 0 \quad \boxed{5}$$

$$\left(\sum \overline{F}_{EXT}\right)\cdot \bar{J}_2 = 0 \Rightarrow Y_2 - F_2 - 2ka\,\text{sen}^2\varphi = 0 \quad \boxed{6}$$

ECS ESTATICA PARA SOLIDO 3:

$$\sum \overline{M}_G^{EXT} = \overline{0} \Rightarrow \frac{a}{4}F_1 - \frac{a}{4}F_2 = 0 \quad \boxed{7}$$

$$\left(\sum \overline{F}_{EXT}\right)\cdot \bar{I}_3 = 0 \Rightarrow F_1\,\text{sen}\varphi - F_2\,\text{sen}\varphi + N_2\cos\varphi - N_1\cos\varphi = 0 \quad \boxed{8}$$

$$\left(\sum \overline{F}_{EXT}\right)\cdot \bar{J}_3 = 0 \Rightarrow -\frac{ka}{\text{sen}\varphi} + N_1\,\text{sen}\varphi + N_2\,\text{sen}\varphi + F_1\cos\varphi + F_2\cos\varphi = 0 \quad \boxed{9}$$

INCOG DEBIDAS A LOS CONTACTOS: $X_1, X_2, Y_1, Y_2, N_1, N_2, F_1$ Y F_2

LAS 8 ECS: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ Y $\boxed{9}$ PERMITEN OBTENER LAS 8 INCOG ANTERIORES EN FUNCION DE LAS COORD GEN. Y LLEVADAS ENTONCES A LA EC $\boxed{8}$ SERIA UNA EC. DONDE SOLO INTERVIENEN LAS COORD. GEN, Y SERIA LA EC. QUE DARIA LAS POSICIONES DE EQ SI NO EXISTIERA RESTRICCION AL VALOR QUE PUDIERAN TENER LAS INCOGNITAS, ES DECIR SI f FUERA ∞. SIN EMBARGO, DE $\boxed{1}$ Y $\boxed{4}$ RESULTA $N_1 = N_2$ Y DE $\boxed{7}$ RESULTA $F_1 = F_2$ Y POR TANTO LA EC. $\boxed{8}$ SE REDUCE A UNA IDENTIDAD $(0=0)$. ASI PUES SI f FUERA ∞, CUALQUIER POSIC. SERIA DE EQ. SIN EMBARGO CON EL COEF. DE ROZ FINITO DE VALOR f, SERAN POSICIONES DE EQ. AQUELLAS PARA LAS CUALES:

$$|F_1| \leq f\,|N_1|$$
$$|F_2| \leq f\,|N_2|$$

POR EL PROCESO DICHO ANTERIORMENTE SE OBTIENE:

$$N_1 = N_2 = 8\,ka\,\text{sen}^2\varphi$$

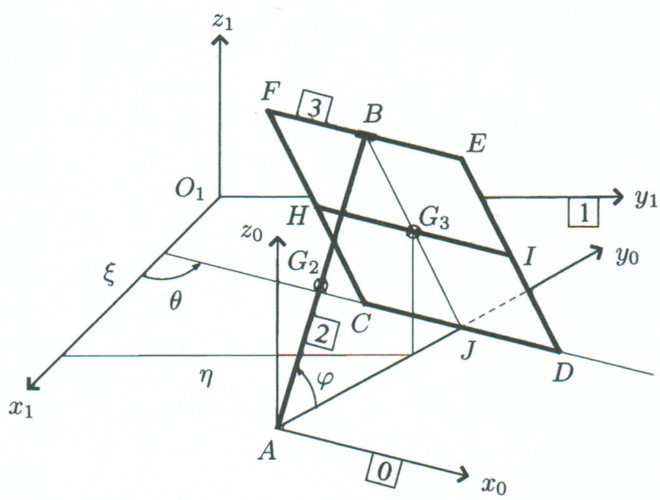
$$F_1 = F_2 = \frac{ka}{2\,\text{sen}\varphi\cos\varphi} - \frac{8\,ka\,\text{sen}^3\varphi}{\cos\varphi}$$

LUEGO LAS DOS INECUACIONES ANTERIORES QUEDAN:

$$\left| \frac{1}{2\,\text{sen}\varphi\cos\varphi} - 8\,\frac{\text{sen}^3\varphi}{\cos\varphi} \right| \leq f\; 8\,\text{sen}^2\varphi$$

ASI PUES, EN ESTE CASO CON ROZAMIENTO, SON POSICIONES DE EQ. TODAS AQUELLAS PARA LAS CUALES φ CUMPLA LA RELACION ANTERIOR.

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS		
APELLIDOS, NOMBRE:		EXP.Nº
Mecánica I - Problema de Estática	**Curso: 11/12**	**Fecha: 11.07.2012**



Sea $O_1x_1y_1z_1$ un sistema de referencia inercial tal que O_1z_1 es vertical ascendente. El sistema material de la figura está formado por dos sólidos: i) el sólido 2 es una varilla AB homogénea de masa m y longitud a; ii) el sólido 3 es una placa cuadrada $CDEF$ de lado a y tal que toda su masa m está distribuida de forma homogénea sólo en su línea media HI (que es paralela al lado CD y pasa por su centro G_3; véase la figura). La varilla está articulada por su extremo B en el punto medio del lado EF de la placa mediante un cojinete con restricción axial, de tal modo que la varilla siempre es perpendicular a dicho lado EF, alrededor del cual puede girar libremente. El sistema formado por los dos sólidos se apoya, con contacto unilateral, sobre el plano $O_1x_1y_1$; el contacto del extremo A de la varilla es con rozamiento de coeficiente f y el contacto del lado CD de la placa es sin rozamiento.

Además del peso, sobre cada diferencial de masa dm de la placa actúa una atracción del plano $O_1x_1z_1$ proporcional a la masa y a la distancia dicho plano, siendo por tanto la expresión de esta fuerza tal como sigue:

$$\bar{F}_{At}^{dm} = -\kappa\, dm\, y_1^{dm} \vec{\jmath}_1$$

donde κ es la constante de proporcionalidad.

Para definir la posición del sistema se utilizan las cuatro coordenadas generalizadas siguientes: ξ y η, coordenadas x_1 e y_1 del centro de masas G_3 de la placa; θ, ángulo definido entre el lado CD de la placa y el eje O_1x_1; φ, ángulo definido entre la varilla y el plano $O_1x_1y_1$ (es también el ángulo definido entre la placa y dicho plano $O_1x_1y_1$).

El sistema auxiliar $Ax_0y_0z_0$ es tal que Ax_0 es paralelo al lado CD de la placa y Az_0 es paralelo a O_1z_1 (Ay_0 corta al lado CD en su punto medio: punto J en la figura). En lo que sigue, será conveniente expresar los vectores mediante sus componentes según estos ejes.

Para la determinación de las posiciones de equilibrio del sistema, se pide:

1) Indicar qué componentes incógnitas no nulas pueden tener la resultante y el momento respecto al punto B del sistema de reacciones que la placa ejerce sobre la varilla debido a la articulación mediante el cojinete con restricción axial.

2) Indicar qué componentes incógnitas no nulas puede tener la reacción que el plano $O_1x_1y_1$ ejerce sobre el extremo A de la varilla.

3) Indicar que componentes incógnitas no nulas pueden tener la resultante y el momento respecto al punto J del sistema de reacciones que el plano $O_1x_1y_1$ ejerce sobre el lado CD de la placa. Determinar, en función de las incógnitas anteriores, el momento respecto al punto A de dicho ssitema de reacciones.

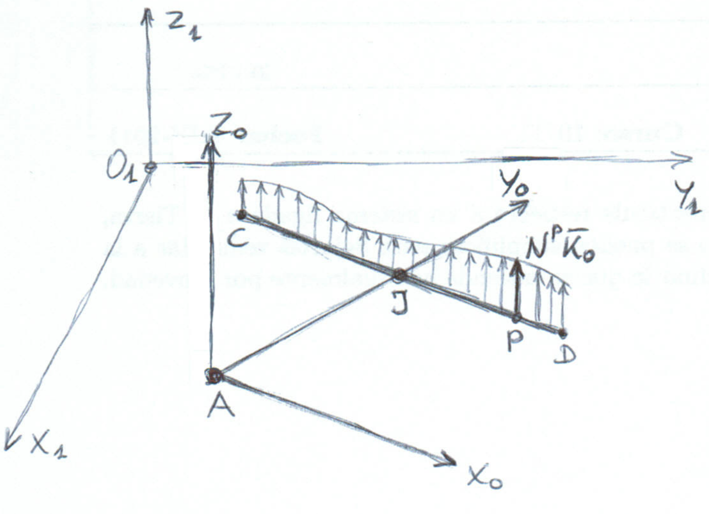
4) Determinar, en función de la coordenadas generalizadas, la resultante ($\bar{F}_{At}$) y el momento respecto al punto G_3 ($\bar{M}_{G_3}^{At}$) del sistema de fuerzas de atracción que el plano $O_1x_1z_1$ ejerce sobre la placa. Determinar el momento respecto al punto A ($\bar{M}_A^{At}$) de dicho sistema de fuerzas.

5) Plantear para el sistema completo (placa + varilla) la ecuación de equilibrio de fuerzas y la ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto A. Dejar expresadas estas ecuaciones en función de las coordenadas generalizadas y de las componentes incógnitas de los sistemas de reacciones de contacto.

6) Plantear para la varilla una ecuación (escalar) de la Estática donde no intervenga ninguna de las incógnitas de la pregunta 1).

7) Obtener, a partir de las ecuaciones de las preguntas 5) y 6), todas las combinaciones lineales en las cuales sólo aparezcan como incógnitas las coordenadas generalizadas. (Ayuda: hay dos).

8) Si el contacto del sistema con el plano $O_1x_1y_1$ fuera bilateral y el coeficiente de rozamiento en el punto A infinito, las ecuaciones pedidas en la pregunta anterior darían todas las posiciones de equilibrio. Ahora bien, con contacto unilateral y con coeficiente de rozamiento finito (de valor f) en el punto A, ¿qué inecuaciones hay que añadir a las ecuaciones pedidas en la pregunta 7) para determinar las posiciones de equilibrio del sistema? Dejar expresadas estas inecuaciones en función de las coordenadas generalizadas.



SEA P UN PUNTO GENERICO DEL LADO CD DE LA PLACA. SOBRE ESTE PUNTO ACTUA UNA FUERZA INCOGNITA $N^P\bar{K}_0$ EJERCIDA POR EL PLANO $O_1X_1Y_1$, PERPENDICULAR A ESTE (YA QUE EL CONTACTO ES SIN ROZAMIENTO). EL MOMENTO DE ESTA FUERZA RESPECTO AL PUNTO J (PUNTO MEDIO DE CD) ES, POR DEFINICION:

$$\overline{JP}\wedge N^P\bar{K}_0 = x_0^P\,\bar{\imath}_0\wedge N^P\bar{K}_0 = x_0^P N^P \bar{J}_0$$

(YA QUE $\overline{JP} = (x_0^P - x_0^J)\bar{\imath}_0 + (y_0^P - y_0^J)\bar{J}_0 + (z_0^P - z_0^J)\bar{K}_0 = x_0^P\,\bar{\imath}_0$, PUESTO QUE: $x_0^J = 0$, $y_0^P = y_0^J$, $z_0^P = z_0^J$). ENTONCES, COMO TODAS ESTAS REACCIONES INCOGNITA QUE EL PLANO $O_1X_1Y_1$ EJERCE SOBRE LOS PUNTOS DEL LADO CD TIENEN LA DIRECCION DE $\bar{K}_0$ Y SUS MOMENTOS RESPECTO AL PUNTO J TIENEN LA DIRECCION DE $\bar{J}_0$, SE TIENE QUE LA RESULTANTE $\bar{R}^{1/3}$ TENDRA SOLO UNA COMPONENTE INCOGNITA: LA COMPONENTE SEGUN $\bar{K}_0$, A LA QUE DENOMINAREMOS Z_3; ASIMISMO, EL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO J DEL SISTEMA DE REACCIONES DEL PLANO $O_1X_1Y_1$ SOBRE EL LADO CD, $\bar{M}_J^{1/3}$, SOLO TENDRA UNA COMPONENTE INCOGNITA: LA COMPONENTE SEGUN $\bar{J}_0$, A LA QUE DENOMINAREMOS M_J. ES DECIR:

$$\bar{R}^{1/3} = Z_3\bar{K}_0 \quad , \quad \bar{M}_J^{1/3} = M_J\bar{J}_0$$

SI EL CONTACTO DEL LADO CD SOBRE EL PLANO $O_1X_1Y_1$ ES "UNILATERAL", ENTONCES, LA REACCION $N^P\bar{K}_0$ QUE DICHO PLANO EJERCE SOBRE EL PUNTO GENERICO P DEL LADO CD, DEBE CUMPLIR LA CONDICION: $N^P \geq 0$. POR CONSIGUIENTE, LA COMPONENTE Z_3 DE LA RESULTANTE DEBERA CUMPLIR TAMBIEN LA CONDICION: $Z_3 \geq 0$ (PUES Z_3 ES LA SUMA DE TODAS LAS COMPONENTES DE LAS REACCIONES SOBRE CD). POR OTRA PARTE, PARA EL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO EXTREMO D DE LA REACCION $N^P\bar{K}_0$: $\overline{DP}\wedge N_P\bar{K}_0$, RESULTA QUE SU COMPONENTE SEGUN $\bar{J}_0$ ES POSITIVA YA QUE $\overline{DP}$ ES SEGUN $-\bar{\imath}_0$ (VEASE LA FIGURA) Y $N^P \geq 0$; COMO ESTO OCURRE PARA CUALQUIER PUNTO DE CD, SE TIENE QUE, CON CONTACTO UNILATERAL, EL MOMENTO TOTAL $\bar{M}_D^{1/3}$ RESPECTO DEL EXTREMO D DEL SISTEMA DE REACCIONES DE CONTACTO DEL PLANO $O_1X_1Y_1$ SOBRE CD, DEBE TENER COMPONENTE POSITIVA SEGUN $\bar{J}_0$, ES DECIR, SE DEBE CUMPLIR:

$$\bar{M}_D^{1/3}\cdot\bar{J}_0 \geq 0$$

ASIMISMO, PARA EL MOMENTO RESPECTO AL PUNTO EXTREMO C DE LA FUERZA $N^P\bar{K}_0$: $\overline{CP}\wedge N^P\bar{K}_0$, RESULTA QUE SU COMPONENTE SEGUN $\bar{J}_0$ ES NEGATIVA, YA QUE $\overline{CP}$ ES SEGUN $\bar{\imath}_0$ (VEASE LA FIGURA) Y $N^P \geq 0$; COMO ESTO OCURRE PARA CUALQUIER PUNTO DE CD, SE TIENE QUE, CON CONTACTO UNILATERAL, EL MOMENTO TOTAL $\bar{M}_C^{1/3}$ RESPECTO AL PUNTO C, DEBE TENER COMPONENTE NEGATIVA SEGUN $\bar{J}_0$, ES DECIR, SE DEBE CUMPLIR:

$$\bar{M}_C^{1/3}\cdot\bar{J}_0 \leq 0$$

EN DEFINITIVA, SI EL CONTACTO DE CD CON EL PLANO $O_1X_1Y_1$ ES UNILATERAL, SE DEBEN CUMPLIR LAS TRES RESTRICCIONES SIGUIENTES:

$$Z_3 \geq 0 \quad , \quad \bar{M}_D^{1/3}\cdot\bar{J}_0 \geq 0 \quad , \quad \bar{M}_C^{1/3}\cdot\bar{J}_0 \leq 0$$

($\bar{M}_D^{1/3}$ Y $\bar{M}_C^{1/3}$ SE DETERMINAN A PARTIR DE $\bar{R}^{1/3}$ Y $\bar{M}_J^{1/3}$, MEDIANTE LA EXPRESION DEL CAMPO DE MOMENTOS: $\bar{M}_D^{1/3} = \bar{M}_J^{1/3} + \bar{R}^{1/3}\wedge\overline{JD}$, $\bar{M}_C^{1/3} = \bar{M}_J^{1/3} + \bar{R}^{1/3}\wedge\overline{JC}$).

1) SISTEMA DE REACCIONES PLACA SOBRE VARILLA (COJINETE CON RESTRIC. AXIAL):

RESULTANTE $\equiv \overline{R}^{3/2} = X_B \overline{i}_0 + Y_B \overline{j}_0 + Z_B \overline{k}_0$

MOMENTO RESP. PTO B $\equiv \overline{M}_B^{3/2} = M_{By} \overline{j}_0 + M_{Bz} \overline{k}_0$

INCOGNITAS: $X_B, Y_B, Z_B, M_{By}, M_{Bz}$

2) REACCION DEL PLANO $O_1X_1Y_1$ SOBRE LA VARILLA ($\overline{R}^{1/2}$):

$\overline{R}^{1/2} = X_2 \overline{i}_0 + Y_2 \overline{j}_0 + Z_2 \overline{k}_0$ (APLICADA EN EL PTO A)

INCOGNITAS: X_2, Y_2, Z_2

3) SISTEMA DE REACCIONES DEL PLANO $O_1X_1Y_1$ SOBRE LADO CD:

RESULTANTE $\equiv \overline{R}^{1/3} = Z_3 \overline{k}_0$

MOMENTO RESPECTO AL PTO J $\equiv \overline{M}_J^{1/3} = M_J \overline{j}_0$

INCOGNITAS: Z_3, M_J

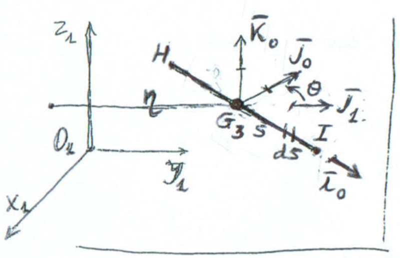
MOMENTO DE ESTE SIST. DE REACC. RESPECTO AL PTO A:

$$\overline{M}_A^{1/3} = \overline{M}_J^{1/3} + \overline{R}^{1/3} \wedge \overline{JA} \qquad (\overline{JA} = -2a\cos\varphi\, \overline{j}_0)$$

$$\overline{M}_A^{1/3} = M_J \overline{j}_0 + Z_3 \overline{k}_0 \wedge (-2a\cos\varphi\, \overline{j}_0) =$$

$$= M_J \overline{j}_0 + 2a\cos\varphi\, Z_3\, \overline{i}_0$$

4) SISTEMA DE FUERZAS DE ATRACCION DEL PLANO $O_1X_1Z_1$ SOBRE LA PLACA:



$$\overline{F}_{At}^{dm} = -k\, dm\, y_1^{dm}\, \overline{j}_1$$

$$dm = \frac{m}{a} ds, \quad y_1^{dm} = \eta + s\,\text{sen}\,\theta$$

RESULTANTE $\equiv \overline{F}_{At}$:

$$\overline{F}_{At} = -k\left(\int y_1^{dm}\, dm\right) \overline{j}_1 = -km\eta\, \overline{j}_1 =$$

$$= -km\eta\,(\text{sen}\,\theta\, \overline{i}_0 + \cos\theta\, \overline{j}_0)$$

MOMENTO DE $\overline{F}_{At}^{dm}$ RESPECTO AL PTO G_3:

$${}^{dm}\overline{M}_{G_3}^{At} = s\,\overline{i}_0 \wedge \left[-k\frac{m}{a} ds\,(\eta + s\,\text{sen}\,\theta)(\text{sen}\,\theta\, \overline{i}_0 + \cos\theta\, \overline{j}_0)\right] =$$

$$= -k\frac{m}{a}\cos\theta\; s\,(\eta + s\,\text{sen}\,\theta)\, ds\, \overline{k}_0$$

MOMENTO TOTAL RESPECTO AL PTO G_3:

$$\overline{M}_{G_3}^{At} = \int {}^{dm}\overline{M}_{G_3}^{At} = -k\frac{m}{a}\left[\cos\theta\,\eta\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} s\, ds + \cos\theta\,\text{sen}\,\theta\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} s^2\, ds\right]\overline{k}_0$$

$$\Rightarrow \overline{M}_{G_3}^{At} = -\frac{1}{12} k m a^2\, \text{sen}\,\theta\cos\theta\, \overline{k}_0$$

MOMENTO RESPECTO AL PTO A:

$$\overline{M}_A^{At} = \overline{M}_{G_3}^{At} + \overline{F}_{At} \wedge \overline{G_3A} \qquad \left(\overline{G_3A} = -\frac{3}{2}a\cos\varphi\,\overline{j}_0 - \frac{a}{2}\text{sen}\,\varphi\,\overline{k}_0\right)$$

$$\Rightarrow \overline{M}_A^{At} = \frac{1}{2}kma\eta\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\overline{i}_0 - \frac{1}{2}kma\eta\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\overline{j}_0 +$$

$$+ \left(\frac{3}{2}kma\eta\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi - \frac{1}{12}kma^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\right)\overline{k}_0$$

5) PARA EL SISTEMA COMPLETO:

$$\Sigma \overline{F}_{ext} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2mg\overline{k}_0 + \overline{F}_{At} + \overline{R}^{1/2} + \overline{R}^{1/3} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -km\eta\,\text{sen}\,\theta + X_2 = 0 & (1) \\ -km\eta\cos\theta + Y_2 = 0 & (2) \\ -2mg + Z_2 + Z_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Sigma \overline{M}_A^{Fext} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{M}_A^{At} + \overline{AG_2} \wedge (-mg\overline{k}_0) + \overline{AG_3} \wedge (-mg\overline{k}_0) + \overline{M}_A^{1/3} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\left(\overline{AG_2} = \frac{a}{2}\cos\varphi\,\overline{j}_0 + \frac{a}{2}\text{sen}\,\varphi\,\overline{k}_0\right)\left(\overline{AG_3} = \frac{3a}{2}\cos\varphi\,\overline{j}_0 + \frac{a}{2}\text{sen}\,\varphi\,\overline{k}_0\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}kma\eta\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi - 2mga\cos\varphi + 2a\cos\varphi\, Z_3 = 0 & (4) \\ -\frac{1}{2}kma\eta\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + M_J = 0 & (5) \\ \frac{3}{2}kma\eta\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi - \frac{1}{12}kma^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 0 & (6) \end{cases}$$

6) PARA LA VARILLA:

$$\sum \overline{M}_B^{EXT} = \overline{0} \Rightarrow \overline{M}_B^{3/2} + \overline{BA} \wedge \overline{R}^{1/2} + \overline{BG}_2 \wedge (-mg\overline{K}_0) = \overline{0}$$

COMO: $\overline{M}_B^{3/2} \cdot \overline{I}_0 = 0$, LA ECUACION PEDIDA ES:

$$\left(\overline{M}_B^{3/2} + \overline{BA} \wedge \overline{R}^{1/2} + \overline{BG}_2 \wedge (-mg\overline{K}_0) = \overline{0}\right) \cdot \overline{I}_0 \Rightarrow$$

$(\overline{BA} = -a\cos\varphi \overline{J}_0 - a \operatorname{sen}\varphi \overline{K}_0$, $\overline{BG}_2 = -\frac{a}{2}\cos\varphi \overline{J}_0 - \frac{a}{2}\operatorname{sen}\varphi \overline{K}_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mga\cos\varphi - a\cos\varphi Z_{12} + a \operatorname{sen}\varphi Y_2 = 0 \quad ⑦$$

7) COMBINACIONES DE ①,②,③,④,⑤,⑥ Y ⑦ DONDE SOLO APAREZCAN LAS COORD. GENERALIZADAS:

UNA DE ELLAS ES LA ⑥:

$$\boxed{\frac{3}{2} kma\eta \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - \frac{1}{12} kma^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0}$$

POR OTRA PARTE, DE ① RESULTA:

$$X_2 = km\eta \operatorname{sen}\theta$$

DE ②:

$$Y_2 = km\eta\cos\theta$$

DE ⑤:

$$M_J = \frac{1}{2} kma\eta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

DE ④:

$$Z_3 = mg - \frac{1}{4} km\eta\cos\theta \operatorname{tg}\varphi \qquad (\text{SI } \cos\varphi \neq 0)$$

LLEVANDO ESTA EXPRESION DE Z_3 A ③, SE OBTIENE:

$$Z_2 = mg + \frac{1}{4} km\eta\cos\theta \operatorname{tg}\varphi$$

AHORA, LLEVANDO LAS EXPRESIONES RECIEN OBTENIDAS DE Y_2 Y DE Z_{12} A ⑦, SE OBTIENE OTRA ECUACION DONDE SOLO INTERVIENEN LAS COORDENADAS GENERALIZADAS:

$$\boxed{3k\eta\cos\theta \operatorname{sen}\varphi - 2g\cos\varphi = 0}$$

Y YA NO HAY MAS ECUACIONES DE ESTE TIPO. (VER (*) AL FINAL)

8) EL CONTACTO UNILATERAL Y CON ROZAMIENTO DE COEFICIENTE f EN EL PUNTO A IMPLICA LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES PARA LA DETERMINACION DEL EQUILIBRIO:

$$Z_2 \geq 0$$

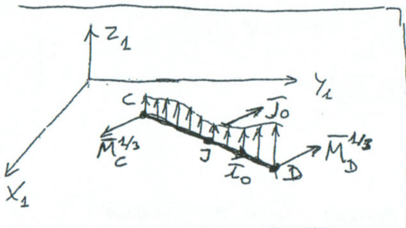
$$\sqrt{X_2^2 + Y_2^2} \leq f|Z_2|$$

CON LAS EXPRESIONES DE X_2, Y_2 Y Z_{12} DETERMINADAS EN EL APARTADO ANTERIOR, QUEDAN COMO SIGUE:

$$mg + \frac{1}{4} km\eta\cos\theta \operatorname{tg}\varphi \geq 0$$

$$|km\eta| \leq f \left| mg + \frac{1}{4} km\eta\cos\theta \operatorname{tg}\varphi \right|$$

POR OTRA PARTE, EL CONTACTO UNILATERAL (Y LISO) DE LA PLACA SOBRE EL PLANO $O_1X_1Y_1$, IMPLICA LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES:



$$Z_3 \geq 0$$

$$\overline{M}_D^{1/3} \cdot \overline{J}_0 \geq 0$$

$$\overline{M}_C^{1/3} \cdot \overline{J}_0 \leq 0$$

$\left(\overline{M}_D^{1/3} = \overline{M}_J^{1/3} + \overline{R}^{1/3} \wedge \overline{JD} = (M_J + \frac{a}{2} Z_3)\overline{J}_0\right.$;
$\left.\overline{M}_C^{1/3} = \overline{M}_J^{1/3} + \overline{R}^{1/3} \wedge \overline{JC} = (M_J - \frac{a}{2} Z_3)\overline{J}_0\right)$

LAS TRES INECUACIONES ANTERIORES QUEDAN COMO SIGUE:

$$mg - \frac{1}{4} km\eta\cos\theta \operatorname{tg}\varphi \geq 0$$

$$k\eta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + g - \frac{1}{4} k\eta\cos\theta \operatorname{tg}\varphi \geq 0$$

$$k\eta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - g + \frac{1}{4} k\eta\cos\theta \operatorname{tg}\varphi \leq 0$$

(*) NO SE HAN PLANTEADO CINCO ECUACIONES DE LA ESTATICA PARA LA VARILLA (SOLIDO $\boxed{2}$); SON LAS SIGUIENTES:

$(\sum \overline{F}^{EXT} = \overline{0}) \cdot \overline{I}_0$, $(\sum \overline{F}^{EXT} = \overline{0}) \cdot \overline{J}_0$, $(\sum \overline{F}^{EXT} = \overline{0}) \cdot \overline{K}_0$, $(\sum \overline{M}_B^{EXT} = \overline{0}) \cdot \overline{J}_0$, $(\sum \overline{M}_B^{EXT} = \overline{0}) \cdot \overline{K}_0$

EN CADA UNA DE ELLAS SOLO INTERVIENE UNA DE LAS CINCO INCOGNITAS DE CONTACTO: X_B, Y_B, Z_B, M_{BY}, M_{BZ}; POR LO TANTO COMBINANDOLAS LINEALMENTE NO ES POSIBLE OBTENER ALGUNA ECUACION EN LA CUAL NO APAREZCA NINGUNA DE ELLAS Y POR CONSIGUIENTE NO CONTRIBUYEN A LA RESOLUCION DEL APARTADO 7).